

Problemas de Fermi

Lições de Mecânica

J. M. B. Lopes dos Santos*

Departamento de Física e Astronomia,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
4169-007 Porto

Enrico Fermi foi um físico excepcional, que, entre muito outros feitos, se notabilizou pela capacidade de estimar grandezas com escassez quase total de informação. Os problemas abordados com a técnica de Fermi ficaram conhecidos por Problemas de Fermi.

1 Problemas de Fermi

Enrico Fermi (1901-1954) foi um físico italiano excepcional, prémio Nobel da Física em 1938, orientador de doutoramento de uma lista de físicos notáveis (que inclui três prémios Nobel), e construtor do primeiro reactor nuclear. Fermi foi o último físico capaz de trabalho de qualidade Nobel, quer em Física Experimental, quer em Física Teórica.

Ficou também famoso pela sua capacidade de fazer estimativas com base em quase nenhuma informação. No primeiro teste nuclear, *Trinity test* em 1945, Fermi terá deixado cair uma folha de papel, e, com base no seu deslocamento com a onda de choque da explosão, estimou a energia da explosão em toneladas de TNT, tendo errado apenas por um factor de 2.

Antes de ler estas notas é essencial ver o vídeo *A clever way to estimate enormous numbers* de Michael Mitchell[2], que explica o modo como Fermi estimou o número de afinadores de piano em Chicago (onde construiu o primeiro reactor nuclear).

2 Notação científica

Em Física e Engenharia a notação científica é essencial para exprimir grandezas cujos valores podem ter enormes variações. Assim, por exemplo, a Massa do Sol é

$$M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (1)$$

*jlsantos@fc.up.pt

1. Quantos carros ligeiros novos se vendem em Portugal por ano?
2. Quantas árvores há em Portugal?
3. Quantas farmácias há no Porto?
4. Qual é a massa de um grão de areia?
5. Quantos habitantes tem um país com 100 000 nascimentos por ano?
6. Quantos médicos de família precisa um concelho com 50 mil habitantes?

Imaginar um problema deste tipo e tentar resolvê-lo é um excelente exercício. O Google permite depois verificar a nossa estimativa e afinar as nossas *Fermi skills*.

3 Exemplos

3.1 Quantos carros ligeiros novos se vendem em Portugal por ano?

A população portuguesa é cerca de 10 milhões

$$P \sim 10^7. \quad (8)$$

Para um agregado médio familiar de 3 pessoas, o número de famílias

$$F \sim \frac{P}{3} \sim 3 \times 10^6 \quad (9)$$

Com um carro em média por família, o número de carros em circulação.

$$C \sim 3 \times 10^6 \text{ carros.}$$

Um carro dura mais que 1 ano e menos que 100. Por isso a vida média de um carro pode ser estimada como

$$V \sim 10 \text{ anos} \quad (10)$$

Isto quer dizer que em 10 anos a população de automóveis é substituída, ou seja, em 10 anos vendem-se 3×10^6 carros:

$$\text{Carros vendidos por ano} \sim 3 \times 10^5 \sim 300 \text{ mil.} \quad (11)$$

Segundo informação dos meios de comunicação, no primeiro *semestre* de 2010, o número de carros ligeiros vendidos em Portugal foi 147 000!

3.2 Quantas árvores há em Portugal Continental?

Portugal continental é um rectângulo de cerca de $200 \times 600 \text{ km}^2$, com área

$$A \sim 12 \times 10^4 \times 10^6 = 1,2 \times 10^{11} \text{ m}^2; \quad (12)$$

se metade da área for de floresta,

$$A_f \sim \frac{A}{2} \sim 6 \times 10^{10} \text{ m}^2; \quad (13)$$

se cada árvore ocupar uma área de $2 \times 2 \text{ m}^2$, em média, o número de árvores

$$N_a \sim \frac{A_f}{4} \sim 1.5 \times 10^{10} \text{ árvores.} \quad (14)$$

Sendo o número de habitantes de cerca de 10^7 , o número de árvores por habitantes seria de 1500. Dados de um artigo recente na *Nature*[1] estimam o número de árvores na Terra. Para Portugal dão cerca de 300 árvores por habitante em Portugal (420 por habitante na Terra).

3.3 Quantas farmácias há no Porto?

Os habitantes do concelho do Porto rondam $300 \sim 400$ mil. Punhamos

$$P \sim 5 \times 10^5. \quad (15)$$

Se cada pessoa visitar uma farmácia uma vez em cada duas semanas, o número de visitas diárias será

$$V \sim \frac{P}{14} \sim 3 \times 10^4. \quad (16)$$

Se cada farmácia puder atender 100 pessoas por dia

$$\text{número de farmácias} \sim \frac{3 \times 10^4}{100} \sim 3 \times 10^2. \quad (17)$$

O número listado de farmácias no Porto é de 113.

Quando este exemplo foi discutido numa aula, um estudante respondeu imediatamente.

$$\text{número de farmácias} \sim 100 \quad (18)$$

Instado a comentar como chegara tão depressa a este número, respondeu, bem no espírito de Fermi:

Achei que 10 era pouco e 1000 era demais. Por isso propus 100.

Este estudante revelou uma compreensão muito boa do que é uma estimativa de ordem de grandeza. Neste caso particular, a sua vivência da cidade permitiu uma estimativa directa da ordem de grandeza do número de farmácias, que se revelou, neste caso, bastante precisa. De um modo geral teremos de passar pelo processo de estimação de factores intermédios, como nos exemplos vistos até agora.

4 Mais exemplos

Chegado aqui sugere-se ao leitor que interrompa a leitura e tente fazer as estimativas relativas às questões 4 a 6 da secção 1. Depois pode confrontar com as soluções aqui apresentadas.

4.1 Qual é a massa de um grão de areia?

Um paralelo de estrada tem uma massa de cerca de 5 kg. Se a sua dimensão linear for 10 cm a sua densidade é

$$\rho = \frac{M}{V} \sim \frac{5}{(0.1)^3} = 5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad (19)$$

Tomemos para dimensão linear de 1 grão cerca de 0,5 mm, o que dá um volume

$$V_g \sim d^3 = (5 \times 10^{-4})^3 = 6.25 \times 10^{-10} \text{ m}^3 \quad (20)$$

e uma massa

$$m_g \sim \rho V_g \sim 6 \times 10^{-10} \times 5 \times 10^3 \sim 3 \times 10^{-6} \text{ kg}. \quad (21)$$

Obtemos uma estimativa de $m_g \sim 3 \text{ mg}$.

4.2 Quantos habitantes tem um país com 100 000 nascimentos por ano?

Se a expectativa de vida for de $E_v = 75$ anos a população é integralmente substituída neste período. Por isso

$$P \sim 10^5 \times E_v = 7.5 \times 10^6 = 7,5 \text{ milhões}. \quad (22)$$

Portugal tem uma expectativa média de vida de 80 anos, cerca de 100 000 nascimentos por ano e uma população de 10 milhões.

4.3 Quantos médicos de família precisa um concelho com 50 mil habitantes?

Um médico trabalha cerca de 40 horas por dia. Um ano tem 52 semanas, menos 4 semanas férias e duas de feriados; ou seja, o médico trabalha cerca de 46 semanas. O número de horas de consulta por ano é

$$H \sim 46 \times 40 \sim 1840 \sim 2 \times 10^3 \text{ h/ano} \quad (23)$$

Com 1/2 hora por consulta, dará em cada ano

$$C_m \sim 4 \times 10^3 \text{ consultas} \quad (24)$$

Se cada habitante fizer n consultas em média por ano, o número de consultas do concelho será

$$C_c \sim n \times 5 \times 10^4 \quad (25)$$

O número de médicos será

$$\text{número de médicos} \sim \frac{n \times 5 \times 10^4}{4 \times 10^3} \sim 10 \times n. \quad (26)$$

Segundo os dados do SNS existem 1416 médicos de família para os 10 milhões de habitantes. Por cada 50 mil habitantes

$$\text{médicos SNS} \sim \frac{1416}{10^7} \times 5 \times 10^4 \sim 7 \times n \quad (27)$$

Isto sugere que $n \sim 1$,

5 Porque é que funciona

Se repararmos nos exemplos anteriores, vemos que a estimativa resulta de um produto de factores, X, Y, Z, \dots sobre os quais temos mais informação do que sobre o resultado final. Escrevendo cada um dos factores em notação científica

$$XYZ \dots = (xyz \dots) \times 10^{n_x + n_y + n_z \dots} \quad (28)$$

O foco do nosso interesse reside no expoente $n = n_x + n_y + n_z$, já que as mantissas estão cada uma no intervalo $[1, 10[$. Alguns factores serão estimados por excesso outros por defeito. Ao fazermos o produto, será de esperar algum cancelamento dos erros dos expoentes dos factores (e dos produtos das mantissas), e é isto que permite, amiúde, chegar a uma estimativa da ordem de grandeza correcta.

O mesmo tipo de raciocínio está na base da famosa equação de Drake [3], que pretende estimar o número de civilizações existentes na nossa galáxia através de um produto de 7 factores.

Para terminar, deixamos uma questão para reflexão. Suponhamos que obtemos de duas fontes igualmente confiáveis duas estimativas para uma dada grandeza, X_1 e X_2 com ordens de grandeza diferentes; por exemplo,

$$X_1 \sim 3 \times 10^2, \quad (29)$$

$$X_2 \sim 5 \times 10^3. \quad (30)$$

Uma vez que temos igual confiança nas duas estimativas, somos tentados a fazer uma média entre as duas. A questão é: que média? A aritmética

$$X \sim \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad (31)$$

ou a geométrica

$$X \sim \sqrt{X_1 X_2} \quad (32)$$

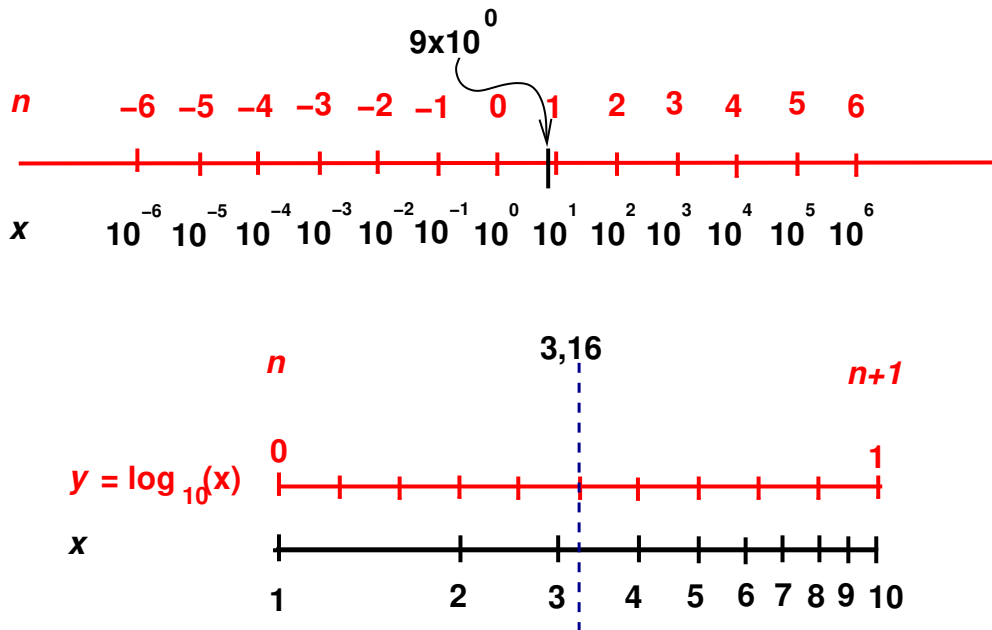


Figura 1: Escala Logarítmica. A ordem de grandeza de 9×10^0 é mais próxima de 1 do que de 0.

6 Definição de ordem de grandeza. Refinamento

Uma grandeza X , escrita em notação científica, tem a forma

$$X = a \times 10^n \quad (33)$$

em que $a \in [1, 10[$ é a mantissa e n o expoente. Queremos construir uma régua em que as divisões, igualmente espaçadas correspondem aos valores de n . A régua tem uma divisão central, $n = 0$, $X = 1$, à direita, $n = 1, 2, \dots$ correspondentes aos valores $X = 10, 100, \dots$ e à esquerda $n = -1, -2, \dots$, ou $X = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots$. Ao contrário de uma escala *linear*, em que variações $\Delta X = X_2 - X_1$ iguais são comprimentos iguais, aqui, *razões* X_2/X_1 iguais são comprimentos iguais. Chama-se a esta escala uma *escala logarítmica*, pois se $Y_1 = \log_{10}(X_1)$ e $Y_2 = \log_{10}(X_2)$

$$Y_2 - Y_1 = \log_{10} \left(\frac{X_2}{X_1} \right) \quad (34)$$

Ora

$$\log_{10}(X) = n + \log_{10}(a) \quad (35)$$

e como $a \in [1, 10[$, $\log(a) \in [0, 1[$. Entre duas marcações inteiras na régua variamos a mantissa.

Parece então razoável definir a ordem de grandeza como sendo n —para usar sempre um inteiro—, quando os valores de $\log_{10}(X)$ estão mais próximos de n do que de outro

valor inteiro. Isso acontece para

$$n - \frac{1}{2} \leq \log_{10}(X) < n + \frac{1}{2} \quad (36)$$

o que dá,

$$10^{n-\frac{1}{2}} \leq X < 10^{n+1/2} \quad (37)$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \times 10^n \leq X < \sqrt{10} \times 10^n \quad (38)$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \leq a < \sqrt{10} \quad (39)$$

Uma vez que $\sqrt{10} \approx 3,2$

$$0,32 \lesssim a \lesssim 3,2 \quad (40)$$

A ordem de grandeza será n na gama de valores de X

$$3,2 \times 10^{n-1} \lesssim X \lesssim 3,2 \times 10^n \quad (41)$$

Referências

- [1] T. W. Crowther, H. B. Glick, K. R. Covey, C. Bettigole, D. S. Maynard, S. M. Thomas, J. R. Smith, G. Hintler, M. C. Duguid, G. Amatulli, M.-N. Tuanmu, W. Jetz, C. Salas, C. Stam, D. Piotta, R. Tavani, S. Green, G. Bruce, S. J. Williams, S. K. Wisser, M. O. Huber, G. M. Hengeveld, G.-J. Nabuurs, E. Tikhonova, P. Borchardt, C.-F. Li, L. W. Powrie, M. Fischer, A. Hemp, J. Homeier, P. Cho, A. C. Vibrans, P. M. Umunay, S. L. Piao, C. W. Rowe, M. S. Ashton, P. R. Crane, and M. A. Bradford. Mapping tree density at a global scale. *Nature*, 525(7568):201–205, September 2015.
- [2] Michael Mitchell. A clever way to estimate enormous numbers. URL:<https://youtu.be/0YzvupOX8Is>, August 2017.
- [3] Wikipedia. Drake equation. url: https://en.wikipedia.org/wiki/Drake_equation, August 2017.