Movimento em Três Dimensões

Lições de Mecânica

J. M. B. Lopes dos Santos*

29 de Setembro de 2021

Departamento de Física e Astronomia,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
4169-007 Porto

Uma introdução à descrição do Movimento em 3D, e aos conceitos de trajectória, comprimento de arco, curvatura e acelerações normal e tangencial.

1 Trajectória

Quando um corpo se move no espaço tri-dimensional (o qual designaremos por $\mathbb{E}^3$) e a sua posição é modelizada por um ponto, o seu movimento define um subconjunto de $\mathbb{E}^3$, designado por **trajectória.** Formalmente a trajectória é a imagem da função

$$t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \mathbb{E}^3 \tag{1}$$

em que t é o tempo, pertencente ao intervalo em que o movimento está definido, e $\mathbf{r}(t)$ representa o vector de posição do corpo *num dado referencial.* Em linguagem mais coloquial a trajectória é o conjunto de posições ocupadas pelo corpo.

Eis alguns exemplos:

a) Dado um vector $\mathbf{v}$, a equação

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t \tag{2}$$

define uma recta se $t \in \,]-\infty, \infty[$, ou segmento de recta se $t \in \,]t_i, t_f[$, já que, para quaisquer dois instantes t_1, t_2,

$$\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{v}(t_2 - t_1) \tag{3}$$

e o deslocamento tem sempre a mesma direção, a do vector $\mathbf{v}$.

*jlsantos@fc.up.pt

b) Dado um vector $\mathbf{v}$ e uma função $f(t)$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} f(t); \tag{4}$$

o conjunto de pontos ocupados pelo corpo é em geral um segmento da mesma recta do caso anterior.

c) Dados uma distância r e uma frequência ω, se

$$\mathbf{r}(t) = r\left[\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}\right], \tag{5}$$

a trajectória é (parte) de um círculo pois a distância à origem é constante:

$$\sqrt{\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)} = \sqrt{r^2\left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right]} = r \tag{6}$$

Esta definição de um subconjunto de $\mathbb{E}^3$ por uma aplicação $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, que surge muito naturalmente no contexto da descrição de um movimento, é designada em Matemática por *definição paramétrica de uma curva.* Uma mesma curva (trajectória) pode ser percorrida de modos muito distintos. Por exemplo, se no caso *b*) escolhermos $f(t) = t^3$, a trajectória é a mesma do caso *a*) (a mesma recta) mas os movimentos são distintos: no primeiro caso é uniforme e no segundo variado (com aceleração variável).

Exercício 1.
Na Eq.(4), identifica a trajectória—reta real, semi-reta segmento de reta—, para os seguintes exemplos, sendo $t \in]-\infty, \infty[$ (Unidades SI)

1. $f(t) = 2t^2$;
2. $f(t) = 2\sin(t)$
3. $f(t) = e^{-t}$
4. $f(t) = t^2 + t^3$

Torna-se útil para a descrição de movimentos separar as características intrínsecas da trajectória, do modo como ela é percorrida. Nas secções que se seguem teremos isso em conta.

1.1 Velocidade e Tangente

O deslocamento entre dois instantes é definido por

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) \tag{7}$$

Pode ser geometricamente representado por um segmento orientado do ponto inicial para o final, ou por qualquer outro equipolente a este (Fig. 1). As suas componentes num

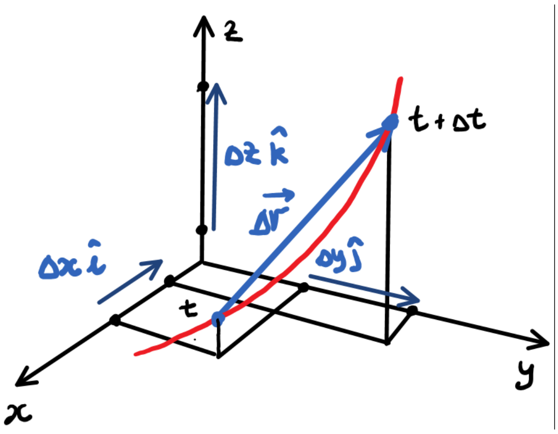

Figura 1: Quando um ponto se desloca no espaço, as suas projecções nos eixos coordenados têm um movimento 1D.

sistema de eixos ortogonais[1] são

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1), \tag{8a}$$
$$\Delta y = y(t_2) - y(t_1), \tag{8b}$$
$$\Delta z = z(t_2) - z(t_1), \tag{8c}$$

isto é,

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \hat{\mathbf{i}} + \Delta y \hat{\mathbf{j}} + \Delta z \hat{\mathbf{k}}. \tag{9}$$

Quando $t_2 - t_1 \to 0$, $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ também Claramente, o vector deslocamento $\Delta \mathbf{r} \to 0$, já que o ponto final e inicial coincidem quando o intervalo de tempo tende para zero. Como vimos, os limites

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x(t_1) \tag{10a}$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = v_y(t_1) \tag{10b}$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = v_z(t_1) \tag{10c}$$

definem as velocidades das projeções da posição nos eixos coordenados e são, em geral, finitos. O **vector** velocidade instantânea é então definido por

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}(t_1) = v_x(t_1)\,\hat{\mathbf{i}} + v_y(t_1)\,\hat{\mathbf{j}} + v_z(t_1)\,\hat{\mathbf{k}} \tag{11}$$

A direcção deste vector é a da recta limite de uma secante à trajectória quando os pontos de intersecção tendem um para o outro. Parece natural tomar a direcção de $\mathbf{v}(t)$ como

[1] Neste texto usamos a notação ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$) para os versores dos eixos coordenados, $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$.

definindo a direcção da tangente à trajectória em $\mathbf{r}(t)$. E de facto é assim que se define a direção da tangente a uma curva definida parametricamente por uma aplicação $t \mapsto \mathbf{r}(t)$.[2]

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|}\mathbf{v}(t) \tag{12}$$

e parece claro que é uma propriedade da curva descrita no movimento; não depende do modo como a trajectória é percorrida, desde que o sentido não seja alterado. O vector velocidade pode então ter a forma

$$\mathbf{v}(t) = |\mathbf{v}(t)|\,\hat{\mathbf{v}}(t) := v(t)\hat{\mathbf{v}}(t) \tag{13}$$

Nestes dois factores separamos as características intrínsecas da trajectória, $\hat{\mathbf{v}}(t)$, do módulo da velocidade, $v(t)$, que depende do modo como a trajectória é percorrida.

Exercício 2.
Considera a curva plana (trajectória) definida parametricamente por

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos(2\pi t)\hat{\mathbf{\imath}} + t\hat{\mathbf{\jmath}} \text{ (Unidades SI)}$$

Contrói um vetor tangente a esta curva no ponto de coordenadas $(x, y) = (2, 2)$ e determina o ângulo que faz com o eixo Ox.

---

[2]Este vector só pode ser definido se $|\mathbf{v}(t)| \neq 0$. Se, para um movimento, a velocidade se anular num dado ponto, isso não significa que a tangente à trajectória esteja indefinida nesse ponto. Um outro movimento com a mesma trajectória (uma mudança da equação paramétrica de curva) pode permitir definir o versor tangente.

■ Curvas e Parametrizações ■

Como verificar que dois movimentos distintos têm a mesma trajectória,

$$t \mapsto \mathbf{r}_1(t) \tag{14a}$$
$$t \mapsto \mathbf{r}_2(t)? \tag{14b}$$

Comecemos por alterar a designação da variável tempo no segundo movimento para as poder distinguir.

$$\tau \mapsto \mathbf{r}_2(\tau) \tag{15}$$

Se a trajectória é a mesma, para cada t deveremos ter um $\tau(t)$ tal que

$$\mathbf{r}_2(\tau(t)) = \mathbf{r}_1(t) \tag{16}$$

A velocidade no segundo movimento é

$$\mathbf{v}_2(\tau) = \frac{d\mathbf{r}_2(\tau)}{d\tau} \tag{17}$$

o que nos permite escrever, aplicando a regra de derivação da função composta,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) = \frac{d\mathbf{r}_1(t)}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_2(\tau(t))}{dt} = \left.\frac{d\mathbf{r}_2(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau(t)} \frac{d\tau}{dt} \\ &= \mathbf{v}_2(\tau(t))\frac{d\tau}{dt} \end{aligned} \tag{18}$$

Na primeira linha, a expressão

$$\left.\frac{d\mathbf{r}_2(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau(t)}$$

designa a derivada da função de $\mathbf{r}_2$ em ordem à variável τ, *calculada no ponto* $\tau(t)$, em que t é o que aparece no primeiro membro da equação. Por exemplo, se $t = 5$, será a função derivada no argumento $\tau(5)$.

Se a trajectória for percorrida no mesmo sentido nos dois movimentos, as velocidades terão não apenas a mesma direcção, como resulta da Eq. 18, mas também o mesmo sentido, o que implica $d\tau/dt > 0$. Fica claro que o versor da velocidade é o mesmo para os dois movimentos: tal como intuímos é uma propriedade da trajectória.

$$\hat{\mathbf{v}}_1(t) = \frac{\mathbf{v}_1(t)}{|\mathbf{v}_1(t)|} = \frac{\mathbf{v}_2(\tau(t))\frac{d\tau}{dt}}{|\mathbf{v}_2(\tau(t))|\left|\frac{d\tau}{dt}\right|} = \hat{\mathbf{v}}_2(\tau(t)) \tag{19}$$

2 Comprimento de arco.

Medir o comprimento de um segmento de recta é uma operação directa: usamos uma régua. Por outro lado o conceito de perímetro de um círculo, $2\pi r$, é familiar. Mas não podemos medi-lo com uma régua: o círculo é uma curva e não podemos sobrepô-lo a uma régua. Como medir então o seu comprimento?

A Fig. 2 ilustra um método possível. Em (a) inscrevemos um quadrado de lado ℓ_1 (cujo perímetro pode ser medido com um régua) no círculo. Uma aproximação ao perímetro do círculo seria

$$L_4 = 4\ell_1. \tag{20}$$

É, obviamente, uma aproximação com erro por defeito: o perímetro do círculo é superior

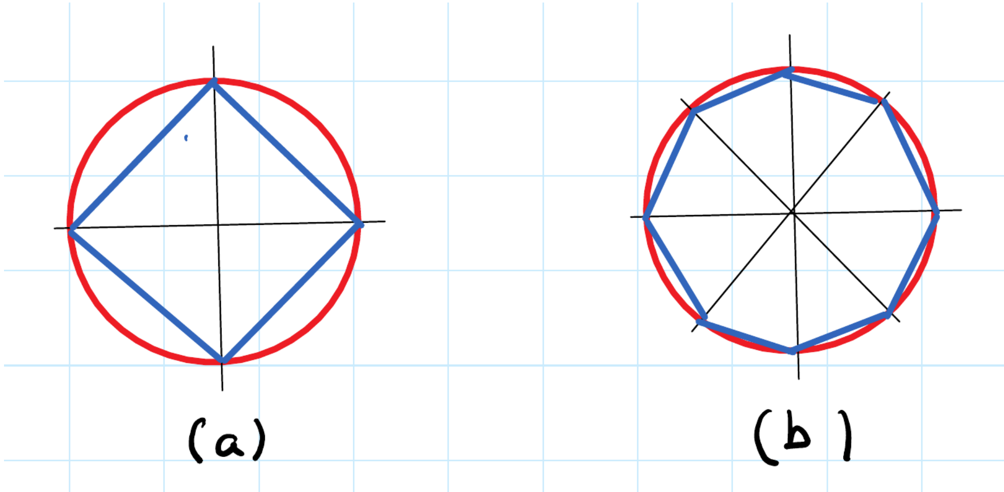

Figura 2: Como medir o perímetro de um círculo?

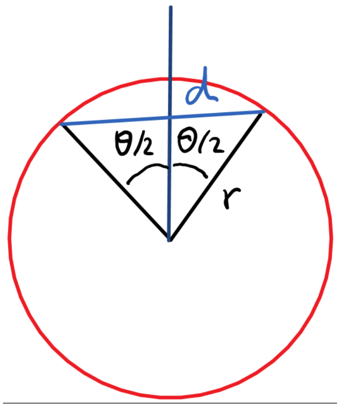

Figura 3: O comprimento da corda é $2r \sin(\theta/2)$.

a L_4. Em (b), com um régua mais pequena, inscrevemos um octógono. Parece que

$$L_8 = 8\ell_2 \tag{21}$$

está mais próximo do perímetro do que L_4. Com efeito $L_8 > L_4$, visto que a soma dos comprimentos de dois lados do octógono é superior ao de um lado do quadrado; mas, por outro lado, L_8 é ainda menor que o perímetro do círculo. Aumentando o número de lados do polígono inscrito devemos convergir para o verdadeiro comprimento do círculo. Vejamos que assim é.

O comprimento de uma corda que sub-tende um ângulo θ é , como se vê na Fig. 3,

$$d = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{22}$$

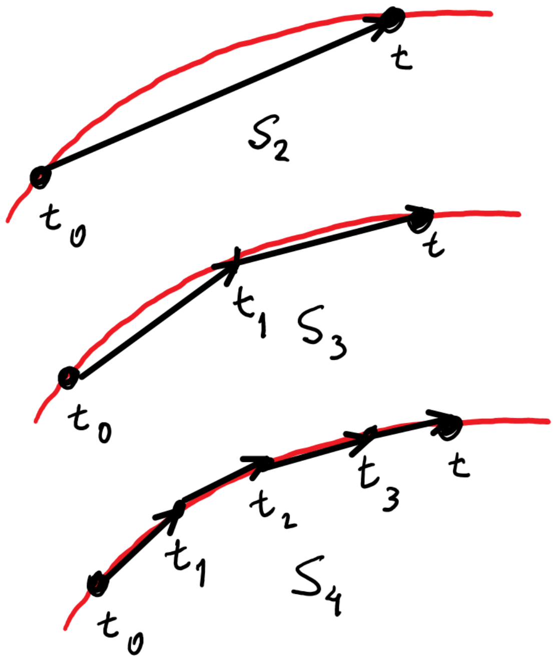

Figura 4: Como calcular o comprimento de uma curva genérica.

Para um polígono regular inscrito de n lados, cada lado sub-tende um ângulo $2\pi/n$ e o perímetro é

$$L_n = 2nr\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2r \times n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{23}$$

definindo $x = \pi/n$, vem

$$L_n = 2\pi r \times \frac{\sin(x)}{x} \tag{24}$$

Quando $n \to \infty$, $x \to 0$. Usando

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \tag{25}$$

vem

$$P = \lim_{n\to\infty} L_n = 2\pi r \tag{26}$$

um resultado bem familiar.

Vejamos com podemos usar esta ideia para uma curva mais geral. Suponhamos uma curva percorrida por uma partícula entre dois instantes $[t_0, t]$. A nossa primeira aproximação ao comprimento será simplesmente o módulo do vector deslocamento entre t_0 e t.

$$S_2 = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}\,(t_0)| \tag{27}$$

Se dividirmos o intervalo $[t_0, t]$ em n intervalos $t_0, t_1, \ldots t_{n-1}, t_n = t$

$$S_n = \sum_{n=0}^{n-1} |\mathbf{r}(t_{n+1}) - \mathbf{r}\,(t_n)| \tag{28}$$

podemos definir o comprimento de arco entre $\mathbf{r}(t_0)$ e $\mathbf{r}(t)$ como o limite desta expressão quando $n \to \infty$. Mas, nesse caso, o deslocamento em cada intervalo infinitesimal é

$$\mathbf{r}(t_{n+1}) - \mathbf{r}\,(t_n) = \mathbf{v}(t_n)\,(t_n - t_{n-1}) = \mathbf{v}(t_n)\Delta t \tag{29}$$

e

$$s\,(t, t_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n-1} |\mathbf{v}(t_n)|\,\Delta t \tag{30}$$

Mas esta é a definição de integral da função $v(t)) = |\mathbf{v}(t)|$, o módulo da velocidade.

$$s\,(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \tag{31}$$

Este integral define o comprimento de um arco descrito por uma partícula de velocidade $v(t)$.

Uma trajectória pode ser percorrida em dois sentidos. Por exemplo, num lançamento vertical a partícula sobe, para e volta a descer. Se $t_0 = 0$ for o momento de lançamento e t_f o instante de regresso à posição inicial, o que é que obtemos para o comprimento de arco?

Não é difícil ver que obtemos duas vezes a altura atingida. Com efeito $v(t) = v_0 - gt$ e

$$\begin{aligned} s\,(t_f, 0) &= \int_0^{t_f} |v_0 - gt|\,dt \\ &= \int_0^{t_f/2} (v_0 - gt)\,dt + \int_{t_f/2}^{t_f} (gt - v_0)\,dt \end{aligned} \tag{32}$$

em que

$$v_0 - g\frac{t_f}{2} = 0 \Rightarrow t_f = \frac{2v_0}{g}. \tag{33}$$

Obtemos

$$\begin{aligned} s\,(t_f, 0) &= v_0\frac{t_f}{2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{t_f}{2}\right)^2 - v_0\frac{t_f}{2} + \frac{1}{2}g\left[t_f^2 - \left(\frac{t_f}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{4}gt_f^2 = 2h. \end{aligned} \tag{34}$$

Embora o conjunto de pontos percorridos pela partícula seja apenas um segmento de comprimento h *o arco* é esse segmento uma vez para cima e outra para baixo e o seu comprimento é $2h$.

Numa segundo nota reparemos que

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)dt \tag{35}$$

implica que

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \tag{36}$$

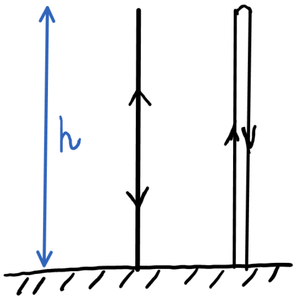

Figura 5: Se a trajectória é percorrida em dois sentidos, entre t_0 e t a Eq. 31 dá um comprimento de arco que é a distância total percorrida pela partícula, $2h$.

Por, isso podemos igualmente concluir de

$$s\,(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')dt' \tag{37}$$

que

$$v(t) = \frac{d}{dt} s\,(t, t_0) \tag{38}$$

É este o sentido da afirmação que o módulo da velocidade é a *distância percorrida por unidade de tempo* e

$$\mathbf{v}\,(t) = \frac{ds}{dt} \hat{\mathbf{v}}\,(t) \tag{39}$$

3 Aceleração e Fórmulas de Frenet

Com o conhecimento que temos do conceito de derivada não surpreende que possamos definir a aceleração

$$\mathbf{a}\,(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \tag{40}$$

ou, explicitamente,

$$\mathbf{a}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\mathbf{v}\,(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)\right] \tag{41}$$

Todas as operações do segundo membro são conhecidas como operações em vectores: $\mathbf{v}\,(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ é a soma de dois vectores ($\mathbf{v}\,(t + \Delta t)$ e $-\mathbf{v}(t)$) e o produto por $1/\Delta t$ é o produto por um escalar. A aceleração, tal como a velocidade, é um vector cujas componentes cartesianas são

$$\mathbf{a}\,(t) = \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt} \hat{\mathbf{k}} \tag{42}$$

Uma vez que sabemos que a aceleração é uma vector, que interpretação podemos dar ao seu módulo e direcção?

A velocidade, sendo um vector, pode variar:

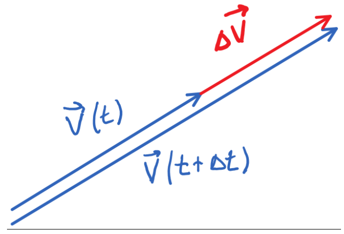

Figura 6: Se a velocidade só variar em módulo, $\Delta\mathbf{v}$ e, consequentemente $\mathbf{a}(t)$, são paralelas a $\mathbf{v}(t)$.

1. Só em módulo;
2. Só em direção;
3. Em módulo *e* em direção.

No primeiro caso, é claro que a aceleração terá a direção da velocidade: se $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{v}(t+\Delta t)$ tem a mesma direção, a variação de velocidade $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)$ tem a direção deste dois vectores (Fig. 6) Como

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\hat{\mathbf{v}}(t), \tag{43}$$

o caso 1 corresponde a haver uma variação apenas do módulo ($\hat{\mathbf{v}}(t)$ constante) e

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{\mathbf{v}}\,(t) \tag{44}$$

O caso 2 corresponde a uma variação apenas na direção: ou seja, $v(t)$ não varia, mas a direção, dada por $\hat{\mathbf{v}}(t)$, altera-se. Um vector de módulo constante varia deslocando a sua extremidade sobre uma esfera. No limite em $\Delta t \to 0$ a direção de $\Delta\hat{\mathbf{v}}$ está no plano tangente à esfera, ou seja normal a $\hat{\mathbf{v}}$.

Exercício 3.
O argumento geométrico dado acima, de que a derivada de um vector de módulo constante é normal (ortogonal) a esse vector, pode ser confirmado do modo seguinte. Se a norma de $\mathbf{u}\,(t)$ é constante, a sua norma quadrada também é

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 = \mathsf{const}.$$

Então

$$\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}(t) = \|\mathbf{u}(t)\|^2$$

tem derivada temporal nula. Mostra que isso é suficiente para concluir que $\mathbf{u}$ e $d\mathbf{u}/dt$ são ortogonais.

Por isso, no caso 2, a aceleração é perpendicular à velocidade. Assim

$$\mathbf{a}(t) = v\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{v}}(t) \tag{45}$$

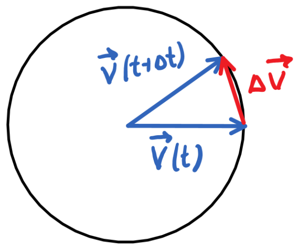

Figura 7: Se a velocidade só variar em direção a sua extremidade desloca-se sobre um círculo (2D) ou uma esfera (3D). Em qualquer caso, no limite em que $\Delta t \to 0$, a direção de $\Delta \mathbf{v}$ é perpendicular a $\mathbf{v}$.

Um resultando importante pode ser obtido separando na derivada do versor $\hat{\mathbf{v}}$ aspectos que dependem apenas da geometria da trajectória, e não do modo como esta é percorrida.

Comecemos por notar que escolhendo uma origem ($t = 0$) para medir o comprimento de arco

$$s(t,0) = \int_0^t v(t)dt := s(t) \tag{46}$$

definimos para cada instante, t e cada ponto da trajectória, $\mathbf{r}(t)$ um valor $s(t)$, a distância percorrida desde $t = 0$. Então

$$\frac{\hat{\mathbf{v}}(t+\Delta t) - \hat{\mathbf{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{\hat{\mathbf{v}}(s\,(t+\Delta t)) - \hat{\mathbf{v}}(s\,(t))}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{47}$$

em que $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$. Ao tomarmos o limite $\Delta t \to 0$ obtemos

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds}\frac{ds}{dt} = v(t)\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} \tag{48}$$

Como $\hat{\mathbf{v}}$ tem módulo unitário, a sua derivada em ordem a s é normal à velocidade tem a forma

$$\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} = \kappa\hat{\mathbf{n}} \tag{49}$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é um versor normal a $\hat{\mathbf{v}}$, que aponta no sentido em que este roda. O parâmetro κ é o módulo de $d\hat{\mathbf{v}}/ds$,

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds}\right|.$$

Neste caso, a aceleração dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,(t) &= v\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} = v^2\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} \\ &= \kappa v^2\hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \tag{50}$$

Quer $\hat{\mathbf{v}}$, quer s, quer $\hat{\mathbf{n}}$ são características geométricas da trajectória. Por isso κ, *a taxa de variação da tangente por unidade de comprimento do arco,* é também uma característica da trajectória, designada por *curvatura.*

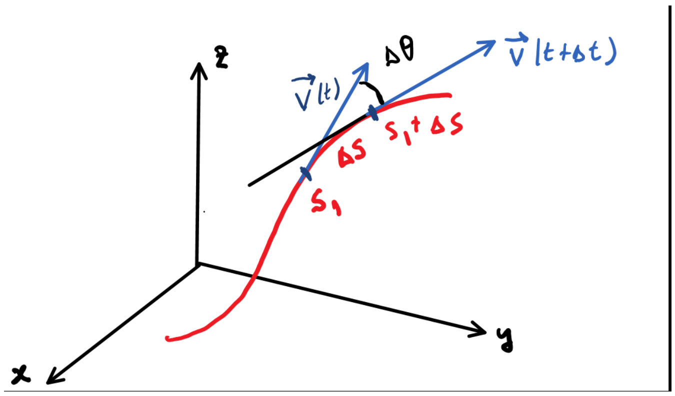

Figura 8: A curvatura κ em s_1 é o limite $\Delta\theta/\Delta s$ quando $\Delta s \to 0$.

Em geral a curvatura varia de ponto para ponto. Quanto maior o ângulo que roda a tangente à trajectória, $\hat{\mathbf{v}}$, por unidade de distância percorrida maior é a curvatura. Se o ângulo que $\hat{\mathbf{v}}$ roda entre s e $s + \Delta s$ for $\Delta\theta$, temos

$$\frac{|\Delta\hat{\mathbf{v}}|}{\Delta s} = 2\,|\hat{\mathbf{v}}|\,\frac{\sin\left(\Delta\theta/2\right)}{\Delta s} = 2\frac{\sin\left(\Delta\theta/2\right)}{\Delta s} \tag{51}$$

No limite em que $\Delta s \to 0$

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\left(\Delta\theta/2\right)}{\Delta\theta/2}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} \tag{52}$$

A curvatura é a *taxa de variação do ângulo da tangente, por unidade de comprimento de arco.* Como as suas dimensões são as do inverso de um comprimento, designa-se por *raio de curvatura* o inverso de κ

$$\kappa = \frac{1}{R}. \tag{53}$$

Conclui-se facilmente desta discussão que no caso geral, em que a velocidade varia em *módulo* e em *direção,* a aceleração tem duas componentes: uma é paralela à velocidade—aceleração tangencial—, e resulta da variação do módulo da velocidade; a segunda é *perpendicular* à velocidade—aceleração normal— e ocorre sempre que a direção da velocidade varia,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\left(t\right) &= \frac{dv(t)}{dt}\hat{\mathbf{v}}\left(t\right) + v(t)\frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}\\ &= \frac{dv(t)}{dt}\hat{\mathbf{v}}(t) + \frac{v^2(t)}{R(t)}\hat{\mathbf{n}}(t)\end{aligned} \tag{54}$$

3.1 Interpretação geométrica do raio de curvatura

Suponhamos que escolhemos três pontos próximos numa curva, A, B e C, que, por simplicidade, supomos plana (Fig. 9). A recta perpendicular ao segmento AB pelo seu ponto

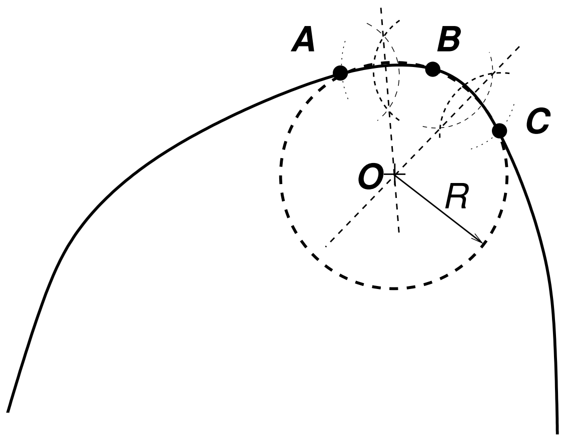

Figura 9: Construção geométrica do raio de curvatura

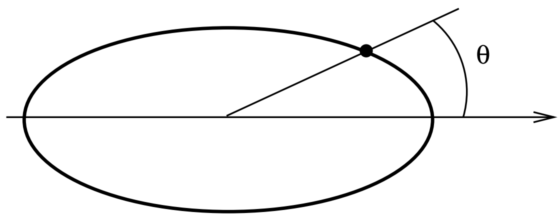

Figura 10: Como varia a raio de curvatura de uma elipse, ao longo da mesma?

médio é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e B. Por isso, a intersecção desta com a perpendicular pelo ponto médio ao segmento BC é um ponto equidistante de A, B e C. Com centro nesse ponto podemos traçar um círculo que passa por estes três pontos A B e C. O raio desse círculo, quando $A \to B$ e $C \to B$, é o raio de curvatura da curva em B. Esta construção dá-nos uma interpretação geométrica de *raio de curvatura.* O círculo que melhor "encosta" à curva em B, no sentido de ser o círculo que passa por três pontos muito próximos, tem um raio que é o raio de curvatura em B.

Repare-se na relação entre este conceito e o de tangente. A tangente indica a direção da curva num dado ponto; é a recta que melhor se aproxima da curva num ponto. O círculo de raio R é, de modo semelhante, o círculo que melhor se ajusta localmente à curva.

Exercício 4.
Na curva da Fig.(10) (uma elipse) podemos identificar cada ponto pelo ângulo $\theta \in [0, 2\pi[$. Esboça um gráfico do raio de curvatura da elipse em função do ângulo θ.

■ O Raio de Curvatura ■

Será que a definição geométrica do texto coincide com a que tiramos das fórmulas de Frenet? Podemos ligar as duas definições usando a nossa representação da curva como trajectória de um movimento $\mathbf{r}(t)$. Tomemos como origem o ponto B da curva ($t = 0$), e suponhamos que A é a posição em $-\Delta t$ e C em $\Delta t > 0$. O centro do círculo é $\mathbf{r}_O$. A equidistância a A B e C ($\mathbf{r}_B = 0$) exprime-se como

$$|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}\,(-\Delta t)| = |\mathbf{r}_O| = |\mathbf{r}_O - \mathbf{r}\,(\Delta t)| \tag{55}$$

ou

$$|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}\,(-\Delta t)|^2 = |\mathbf{r}_O|^2 = |\mathbf{r}_O - \mathbf{r}\,(\Delta t)|^2 \tag{56}$$

Usando $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, tiramos duas equações

$$|\mathbf{r}\,(-\Delta t)|^2 - 2\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{r}(-\Delta t) = 0 \tag{57}$$

$$|\mathbf{r}\,(\Delta t)|^2 - 2\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{r}(\Delta t) = 0 \tag{58}$$

Agora consideramos o limite em que $\Delta t \to 0$, $A \to B$ e $C \to B$. Se usarmos a fórmula de Euler,

$$\mathbf{r}(-\Delta t) \approx -\mathbf{v}(0)\Delta t \tag{59}$$

$$\mathbf{r}(\Delta t) \approx \mathbf{v}(0)\Delta t \tag{60}$$

nas equações anteriores, vem

$$|\mathbf{v}(0)|^2\,\Delta t^2 + 2\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{v}(0)\Delta t = 0 \tag{61}$$

$$|\mathbf{v}(0)|^2\,\Delta t^2 - 2\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{v}(0)\Delta t = 0 \tag{62}$$

de onde concluímos

$$2\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{v}(0) = 0$$

o que está correcto, mas também

$$|\mathbf{v}(0)|^2\,\Delta t^2 = 0$$

o que, em geral, não é verdade. Recordemos que a fórmula de Euler ignora a variação de velocidade no intervalo Δt. Podemos ir um passo mais à frente e tomar a aceleração como constante (não nula) nesse intervalo. Nessa aproximação o movimento no intervalo Δt é

$$\mathbf{r}(-\Delta t) \approx -\mathbf{v}(0)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\,(0)\,\Delta t^2 \tag{63}$$

$$\mathbf{r}(\Delta t) \approx \mathbf{v}(0)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\,(0)\,\Delta t^2 \tag{64}$$

e

$$|\mathbf{v}(0)|^2\,\Delta t^2 + 2\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{v}(0)\Delta t - 2\mathbf{r}_O \cdot \frac{1}{2}\mathbf{a}(0)\Delta t^2 = 0 \tag{65}$$

$$|\mathbf{v}(0)|^2\,\Delta t^2 - 2\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{v}(0)\Delta t - 2\mathbf{r}_O \cdot \frac{1}{2}\mathbf{a}(0)\Delta t^2 = 0 \tag{66}$$

Daqui decorre, como antes, $2\mathbf{r}_O \cdot \mathbf{v}(0) = 0$,o que significa que o vector de posição do centro do círculo limite está na direção normal à velocidade em B, e

$$|\mathbf{v}(0)|^2 = \mathbf{r}_O \cdot \mathbf{a} \tag{67}$$

Como $\mathbf{r}_O$ é normal a $\mathbf{v}(0)$ podemos exprimir este resultado em termos da aceleração normal a_n

$$|\mathbf{v}(0)|^2 = r_O a_n \Longrightarrow a_n = \frac{v_B^2}{r_O} \tag{68}$$

ou seja, a distância do centro do círculo limite a B é o raio de curvatura nesse ponto, tal como o definimos anteriormente.

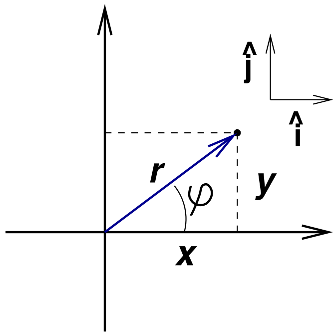

Figura 11: relação entre coordenadas cartesianas e polares.

4 Movimento Circular e Coordenadas Polares

O movimento com trajectória circular é um dos movimentos planos mais simples. Se pensarmos em máquinas que têm peças em rotação (é muito mais difícil pensar em máquinas que *não* têm peças em rotação) vemos que, apesar de simples, tem um papel central na nossa tecnologia.

É óbvio que escolher a origem do sistema de eixos como centro da trajectória simplifica a descrição do movimento. Nesse caso, o raio de curvatura da trajectória—que é constante—, é também a distância à origem, r. Fica claro que, especificando r e o ângulo φ que o vector de posição faz com o eixo Ox, por exemplo, determinamos completamente o vector de posição:

$$\mathbf{r}\left(t\right) = r\left[\cos\left(\varphi\left(t\right)\right)\hat{\mathbf{i}} + \sin\left(\varphi\left(t\right)\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \tag{69}$$

ou

$$x(t) = r\cos\left(\varphi\left(t\right)\right), \tag{70a}$$

$$y(t) = r\sin\left(\varphi\left(t\right)\right). \tag{70b}$$

Em verdade esta transformação não está limitada a um movimento circular. De um modo geral conhecer (x, y) ou (r, φ) são maneiras equivalentes de especificar a posição de um ponto no plano (11).

As Equações

$$x(t) = r(t)\cos\left(\varphi\left(t\right)\right) \tag{71a}$$

$$y(t) = r(t)\sin\left(\varphi\left(t\right)\right) \tag{71b}$$

fixam a transformação $(r, \varphi) \to (x, y)$, e a transformação inversa é fácil de obter[3].

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{72a}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \tag{72b}$$

[3]Note-se que a transformação inversa não está definida para a origem, $(x = 0, y = 0)$. A origem é um ponto em que φ está indefinido.

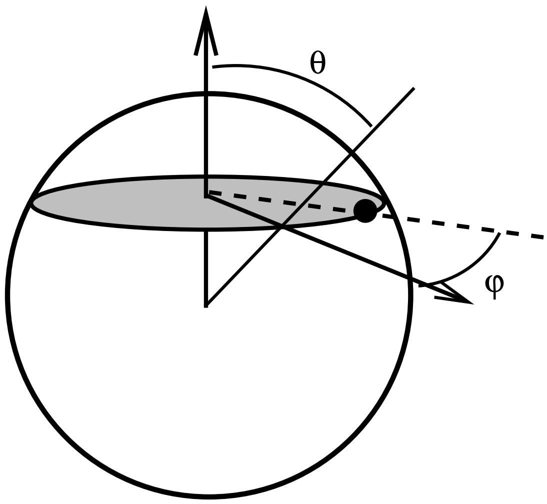

Figura 12: ângulos de latitude (θ) e longitude (φ) na superfície da Terra. A coordenda φ indica a posição num círculo, tal como no caso de coordenadas polares.

As coordenadas (r, φ) designam-se por coordenadas polares e são muito mais convenientes que as coordenadas cartesianas em muitos movimentos, não apenas no movimento circular. A simplificação essencial, nesse caso, é que apenas uma das coordenadas polares, $\varphi(t)$, varia no tempo, uma vez que $r(t)$, a distância à origem, é constante.

Exercício 5.
Um trajectória parabólica é descrita pelas equações

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \\ y(t) &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Obtém expressões para a descrição deste movimento em coordenadas polares $(r(t), \varphi(t))$.

A conveniência de usar coordenadas não cartesianas não é uma novidade. Quando queremos indicar a nossa posição na (superfície da) Terra, usamos dois ângulos, a latitude e a longitude. Para uma latitude fixa, a longitude é uma coordenada semelhante à coordenada polar, indicando a posição num círculo paralelo.

Se queremos descrever um movimento em coordenadas polares, temos que exprimir, não apenas a posição, mas também a velocidade e aceleração, nestas coordenadas. O vector de posição escreve-se em coordenadas polares de modo muito económico

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \hat{\mathbf{e}}_r (\varphi(t)) \tag{73}$$

em que

$$\hat{\mathbf{e}}_r (\varphi) = \cos\varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin\varphi \hat{\mathbf{j}} \tag{74}$$

é o versor da direção radial. Note-se como o próprio versor $\hat{\mathbf{e}}_r$ varia no tempo uma vez que depende da coordenada φ.

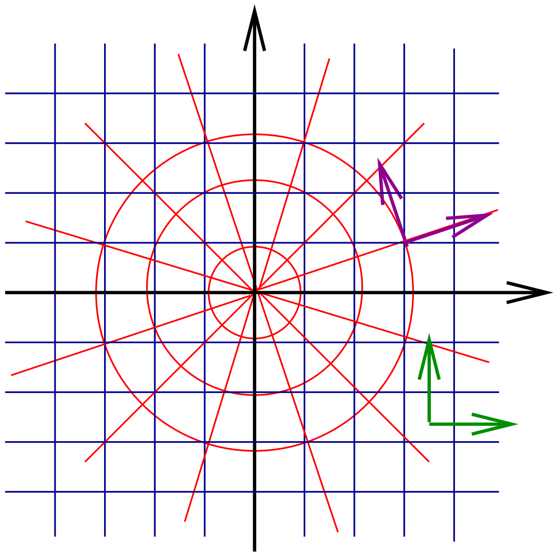

Figura 13: Linhas coordenadas (com uma coordenada constante, nos sistemas de coordenadas cartesianas (azul) e polares (vermelho). Os respectivos versores ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, a verde) e ($\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ a magenta) são tangentes às linhas coordenadas.

Num movimento em que apenas varia r (φ constante) o deslocamento tem a direção de $\hat{\mathbf{e}}_r$. Ora os versores $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ são também as direções de movimentos em que apenas varia uma coordenada: x, no caso de $\hat{\mathbf{i}}$ e y no caso de $\hat{\mathbf{j}}$. Isso sugere a questão de saber se podemos definir um versor na direção de movimento de uma partícula em que apenas φ varia. Mas isso é precisamente um movimento circular. Então, se r é constante

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= r\left[-\left(\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi\left(t\right)\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\left(t\right)\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \\ &= r\frac{d\varphi}{dt}\left[-\sin\varphi\left(t\right)\hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi\left(t\right)\hat{\mathbf{j}}\right] \qquad (75)\end{aligned}$$

O vetor unitário tangente à circunferência é então,

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi\left(\varphi\right) := -\sin\varphi\hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{j}} \qquad (76)$$

Os vectores $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ têm o mesmo papel em coordenadas polares que $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ em coordenadas cartesianas; indicam as direções em que varia apenas uma das coordenadas. O versor $\hat{\mathbf{i}}$ indica a direção em que apenas varia x (y constante) e $\hat{\mathbf{j}}$ em que varia y (x,constante); o versor $\hat{\mathbf{e}}_r$ é a direção em que apenas varia r (φ fixo) e $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ em que apenas varia φ (r constante). A fig. 13 ilustra a relação entre os dois sistemas de coordenadas. A azul estão as linhas de x ou y constante e a vermelhos as de r (círculos) ou φ (raios) constante. Note-se que tal como ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$) e ($\hat{\mathbf{e}}_r$,$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$) são ortogonais. Mas, ao contrário de $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$

variam de ponto para ponto, pois dependem de φ:

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\varphi\hat{\mathbf{i}} + \sin\varphi\hat{\mathbf{j}} \tag{77a}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\varphi := -\sin\varphi\hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi\hat{\mathbf{j}} = \frac{d}{d\varphi}\hat{\mathbf{e}}_r. \tag{77b}$$

Descrever um movimento em coordenadas polares é exprimir a posição, a velocidade e a aceleração, pelas suas projecções nas direções destes versores, $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$. É crucial recordar que os próprios versores variam se variar a coordenada φ.

Para terminar esta introdução a coordenadas polares vamos entao escrever as expressões da velocidade e aceleração; não apenas em termos das coordenadas (r, φ), mas também projectadas segundo os versores $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$. Veremos que essas expressões são muito convenientes em movimentos com rotação. Para esse efeito começamos com o vector de posição que, por definição, só tem componente segundo $\hat{\mathbf{e}}_r$:

$$\mathbf{r}\left(t\right) = r(t)\hat{\mathbf{e}}_r\left(\varphi(t)\right) \tag{78}$$

Ao calcular a velocidade não podemos esquecer que o versor $\hat{\mathbf{e}}_r$ varia no tempo, pois depende de $\varphi(t)$. Assim,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r + r\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r \tag{79}$$

Usando a regra de derivação da função composta[4],

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r = \left(\frac{d}{d\varphi}\hat{\mathbf{e}}_r\right) \times \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{80}$$

ou

$$\mathbf{v}\left(t\right) = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{81}$$

Interpretemos este resultado. A velocidade aparece-nos num dado ponto decomposta segundo duas direções:

- a direção radial de $\hat{\mathbf{e}}_r$;
- e a direção tangente ao círculo centrado na origem que passa nesse ponto, $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

O deslocamento na direção radial é a variação de r, Δr, e por isso essa componente da velocidade é dr/dt. Um deslocamento infinitesimal na direção perpendicular à primeira é um deslocamento sobre um círculo; o deslocamento é $r\Delta\varphi$ e por isso a componente angular da velocidade é $r\left(d\varphi/dt\right)$. A taxa de variação de φ, por razões óbvias, chama-se velocidade angular.

Passemos agora à aceleração:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r\right) + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi\right). \tag{82}$$

[4] $df\left(g(x)\right)/dx = f'\left(g(x)\right) \times g'(x)$

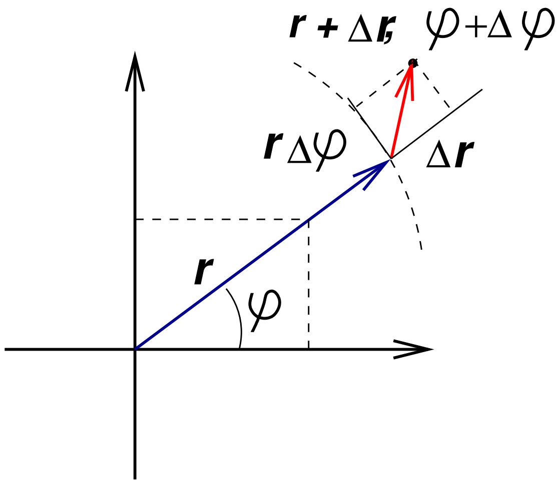

Figura 14: Deslocamento projectado nas direções de $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$.

O cálculo destas derivadas vai gerar vários nos termos, mas no final poderemos entendê-los com facilidade.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{e}}_r\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{d\varphi} \tag{83}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{84}$$

O segundo termo é mais complexo

$$\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi\right) = \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{85}$$

Para calcular a última expressão, usamos o mesmo procedimento que usámos para derivar $\hat{\mathbf{e}}_r$

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\left(-\hat{\mathbf{e}}_r\right) \tag{86}$$

O último passo obtém-se das definições dos versores $\hat{\mathbf{e}}_r$ e $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$. Juntando termos, obtemos a expressão completa da aceleração:

$$\mathbf{a}(t) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{87}$$

Vejamos agora a razão do aparecimento destes termos, considerando alguns casos particulares. No caso em que $\varphi = \mathsf{const}$, fica apenas

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{\mathbf{e}}_r \qquad \text{para } \varphi = \mathsf{const} \tag{88}$$

que é o esperado para um movimento que é rectilíneo na direcção de $\hat{\mathbf{e}}_r$. Por outro lado, se $r = \mathsf{const}$, a trajectória é circular. Obtemos

$$\mathbf{a}(t) = \left[-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\hat{\mathbf{e}}_r + \left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\hat{\mathbf{e}}_\varphi \qquad \text{para } r = \mathsf{const}, \tag{89}$$

Neste caso a direção radial é normal à trajectória e o termo $-r\left(d\varphi/dt\right)^2$ é aceleração normal: dirigida para o centro da trajectórias e de módulo

$$a_n = r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\left(r^2 d\varphi/dt\right)^2}{r} = \frac{v_\varphi^2}{r}, \tag{90}$$

um resultado conhecido. Mas note-se que este movimento não tem necessariamente velocidade constante em módulo e por isso tem em geral uma aceleração tangencial (na direção de $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$) não nula. Ora como

$$\mathbf{v} = r\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{91}$$

temos

$$v = r\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \tag{92}$$

e por essa razão

$$r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \begin{cases} \frac{dv}{dt} & \frac{d\varphi}{dt} > 0 \\ -\frac{dv}{dt} & \frac{d\varphi}{dt} < 0 \end{cases} \tag{93}$$

Note-se que o versor da velocidade é $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{e}}_\varphi$ se a trajectória é percorrida no sentido anti-horário ($d\varphi/dt > 0$), e $\hat{\mathbf{v}} = -\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ se percorrida no sentido horário ($d\varphi/dt < 0$). Por outras palavras

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt}\hat{\mathbf{v}} \tag{94}$$

a fórmula de Frenet para a aceleração tangencial.

A expressão mais geral, válida para *qualquer* movimento é a da Eq. 87; o termo mais difícil de relacionar com os casos que já conhecemos é precisamente aquele que só ocorre se variarem r e φ,isto é,

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{95}$$

Seja como for, convém não esquecer que a expressão da Eq.(87) aplica-se a *qualquer* tipo de movimento. Pode parecer desnecessariamente complicada, em comparação com a expressão equivalente em coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}}, \tag{96}$$

mas, na verdade, existem inúmeros casos de movimentos em que a análise é muito mais conveniente em coordenadas polares. À frente veremos exemplos.

Antes de terminar convém chamar a atenção para uma confusão comum. A coordenada r *não é o raio de curvatura,* excepto no caso de uma trajectória circular; é a distância à origem. As direções dos versores, *não são as direções normal e tangente à trajectória* excepto no caso do movimento circular. Assim, os dois termos da Eq. 87 não devem ser identificados com as acelerações normal e tangencial.