Descrição de Movimento

Lições de Mecânica

J. M. B. Lopes dos Santos*

Departamento de Física e Astronomia,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
4169-007 Porto

Uma introdução aos conceitos de velocidade e aceleração.

1 Descrição do Movimento

Há quem pense que o progresso da ciência consiste em alcançar cada vez mais respostas seguras para as perguntas que a Humanidade espontaneamente se coloca. Na verdade, o progresso resultou, frequentemente, de alterar as perguntas que se fazem. No nascimento da ciência moderna, com Galileu, no século XVII, encontramos um exemplo disso mesmo. A preocupação com as *causas* do movimento de Aristóteles e dos seus inúmeros seguidores, é por Galileu substituída pelo interesse na *descrição* do movimento. E foi por esta via que a a matemática passou a ser o idioma da Física.

Como podemos então descrever o movimento de um corpo? Para simplificar, vamos ignorar a sua extensão finita—as suas diferentes partes têm posições diferentes—, e imaginar que podemos especificar a sua posição como se de um ponto se tratasse. Simplificando ainda mais suponhamos que o nosso corpo se desloca numa linha, marcada na Fig. 1. Como é que alguém me pode indicar a posição atual do corpo nessa linha?

Se pensarmos um pouco vemos que os pontos de uma linha *não têm nome*. Não são entidades únicas e irrepetíveis como nós: são todos iguais! Por isso para localizar os pontos de uma linha precisamos de duas coisas:

1. Escolher uma origem: marcar um ponto na recta, relativamente ao qual vamos definir a posição do corpo;

2. Escolher um sentido de modo a fixar de que lados da origem as coordenadas são positivas e negativas.

*jlsantos@fc.up.pt

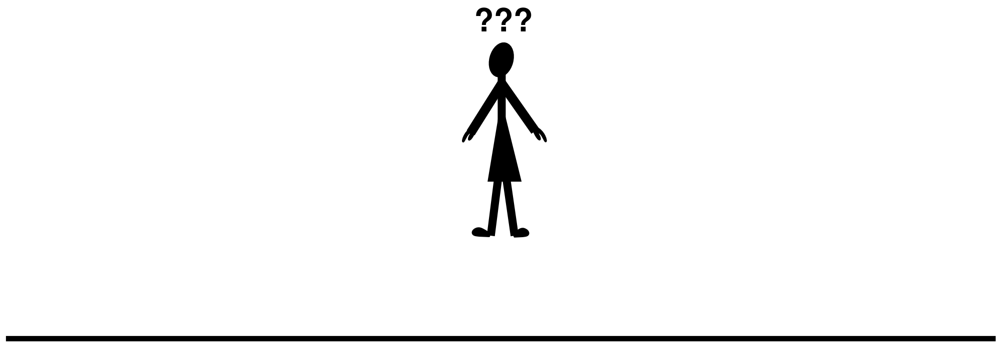

Figura 1: Um corpo desloca-se neste linha. Como localizá-lo?

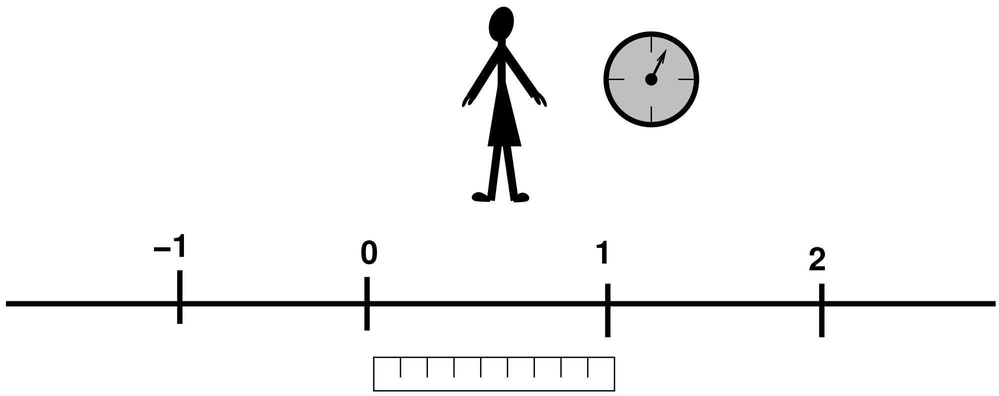

Figura 2: Um referencial, réguas e relógios permitem uma descrição matemática do movimento.

Uma vez fixadas estas condições, só precisamos de réguas para medir distâncias, e relógios para medir tempos para podermos atribuir a cada corpo em movimento uma coordenada x em cada instante t

$$t \mapsto x \qquad x, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

O movimento passa a ser então definido por uma função $x(t)$. O objectivo destas considerações é mostrar que esta especificação do movimento está associada à escolha de um *referencial,* e à escolha de escalas de medida para tempos e distâncias. O referencial pode ser determinado pela escolha de dois corpos, A e B tomados como fixos um em relação ao outro, que definem a a linha do movimento (recta AB), a origem (por exemplo A) e o sentido das coordenadas positivas (de A para B).

Esta descrição do movimento por uma função $x(t)$ presta-se a uma representação gráfica como para qualquer função: um exemplo é apresentado na Fig. 3.

Um exercício útil consiste em pousar um lápis numa folha de papel e tentar mover a ponta do lápis de modo a reproduzir o movimento representado. Se no final não tiver obtido o desenho de uma só linha, terá falhado o exercício, porque a representação gráfica não pode ser confundida com uma trajectória! O movimento representado na Fig. 3 é

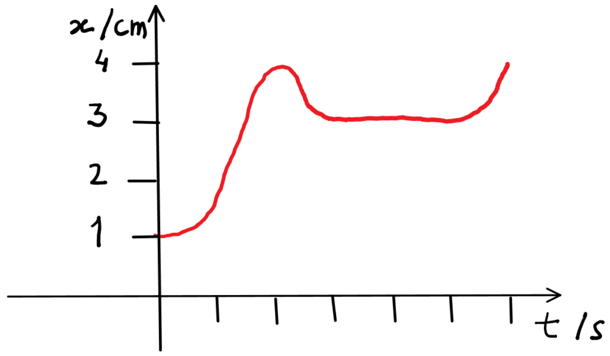

Figura 3: Gráfico da coordenada de uma movimento. O eixo das abcissas e de tempo. O gráfico não representa uma trajectória!

uni-dimensional (1D): O corpo (o lápis) parte do repouso, desloca-se para a direita 3 cm, pára e inverte o movimento; desloca-se 1cm para a esquerda, pára durante cerca de 3 segundos e desloca-se de novo 1 cm para a direita, após o que termina a informação que temos do movimento.

1.1 Deslocamento

Movimento é alteração de posição. Daí que um conceito fundamental seja o de *deslocamento* que não é mais que a variação de posição. A variação de uma grandeza, x, é definida sempre como a diferença entre os seus valores, o final menos o inicial, e designada pelo símbolo Δ

$$\Delta x = x(t_f) - x(t_i) \tag{2}$$

Duas notas importantes:

1. O sinal do deslocamento determina sentido (líquido) do movimento no intervalo $[t_i, t_f]$: se $\Delta x > 0$, $x(t_f) > x(t_i)$ e o movimento foi no sentido definido como positivo; se $\Delta x < 0$ o movimento foi no sentido negativo.

2. O deslocamento informa-nos sobre o resultado líquido do movimento no intervalo, $[t_i, t_f]$, mas nada nos diz sobre o que se passou entre os instantes inicial e final.

Assim, se a Maria caminhar um quilómetro para norte e depois regressar ao ponto de partida, diremos que o seu deslocamento foi nulo. À primeira vista parece um conceito bizarro para descrever em geral um movimento. Ao fim e ao cabo a Maria caminhou dois quilómetros. O ponto importante é que temos liberdade de dividir um intervalo de tempo do modo que quisermos e os deslocamentos sucessivos somam-se simplesmente para determinar o deslocamento total. Assim para uma sequência de tempos t_0, t_1, e t_2

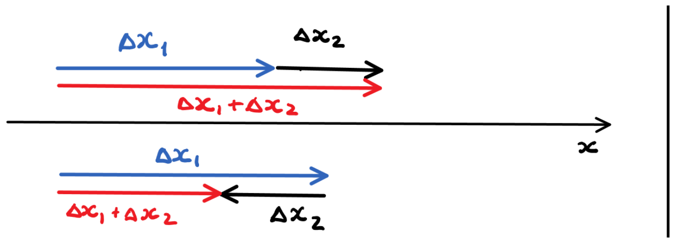

Figura 4: Soma de vectores 1D

$$\Delta x_1 = x\left(t_1\right) - x\left(t_0\right) \tag{3a}$$
$$\Delta x_2 = x\left(t_2\right) - x\left(t_1\right) \tag{3b}$$
$$\Delta x = x\left(t_2\right) - x\left(t_0\right) = \Delta x_1 + \Delta x_2 \tag{3c}$$

Os deslocamentos podem ser representados vectores, segmentos unindo os pontos inicial e final do deslocamento. Ora se identificámos o deslocamento com Δx , isso implica que, independentemente de qual é o ponto de partida, deslocamentos com o mesmo valor de Δx são *o mesmo deslocamento.* Do mesmo modo, segmentos com o mesmo comprimento (módulo $|\Delta x|$) e mesmo sentido (sinal de Δx) são o *mesmo vector.* Não importa pois o local onde representamos o vector. Como vemos na Fig. 4, a soma de vectores representa, de modo muito directo, a composição de deslocamento: representamos um vector a partir da extremidade do outro e o vector soma une a base do primeiro com a extremidade do segundo.

1.2 Velocidade Média

Confrontados com a seguinte pergunta,

> O carro A percorre 1300 metros em 40 segundos; o carro B 2100 metros em 60 segundos. Qual é o mais veloz?

iríamos talvez calcular a velocidade média:

- Carro A
$$v_m = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{x(40) - x(0)}{40} = 32.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}; \tag{4}$$

- Carro B
$$v_m = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} = \frac{x(60) - x(0)}{60} = 35\,\mathrm{m\,s^{-1}}; \tag{5}$$

e concluiríamos que B foi mais rápido. Pensemos um pouco nesta operação. Os carros tiveram deslocamentos diferentes em tempos diferentes. Ao dividir o deslocamento pelo intervalo de tempo, ou seja pelo número de segundos, estamos a determinar o deslocamento que cada carro teria feito num segundo se o seu movimento mantivesse as suas

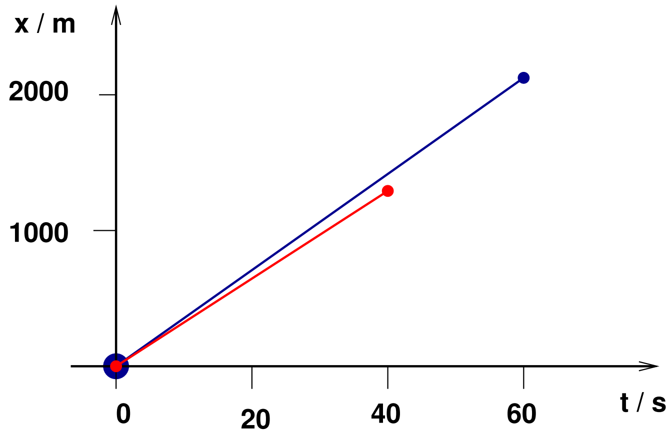

Figura 5: O carro B é mais rápido; o declive da recta azul é superior ao da vermelha.

características em todo o intervalo em que o carro se moveu. Como obtivemos deslocamentos médios referidos ao mesmo intervalo de tempo (a unidade) podemos compará-los e concluir que o carro B no mesmo intervalo de tempo deslocou-se mais do que A. Assim, para cada intervalo de tempo $[t_i, t_f]$ definimos a *velocidade média,* ou o deslocamento por unidade de tempo

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Podemos representar a informação acima graficamente na Fig. 5. A leitura deste gráfico mostra que o carro B foi, marginalmente, mais rápido. A velocidade média $v_m = \Delta x/\Delta t$ é a razão entre a diferença de ordenadas e a diferença de abcissas de dois pontos da recta, ou seja o declive da recta que une dois pontos (t, x) do movimento. É claro que o declive da recta a azul é superior ao da vermelha. Note-se, contudo, que a velocidade média não é a tangente do ângulo com o eixo de abcissas. Os eixos tem dimensões diferentes, escalas independentes. A razão tem dimensões LT^{-1}. Um ângulo definido por duas linhas no espaço, é uma razão entre comprimentos e é adimensional; mas neste caso a linha que representa o movimento, o gráfico da função $x(t)$, não é uma linha no espaço: um dos eixos do gráfico é o *tempo:* não se pode medir a velocidade média no gráfico de $x(t)$ com um transferidor!

Mas o que representam os segmentos de recta a unir os pontos iniciais e finais do movimento? Será que podemos ler neles as posições intermédias dos carros? Se assim for, em qualquer intervalo de tempo que tomemos entre os instantes $t_i = 0$ e $t_f = 40$ (60 para B) a velocidade média será a mesma pois o declive é uma característica da recta. Da equação de uma recta, no plano (t, x)

$$x(t) = mt + b \tag{6}$$

$$t \in [t_1, t_2]: \qquad v_m = \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} = \frac{m(t - t_1)}{t - t_1} = m \tag{7}$$

Isto é, um movimento em que o gráfico de $x(t)$ é uma recta é um *movimento uniforme*: a velocidade média é igual para qualquer intervalo de tempo. Mas é óbvio que essa não

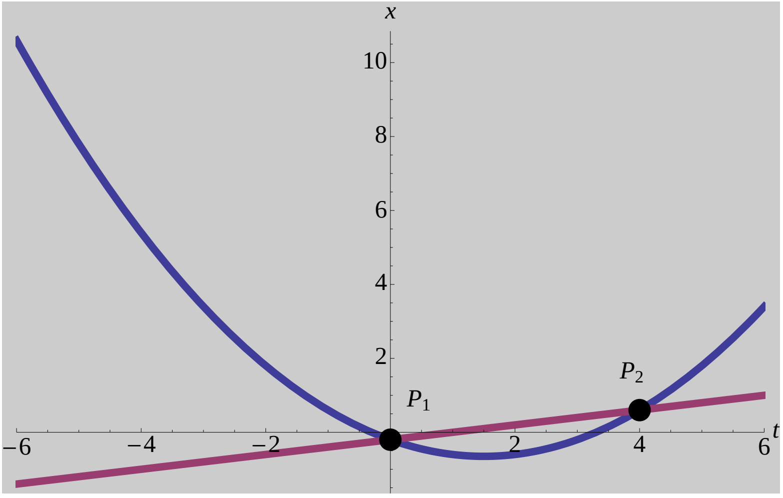

Figura 6: Dois movimentos com a mesma velocidade média no intervalo $[t_1 = 0, t_2 = 4]$.

é a situação geral. Conhecer as posições em apenas dois instantes nada nos diz sobre o que se passou entre eles. Assim no gráfico da Fig. 6 temos dois movimentos (gráficos azul e magenta) com a mesma velocidade média no intervalo $[t_1 = 0, t_2 = 4]$; a definição de velocidade média dá

$$v_m = \frac{x\,(P_2) - x\,(P_1)}{t\,(P_2) - t\,(P_1)}$$

e as coordenadas (t, x) em P_1 e P_2 são as mesmas para os dois gráficos. A recta que passa em P_1 e P_2—secante ao gráfico a azul— representa um movimento uniforme *com a mesma velocidade média* que a do corpo A, cujo gráfico $x(t)$é a curva azul, nesse intervalo. Por outras palavras, a secante de uma curva do gráfico de $x(t)$, nos dois pontos (t_1, x_1), (t_2, x_2) representa um movimento uniforme com a mesma velocidade média no intervalo $[t_1, t_2]$.

1.3 Velocidade instantânea

Vimos que a velocidade média é sempre referida a um intervalo de tempo finito $[t_1, t_2]$. Faz sentido falar na velocidade num instante? Imaginemos que tiramos uma fotografia a uma corrida de automóveis. Se o tempo de exposição for longo a imagem dos carros ficará indefinida, porque estes se deslocam durante o tempo de exposição. Mas se o tempo de exposição for suficientemente curto, será impossível distinguir na fotografia um carro em movimento de um carro parado. Num *instante não há deslocamento.* Entre t e t, $x(t)$ não varia e $\Delta x = x(t) - x(t) = 0$. Como se pode então falar na velocidade num instante?

Os gregos que levaram a geometria a um nível tal, com Euclides, que mais de 2000 anos depois ainda a estudámos, não deram uma resposta útil a esta questão. A matemática que nos permite responder a esta questão foi descoberta (criada?) no século XVII, independentemente por Newton e Leibniz.

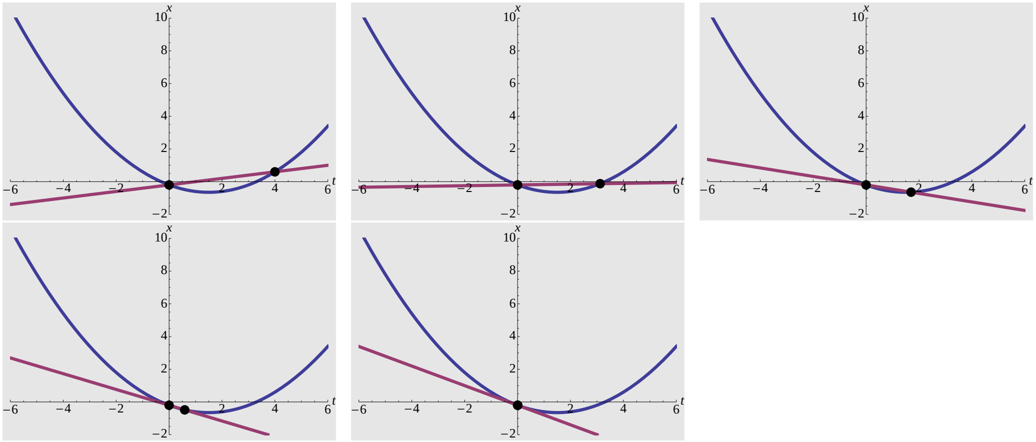

Figura 7: A sequência de secantes quando $t_2 \to t_1$ tem como limite a tangente à curva, e o seu declive é a velocidade instantânea $v(t_1)$

Olhando para o gráfico da Fig. 6 podemos imaginar aproximar o instante final t_2 do inicial t_1. O deslocamento $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ ficará cada vez mais pequeno; mas o mesmo acontece com o intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ e intuitivamente sentimos que o declive da secante, a razão

$$\frac{\Delta x}{\Delta t},$$

em que quer o numerador que o denominador tendem para zero, terá um limite definido, correspondente ao declive a curva limite das secantes, quando $t_2 \to t_1$, o declive da tangente à função $x(t)$ em $t = t_1$. Esse valor é a *velocidade no instante* t_1

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{8}$$

O problema que confundiu os gregos antigos fica assim resolvido. Não é possível a partir do conhecimento da posição num instante t ficar a saber a velocidade de um corpo; mas considerando intervalos de tempo cada vez mais pequenos em torno de t (Δt pode ser positivo ou negativo) e o limite em $\Delta t \to 0$ podemos chegar a um conceito de velocidade num instantânea, $v(t)$.

Se para $\Delta t > 0$ tivermos $\Delta x > 0$, o corpo desloca-se no sentido positivo do eixo Ox e $\Delta x/\Delta t > 0$. Se ambos forem negativos, $\Delta t < 0$ e $\Delta x < 0$, de modo que $\Delta x/\Delta t > 0$ o sentido de movimento é o mesmo: $x(t_f) < x(t_1)$, mas t_f é *anterior* a t_1. Assim se $v(t) > 0$ o movimento é no sentido positivo de Ox; se $v(t) < 0$ no sentido oposto.

Um vez que em cada instante t podemos definir uma velocidade, $t \mapsto v(t)$, podemos, como fizemos com a coordenada de posição, representar esta função graficamente. Mas os gráficos de $x(t)$ e $v(t)$ estão relacionados. Se os representarmos com o mesmo eixo temporal o valor no gráfico de $v(t)$ é o declive da tangente ao gráfico de $x(t)$ no mesmo instante.

Na Fig. 8 representamos um movimento $x(t)$ e dois gráficos de velocidade: consegue ver qual deles é que corresponde ao da velocidade do movimento descrito por $x(t)$?

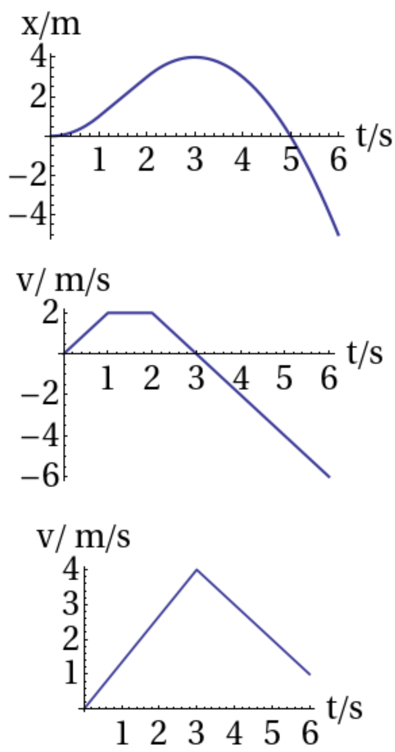

Figura 8: Gráfico de $x(t)$ e dois gráficos de velocidade. Qual deles é o de velocidade do movimento descrito por $x(t)$?

De facto é o gráfico do meio que representa a velocidade deste movimento. Se tentarmos imaginar a tangente à curva de $x(t)$, enquanto variamos a coordenada de tempo, vemos que a tangente começa horizontal (declive e velocidade nulos). A curvatura inicial de $x(t)$ é positiva, ou seja, à medida que t cresce a tangente roda no sentido anti-horário e o declive e velocidade aumentam. Mas em $t = 3$ a tangente é de novo horizontal e a velocidade é nula, o que não se verifica no gráfico de baixo. No intervalo entre $t = 1\,\mathsf{s}$ e $t = 2\,\mathsf{s}$ o gráfico da velocidade é constante, o que implica que a função $x(t)$ tem um gráfico nesse intervalo que é um segmento de recta. Para $t \gtrsim 2$ a curvatura de $x(t)$ é negativa, isto é, a tangente roda no sentido horário, e o seu declive (velocidade) diminui, tornando-se negativa a partir de $t = 3\,\mathsf{s}$.

2 Determinar $x(t)$ a partir de $v(t)$

A velocidade média foi definida como a razão entre um deslocamento (variação de coordenada de posição), $\Delta x := x_f - x_i$ e o intervalo de tempo em que ocorre, $\Delta t := t_f - t_i$,

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \tag{9}$$

É fácil resolver esta expressão em ordem a x_f, a posição final

$$x_f = x_i + v_m \Delta t = x_i + v_m \left(t_f - t_i\right) \tag{10}$$

Suponhamos que resolvíamos generalizar esta expressão a qualquer valor de $t \in [t_i, t_f]$, escrevendo

$$x(t) = x_i + v_m \left(t - t_i\right) \tag{11}$$

Não é difícil reconhecer nesta expressão a lei do movimento uniforme, velocidade constante. Mas, obviamente, esta expressão não é válida em geral, pois a velocidade média no intervalo $[t_i, t]$ não tem o mesmo valor que no intervalo original $[t_i, t_f]$. A Eq. 11 só vale se o movimento for de velocidade constante no intervalo considerado, isto é, se o gráfico de $x(t)$ for uma recta.

A velocidade instantânea foi definida como o limite da velocidade média quando o intervalo $\Delta t \to 0$. Usando a notação mais comum em física

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x\left(t + \Delta t\right) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{12}$$

Como o último membro está escrito como uma fração, seria tentador escrever

$$dx = v(t)dt. \tag{13}$$

Mas é evidente que dx/dt não é uma fração. Quer o numerador $\Delta x := x\left(t + \Delta t\right) - x(t)$, que o denominador são nulos no limite $\Delta t \to 0$, por isso o limite da razão não é a razão dos limites. Mas os físicos escrevem muitas vezes a expressão da Eq. 13: que querem dizer?

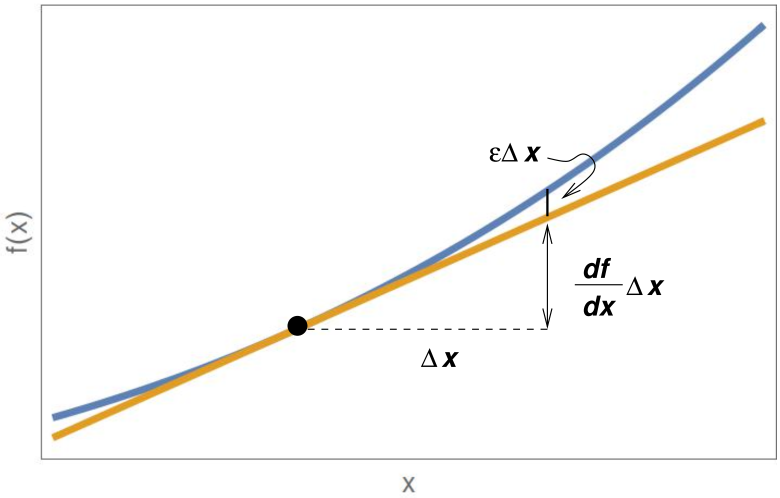

Figura 9: A aproximação de Euler, $f(x+\Delta x) \approx f(x) + (df/dx)\,\Delta x$ corresponde a aproximar gráfico de f pela tangente.

Se denotarmos por ϵ a diferença entre a velocidade média no intervalo $[t, t+\Delta t]$ e a velocidade instantânea em t,

$$\epsilon = \frac{x\,(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} - v(t) = \frac{x\,(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} - \frac{dx}{dt} \tag{14}$$

é evidente da definição de $v(t)$, que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \epsilon = 0 \tag{15}$$

Então

$$\frac{x\,(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v(t) + \epsilon \tag{16}$$

ou

$$x\,(t+\Delta t) - x\,(t) = v(t)\Delta t + \epsilon \Delta t \tag{17}$$

Se pudéssemos ignorar o último termo, teríamos

$$x\,(t+\Delta t) - x\,(t) = v(t)\Delta t \tag{18}$$

que corresponde precisamente a supor que o movimento é uniforme no intervalo $[t, t+\Delta t]$ com velocidade $v(t)$. Ora se $v(t) \neq 0$,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\epsilon \Delta t}{v(t)\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\epsilon}{v(t)} = \frac{0}{v(t)} = 0. \tag{19}$$

Por outras palavras, os dois últimos termos da Eq. 17 tendem ambos para 0 quando $\Delta t \to 0$, mas o último, $\epsilon \Delta t$ é um *infinitésimo de ordem superior*, no sentido em a sua razão com o segundo termo, $v(t)\Delta t$, *também vai a zero.* Em resumo, para Δt

suficientemente pequeno o termo $\epsilon\Delta t$ é desprezável comparado com o segundo termo e podemos aproximar

$$x(t + \Delta t) - x(t) \approx v(t)\Delta t \tag{20}$$

ou

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + v(t)\Delta t \tag{21}$$

É evidente que, quando $\Delta t \to 0$, $v(t)\Delta t \to 0$ e $x(t + \Delta t) - x(t) \to 0$. Mas se o que queremos é calcular a variação Δx, a aproximação por $v(t)\Delta t$ torna-se cada vez melhor à medida que $\Delta t \to 0$. É isto que queremos dizer ao afirmar que aproximação vale para Δt *suficientemente pequeno.* A maneira como os físicos traduzem esta ideia é através da substituição do símbolos Δx ou Δt, de uma variação finita, por dx e dt para *variações infinitesimais.* O significado da Eq. 13 é na realidade a Eq. 20. Para um valor de Δt finito a Eq. 21—fórmula de Euler—, é uma aproximação.

Vamos ver como este conceito é útil para analisar o problema de determinar $x(t)$ se conhecermos $v(t)$.

Exercício 1.
Uma maneira de consolidar a compreensão da fórmula de Euler é aplicá-la num exemplo concreto, Toma $x(t) = \sin(\omega t)$,$\omega = 1\,\mathsf{rad\,s}^{-1}$ e investiga o deslocamento para intervalos à volta de $t = 1$. (a) Toma $\Delta t = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ e calcula o deslocamento $\Delta x(t + \Delta t) - x(t)$ usando a expressão exata e a fórmula de Euler. Calcula o erro relativo da aproximação. (b) Repete para valores negativos de Δt

---

3 Integração como soma de variações infinitesimais

Dado $v(t)$, podemos determinar $x(t)$? É óbvio que não. Suponhamos que dado $v(t)$ descobríamos uma função $f(t)$

$$x(t) = f(t) \tag{22}$$

tal que

$$v(t) = \frac{df}{dt} \tag{23}$$

É evidente que o movimento

$$x_1(t) = a + f(t), \tag{24}$$

obtido somando uma constante à nossa solução, é um movimento com a mesma velocidade, $v(t)$.

Então reformulemos a questão: se souber o valor da coordenada $x(t_0) = x_0$ num dado instante, e $v(t)$ para todo o t, consigo determinar o movimento $x(t)$?

Dois movimentos $f(t)$ e $g(t)$ que tenham a mesma velocidade $v(t)$, só diferem de uma constante:

$$v(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{dg}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(f(t) - g(t)\right) = 0 \Rightarrow f(t) - g(t) = \text{const.} \tag{25}$$

É claro que só um deles pode satisfazer a condição

$$x(t_0) = x_0. \tag{26}$$

Como calcular então $x(t)$?

A fórmula de Euler, Eq.(21) diz-nos que

$$x(t_0 + \Delta t) = x(t_0) + v(t_0)\Delta t \tag{27}$$

e as quantidades do segundo membro são conhecidas. Mas por outro lado esta fórmula só vale no limite em que $\Delta t \to 0$. Dividamos então o intervalo $[t_0, t]$ num grande número, $N \gg 1$, de pequenos intervalos

$$\Delta t = \frac{t - t_0}{N} \tag{28}$$

tal que

$$t = t_0 + N\Delta t \tag{29}$$

e apliquemos a fórmula de Euler sucessivamente

$$\begin{aligned} x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) &= v(t_0)\Delta t && \text{(30a)} \\ x(t_0 + 2\Delta t) - x(t_0 + \Delta t) &= v(t_0 + \Delta t)\Delta t && \text{(30b)} \\ &\vdots && \text{(30c)} \\ x(t_0 + N\Delta t) - x(t_0 + (N-1)\Delta t) &= v(t_0 + (N-1)\Delta t)\Delta t && \text{(30d)} \end{aligned}$$

A soma das variações de x em cada intervalo dá a variação total. Assim

$$\begin{aligned} x(t_0 + N\Delta t) - x(t_0) &= v(t_0)\Delta t + v(t_0 + \Delta t)\Delta t + \cdots + v\left(t_0 + (N-1)\Delta t\right)\Delta t \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} v(t_0 + i\Delta t)\Delta t \end{aligned} \tag{31}$$

Agora usamos o facto de esta fórmula aproximada se tornar exata no limite em que o intervalo $\Delta t \to 0$ ou seja $N \to \infty$. O limite desta soma é o *integral* da função $v(t)$ no intervalo $[t_0, t]$

$$x(t) - x(t_0) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} v(t_0 + i\Delta t)\Delta t := \int_{t_0}^{t} v(t')dt'. \tag{32}$$

Um representação gráfica deste conceito está ilustrado na Fig. 10. O gráfico representa a velocidade e o intervalo entre t_0 t_f foi dividido em 5 intervalos com $\Delta t = (t_f - t_0)/5$ com $t_n = t_0 + \Delta t$ e $n = 0, 1, \ldots 4$. A soma

$$\sum_{n=0}^{4} v(t_0 + n\Delta t)\Delta t \tag{33}$$

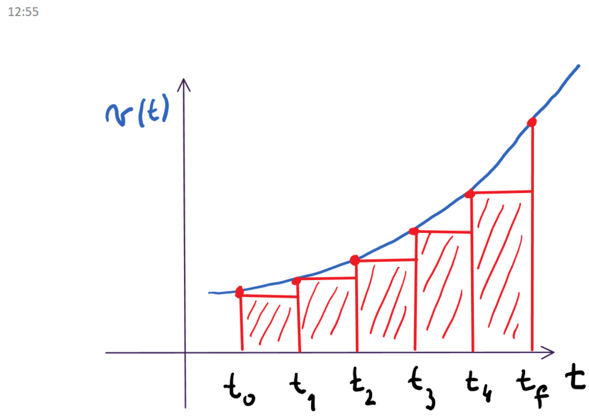

Figura 10: Cálculo do deslocamento entre t_0 e t_f a partir da velocidade usando a aproximação de Euler e 5 intervalos.

é a área dos rectângulos marcados a vermelho[1]. Em cada intervalo estamos a assumir uma velocidade constante, ou seja um movimento uniforme. Mas em cada instante t_n temos uma velocidade diferente. Quando o intervalo $\Delta t \to 0$ e o número de intervalos $N \to \infty$ o valor da soma deve convergir para a área do gráfico de $v(t)$ que é o deslocamento $\Delta x = x(t_f) - x(t_0)$. Note-se que para um valor de $v(t) < 0$ a contribuição será negativa (o deslocamento nesse intervalo é no sentido negativo do eixo).

Agora que sabemos o que querem dizer estas manipulações, eis o que um físico poderia escrever:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Longrightarrow dx = v(t)dt \tag{34}$$

$$\int_{x_i}^{x_f} dx = x_f - x_i = \Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v(t)dt \tag{35}$$

A forma do símbolo de integral $\int$ é um S deformado, e sugere a sua origem: uma soma.

4 Aceleração

Um vez compreendida a relação entre $x(t)$ e $v(t)$, o conceito de aceleração nada trás de essencialmente novo. Como vimos, a velocidade resume a variação de $x(t)$. Podemos então, definir a aceleração como caracterizando a *variação de velocidade instantânea,* $v(t)$.

Assim a aceleração média , no intervalo $[t_1, t_2]$ é

$$a_m = \frac{v\,(t_2) - v\,(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{36}$$

[1]Esta "área" é o produto de uma velocidade por um tempo. Por isso as suas unidades são as de um comprimento

e a aceleração instantânea

$$a(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v\,(t_2) - v\,(t_1)}{t_2 - t_1} := \frac{dv}{dt} \tag{37}$$

Numa representação gráfica de $v(t)$, a aceleração instantânea é dada pelo declive. Mas numa representação gráfica de $x(t)$, a aceleração é determinada *pelo modo como varia o declive, isto é, como varia* $v(t)$. Se o declive aumenta com t, a tangente roda no sentido anti-horário, a aceleração é positiva; se o declive diminui com t, a tangente roda no sentido horário, a aceleração é negativa. Não é difícil ver que no primeiro caso a curvatura de $x(t)$ é positiva e no segundo negativa. Os zeros de aceleração são os extremos de $v(t)$. No gráfico de $x(t)$ são pontos onde o sentido de rotação da tangente se inverte, ou seja, pontos de inflexão.

A notação habitual para a aceleração é sugerida pela relação

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{38}$$

As dimensões da aceleração também podem ser lidas desta expressão. Os operadores d designam diferenças (adimensionais) e $\left[d^2x\right] = L$ e $\left[dt^2\right] = T^2$ pelo que

$$[a] = LT^{-2}. \tag{39}$$

Obviamente, destas definições resulta também

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt. \tag{40}$$