Mudanças de Unidades

Lições de Mecânica

J. M. B. Lopes dos Santos*

Departamento de Física e Astronomia,
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
4169-007 Porto

A mudança de unidades é uma tarefa que causa alguma confusão, sobretudo quando a grandeza em causa não é uma das grandezas fundamentais do sistema de unidades. Nestas notas tenta-se clarificar e simplificar o processo, distinguindo entre a grandeza física e o seu valor num sistema de unidades.

1 O que é mudar de unidades

Não é possível atribuir um valor numérico a uma grandeza contínua, sem definir um padrão: um objecto ou um valor dessa grandeza que tomamos como sendo a unidade. Por exemplo, seja l altura de uma mesa e u o comprimento de uma régua. Comparar comprimentos por justaposição é uma operação simples e podemos simplesmente ver quantas réguas idênticas precisamos para obter o comprimento igual a l

$$l = x \times u \tag{1}$$

Nesta equação x é um número (real em geral, podemos ter que subdividir a régua) e l e u designam propriedades dos objetos. Usando u como padrão, podemos associar a qualquer comprimento um número real x que é o valor da grandeza *com esta escolha de padrão.* Exprimimos esta dependência de x na escolha de padrão indicando

$$l = x\,\mathsf{m} \tag{2}$$

ou seja, dando um *nome* ao padrão, que o identifica de modo claro.

Mudar de unidades é mudar de padrão. Suponhamos que passamos a usar um outro padrão u'. Ora

$$u' = \Lambda u \tag{3}$$

*jlsantos@fc.up.pt

em que Λ é o comprimento de u' com o padrão u. Então,

$$l = x \times u = \frac{x}{\Lambda} \times u',$$

ou seja na nova unidade o valor associado a qualquer comprimento vem multiplicado por Λ^{-1}.

$$l = \frac{x}{\Lambda} \tag{4}$$

Suponhamos que queremos mudar de m para cm. Se u for um comprimento de um metro e u' de 1 cm tem-se, é claro

$$u' = 10^{-2} u \tag{5}$$

que podemos exprimir como

$$1\,\mathsf{cm} = 10^{-2}\,\mathsf{m} \tag{6}$$

ou $\Lambda = 10^{-2}$. Logo

$$l = x\,\mathsf{m} = x\,(10^2\,\mathsf{cm}) = (10^2 x)\,\mathsf{cm} \tag{7}$$

O valor numérico de l é agora $10^2 x$.

Um ponto importante a notar nesta manipulação trivial é que estamos a pensar na grandeza física, comprimento do objeto, representado pela letra l como sendo *o mesmo*, seja qual for a unidade. O que muda é o seu valor numérico quando muda o padrão. Esta distinção é importante porque nos ajuda a perceber que, ao mudar unidades, há algo que é invariante (a grandeza em si) e algo que muda (o seu valor numa dada unidade).

Uma maneira simples de fazer a manipulação anterior é escrever

$$l = x\,\mathsf{m} = x\,\left(\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{cm}}\right)\mathsf{cm} = x \times 10^2\,\mathsf{cm} \tag{8}$$

A razão (m/cm) é a razão entre os dois comprimentos dos padrões. Note-se como nesta maneira de escrever usamos uma só designação (l) para a grandeza em si (invariante), enquanto que o seu valor muda de x para $10^2 x$.

2 Unidades compostas

Muitas grandeza físicas têm unidades mais complexas; por exemplo uma velocidade tem unidade SI $\mathsf{m\,s^{-1}}$. Que significa isto?

Felizmente não é necessário definir padrões independentes para todas as grandezas. As leis físicas e as definições permitem-nos reduzir o número de unidades independentes. A escolha destas nada tem de fundamental, e são apenas razões de conveniência, que vão variando como o desenvolvimento da ciência, que determinam a escolha de padrões independentes. Em Mecânica, todos os sistemas de unidades são baseados nas mesmas três unidades fundamentais, das grandezas comprimento, tempo, e massa. São grandezas susceptíveis de comparação directa muito simples usando réguas, relógios e balanças.

Ora uma velocidade é definida como uma razão comprimento/tempo

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} \tag{9}$$

A escolha de unidades de comprimento e de tempo determina os *valores* de Δl e Δt e por isso não há necessidade de definir um padrão independente para velocidade. Assim se

$$\Delta l = x\,\mathsf{m} \tag{10}$$
$$\Delta t = y\,\mathsf{s} \tag{11}$$

$$v = \frac{x\,\mathsf{m}}{y\,\mathsf{s}} = \frac{x}{y}\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}} = \frac{x}{y}\,\mathsf{m\,s}^{-1} \tag{12}$$

Agora é fácil ver o que acontece se mudarmos unidade de comprimento ou tempo ou ambas.

$$v = \frac{x(\mathsf{m}/\mathsf{km})\,\mathsf{km}}{y(\mathsf{s}/\mathsf{h})\mathsf{h}} = \frac{x\,\mathsf{km}}{y\,\mathsf{h}}\left(\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{km}}\right)\left(\frac{\mathsf{h}}{\mathsf{s}}\right) = \frac{x}{y}\times 10^{-3}\times 3600\,\mathsf{km\,h}^{-1} = 3.6\times\frac{x}{y}\,\mathsf{km\,h}^{-1} \tag{13}$$

Ou seja *a mesma* velocidade, v, em $\mathsf{km\,h}^{-1}$ é expressa por um valor que é 3.6 vezes o seu valor em $\mathsf{m\,s}^{-1}$.

Exercício 1.
Determina o valor da aceleração da gravidade usando km para unidade de comprimentos e h (hora) como unidade de tempo.

---

3 Transformação de expressões.

Seja x um comprimento e t um tempo e consideremos a equação

$$x = t \tag{14}$$

Esta equação faz um físico (ou física) encolher-se todo: um comprimento não pode igualar-se a um tempo. Porquê? Pela simples razão que numa mudança de unidades o valores do comprimento e tempo não se transformam da mesma maneira. Por exemplo, se mudarmos de segundos para horas o valor da grandeza tempo vem multiplicada por 10^{-3} e a da grandeza comprimento não varia. A igualdade não tem significado, porque não é independente do sistema de unidades. Já se escrevermos

$$x = vt \tag{15}$$

e v for uma velocidade, a equação tem significado porque vt em qualquer mudança de unidades transforma-se como um comprimento:

$$v = V\,\mathsf{m\,s}^{-1} \tag{16}$$
$$t = T\,\mathsf{s} \tag{17}$$

$$vt = VT\,\mathsf{m\,s^{-1}s} = VT\,\mathsf{m} \tag{18}$$

A grandeza vt tem um valor independente da unidade de tempo. Quando esta muda v e t variam de factores que são o inverso um do outro.

Mas suponhamos que escrevemos

$$x = t\,(\text{unidades SI}) \tag{19}$$

Agora x e t representam, não as grandezas, *mas os seus valores,* no sistema de unidade SI. A velocidade v tem o valor 1 neste sistema e não aparece na equação. Assim escrita esta equação é legítima. Contudo, se mudarmos de unidade, a equação altera-se.

Suponhamos que passamos para km e h. Os valores das grandezas ficam

$$x \to x' = 10^{-3}x \tag{20}$$

$$t \to t' = t/(3600) \tag{21}$$

pelo que a relação entre x' e t', *os valores em* km *e* h*,* fica

$$10^{-3}x = 10^{-3}\,(t/3600) \times 3600 \qquad (\text{mesmo que } x = t)$$

$$x' = 3.6 \times t'\,(\mathsf{km,\ h}) \tag{22}$$

Esta é a nova forma da relação. A equação, em qualquer sistema de unidades, tem a forma

$$x = vt \tag{23}$$

Em unidades SI v tinha o valor $1\,\mathsf{m\,s^{-1}}$(ficava "escondida"), em $\mathsf{km\,h^{-1}}$ tem o valor 3.6.

Exercício 2.
Determina a relação entre x (comprimento) e t (tempo), com x em km e t em minutos, e

$$x = t + t^2\,(\text{unidades SI})$$

---

4 Potências e outras funções

A razão entre os valores de duas grandezas física do mesmo tipo (dois comprimentos, duas velocidades, duas acelerações) não depende do sistema de unidades. Se uma velocidade é o dobro de outra, é-o em qualquer sistema de unidades. Isto implica que numa mudança de unidades ambos os valores têm de vir multiplicados pelo mesmo factor. Se A e B são os valores de duas grandezas do mesmo tipo e A' e B' os seus valores noutro sistema de unidades,

$$A \to A' = \Lambda A \tag{24}$$

$$B \to B' = \Lambda B \tag{25}$$

para que

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \tag{26}$$

Ou seja, numa mudança de unidades a transformação de qualquer grandeza é sempre a multiplicação de *todos os seus valores* por um fator de escala comum.

Consideremos, por exemplo, uma mudança de unidade de tempo em que os valores que exprimem tempos se transformam como

$$t \to t' = \Lambda_T t \tag{27}$$

(ex: se $s \to \mathsf{min}, \Lambda_T = 1/60$). $\sqrt{t}$ ou t^2 são grandezas cujos valores se transformam como

$$\sqrt{t} \to \sqrt{t'} = \sqrt{\Lambda_T t} = \Lambda_T^{1/2}\sqrt{t} \tag{28}$$

$$t^2 \to t'^2 = \left(\Lambda_T^2\right) t^2 = \Lambda_T^2 t^2 \tag{29}$$

No primeiro caso o fator de escala é $\Lambda_T^{1/2}$ e no segundo Λ_T^2.

Para qualquer função f que seja uma potência ou produto de potências, é fácil concluir que numa mudança de unidades

$$f(A, B, C, \dots) \to f(A', B', C', \dots) = \Lambda_f f(A, B, C, \dots) \tag{30}$$

Com efeito, se

$$f(A, B, C, \dots) = A^a B^b C^c \dots \tag{31}$$

sob uma mudança de unidades, cada grandeza altera-se de acordo com as suas dimensões,

$$A \to A' = \left(\Lambda_L^{\alpha_1} \Lambda_T^{\alpha_2} \Lambda_M^{\alpha_3}\right) A = \Lambda_A A, \tag{32}$$

e

$$\Lambda_f = \Lambda_A^a \Lambda_B^b \Lambda_C^c \dots \tag{33}$$

Se a função f for a soma de termos que são produtos de potências,

$$f(A, B, \dots) = A^a B^b \dots + X^x Y^y \dots \tag{34}$$

para que f se transforme por um factor de escala, as dimensões de cada termo têm de ser iguais

$$\Lambda_f = \Lambda_A^a \Lambda_B^b \dots = \Lambda_X^x \Lambda_Y^y \tag{35}$$

No caso de uma função que não seja potência ou produto de potências, como por exemplo a função seno, numa mudança de unidades

$$\sin(t) \to \sin(t') = \sin(\Lambda_T t) \tag{36}$$

Para que isto fosse uma transformação de escala seria necessário

$$\sin(\Lambda_T t) = \Lambda_T^a \sin(t)? \tag{37}$$

para um a fixo e *qualquer valor de t.* Não existe nenhum valor de a para o qual esta equação se verifique para todo o t. Por isso o seno de um tempo não é uma grandeza física aceitável porque a sua transformação debaixo de mudança de unidades não é simplesmente uma multiplicação por um factor de escala. A razão

$$\frac{\sin(t_1)}{\sin(t_2)} \neq \frac{\sin(\Lambda_T t_1)}{\sin(\Lambda_T t_2)} \tag{38}$$

não é invariante debaixo de mudança de unidades.

Por esta razão, em qualquer equação com significado físico (que mantenha a forma com mudança de unidades), os argumentos de funções que não sejam potências ou produtos de potências são adimensionais, de modo a serem invariantes na mudança de unidades. Isto é,

$$\sin(t_1) \tag{39}$$

não aparece nunca numa equação (estragaria a transformação debaixo de uma mudança de unidades); mas

$$\sin\left(\frac{t_1}{t_2}\right), \tag{40}$$

ou

$$\sin\left(2\pi f t\right),$$

em que f é uma frequência, são termos legítimos, pois são invariantes, porque os argumentos das função seno são também invariantes: adimensionais. Assim se l for um comprimento

$$l \sin\left(2\pi f t\right) \tag{41}$$

será também um comprimento, pois é o produto de um comprimento por um fator adimensional (invariante). Aqui fica então a conclusão:

> *Numa expressão com significado físico, com forma independente das unidades das grandezas que nela intervêm, os argumentos de qualquer função que não seja uma potência ou produto de potências, ou soma de produtos de potências, são adimensionais. Os termos de qualquer soma têm as mesmas dimensões, ou seja, transformam-se com um fator de escala comum.*

Exercício 3.

A expressão do deslocamento de uma partícula é

$$x(t) = 2\sin(4\pi t)\,(\text{Unidades SI}).$$

Esta expressão contradiz a conclusão acima? Qual é a expressão do *mesmo deslocamento* se usarmos as unidade cm e minuto para comprimentos e tempos?
