Tópicos de Física

Problemas

J. M. B. Lopes dos Santos
M. Fátima Mota
J. Fernando Mendes
M. Augusta Santos
M. Céu Marques

Departamento de Física
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
email: jlsantos@fc.up.pt.

14 de Outubro de 1999

Prefácio

Estes problemas fazem parte integrante do programa de Tópicos de Física, uma cadeira do primeiro ano, primeiro semestre, de várias licenciaturas da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto [1]. Destinam-se a ser utilizados em articulação com a notas das aulas teóricas[1]. São o resultado de contribuições de vários docentes. Embora estes problemas tenham sido redigidos especificamente para esta disciplina, muitas vezes sem recurso directo a qualquer fonte escrita, muitos são, naturalmente, semelhantes a problemas publicados. Não foi possível, nestas condições, determinar as respectivas fontes. As nossas desculpas, se algum crédito devido não é mencionado.

O objectivo destes problemas é desenvolver atitudes e aptidões de abordagem de questões reais, que ultrapassem o contexto académico de aplicação directa de conhecimentos adquiridos. A filosofia é que não adianta ensinar se o que se aprende é, apenas, resolver questões que nunca surgem fora do contexto do próprio ensino. No capítulo 4 reuniram-se alguns problemas que não têm mesmo relação directa com nenhuma parte da matéria das aulas teóricas. Esperamos, deste modo, ter dado uma pequena contribuição para a formação de licenciados com maior independência e espírito de iniciativa na abordagem de questões novas.

Este trabalho teve o apoio do Centro de Física do Porto, através da cedência de material informático.

Os autores

[1] Física, Física/Matemática Aplicada (Ramo Astronomia), Optoelectrónica e Lasers, Física e Tecnologia dos Materiais e Engenharia Geográfica

Fontes de informação

Para resolver certos problemas é necessário conhecer os valores de constantes físicas, de propriedades de materiais ou mesmo de características de corpos celestes. Propositadamente, esses valores não são dados no enunciado dos problemas. Os dados deverão ser obtidos consultando e aprendendo a conhecer as publicações onde se podem encontrar esses elementos. Indicam-se a seguir algumas das mais úteis.

- *Quadro periódico da Sargent-Welch.* É uma fonte riquíssima de informação sobre os elementos numa só folha. Todos os estudantes o devem possuir.

- *Science Data Book* ed R. M. Tennent, Oliver & Boyd, Longman Group. Um livro de bolso precioso, extremamente completo e muito acessível.

- *American Institute Of Physics Handbook* e *Handbook of Physics and Chemistry* são compilações muito completas mas pouco portáteis.

Índice Geral

Capítulo 1

Análise e Estimativas Dimensionais

Aulas

1. Para pintar uma sala cúbica de aresta L gasta-se uma quantidade X de tinta.

a) Qual a quantidade de tinta necessária para pintar uma sala com a mesma forma mas lados $2L$? (a espessura de tinta é a mesma, claro)

Uma esponja duplica de volume quando é mergulhada na água.

b) Como varia a dimensão linear da esponja?

2. O preço actual de 1g de ouro é de 2000 Esc. Escreva uma expressão que lhe permita calcular o preço p de um fio de ouro de comprimento l (medido em cm) e diâmetro d (medido em mm). Escreva a expressão de p no caso do diâmetro d ser medido em cm.
As duas expressões têm a mesma forma? Mostre que pode escrever uma expressão genérica da forma $p = kd^2l$ e determine o modo com k varia se variarem as unidades de d ou de l.

3. [5] A unidade astronómica *ua* é definida como a distância média da Terra ao Sol. O *parsec* é a distância a que um ângulo de $1''$ subtende um arco de uma ua. Determine os factores de conversão de parsec em ua, metro e ano–luz.

4. [6] Considere os triângulos rectângulos da fig.1. Certifique-se de que pode caracterizar univocamente um triângulo (ABC p.ex.), indicando a hipotenusa (c) e um dos ângulos (α). Aplicando argumentos dimensionais, verifique que a área , S_{ABC}, se pode escrever $S_{ABC} = c^2 f(\alpha)$. Repetindo o mesmo argumento relativamente aos triângulos menores, deduza o teorema de Pitágoras : $c^2 = a^2 + b^2$.

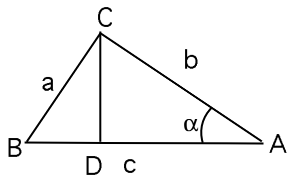

Figura 1.1:

5. Considere uma função $f(x)$ relativamente à qual se sabe que, para todo o x e para todo o λ reais, $f(x) = f(\lambda x)$. Dado um valor arbitrário do argumento x podemos escolher o valor de λ, $\lambda = 1/x$ e concluir, aplicando a igualdade anterior, que $f(x) = f(1)$, ou seja, a função toma em qualquer ponto o mesmo valor que tem em $x = 1$. Trata-se pois de uma função constante.

a) Que conclusões pode tirar para funções que têm uma das seguintes propriedades?

$$\begin{array}{rrcl} \text{i)} & f(\lambda x) & = & \lambda^d f(x) \\ \text{ii)} & f(\lambda x, \lambda^2 y) & = & f(x,y) \\ \text{iii)} & f(\lambda x, \lambda^2 y) & = & \lambda f(x,y) \end{array}$$

b) Suponha que o comprimento da geratriz g de um cone é dado como função da altura h do cone e da área σ da base, $g = f(h, \sigma)$. Mostre que se trata de um função com a propriedade iii).

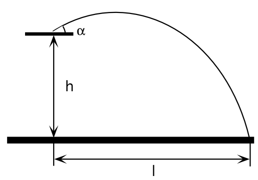

Figura 1.2:

6. Um grave é disparado de uma torre de altura h e cai no solo a uma distância l da base da torre (fig.1.2).

a) Qual das seguintes equações pode exprimir correctamente a dependência de l nas seguintes variáveis: velocidade inicial (v_0), ângulo de lançamento com a horizontal (α), altura da torre (h) e aceleração da gravidade(g)?

$$\begin{array}{rrcl} \text{i)} & l & = & v_0^2 g \text{sen}\alpha + \sqrt{v_0^2 g^2 \text{sen}^2\alpha + 2hg} \\ \text{ii)} & l & = & \dfrac{v_0^2}{2g}\text{sen}2\alpha \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{v_0^2 \text{sen}^2\alpha}{2hg}}\right) \\ \text{iii)} & l & = & \dfrac{v_0^2}{2g}\text{sen}2\alpha \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2hg}{v_0^2 \text{sen}^2\alpha}}\right) \\ \text{iv)} & l & = & \dfrac{v_0^2}{2g}\text{sen}2\alpha \left(1 + \sqrt{h + \dfrac{v_0}{g} + \text{sen}^2\alpha}\right) \end{array}$$

b) Que pode deduzir sobre a dependência de l nestes parâmetros usando *apenas* análise dimensional?

7. Existe uma lei da Hidrodinâmica que se traduz na equação

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = constante \tag{1.1}$$

em que p é a pressão do fluido num determinado ponto e v a sua velocidade. Se não soubesse o que significa ρ, como poderia usar a análise dimensional para facilmente recordar o seu significado físico?

8. Uma massa colocada na extremidade de uma mola elástica de constante k pode oscilar em torno de uma posição de equilíbrio.

a) Além de k de que outros parâmetros poderia depender o período de oscilação ?

b) Mostre, por análise dimensional, que é possível determinar toda a dependência do período nos parâmetros do problema se considerar desprezável a massa da mola.

c) Suponha que a força da mola contém um termo não linear, $F = -kx - \lambda x^3$. Neste caso, que pode concluir sobre o período de oscilação por análise dimensional?

9. Num sólido caracterizamos as forças elásticas, que surgem em virtude das deformações , pelo módulo de Young. Num fluido não existem posições de equilíbrio definidas para cada pequena porção de material. Mas variações de densidade resultam em forças de pressão entre as diferentes partes do fluido. Isso torna possível a propagação do som. Habitualmente utiliza-se o módulo de rigidez B, definido por

$$B = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} \tag{1.2}$$

para relacionar as variações de volume V e pressão P.

a) De que outro parâmetro do fluido poderá depender a velocidade do som v_s ? Qual a dependência funcionalde v_s nestes dois parâmetros?

b) Supondo que a propagação do som num gás se processa a temperatura constante obtenha uma estimativa para a velocidade do som no ar em condições normais de pressão e temperatura , tratando este como um gás perfeito. [*Nota*: A suposição de temperatura constante não é correcta mas também foi feita por Newton].

10. Considere o circuito da figura 3. Se fechar o circuito o condensador descarregará através da resistência. Obtenha uma estimativa dimensional do tempo que demora a descarga ($R = 1M\Omega$,$C = 100pF = 100 \times 10^{-12}F$)

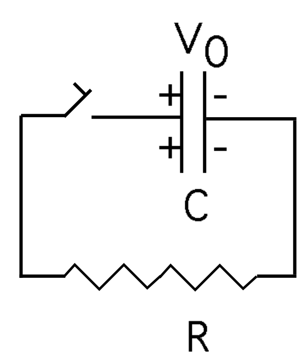

Figura 1.3:

11. Partindo das constantes fundamentais e, $\hbar$ e m (massa do electrão), construa por análise dimensional uma *velocidade*, uma *frequência* e um *tempo*. Obtenha estimativas da ordem de grandeza da velocidade, do período e da frequência de rotação do electrão no estado fundamental do átomo de Bohr. Localize a frequência obtida no espectro da radiação electromagnética.

12. O mesão μ^- é uma partícula com carga igual à do electrão mas com massa cerca de 200 vezes maior e forma com um protão um átomo muónico.

a) Calcule a energia e o valor do raio de Bohr para o estado fundamental do átomo muónico.

b) As riscas da série de Balmer do átomo de hidrogénio (transições dos níveis $n_i = 3, 4, 5, ...$ para o nível $n_f = 2$) têm comprimentos de onda na zona do visível dados por

$$\frac{1}{\lambda_i} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{1.3}$$

onde R_H é a constante de Rydberg. Quais os comprimentos de onda da *série de Balmer* do átomo muónico?

13. Considere um sistema de unidades em que o padrão de velocidade é a velocidade da luz no vazio. Isto é, nestas unidades uma velocidade é representada pela razão v/c expressa em qualquer sistema. As velocidades são adimensionais e a velocidade da luz vale 1 neste sistema.

a) Mostre que neste sistema tempos e comprimentos tem a mesma dimensão e podem ser medidos na mesma unidade. O que é um comprimento de um segundo? E um intervalo de tempo de um metro?

b) Mostre, também, que massa e energia tem a mesma dimensão. Qual é a forma da relação de Einstein $E = mc^2$ neste sistema?

c) Usando como unidades fundamentais o Joule para energia e o segundo para o tempo quanto vale a massa do electrão neste sistema?

14. Os físicos de altas energias recorrem frequentemente a um sistema de unidades em que $c = 1$ e $\hbar = 1$.

a) Mostre que a mecânica passa a ter apenas uma unidade fundamental, habitualmente escolhida como sendo a energia.

b) Quais são as dimensões das grandezas tempo, comprimento, massa, velocidade e força neste sistema?

c) Usando como unidade de energia o GeV (10^9 eV) quanto valem as unidades SI de tempo, comprimento e massa neste sistema?

Testes e Exames

15.

a) A frequência de vibração de uma corda depende da força de tracção F a que ela está sujeita, da sua massa, M, e do seu comprimento, L. Qual das seguintes fórmulas pode representar essa frequência ? (Justifique a sua escolha)

$$\text{a)} \qquad f = \sqrt{\frac{F}{M}L} \tag{1.4}$$

$$\text{b)} \qquad f = \frac{F}{M}L \tag{1.5}$$

$$\text{c)} \qquad f = \sqrt{\frac{F}{ML}} \tag{1.6}$$

$$\text{d)} \qquad f = \sqrt{\frac{FL}{M}} \tag{1.7}$$

$$\text{e)} \qquad \text{nenhuma} \tag{1.8}$$

b) Se na superfície de um líquido imaginarmos uma linha a separar a superfície em duas partes, cada uma delas exerce uma força sobre a outra proporcional ao comprimento da linha, $\Delta F = \gamma \Delta l$. A constante de proporcionalidade, γ é a tensão superficial do líquido. Uma bola de sabão é mantida por uma diferença de pressão entre o seu interior e exterior que depende da tensão superficial e das dimensões da bola. Como varia essa diferença de pressão com o raio da bola?

16. A distância entre duas galáxias do nosso universo aumenta a uma velocidade proporcional à distância entre elas:

$$v \equiv \frac{dr(t)}{dt} = Hr(t) \tag{1.9}$$

A constante de proporcionalidade é a constante de Hubble cujo valor, actualmente aceite $H = 2.8 \times 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$. Pode mostrar-se que, se a densidade de massa do universo exceder um valor crítico, ρ_c, a expansão parará e seguir-se-á uma contracção. Esta densidade é determinada pelo balanço entre a atracção gravítica (G) e a velocidade de expansão caracterizada pela constante de Hubble.

a) Obtenha, justificando, as dimensões da constante de gravitação universal G e de H.

b) Faça uma estimativa de ρ_c. Exprima o seu valor em termos de número de átomos de hidrogénio por dm^3.

17. O ião He^+ tem apenas um electrão , como o átomo de hidrogénio, mas tem uma carga nuclear duas vezes superior ($Z = 2$). Justifique com cuidado as respostas às seguintes perguntas.

a) Qual a relação entre o tamanho deste ião e o do átomo de hidrogénio?

b) Qual é a energia de ionização (adicional) deste ião ?

18. Se uma camada de fluido de espessura l estiver comprendida entre duas placas sólidas e uma delas se mover relativamente à outra com velocidade V o fluido exerce sobre ela uma força *por unidade de área* dada por

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{V}{l} \tag{1.10}$$

em que η é a viscosidade do fluido.

a) Determine as dimensões da viscosidade η.

b) Se uma esfera sólida se mover num fluido viscoso a baixa velocidade fica sujeita a uma força retardadora proporcional à viscosidade do liquído e dependente da velocidade e do raio da esfera. Determine a dependência da força nestas duas quantidades.

19.

a) Mostre que a introdução da constante $\hbar$ por Bohr na teoria do átomo de Rutherford permite a definição de uma escala atómica de distâncias. Qual é essa escala?

b) Mostre que essa escala permite também a definição de escalas típicas de energia e velocidade. Que valores têm?

c) Obtenha uma estimativa para um valor típico de constante de força de uma ligação molecular.

20. Um corpo cai de uma altura h dentro de um fluido. A velocidade inicial é nula.

a) Se as forças de atrito puderem ser desprezadas mostre *por análise dimensional* que o tempo de queda é (α constante adimensional)

$$t = \alpha\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{1.11}$$

e não depende da massa do corpo.

b) A força de atrito é dada por $F = -\Gamma v^2$ (F , componente da força na direcção da velocidade). Quais são as dimensões de Γ?

c) Prove que na presença da força de atrito pode concluir que o tempo de queda tem a forma

$$t = \sqrt{\frac{h}{g}} f\left(\frac{\Gamma h}{m}\right) \tag{1.12}$$

em que $f(x)$ é uma função não determinada, sem parâmetros dimensionais.

d) Para h grande o corpo cai na maior parte do percurso com velocidade uniforme (a velocidade terminal). Exprima essa velocidade em termos dos parâmetros referidos. Obtenha uma aproximação para o tempo de queda nesse regime. Que pode concluir sobre o comportamento da função $f(x)$?

21. O protão e o neutrão são partículas de massa semelhante ($m_p \approx m_n$) que se atraem através da interacção nuclear e formam um sistema ligado, o deuterão. A energia de ligação (energia necessária para separar as duas partículas até distância infinita) é de 2.225 MeV.

a) Suponha que a força nuclear entre as duas partículas têm uma forma análoga à força de Coulomb,

$$F(r) = \frac{g_n g_p}{r^2} \tag{1.13}$$

em que g_n e g_p as cargas nucleares das duas partículas, caracterizam esta interacção do mesmo modo que a carga eléctrica caracteriza a interacção electromagnética. Supondo que $g_n = g_p \equiv g$, determine as respectivas dimensões e obtenha, por análise dimensional, uma expressão para a energia de ligação.

b) Mostre que g^2 tem as mesmas dimensões e'^2 e estime a partir da energia de ligação do deuterão a razão g^2/e'^2.

c) Obtenha uma estimativa numérica da distância entre o protão e o neutrão no deuterão.

22.

a) Uma esfera de massa M e raio R roda com uma velocidade angular, (ângulo de rotação por unidade de tempo), ω. Obtenha uma expressão para uma estimativa dimensional da sua energia de rotação. Estime a energia de rotação da Terra em torno do seu eixo.

b) Uma teoria quântica da Gravitação deverá envolver as três constantes fundamentais G, $\hbar$ e c. Essa teoria tem escalas características de comprimento, tempo e massa. Determine as suas expressões em termos das constantes referidas e calcule os respectivos valores em unidades SI.

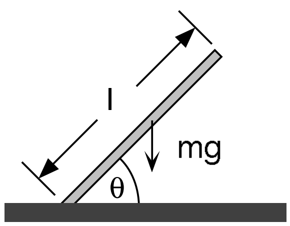

Figura 1.4:

c) Uma vara de comprimento $l = 10$ m, e massa 50 Kg, apoiada no chão numa extremidade é largada de um ângulo de 45^0 com a horizontal. Faça uma estimativa dimensional do tempo que demora a cair.

23. Uma barra metálica pode ter oscilações longitudinais de comprimento. As propriedades elásticas da barra são caracterizadas pelo seu módulo de Young, E.

a) Mostre que o período de vibração não pode ser determinado apenas por E e pela massa volúmica ρ. Sabendo que ele não depende do raio como varia com o comprimento?

b) Estime a frequência de vibração longitudinal de uma barra de cobre cilíndrica de dois metros de comprimento.

24. A força que um líquido de viscosidade η exerce sobre uma esfera de raio R que se move no seu interior com velocidade u, é dada pela lei de Stokes

$$F = 6\pi\eta R u \tag{1.14}$$

a) Determine as dimensões do coeficiente de viscosidade.

b) Um disco sólido em vibração em torno do seu eixo, transmite movimento ao líquido que está por cima dele apenas até uma distância λ, que depende da viscosidade do líquido, da sua massa volúmica ρ e do período de vibração do disco, T. Determine a dependência de λ nestas grandezas.

25. Um gota de água ao cair na atmosfera, fica sujeita, além do seu peso, a uma força de atrito do ar cujo valor depende da sua velocidade. Sabe-se que para baixas velocidades a força de atrito é proporcional ao módulo da velocidade (atrito de Stokes: $F_S \propto v$) e que para altas velocidades a força de atrito é proporcional ao quadrado do módulo da velocidade (atrito de Newton: $F_N \propto v^2$). A força de atrito depende ainda do raio da gota (R), da massa volúmica, (ρ), e viscosidade, (η), do ar.

a) Obtenha expressões para F_S e F_N por análise dimensional.

b) As gotas movem-se com velocidade terminal constante (v_t), quando a grandeza da força de viscosidade iguala o seu peso. Para gotas de núvens com $R \approx 10^{-5}\,\mathrm{m}$, verifica-se que $v_t \propto R^2$ e que para gotas de núvens com $R \approx 1\,\mathrm{mm}$ $v_t \propto \sqrt{R}$.

Mostre que estes regimes correspondem às situações de atrito de Stokes e de Newton, respectivamente. Obtenha uma estimativa numérica para a velocidade de uma gota de chuva.

26. Uma película de água e sabão suportada num aro de arame circular de raio r pode vibrar em torno da sua configuração de equilíbrio. A frequência de vibração, f , é determinada pelo raio, r, pela massa por unidade de área da película, μ, e pela tensão superficial, γ, que tem as dimensões de uma força a dividir por um comprimento.

a) Determine, por análise dimensional a dependência de f nas grandezas referidas.

b) A película é uma mistura de água e sabão e tem uma massa volúmica igual à da água. Para uma película de espessura $d = 0.5\,\mathrm{mm}$ e um raio r de 4 cm a frequência de vibração é da ordem de $f = 10\,\mathrm{Hz}$. Estime o valor da tensão superficial.

27. Um corpo encontra-se inicialmente em repouso a uma distância do Sol igual ao raio da órbita da Terra. Suponha que está sujeito apenas ao campo gravítico do Sol.

a) O tempo que demora a cair no Sol não depende da massa do corpo. Justifique.

b) Usando análise dimensional obtenha uma estimativa numérica, em dias, do tempo que o corpo demora a cair no Sol (suponha que pode considerar o raio do Sol como nulo, isto é, o tempo que demora a atingir a superfície do Sol é identico ao tempo que demoraria a atingir o seu centro.

Capítulo 2

Modelos Determinísticos

Aulas

28. Use uma calculadora para estudar numericamente o valor da derivada de sen(x) em $x = 0$. Use valores de Δx de $0.5, 0.1, 0.01, 0.001$.

29. O integral $\int_0^{\pi/2} dx \text{sen}(x)$ calcula-se analiticamente com grande facilidade pois a função sen(x) é a derivada da função $-\cos(x)$. Neste problema pretende-se fazer uma estimativa númerica desse integral usando uma calculadora.

a) Obtenha estimativas, por defeito e por excesso, para este integral através do cálculo da função integranda em 5 e 10 pontos do intervalo de integraç ao. Compare com o valor exacto do integral.

30. A tabela 2.1 indica valores das velocidades instantâneas de um automóvel nos instantes indicados. Faça uma estimativa do deslocamento total e da velocidade média no percurso em causa.

t (s)	0	1.9	3.3	4.6	6.2	8.3	10.3	13.2	16.7
v (m s^{-1})	0	13	18	22	27	31	36	40	44

Tabela 2.1: Dados de aceleração de um Toyota MR2 [2]

31. A definição de derivada permite escrever, para uma qualquer função, $f(a + x) = f(a) + f'(a)x + \epsilon x$ em que $\epsilon \to 0$ quando $x \to 0$. Assim para x "pequeno" é frequentemente uma aproximação útil deprezar o termo proporcional a ϵ.

a) Verifique que este método conduz às seguintes aproximações:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x; \qquad \frac{1}{a-x^2} \approx \frac{1}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2; \qquad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (2.1)$$

b) Investigue numericamente estas aproximações.

32. Uma partícula de massa m que se desloca a baixa velocidade num fluido está sujeita a uma força de atrito de Stokes

$$\boldsymbol{F}_s = -\gamma \boldsymbol{v} \qquad (2.2)$$

Seja v_0 a velocidade inicial da partícula.

a) Mostre que, com os parâmetros do problema, pode definir um tempo característico que é independente da velocidade inicial. Que significado físico terá esse tempo?

b) Determine a dependência da distância de paragem da partícula nos parâmetros do problema.

c) Mostre que, usando um reescalonamento apropriado de tempos e distâncias, a equação de movimento deste problema pode ser reduzida à forma universal

$$\frac{dv}{dt} = -v \qquad (2.3)$$

com a condição inicial $v(0) = 1$

33. Aplique à equação do problema anterior o método de integração de Euler.

a) Designando por $v_n \equiv v(n\Delta t)$, em que Δt é o passo de integração , mostre que a solução se pode escrever na forma

$$v_n = (1 - \Delta t)^n \qquad (2.4)$$

b) Mostre que, tomando o limite $\Delta t \to 0$ com $n \to \infty$, se obtém, para solução da equação de movimento reescalonada,

$$v(t) = e^{-t} \qquad (2.5)$$

Qual é a solução nas unidades iniciais?

34. Suponha que a partícula dos problemas anteriores está também sujeita ao peso $p = -mg$ e se move na vertical partindo de velocidade nula. Que interpretação tem o tempo característico do problema, τ? Se reescalonar a equação de movimento de modo a que o tempo característico seja $\tau = 1$, sendo $m = 300g$ e $\gamma = 1\,\mathrm{Kg\,s}^{-1}$ que valor deve usar para g? Escreva as relações de recorrência para este caso e calcule-as numéricamente usando $\Delta t = .2$ desde $t = 0$ até $t = 2$. Represente gráficamente a variação de velocidade com o tempo.

35. O sistema representado no problema 33 tem espaço de fase de duas dimensões (x, v). Represente esquemáticamente algumas trajectórias correspondentes a diferentes condições iniciais (por exemplo $x = 0, \pm 1; v = 0, \pm 1$). Note que é possível, por inspecção das trajéctorias, determinar a distância que apartícula percorre até parar. Tente também obter uma representação esquemática de várias trajectórias no espaço de fase do problema 34.

36. Considere o seguinte modelo muito simplificado para uma reacção de fissão nuclear em cadeia. Um núcleo desintegra-se quando captura um neutrão. Sendo U o número de núcleos e n o de neutrões no volume de reacção, a taxa de decaímentos deve ser proporcional a U e a n

$$\frac{dU}{dt} = -k_1 U(t) n(t) \tag{2.6}$$

Cada desintegração liberta um certo número de neutrões. Alguns são capturados por outros núcleos, absorvidos por moderadores, ou escapam-se do reactor. Mas podemos supor que, em média, por cada desintegração, α neutrões ficam disponíveis para novas reacções. Assim,

$$\frac{dn}{dt} = -k_1 U(t) n(t) + \alpha(-\frac{dU}{dt}) = -k_1(1-\alpha) U(t) n(t) \tag{2.7}$$

Estas equações descrevem um sistema dinâmico com um espaço de fase com duas variáveis (U, n) (ambas positivas por natureza).

a) Estude as trajectórias no espaço de fase para $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$.

b) Mostre que as trajectórias no espaço de fase são linhas rectas.

c) Mostre que os estados estacionários ou têm $U = 0$, ou $n = 0$, excepto se $\alpha = 1$. Determine as condições que devem satizfazer os valores iniciais $U(0)$ e $n(0)$ para conduzir a cada um dos tipos de estados finais (desaparecimento dos núcleos ou dos neutrões).

37. Consulte uma tabela de uma tabela de dados astronómicos (por exemplo *Science Data Book* pag. 76 [3])

a) Determine a razão v_a/v_p entre os valores mínimo e máximo da velocidade orbital da terra.

A unidade astronómica (ua) é definida como o comprimento do semieixo maior da órbita da terra.

b) Usando como unidade de distância a ua e de tempo o período da órbita terrestre, que valores têm v_a e v_p nestas unidades?

38. Exprima os semieixos maiores, a, das órbitas dos planetas do sistema solar em ua e os períodos T em anos.

a) Faça uma representação gráfica a em função de T.

b) A terceira lei de Kepler, na teoria de Newton, tem a forma $a^3/T^2 = GM_\odot/4\pi$. Mostre que esta lei implica que o gráfico anterior, com escalas logarítmicas, corresponde a uma recta. Faça essa representação e meça o declive da recta e ordenada na origem e relacione-as com os parâmetros da lei de Kepler.

39. A expansão do Universo, é caracterizada pela constante de Hubble H. Duas galáxias a uma distância $r(t)$ afastam-se um da outra a uma velocidade $v(t) \equiv dr(t)/dt = H(t)r(t)$. Note-se que a constante de Hubble depende do tempo. Se a velocidade de expansão não variar, H(t) deverá diminuir no tempo já que a distância entre as galáxias aumenta. O valor presente (tomemos $t = 0$) é $H_0 \equiv H(0) = 2.8 \times 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$. Escolhamos um origem arbitrária. (A nossa galáxia por exemplo). Uma galáxia a uma distância $r(t)$ da nossa está sujeita à atração gravítica de toda a massa M contida contida numa esfera de raio $r(t)$.

a) Mostre que o princípio de conservação de energia mecânica aplicado a essa galáxia conduz à equação de movimento

$$\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 = k + \frac{2GM}{r(t)} \tag{2.8}$$

(note que M *não depende do tempo*).

b) O valor da constante k pode ser calculado em termos dos valores actuais $(t = 0)$ da distância entre as galáxias, r_0, de H_0 e da actual densidade de massa do Universo ρ_0. Mostre que a equação de movimento se pode reduzir à forma

$$\left(\frac{dr(t)}{dt}\right)^2 = H_0^2 r_0^2 (1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}) + H_0^2 r_0^2 \frac{\rho_0}{\rho_c}\frac{r_0}{r(t)} \tag{2.9}$$

Determine o valor da densidade crítica ρ_c. Note que, se $\rho_0 > \rho_c$, a velocidade de expansão cairá a zero para um valor finito de $r(t)$ o que significa que a expansão parará e será seguida de uma contracção.

c) Por reescalonamento apropriado das escalas de tempo e distância a equação pode ser reduzida à forma

$$\left(\frac{dR(\tau)}{d\tau}\right)^2 = (1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}) + \frac{\rho_0}{\rho_c}\frac{1}{R(\tau)} \tag{2.10}$$

com a condição $R(0) = 1$ (instante presente). Tomando $\rho = \rho_c$, integre esta equação pelo método de Euler usando $\Delta t = -.1$ (para o passado) e mostre que, neste modelo o Big Bang ocorreu há um tempo da ordem de $.7/H_0$. Calcule este tempo em anos.

Testes e exames

40. A tabela seguinte reproduz valores da densidade da atmosfera em função da altitude:

Altitude m	Densidade Kg m^{-3}
0	1.225
1000	1.112
2000	1.007
3000	0.909
4000	0.819
5000	0.736
6000	0.660
7000	0.590
8000	0.526
9000	0.467
10000	0.414

a) Obtenha uma estimativa da massa de um coluna de ar de base 1 m^2 e 10 Km da altura.

b) Note que a densidade decresce com a altitude. Discuta se a sua estimativa é por defeito ou excesso. Mostre, em qualquer caso, como poderia encontrar dois valores, um superior e um inferior, ao valor correcto da massa.

41. Num dos problemas foi demonstrada a seguinte relação entre a excentricidade de uma órbita e e a velocidade no periélio

$$e = \frac{v_P^2}{v_c^2} - 1 \tag{2.11}$$

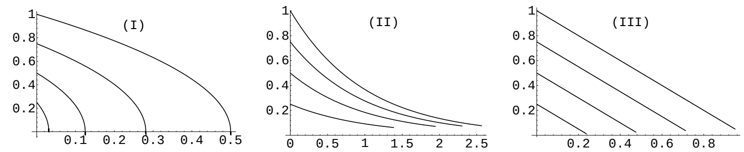

Figura 2.1:

em que v_c é a velocidade correspondente ao movimento circular que passa pelo mesmo ponto.

a) Para um satélite da Terra com $e = 0.2$ e distância de aproximação máxima da Terra de 18 000 Km quais são os valores da velocidade no periélio e no afélio?

b) Na sua passagem no periélio pretende-se aumentar a velocidade do satélite (na direcção do seu movimento) de modo a que este saia da órbita terrestre e se afaste para sempre da Terra. Qual é o menor valor de velocidade para o qual isso acontecerá?

42. A equação de movimento de uma partícula que se move a uma dimensão sujeita a uma força de atrito de Coulomb é

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma \qquad (\text{para } v > 0) \tag{2.12}$$

a) Determine as dimensões do coeficiente de atrito γ. Mostre, por análise dimensional, que a distância de paragem é proporcional à energia cinética inicial.

b) Escreva as relações de recorrência que concretizam o método de Euler para a determinação de $v(t)$ dado o valor de γ e da velocidade inicial. Mostre que o resultado que obtém descreve um movimento uniformemente retardado e é portanto exacto.

c) Os três gráficos da fig.2.1 mostram trajectórias no espaço de fase (x, v) correspondentes a três equações de movimento com leis de atrito diferentes (escritas para $v > 0$ apenas):

$$\text{i)} \qquad \frac{dv}{dt} = -\gamma_1 \tag{2.13}$$

$$\text{ii)} \qquad \frac{dv}{dt} = -\gamma_2 v \tag{2.14}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{dv}{dt} = -\gamma_3 v^2 \tag{2.15}$$

$$\tag{2.16}$$

Todas as trajectórias começam em $x = 0$ com diferentes velocidades iniciais. Determine a que tipo de lei de atrito corresponde cada uma das figuras justificando cuidadosamente. Qual das três leis não dá uma distância de paragem finita? Justifique.

43. Considere uma órbita de um planeta em torno do Sol.

a) Seja A(t) a área varrida pelo vector de posição do planeta, com origem no Sol. Enuncie e lei das áreas e mostre que ela lhe permite escrever para o período da órbita

$$T = \frac{\text{área da elipse}}{(dA/dt)} \tag{2.17}$$

em que a área varrida por unidade de tempo dA/dt pode ser calculada em qualquer ponto da órbita.

b) Mostre que no periélio

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} v_P r_P \tag{2.18}$$

c) Usando a relação préviamente deduzida $e = v_P^2/v_c^2 - 1$, (e a excentricidade e v_c a velocidade de uma órbita circular de raio r_P) e os resultados anteriores prove a terceira lei de Kepler, isto é $T^2/a^3 =$ constante, em que a é o semieixo maior da elipse e a constante só depende da massa do Sol e de constantes fundamentais.

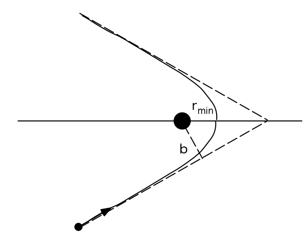

Figura 2.2:

44. Um corpo de massa m tem uma órbita aberta (hiperbólica) sob acção de da atracção gravítica de uma estrela de massa M ($M >> m$ e a estrela pode ser considerada imóvel). Para grandes distâncias da estrela o movimento é praticamente rectilíneo. A órbita pode ser caracterizada por dois parâmetros, v_∞, a velocidade limite para $r \to \infty$, e b (ver figura), o parâmetro de impacto.

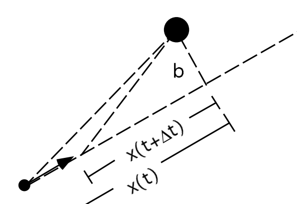

Figura 2.3:

a) A energia total do corpo (cinética mais potencial gravítica) pode escrever-se como

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \tag{2.19}$$

Justifique esta afirmação .

b) Atendendo a que, para grandes distâncias da estrela, o movimento é praticamente rectilíneo, exprima a área varrida pelo vector de posição do corpo por unidade de tempo, dA/dt, em termos de b e v_∞

c) Exprima a distância de aproximação máxima à estrela, r_min e a velocidade máxima da órbita v_0, em termos dos parâmetros v_∞ e b.

45. De acordo com a Mecânica Newtoniana um objecto escapa-se da atracção gravítica de um corpo de massa M e raio R se tiver uma velocidade superior à velocidade de escape v_e, que depende de M, de R e da constante de gravitação G.

a) Determine, usando análise dimensional, a dependência de v_e nos parâmetros referidos.

b) Nenhum objecto pode ter velocidade superior à da luz. Estime o raio que o "nosso" sol deveria ter para que nenhum objecto se possa escapar da sua atracção gravítica.

46. O António afirmou que se soubesse a distância e velocidade de um corpo à estrela que ele orbita, num único ponto, poderia dizer se a órbita era aberta ou fechada. A Rita respondeu que tinha que saber a massa da estrela e do corpo. Qual tinha razão ? Ou nenhum tinha? Justifique a sua resposta explicando sucinta, mas cuidadosamente, o que são órbitas abertas e órbitas fechadas, que critério ou critérios permitem determinar o caracter de um órbita e porque razão concorda, ou discorda, das afirmações acima referidas.

47.

a) A órbita do satélite Tiros 1, da Terra, tem $a = 7094$ km e $e = 0.004$. A área descrita, por unidade de tempo, pelo vector de posição deste satélite (em relação á Terra) é $26 \times 10^3 km^2 s^{-1}$. Determine o período do movimento do satélite e a sua velocidade no apogeu (ponto da órbita mais distante da Terra).

b) Prove que a energia de um planeta (massa m_p), numa órbita fechada em torno do Sol pode ser escrita na forma:

$$E = -\frac{GMm_p}{2a},$$

onde a designa o semi-eixo da elipse e M a massa do Sol. (*Sugestão*: Recorde a relação $v_p^2/v_c^2 = 1 + e$, sendo v_c, velocidade do movimento circular de raio r_p e e a excentricidade da elipse.

48. A equação de movimento de uma partícula que se move a uma dimensão sujeita a uma força de atrito pode ter uma das duas formas

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\Gamma}{m} \equiv -\gamma \qquad \text{(para } v > 0\text{)} \tag{2.20}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\Gamma'}{m} v \equiv -\gamma' v \tag{2.21}$$

a) Determine as dimensões dos coeficientes γ e γ'.

b) Para uma dada velocidade inicial, v_0, existe em cada um destes problemas uma escala de tempo. Encontre, por análise dimensional, a dependência dessas escalas na velocidade inicial em cada um dos casos.

c) Considere a equação genérica

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma'' v^{\alpha} \qquad \text{(para } v > 0\text{)} \tag{2.22}$$

Mostre que para $\alpha > 1$ a escala de tempo aumenta à medida que a velocidade diminui. Como interpreta este resultado?

49. Um satélite geoestacionário tem uma órbita circular em torno da Terra com período de 24 horas, mantendo-se sempre na vertical do mesmo lugar (sobre o equador).

a) A que altitude?

b) Calcule a variação de energia (cinética mais potencial gravítica) por unidade de massa, de um tal satélite entre o estado inicial, em repouso à superfície da Terra, e o estado final na órbita geoestacionária (se não resolveu a alínea a) tome o raio da órbita como 40 000 Km).

50. Num dos problemas das aulas TP referiu-se um modelo de reacção nuclear em que o número de núcleos radioactivos $U(t)$ e o número de neutrões $n(t)$ variam de acordo com as equações

$$\frac{dU}{dt} = -k_1 U(t) n(t) \tag{2.23}$$

$$\frac{dn}{dt} = -k_1 (1-\alpha) U(t) n(t) \tag{2.24}$$

a) Escreva as relações de recorrência do método de Euler para este problema.

b) Estas equações implicam que $(\alpha - 1)U(t) + n(t) = \text{const}$, não varia no tempo. Mostre que a integração pelo método de Euler satizfaz esta lei de conservação.

51. A produção de calor no interior de um tubo cilíndrico oco conduz a uma variação de temperatura em função da distância ao eixo do cilindro r, dada pela seguinte equação:

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{\alpha}{r}$$

a) Escreva a relação de recorrência de Euler para a equação anterior.

b) Mostre que o método de Euler, com um passo Δr dá para a diferença de temperatura entre $r = b$ e $r = a$,

$$T(b) - T(a) = -\alpha\frac{\Delta r}{a}\left(1 + \frac{1}{1+\Delta r/a} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)\Delta r/a}\right)$$

onde $n = (b-a)/\Delta r$.

52. Imagine um satélite da Terra numa órbita circular de raio R_1. No ponto A a sua velocidade é aumentada na *direcção do movimento*, por acção de foguetes, passando o satélite a mover-se na órbita (elíptica) entre A e B. Em B a velocidade é de novo aumentada *na direcção de movimento* e o satélite passa para a órbita circular de raio R_2.

a) Represente esquematicamente a órbita que resultaria se os foguetes não fossem de novo accionados em B. Identifique na figura o apogeu e perigeu dessa órbita. Exprima a excentricidade dessa órbita em termos de R_1 e R_2.

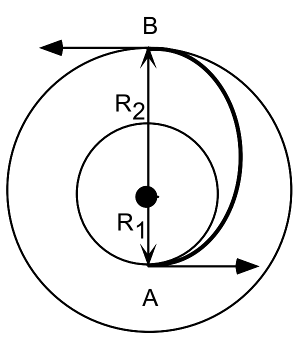

Figura 2.4:

b) Calcule o tempo que o satélite passa na órbita de transferência (entre A e B) se $R_1 = 8000$ km e $R_2 = 20000$ km.

c) Mostre que o aumento de velocidade a imprimir em A é dado por:

$$\Delta v_A = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right)$$

53. Na figura, estão representadas duas órbitas possíveis no campo gravítico do Sol.

a) A lei das áreas implica que a área varrida por unidade de tempo na órbita 1 é igual à da órbita 2? Justifique.

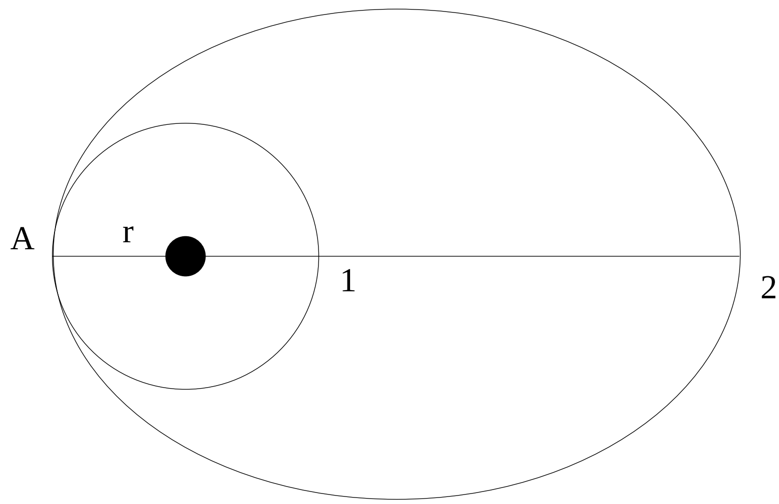

Figura 2.5:

b) Sendo v_1 e v_2 as velocidades de duas órbitas em A (ponto de menor distância ao Sol) verifica-se a igualdade, $v_1^2/R_1 = v_2^2/R_2$ em que R_1 e R_2 são os raios de curvatura das órbitas em A. Mostre que para um corpo com uma velocidade igual à velocidade de escape o raio de curvatura em A é $2r$

c) Considere uma órbita circular de raio $2r$ que passe por A. Será uma órbita possível no campo gravítico do Sol? Porquê?

54. Considere uma reacção química em que duas moléculas A e B dão origem a uma C que por sua vez se pode dissociar em A e B, $A + B \leftrightarrow C$. Sendo N_A, N_B e N_C a concentração das três espécies a equação de movimento para N_C é dada por

$$\frac{dN_C}{dt} = k_1 N_A N_B - k_2 N_C \tag{2.25}$$

em que os dois termos resultam dos dois sentidos possíveis da reacção.

a) As somas $N_A(t) + N_C(t)$ e $N_B(t) + N_C(t)$ são constantes, não variam no tempo. Porquê? Em face disso escreva as equações para dN_A/dt e dN_B/dt.

b) Escreva as equações de recorrência do método de Euler para as equações de movimento deste problema e mostre que elas satisfazem as leis de conservação de $N_A(t) + N_C(t)$ e $N_B(t) + N_C(t)$.

Capítulo 3

Modelos probabilísticos

Aulas

55. Um homem inebriado sai de um bar na rua onde mora. A sua casa é a dez passos, mas, infelizmente, a rua é a subir do bar para casa, de tal modo que, em média, por cada 3 passos em direcção a casa, o nosso homem dá 4 na direcção oposta (mas de um modo aleatório).

a) Qual é a probabilidade de no fim de dez passos ele estar mais longe de casa? E de estar de volta ao bar?

b) Qual a probabilidade de ele chegar a casa ao fim de 10 passos?

56. Numa certa noite o homem do problema anterior estava em tal estado que não reconhecia a porta de casa. Ao fim do tempo correspondente a 1000 passos a sua infeliz mulher foi procurá-lo.

a) Em torno de que posição (medida em passos) é que a aconselha a procurar?

b) A que distância dessa posição será razoável esperar encontrá-lo?

57. Designe por p a probabilidade de uma molécula de um gás sofrer uma colisão num intervalo Δt. Suponha que Δt é tão pequeno que a probabilidade de haver mais do que uma colisão nesse intervalo pode ser desprezada e ainda que a frequência com que a partícula colide num intervalo Δt é independente do que se passou antes. Seja $P_N(t)$ a probabilidade de até ao instante t a partícula sofrer N colisões.

a) Calcule $P_0(t)$ isto é a probabilidade de não haver colisões supondo o intervalo de $[0, t]$ dividido em intervalos de tempo Δt, suficientemente pequenos para que seja desprezável a probabilidade de mais do que uma colisão num desses intervalos.

b) No limite $\Delta t \to 0$ é de esperar que $p \to 0$. Punhamos $p = w\Delta t$ em que w pode ser interpretado como um probabilidade de colisão por unidade de tempo. Mostre que nesse caso

$$P_0(t) = e^{-wt} \tag{3.1}$$

58. Considere a seguinte generalização do problema do passeio aleatório. Em cada "passo" (unidade de tempo) a partícula desloca-se para a direita ou esquerda (de uma unidade) com igual probabilidade mas metade das vezes (em média) fica no mesmo sítio (deslocamento nulo). Seja $P_N(x)$ a probabilidade de ela se encontrar na posição x ao fim de N passos (incluindo os nulos).

a) Qual é o valor médio $< \xi >$ e a dispersão $\Delta\xi^2$ de um passo?

b) Determine $< X_N^2 >$ em que X_N é a posição ao fim de N passos. Compare com a situação em que um passo tem sempre comprimento unitário.

59. Suponha agora um passeio aleatório num plano. A partícula desloca-se sempre de uma unidade ao longo do eixo xx ou yy com igual probabilidade em qualquer das quatro possíveis direcções.

a) Usando o resultado do problema anterior calcule $< R_N^2 >$ em que R_N é a distância à origem (ponto de partida) ao fim de N passos.

b) Generalize o resultado anterior para três dimensões.

c) Um polímero é uma cadeia de um número muito grande de unidades químicas semelhantes, os monómeros. As ligações entre monómeros são muito flexíveis e, num modelo de ordem 0, a configuração de um polímero em solução pode-se representar por um passeio aleatório, como o da alínea anterior em que cada passo é um monómero. Se tomarmos $\sqrt{< R^2 >}$, em que R é a distância entre extremos da cadeia, como uma medida da dimensão linear da região ocupada pelo polímero como varia o volume dessa região com a massa do polímero?

60. Em qualquer representação de um problema dinâmico num computador, o tempo e o espaço tem que ser discretizados, pois não é possível representar variáveis contínuas num sistema com um número finito de de estados.

Assim, no modelo de passeio aleatório, a evolução temporal da lei de distribuição , $P_N(x)$, é representada pela sua dependência no número de passos N. Também vimos que se imaginarmos um grande número de partículas a realizar um movimento aleatório esta distribuição é simplesmente a densidade local de partículas (número de partículas na posição x normalizado ao número total de partículas).

a) Mostre que a equação de evolução temporal da distribuição tem a forma (passos com igual probabilidade para os dois lados)

$$P_N(x) = \frac{1}{2}P_{N-1}(x-1) + \frac{1}{2}P_{N-1}(x+1) \tag{3.2}$$

b) Mostre que a distribuição binomial

$$P_N(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} (\frac{1}{2})^N & |x| \leq N \\ 0 & |x| > N \end{cases} \qquad M = \frac{1}{2}(x+N) \tag{3.3}$$

é a solução da equação de evolução com a condição inicial $P_0(0) = 1, P_0(x) = 0$ se $x \neq 0$.

61. No problema acima referido uma grandeza interessante de considerar é a corrente de partículas, isto é, o número de partículas que num passo N passa de x para $x+1$. Representá-la-emos por $i_N(x+\frac{1}{2})$. Note que a corrente está naturalmente associada a uma ligação entre dois sítios.

a) Mostre que (normalizando a corrente do mesmo modo que a densidade de partículas)

$$i_N(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(P_{N-1}(x) - P_{N-1}(x+1)) \tag{3.4}$$

b) Mostre que a equação de evolução se pode reescrever na forma

$$P_N(x) - P_{N-1}(x) = i_N(x-\frac{1}{2}) - i_N(x+\frac{1}{2}) \tag{3.5}$$

Que interpretação pode dar a esta equação ?

62. Considere o seguinte problema. Partículas realizam passeios aleatórios apenas entre duas posições por exemplo $x=0$ e $x=M$. Nestas duas posições as densidades estão fixas isto é $P_N(0) = \rho_1$ e $P_N(M) = \rho_2$. Podemos deste modo representar o movimento de partículas entre dois reservatórios com densidades diferentes. Mostre que existe uma lei de distribuição estacionária $P_N(x)$, independente de N, que corresponde a um fluxo de partículas entre os dois reservatórios constante no tempo e no espaço e proporcional ao *gradiente* de concentração isto é a $(\rho_2 - \rho_1)/M$.

63. Tente repetir as análises dos 3 problemas anteriores usando probabilidades p e $1-p$ para os passos para a direita e esquerda não necessáriamente iguais.

64. Considere uma parede de um recipiente que contem um gás.

a) Supondo que todas as moléculas do gás tem a mesma componente z da velocidade v_z, mostre que o número de partículas do gás que colidem com a parede, por unidade de área e tempo é

$$\Phi(v_z) = \begin{cases} nv_z & \text{se } v_z > 0 \\ 0 & \text{se } v_z < 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

em que z é a direcção perpendicular à parede.

b) Mostre que o número de colisões por unidade de área e tempo se pode escrever como $\Phi = \frac{1}{2}n < |v_z| >$.

c) Se for feito na parede um orifício de reduzidas dimensões, as moléculas de gás poderão fluir por ele sem que a distribuição de velocidades das moléculas do gás seja alterada. Chama-se a este fenómeno efusão, para o distinguir do escoamento do gás por um orificio de dimensões tais que a sua presença altere substancialmente a distribuição de velocidades do gás. No refime efusivo, estime o número de moléculas que se escoam por um orifício de diâmetro 100 Å, para um gás à pressão de uma atmosfera e temperatura de 300K . (*Nota:* Use $< |v_z| >= \sqrt{2/3\pi < v^2 >}$)

65. Imagine um hipotético gás de bolas de bilhar em que os "átomos" tem uma massa de 1 Kg. Qual será a velocidade típica de um átomo para uma temperatura de 300 K . E para ter uma velociade típica de 1 cm s^{-1} a que temperatura deverá estar?

Testes e exames

66. No seguinte circuito as duas resistências são escolhidas à sorte de uma caixa onde 1/4 das resistências tem o valor de 10 Ω e as restantes de 1 Ω. A bateria é de 3 V.

a) Quais são os valores possíveis da corrente e quais são as respectivas probabilidades?

b) Determine os valores médios da corrente e da resistência total do circuito.

c) Será que a lei de Ohm se pode aplicar neste caso aos valores médios de R e I isto é $< I >= V/ < R >$? Calcule o valor médio de $1/R$. Como formularia a lei de Ohm em termos de valores médios?

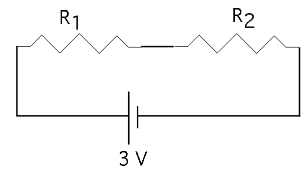

Figura 3.1:

67. Na fabricação de filmes é utilizada uma superfície, especialmente preparada, que tem uma probabilidade da ordem de 1 de fixar os átomos do material a depositar que colidam com ela. Estes estão, normalmente, na fase gasosa. Pela teoria cinética dos gases, o número de átomos que colidem com uma parede por unidade de tempo e área é $\Phi = \frac{1}{2}n < |v_z| >= n\sqrt{(1/6\pi) < v^2 >}$.

a) Calcule a densidade atómica de Hélio, n, a uma temperatura de 300 K e uma pressão de 10^{-6} atmosferas.

b) Estime o número de átomos de Hélio depositados, por segundo e unidade de área, para as mesmas pressão e temperatura da alínea anterior.

c) Supondo que os átomos depositados estão a distâncias da ordem de grandeza das dimensões atómicas estime, para os parâmetros anteriores, o número de monocamadas atómicas de Hélio depositadas por segundo.

68. Uma bateria é constituida por 10 geradores de 1 V ligados em série. Existe uma probabilidade 1/4 de cada gerador ser defeituoso e dar uma força electromotriz nula. Estes geradores estão ligados em série com uma resistência $R = 10\Omega$.

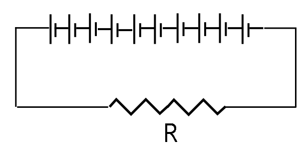

Figura 3.2:

a) Calcule a probabilidade de a potência dissipada na resistência , $P = V^2/R$, ser de 2.5 W.

b) Calcule o valor médio da tensão nos terminais da bateria, $< V >$ e da potência dissipada na resistência, $< P >$.

c) Suponha que dispõe de um número M elevado de tais baterias e considere as seguintes duas situações:
i)cada bateria dissipa sobre uma única resistência de 10 Ω,
ii) As baterias são ligadas em série dissipando sobre M resistências em série de 10 Ω.
Para cada uma destas situações exprima a potência total dissipada em termos de M e dos valores médios calculados na alínea anterior.

69. Uma partícula realiza um passeio aleatório a uma dimensão. Em cada instante $\tau, 2\tau, \ldots$ dá um passo para a direita de comprimento l com probabilidade p ou fica no mesmo sítio com probabilidade $1-p$. No instante $t=0$ a partícula está na origem. Seja $x(t)$ a posição da partícula no instante t.

a) Calcule o valor médio do deslocamento num passo e mostre que

$$< x(t) >= Npl \qquad N\tau < t < (N+1)\tau \tag{3.7}$$

b) O valor médio do tempo que ela demora a sair da origem é dado por

$$< t_{salto} >= \tau p + 2\tau(1-p)p + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n\tau(1-p)^{n-1}p \tag{3.8}$$

Justifique cuidadosamente esta expressão.

c) Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ as posições de duas partículas que estão juntas no instante $t=0$ e se movem independentemente uma da outra. Calcule o valor médio do quadrado da distância entre elas em função de t, $< (x_1(t) - x_2(t))^2 >$ e mostre que

$$< (x_1(t) - x_2(t))^2 >= 2\Delta x(t)^2 \tag{3.9}$$

em que $\Delta x(t)^2 \equiv < x(t)^2 > - < x(t) >^2$.

70. Nas aulas teóricas foi deduzida a seguinte expressão para a pressão de um gás

$$P = \frac{1}{3} mn < v^2 > \tag{3.10}$$

a) Usando esta expressão e a lei dos gases perfeitos estime as velocidades de moléculas de oxigénio, O_2, e de CO_2, no ar, em condições normais de pressão e temperatura.

b) Exponha sucintamente o que acha serem os passos fundamentais da dedução da equação anterior e explique a origem dos diferentes factores que entram no lado direito da equação.

71. Uma partícula de massa m move-se segundo o eixo dos xx do seguinte modo peculiar. A intervalos regulares $t_0 \equiv 0, t_1 \equiv \Delta t, t_2 \equiv 2\Delta t, \ldots$ a sua *velocidade* v sofre uma variação aleatória, passando a ser $v+u$ ou $v-u$ com iguais probabilidades (u fixo). No que se segue v_n é a velocidade no intervalo $[t_{n-1}, t_n]$, e x_n a posição no instante t_n. A partícula parte de $x=0$ com velocidade nula antes do primeiro impulso.

a) Qual é o valor médio de v_n, a velocidade ao fim de n impulsos?

b) Determine o valor médio de energia cinética da partícula e mostre que este aumenta linearmente no tempo, $< E_c > \propto t$.

c) Quais são as posições possíveis em $t = t_2$ e as respectivas probabilidades?

d) É claro do modelo que $x_n = x_{n-1} + v_n \Delta t$. Que grandeza lhe permite estimar o distância típica que a partícula percorre entre dois impulsos? Mostre que esta distância aumenta com o tempo ao contrário do que acontece no passeio aleatório convencional.

72. Considere um recipiente (volume V) contendo hélio à pressão $P = 0.5$ atm e temperatura $T = 300$ K.

a) Calcule:

1. a massa volúmica do gás, ρ;
2. o valor médio da energia cinética de um átomo do gás;
3. a percentagem de volume vazio (não ocupado por átomos).

b) Nas aulas teóricas mostrou que o número de átomos (ou moléculas) que na unidade de tempo colidem com a unidade de área da parede do recipiente vale

$$\phi = \frac{1}{2} n < |v_z| > \qquad \text{sendo} < |v_z| >= \sqrt{\frac{2}{3\pi} < v^2 >}.$$

Mostre que a quantidade de massa que colide com a unidade de área da parede na unidade de tempo se pode escrever como:

$$\sqrt{\frac{P\rho}{2\pi}}.$$

73. Se num recipiente com gás existir um orifício de pequenas dimensões o gás escoa-se sem que se altere a distribuição de probabilidade da velocidade das moléculas. Seja $A = 10^{-10}$ m^2, a área de um tal orifício.

a) Mostre, explicando cuidadosamente os passos da sua derivação, que o número de partículas que saem pelo orifício, por unidade de tempo, é

$$\Psi = \frac{1}{2} n < |v_z| > \times A \tag{3.11}$$

b) Prove que a densidade de partículas do gás no recipiente diminui no tempo de acordo com

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}n(t) \tag{3.12}$$

e calcule o valor do tempo τ para um recipiente de volume 10^{-3} m^3 e Oxigénio, O_2, em *condições normais de pressão e temperatura.* $(\langle |v_z| \rangle = \sqrt{2\langle v^2 \rangle / 3\pi})$.

74. Uma partícula de massa m realiza um passeio aleatório ao longo de uma linha do seguinte modo. Parte da origem com uma velocidade que pode ser $+v$ ou $-v$ com igual probabilidade. Nos instantes $\tau, 2\tau \ldots$ a velocidade pode trocar de sinal, ou manter-se, com igual probabilidade. Suponha agora que sobre a partícula actua um força externa, constante, $F_x = F$, mas que *no início* de cada passo a velocidade continua a ser $\pm v$ com iguais probabilidades.

a) Calcule o valor médio de posição da partícula ao fim de N passos, isto é, no instante $t = N\tau$.

b) Definindo um velocidade média de deslocamento como $v = d\langle x(t) \rangle / dt$ mostre que esta é proporcional à força.

c) As variações de velocidade da partícula são devidas a interacções com as partículas do meio onde ela se desloca. Qual é o valor médio da força que o meio exerce sobre a partícula, nos dois casos, força externa nula e força externa F?

75. Imagine um recipiente com uma mistura de dois gases, O_2 e N_2.

a) Usando a teoria cinética dos gases mostre que a pressão total sobre a parede se pode escrever como soma das pressões de cada um dos gases $P = P_O + P_N$ e mostre, justificando com cuidado a sua derivação, que

$$P_O = \frac{1}{3} m_O n_O \langle v^2 \rangle_O \tag{3.13}$$

$$P_N = \frac{1}{3} m_N n_N \langle v^2 \rangle_N \tag{3.14}$$

b) Mostre que a lei dos gases perfeitos só mantém a forma habitual $PV = Nk_BT$, em que N é o número *total* de moléculas, se forem iguais as energias cinéticas médias dos dois tipos de moléculas.

76. Duas partículas, de igual massa, inicialmente juntas na origem, realizam passeios aleatórios a uma dimensão, simultâneos e independentes (passos de comprimento unitário, com igual probabilidade nos dois sentidos).

a) Calcule os valores possíveis do deslocamento do *centro de massa* das duas partículas, num passo e as respectivas probabilidades. Calcule o valor médio da posição do centro de massa ao fim de N passos.

b) Determine o valor médio do quadrado da distância entre as duas partículas ao fim de N passos.

77. Um feixe laser incide perpendicularmente num espelho. Cada fotão do feixe tem velocidade c na direcção perpendicular ao espelho antes de ser reflectido por este e $-c$ após a reflexão. A quantidade de movimento de um fotão é dada por $\hbar\omega/c$ em que ω é a frequência angular da radiação ($\hbar\omega$ é a energia de cada fotão).

a) Mostre que o laser exerce uma força sobre o espelho dada por $2n\hbar\omega \times A$, em que n é o número de fotões por unidade de volume e A a área da secção recta do feixe.

b) Calcule a força no caso do espelho ser substituído por uma superfície negra que absorve os fotões que nela incidem.

c) Se a potência do feixe (energia incidente no espelho por unidade de tempo) for 1 mW, quanto vale a força calculada na alínea a)?

78. No seguinte circuito qualquer das 4 baterias tem igual probabilidade de ser ligada com a polaridade da figura ou com polaridade trocada.

a) Qual a probabilidade de a corrente ter o sentido da figura? E o sentido inverso? E de ser nula?

b) Determine os valores possíveis da diferença de potencial na resistência e as respectivas probabilidades.

c) Faça uma estimativa da potência total dissipada por mil circuitos idênticos (Potência dissipada num circuito vale V^2/R).

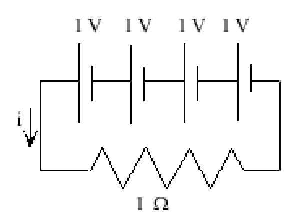

Figura 3.3:

79. Considere uma partícula que sai da origem e se desloca entre os pontos da rede da figura (passos de comprimento 1), *sempre na direcção das setas.* Em cada passo tem igual probabilidade de realizar qualquer dos dois deslocamentos possíveis.

a) Seja ξ_x o deslocamento na direcção x num passo. Determine $<\xi_x>$ e $\Delta\xi_x^2$.

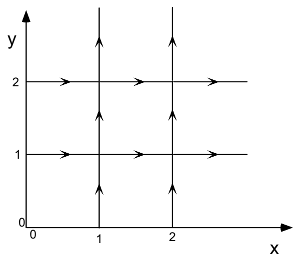

Figura 3.4:

b) O valor médio $< R_N^2 >$ (R_N, distância à origem) ao fim de N passos é dado por $< R_N^2 >= N(N+1)/2$. Determine as posições possíveis e respectivas probabilidades ao fim de $N=2$ e verifique a expressão para $< R_N^2 >$ neste caso particular.

c) Suponha que duas partículas iniciam dois passeios simultâneos e independentes partindo da origem. Calcule o valor médio $< d_N^2 >$ em que d_N é a distância entre elas ao fim de N passos.

Capítulo 4

Problemas Abertos

Aulas

80. Tente fazer uma estimativa da massa volúmica de um edifício como o do Departamento de Física, incluindo os espaços interiores.

81. O processo principal de geração de energia do Sol consiste na fusão de núcleos de Hidrogénio (protões) para formar núcleos de hélio $4\text{H} \rightarrow {}^{4}\text{He}$, através duma cadeia de reacções que não interessa agora considerar. Este processo liberta energia porque a massa dos quatro protões é superior à do núcleo de Hélio. A energia libertada por cada reacção é dada pela relação de Einstein $E = \Delta mc^2$ em que Δm é a diferença entre a massa dos 4 protões e a massa do núcleo de Hélio (neste problema desprezamos a massa dos electrões ou positrões que têm de estar envolvidos nas reacções por causa do balanço da carga).

a) Estime o número de nucleões (protões e neutrões) existentes no sol.

b) Supondo que uma fração α da massa do sol é hidrogénio e a fração restante Hélio, estime o tempo de duração do combustível solar (Hidrogénio) em função de α. Concretize para $\alpha = 2/3$. Há quanto tempo é que o Sol "queima" hidrogénio se α tiver o valor referido?

82. Procure no Science Data Book[3] (ou noutra referência) as massas volúmicas do Alumínio (Z=13), Cobre (Z=29) e Ouro (Z=79). Estime as distâncias médias entre átomos destes materiais.

83. No cobre dois electrões por cada átomo ficam deslocalizados e podem mover-se livremente no material. São estes electrões que são responsáveis pela condução eléctrica deste material.

a) Quantos electrões existem por cm^3 de cobre?

b) Quando num fio de cobre de 1mm de diâmetro passa uma corrente de 1 Ampère qual é a velocidade média de deslocamento dos electrões ?

84. Ao estirar uma barra de cobre por aplicação de uma força externa é realizado trabalho.

a) Calcule o trabalho realizado por unidade de volume de uma barra para uma variação relativa de comprimento $\delta l/l = 10^{-3}$.

b) Calcule, em eV, o aumento de energia por átomo da barra.

85. Quando dois átomos de um material são deslocados das suas posições de equilíbrio, a força que surge entre eles é proporcional à variação da distância mútua se essa variação for muito menor que a distância de equilíbrio. A ligação entre dois átomos pode então ser caracterizada por uma constante de mola k.

a) Usando o facto de a coesão dos sólidos ser um fenómeno dominado pelo comportamento dos electrões faça uma estimativa dimensional desta constante.

b) Considere um sólido com uma rede cristalina cúbica simples de lado d com ligações caracterizadas por uma constante de mola k entre átomos vizinhos. Mostre que para este modelo o módulo de Young do material é dado por $E = k/d$. Obtenha uma estimativa para o módulo de Young em termos de constantes fundamentais e determine a ordem de grandeza deste coeficiente para matéria sólida.

86. [21] Quando um carro trava bruscamente a força de atrito com o pavimento pode ser descrita por um modelo de atrito sólido, proporcional ao peso do carro (numa estrada horizontal)

$$F_a = \mu M g \tag{4.1}$$

em que o coeficiente de atrito dinâmico, μ depende das condições dos pneus, do pavimento, etc.

a) Do ponto de vista dimensional, apenas, que pode afirmar sobre a distância que um automóvel de velocidade v percorre antes de se imobilizar?

b) Obtenha uma expressão para a distância de travagem em termos da velocidade inicial do veículo.

c) Para o cálculo da distância de segurança que deve ser guardada em relação ao veículo da frente deve ser levado em conta o tempo finito de reacção de um condutor. Obtenha um expressão para esta distância em incluindo este tempo τ.

d) A tabela 4.1 é extraída de um manual de código (*O Bom Condutor*, A. Serra Amaral, Porto Editora). Verifique se ela está conforme o modelo da alínea anterior. Em caso afirmativo determine os valores corrrespondentes de μ e τ (*Nota:* Se os dados estiverem conforme o modelo existe um modo de representação gráfica que dará origem a uma recta).

velocidade (Km h^{-1})	40	50	60	70	80	90	100	110	120	140	180
distância (m)	19	27	36	46	58	71	85	101	118	155	245

Tabela 4.1: Distância de segurança em função da velocidade

87. Numa linha de tráfego, quanto maior for a velocidade, maior terá que ser a distância entre os veículos. Como o fluxo de trânsito (número de veículos que atravessam um dado ponto por unidade de tempo) depende da densidade de veículos e da respectiva velocidade, deve haver uma velocidade para a qual o fluxo é máximo.

a) Exprima o fluxo de trânsito na velocidade e distância entre veículos, supondo que todos se deslocam à mesma velocidade e guardam entre eles a mesma distância.

b) A distância entre veículos deverá ser, no mínimo, a distância de segurança calculada no problema anterior acrescida do comprimento médio de um veículo d_0. Calcule $F(v)$, a função que dá o máximo fluxo possível para cada velocidade.

c) Prove que $F(v)$ tem um máximo para uma dada velocidade. Calcule essa velocidade, assim como o valor do máximo, usando os parâmetros determinados no problema anterior e tomando $d_0 = 5\,\text{m}$.

88. Quando os pneus de um automóvel rolam sobre o pavimento a força de atrito que este exerce sobre eles não pode ultrapassar $F = \mu_s M g$, em que μ_s é o coeficiente de atrito estático. Prove que a aceleração de um automóvel não pode ultrapassar um valor máximo dependente de μ_s e independente da potência do motor.

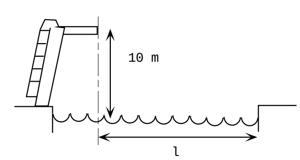

Figura 4.1:

89. Um colega arquitecto quer projectar uma piscina de saltos em que existe uma prancha a 10 m de altura. Precisa de garantir que a distância l seja suficiente para que um saltador não corra o risco de cair fora da piscina. Levando em conta que ele pode saltar em corrida, que distância de segurança recomendaria?

90. Como certamente sabe, os saltadores de comprimento realizam o seu salto após uma corrida de aceleração. O salto parado é muito mais curto. Supondo que a energia disponível para o salto é a energia cinética adquirida na corrida, obtenha uma estimativa para o máximo comprimento atingível. Pode obter uma estimativa da velocidade máxima de um atleta a partir do recorde dos 100 m planos.

Testes e exames

91. A energia radiada pelo Sol é emitida em todas as direcções . Naturalmente só uma pequena fracção atinge a superfície da Terra.

a) Qual é a energia que atravessa uma esfera de raio igual ao da órbita da Terra por unidade de área e de tempo?

b) Supondo que a Terra absorve 1% da energia que atinge a sua superfície, e que esta fica acumulada na atmosfera estime o aumento de temperatura anual da atmosfera. Que fracção da energia incidente na sua superfície é que acha que a Terra radia de novo para o espaço?

92. Para fundir uma quantidade de massa m de uma substância é necessário fornecer-lhe uma determinada quantidade de energia Q, de acordo com a relação $Q = mL_f$ onde L_f designa o calor de fusão da substância.

a) Determine, em eV, a energia por molécula necessária para fundir gelo.

b) Sabendo que a massa volúmica do gelo e da água, são respectivamente $920\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$ e $1000\,\mathrm{kg\ m^{-3}}$, estime a variação da distância intermolecular que ocorre aquando da transição de fase.

93. O ferro tem uma estrutura cúbica de corpo centrado (um átomo em cada vértice e um no centro da célula cúbica).

a) Calcule a distância mínima entre dois átomos de ferro nesta estrutura.

b) Supondo que os átomos são esféricos, e que os que estão mais próximos se tocam, calcule a fracção de volume da estrutura não ocupada por átomos.

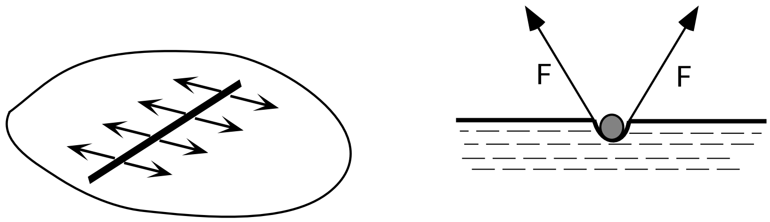

Figura 4.2:

94. Sobre um agulha pousada na superfície de um líquido, exercem forças as duas partes da superfície de cada lado da agulha. As forças são perpendiculares à agulha, estão no plano da superfície e valem (para cada lado) $F = \gamma l$ em que l é o comprimento da agulha e γ a tensão superficial do líquido. O peso da agulha origina uma deformação da superfície e estas forças passam a ter uma componente vertical que equilibra o peso da agulha.

a) Determine a possível dependência da massa máxima de que pode ser suportada pela tensão superficial, no comprimento da agulha, em γ e na aceleração da gravidade.

b) Analisando as condições de equilíbrio mostre que agulhas de aço se afundam em água se o seu diâmetro for superior a um certo valor d_c, e mantêm-se à superfície se $d < d_c$. Determine o valor de d_c.

95. Uma nuvem tem uma massa volúmica da ordem de $4\,\mathrm{g\,m^{-3}}$. A nuvem é constituída por gotas de água de raio da ordem de $10\,\mu\mathrm{m} = 10^{-5}\,\mathrm{m}$.

a) Estime o número de gotas existente por m^3.

b) Obtenha um estimativa da distância típica entre uma gota e as mais próximas.

c) As gotas da nuvem coalescem para formar gotas de chuva com cerca de $1\,\mathrm{mm}$ de raio. Quantas gotas de chuva por m^3 gera uma nuvem?

Bibliografia

[1] *Tópicos de Física – Aulas teóricas*, J. M. B. Lopes dos Santos, Departamento de Física da Universidade do Porto, 1997

[2] *Introduction to Computational Physics*, Marvin L. de Jong, Addison-Wesley, 1991

[3] *Science Data Book* ed. Richard Tennent, Open University Books, Oliver & Boyd, 1971