Lições de Mecânica: Análise Dimensional

J. M. B. Lopes dos Santos*

September 7, 2021

Departamento de Física e Astronomia, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 4169-007 Porto

Neste documento faz-se uma breve introdução aos `conceitos` de dimensão e à análise dimensional. A análise dimensional é apresentada como um princípio de simetria das leis física, ou seja, invariância da forma das equações numa mudança de unidades Esta simetria impõe restrições à sua forma das equações físicas. Apresentam-se alguns exemplos de resultados que se podem obter por análise dimensional.

1 Dimensões

1.1 Introdução

O processo de medição mais simples é a contagem. Não é frequente pensarmos numa contagem como uma medição. Mas na realidade trata-se de um procedimento através do qual associamos um número a uma entidade que em muitos casos podemos classificar como um grandeza física. Claro que só podemos contar conjuntos... contáveis, também designados por numeráveis.

Este procedimento não é suficiente para medir, por exemplo, uma distância. Senão vejamos. Para medir uma distância entre dois pontos, tomamos um objecto rígido, uma régua, colocamo-la ao longo de uma linha que una os dois pontos e *contamos* o número de vezes que a régua cabe entre eles. Só muito excepcionalmente o comprimento será expresso como um número inteiro de *réguas* e vemo-nos obrigados a subdividi-la. Somos, pois, levados a conceber uma distância como expressa por uma expansão decimal (se as subdivisões sucessivas forem em dez partes). Uma expansão decimal que, pelo menos

*e-mail: jlsantos@fc.up.pt

potencialmente, pode ser infinita. Daí que representemos comprimentos por números reais. Não iremos discutir até que ponto é que a estrutura matemática dos números reais é realmente tornada necessária pela nossa experiência do mundo físico. Alguns cientistas têm mesmo especulado que a representação do tempo e espaço pelo contínuo de números reais estaria na base de algumas dificuldades profundas da física contemporânea. Mas o aparato matemático construído com base nesta estrutura é de tal modo poderoso e eficiente que não será fácil destroná-lo.

O que nos interessa aqui salientar é um aspecto que o procedimento de medida destas grandezas contínuas, referido acima, torna bem claro. É que para associar um número real a uma grandeza deste tipo temos que escolher um padrão, uma *unidade*. No caso em discussão uma determinada régua.

O ponto fundamental é que o padrão *é puramente convencional*. Embora tenha que ser especificado, para que o valor de uma grandeza possa ser expresso por um número real, ele pode ser mudado sem qualquer prejuízo para a descrição dos fenómenos. Numa tal mudança, os valores numéricos que representam as grandezas transformam-se. Torna-se pois claro que uma relação entre os valores de duas grandezas físicas só terá significado se for preservada (invariante) em qualquer mudança de unidades. De outro modo não exprime uma relação entre grandezas mas sim uma coincidência de valores resultante de uma escolha particular de unidades.

Esta invariância das relações envolvendo valores de grandezas físicas debaixo de uma determinada transformação desses valores é um exemplo de uma simetria. Na definição clássica de Herman Weyl, um objecto é simétrico se ficar invariante debaixo de uma dada transformação. Neste caso o "objecto" é a relação entre as grandezas; a "transformação" é a alteração dos valores das grandezas numa mudança de unidades. A existência desta simetria implica certas restrições à forma das equações da física. Suponhamos, poe exemplo, que sabemos que uma grandeza C depende de duas grandezas A e B

$$C = f(A, B). \tag{1}$$

O que estamos a afirmar é que esta relação tem de respeitar a invariância sob transformações de unidades; mas os valores de A, B e C são alterados. Isto significa que, baseados apenas no conhecimento da maneira como mudam os valores destas grandezas quando alteramos as unidades, podemos tirar conclusões sobre a forma desta relação. É a isto que chamamos *argumentos dimensionais.* Tal como as estimativas de Fermi, o seu alcance é limitado, e não podemos saber tudo só com estes argumentos. Mas repare-se também que estamos a usar muito pouca informação: apenas a transformação de valores grandezas com mundaça de unidades. Como veremos, é supreeendente o que se consegue, em alguns casos, apenas com esta informação.

1.2 Conceito de Dimensão

Como se transforma o valor de uma grandeza física numa mudança de unidades? Trata-se do mal amado problema de conversão de unidades, que vamos retomar aqui formulado de um modo um pouco mais abstracto do que o habitual.

Seja, por exemplo, l o valor real que representa um comprimento com a unidade *metro*. Se passarmos para uma outra unidade (cm) que novo número real l' representa o *mesmo* comprimento? Como bem sabemos

$$\mathrm{m} \to \mathrm{cm} = 10^{-2}\,\mathrm{m} \tag{2}$$

implica que

$$l \to l' = 10^2 l \tag{3}$$

O número real, l', que exprime um dado comprimento em centímetros é 100 vezes o número, l, que o exprime em metros.

De um modo geral, designando por u o padrão (unidade) de uma dada grandeza, numa mudança para um novo padrão u' dado por

$$u \to u' = \frac{u}{\Lambda} \tag{4}$$

os valores dessa grandeza transformam-se como

$$l \to l' = \Lambda l \tag{5}$$

Mas como se transformam os valores de outras grandezas como uma massa ou uma área? O padrão de comprimentos não serve para medir massas. Não podemos determinar uma massa vendo quantas vezes nela cabe uma régua de 15 cm. Pela mesma razão também não podemos medir áreas com uma régua, pelo menos não por comparação directa. Para clarificar este ponto e, simultâneamente, entender melhor o que é um sistema de unidades, vamos gastar algum tempo com o caso trivial da escolha de unidade de área.

Para medir uma área temos que escolher um padrão: uma figura geométrica convenientemente definida de que possamos construir várias unidades, com as quais podemos *pavimentar* a área a medir reduzindo deste modo a medição a uma contagem. Para fixar ideias, consideremos a área de um círculo de raio r e designemo-la por $C(r)$. Não seria difícil concluir, empírica ou teoricamente, que independentemente do padrão, uma duplicação do raio implica uma quadruplicação da área. Isto é, genericamente, para qualquer valor real b,

$$C(br) = b^2 C(r) \tag{6}$$

As funções $C(r)$ que satisfazem esta condição para qualquer b real têm a forma

$$C(r) = \alpha r^2. \tag{7}$$

Isso pode-se ver com facilidade reescrevendo a Eq.(6 na forma

$$C(r) = b^{-2}C(br); \tag{8}$$

se esta equação é válida para qualquer b, é válida, em particular, para $b = 1/r$ e, por isso,

$$C(r) = C(1)r^2 \tag{9}$$

em que $C(1) \equiv \alpha$ é uma constante independente de r. Toda a gente sabe que esta constante é igual a π. Ou será? Na realidade o seu valor é π, *apenas como resultado da escolha da unidade de área.* Isto é da figura geométrica que escolhemos como unidade de área.

Para compreendermos esta afirmação é útil, por um momento, contemplar outras escolhas, diferente da habitual (alínea b))

a) A unidade de área é a área de um círculo de raio igual a uma unidade de comprimento;

b) a unidade de área é a área de um quadrado de lado igual a uma unidade de comprimento;

c) a unidade de área é a área de uma moeda de 1€.

No caso a) a constante α vale claramente 1, pois estamos a definir que um círculo raio $r = 1$ (em qualquer unidade de comprimento) tem área 1; logo $C(1) = 1$.

No caso b), a definição habitual vale π. Com efeito o argumento que nos conduziu à Eq. 7, aplicado à área de um quadrado de lado r, $Q(r)$, leva-nos a afirmar que

$$Q(r) = \beta r^2 \tag{10}$$

O que a geometria (ou a experiência) nos diz é que $\alpha/\beta = \pi$. É apenas isto o que estamos a afirmar quando dizemos que a área de um círculo é πr^2. A escolha a) equivale a fazer $\alpha = 1$, logo $\beta = 1/\pi$. A escolha b) corresponde a ter $\beta = 1$, logo $\alpha = \pi$. Mas, e isto é o mais importante, o padrão de área está ligado ao de comprimento. Se a unidade de comprimento muda $u_L \to u'_L = u_L/\Lambda$ a de área muda de um modo determinado pelas relações das Eqs- 7 e 10, $u_A \to u'_A = u_A/\Lambda^2$. Repare-se que esta dependência da transformação de áreas na de comprimentos só existe *porque o padrão de área foi escolhido de um modo dependente do de comprimento.* No caso da escolha c) acima referida, isso não acontece. Nessa situação, o valor que exprime a área (o número de vezes que lá cabe uma moeda de 1€) é o mesmo quer os comprimentos sejam medidos em metros ou em centímetros.

Nos casos das definições a) e b) a unidade de área *é derivada* da de comprimento. A relação entre as transformações dos valores de área e comprimento

$$l \to l' = \Lambda l \tag{11}$$

$$a \to a' = \Lambda^2 a \tag{12}$$

é habitualmente expressa dizendo que uma área tem *dimensão* 2 (ou expoente dimensional 2) no comprimento. É usual a notação

$$[\text{área}] = L^2 \tag{13}$$

Note-se que no caso da definição c) as áreas têm dimensão *zero* no comprimento, isto é, os valores que exprimem áreas são invariantes numa mudança de unidade de comprimento. Neste último sistema de unidades a área de um círculo pode ser expressa como

$$C(r) = k_c r^2 \tag{14}$$

Mas a constante de proporcionalidade, ao contrário dos sistema a) e b) varia numa mudança de unidades. Com efeito uma vez que $C(r)$ não varia numa mudança de unidade de comprimento, mas $r \to r' = \Lambda r$, temos que ter $k_c \to k'_c = \Lambda^{-2} k_c$. k_c tem dimensão -2 no comprimento.

Exercício 1.
A constante k_c vale 0,740 cm^{-2}. Como é se chega a este valor?

Este exemplo, ainda que trivial, tem o mérito de pôr em evidência alguns pontos relativamente a unidades:

1. Relações entre grandezas físicas de natureza diferente envolvem, em geral constantes multiplicativas cujos valores (e dimensões) só são determinados pelas convenções de escolha de unidades.

2. Em certos casos é possível (e conveniente) relacionar a escolha de padrões dessas grandezas de tal modo que essas constantes sejam independentes das unidades escolhidas (desde que não se altere a relação entre os padrões). Essas constantes dizem-se adimensionais. É o caso das constantes α e β acima referidas.

3. Estas escolhas permitem reduzir o número de padrões independentes—unidades fundamentais—sendo os restantes definidos a partir destes—unidades derivadas. As leis de transformação das unidades derivadas são determinadas a partir das das unidades fundamentais.

1.3 Unidades Fundamentais em Mecânica

Em Mecânica Clássica é possível escolher as constantes arbitrárias que podem surgir nas leis e definições de modo ter apenas 3 unidades fundamentais, quase universalmente escolhidas como massa (M), comprimento (L) e tempo (T). Para que não caiamos na tentação de atribuir um significado profundo a este facto convém saber que em relatividade, por exemplo, é usual usar um sistema de unidades em que apenas há duas grandezas fundamentais, massa e tempo, ou massa e comprimento. Nesses sistema tempo e comprimento têm as mesmas dimensões. Os físicos de partículas usam correntemente um sistema com uma unidade fundamental. Como vimos atrás, é a própria rede de leis e relações entre grandezas que constituem uma teoria, que determina as possibilidades de relacionamento de padrões e consequente redução do número de unidades fundamentais. Em Relatividade, e em Mecânica Quântica existem leis e relações entre grandezas que não existem em Mecânica Clássica. É isso que permite a redução do número de unidades fundamentais.

Mas, para já, fiquemos na Mecânica Clássica. Vejamos através de alguns exemplos como obtemos as dimensões de cada grandeza nas unidades fundamentais:

- velocidade: uma qualquer componente de velocidade é definida por uma equação
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{15}$$
Numa mudança de unidades de comprimentos e tempos $L \to \Lambda_1 L$, $T \to \Lambda_2 T$ (daqui em diante passaremos sempre a indicar as transformações dos valores das grandezas) como varia v? Claramente
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}\frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{16}$$
e portanto
$$v \to v' = \Lambda_1 \Lambda_2^{-1} v \tag{17}$$
Isto é, v tem dimensão 1 no comprimento e -1 no tempo. Na notação habitual
$$[\text{velocidade}] = LT^{-1} \tag{18}$$

- outras grandezas: o leitor poderá facilmente verificar por processos semelhantes as seguintes equações de dimensões:
$$\begin{aligned}
[\text{momento linear }] &= [mv] = MLT^{-1} \\
[\text{momento angular }] &= [mvr] = ML^2T^{-1} \\
[\text{força}] &= [ma] = MLT^{-2} \\
[\text{energia}] &= [mv^2] = ML^2T^{-2}
\end{aligned}$$

Exercício 2.

Do secundário deves recordar-te da relação que Planck e Einstein escreveram entre a energia E de um fotão e a sua frequênciam ν
$$E = h\nu$$

Quais são as dimensões da constante de Planck? E as suas unidades no SI?

Não terá escapado ao leitor atento que todas as grandezas que referimos acima são definidas como produtos de potências (positivas ou negativas) de grandezas fundamentais. Isso é uma condição necessária para que a mudança de unidades corresponda a uma transformação de escala dos valores de qualquer grandeza (multiplicação dos respectivos valores por um factor de escala comum) e possamos definir os respectivos expoentes dimensionais.

$$A \to A' = \Lambda_A A = \Lambda_M^{\alpha} \Lambda_L^{\beta} \Lambda_T^{\gamma} A$$

Para grandezas como comprimento, massa e tempo, que se medem por comparação directa com padrões, não se vê como pudesse ser de outra maneira. Mas a generalidade das grandezas físicas não se pode medir por comparação directa. Não existe um padrão de velocidades que se possa sobrepor a uma dada velocidade para ver quantas vezes lá cabe. Poder-se-ia pôr a questão de saber se não seria possível definir grandezas físicas, úteis, que tivessem uma lei de transformação mais complicada. No entanto, certos requisitos gerais (linearidade, composição de transformações de escala), cuja discussão seria um pouco avançada demais para este curso, reduzem as possibilidades aquelas que nós considerámos.

1.4 Princípio de Homogeneidade Dimensional

Estamos agora em posição de formular, de um modo mais preciso, o requisito exposto atrás, de que uma relação com significado físico entre duas grandezas tem que ser preservada numa mudança de unidades.

Tomemos uma relação genérica entre duas grandezas que designaremos por A e B.

$$A = B \tag{19}$$

Numa mudança genérica de unidades

$$L \to \Lambda_1 L \tag{20}$$

$$T \to \Lambda_2 T \tag{21}$$

$$M \to \Lambda_3 M \tag{22}$$

A e B transformam-se de acordo com as suas dimensões nas unidades fundamentais

$$A \to A' = \Lambda_1^{\alpha_1} \Lambda_2^{\alpha_2} \Lambda_3^{\alpha_3} A \tag{23}$$

$$B \to B' = \Lambda_1^{\beta_1} \Lambda_2^{\beta_2} \Lambda_3^{\beta_3} B \tag{24}$$

Para que a relação seja preservada no novo sistema de unidades deveremos ter

$$A' = B' \tag{25}$$

isto é

$$\Lambda_1^{\alpha_1}\Lambda_2^{\alpha_2}\Lambda_3^{\alpha_3} = \Lambda_1^{\beta_1}\Lambda_2^{\beta_2}\Lambda_3^{\beta_3} \Rightarrow \Lambda_1^{\alpha_1-\beta_1}\Lambda_2^{\alpha_2-\beta_2}\Lambda_3^{\alpha_3-\beta_3} = 1 \tag{26}$$

Como os factores de escala são arbitrários, a igualdade só se verificará, para qualquer escolha das unidades fundamentais, se

$$\alpha_1 = \beta_1; \qquad \alpha_2 = \beta_2; \qquad \alpha_3 = \beta_3 \tag{27}$$

Em conclusão, *é condição necessária e suficiente para que uma equação seja invariante numa mudança de unidades que todos os seus termos tenham as mesmas dimensões nas unidades fundamentais*—Princípio de Homogeneidade Dimensional.

Este requisito, invariância debaixo de uma determinada transformação é, basicamente, um princípio de simetria. Uma tal exigência coloca certa restrições às relações possíveis entre determinadas grandezas. A Análise dimensional baseia-se na existência destas restrições.

2 Estimativas Dimensionais

2.1 O Pêndulo

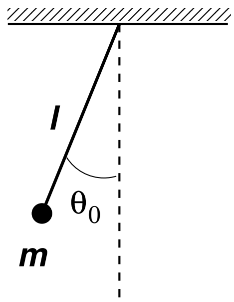

Figura 1: Pêndulo Gravítico.

Consideremos a questão de determinar o período de oscilação de um pêndulo gravítico.

Do nosso conhecimento das leis da física poderíamos intuir que que os seguintes parâmetros poderão ser importantes:

- g, a aceleração da gravidade;
- m, a massa do pêndulo;
- l, o comprimento do fio;
- θ_0, o valor do ângulo inicial.

Teremos então, de um modo inteiramente geral, uma relação,

$$T = f(g, l, m, \theta_0) \tag{28}$$

em que f designa uma função desconhecida. Como vamos ver o princípio de homogeneidade dimensional vai permitir determinar completamente a dependência de f nos primeiros três parâmetros. Escrevamos, para referência, as equações de dimensões destas grandezas:

$$[g] = LT^{-2} \tag{29a}$$
$$[l] = L \tag{29b}$$
$$[m] = M \tag{29c}$$
$$[\theta_0] = 1 \tag{29d}$$
$$[T] = T \tag{29e}$$

Note-se que o ângulo θ é medido em radianos. Como tal é a razão de dois comprimentos é adimensional (dimensões $L^0T^0M^0 = 1$), isto é, tem um valor independente das unidades escolhidas.

Vejamos o que acontece a estas grandezas numa mudança de unidades de massa, $M \to \Lambda_3 M$. Todas são invariantes excepto m. No novo sistema de unidades a relação da eq.(1.31) deve ser mantida, isto é,

$$T' = f(g', l', m', \theta_0') \tag{30}$$

em que X' representa o valor da grandeza X no novo sistema de unidades. Com estamos a exprimir uma relação entre *grandezas* ela deve ser válida *quaisquer que sejam as unidades que escolhamos para determinar os seus valores,*

Um ponto importante a notar: se a relação é de facto universal a função f *é a mesma* nas eqs(1.31) e (1.37); mas, para isso, é crucial que seja explicitada a dependência em todos os parâmetros físicos com dimensões. Imaginemos, por um momento que nos esquecíamos da dependência em g, já que esta pouco varia se não sairmos da superfície da Terra. Nesse caso ao mudar de unidades a função f variaria porque a definição de f incluia o parâmetro g , *que mudaria com a mudança de unidades.* É fundamental compreender bem este ponto para poder aplicar correctamente os métodos que estamos a discutir.

Das equações de dimensões sabemos que $T' = T, g' = g, l' = l, \theta_0 = \theta_0'$ e $m' = \Lambda_3 M$. Logo

$$f(g, l, \Lambda_3 m, \theta_0) = f(g, l, m, \theta_0) \tag{31}$$

Esta relação só pode ser válida para qualquer valor de Λ_3 *se* f *não depender de* m. O período não pode depender da massa do pêndulo!

$$T = f(g, l, \theta_0) \tag{32}$$

Podemos agora prosseguir a explorar as consequências de outras mudanças de unidades. Para a unidade de comprimento

$$l \to \Lambda_1 l \tag{33a}$$

$$g \to \Lambda_1 g \tag{33b}$$

$$T \to T \tag{33c}$$

$$\theta_0 \to \theta_0 \tag{33d}$$

de onde decorre,

$$f(\Lambda_1 g, \Lambda_1 l, \theta_0) = f(g, l, \theta_0) \tag{34}$$

Escolhendo $\Lambda_1 = l^{-1}$ obtemos

$$f(g, l, \theta_0) = f(\frac{g}{l}, 1, \theta_0) \tag{35}$$

O período é função da razão g/l e de θ_0. Finalmente numa mudança de unidade de tempo

$$l \to l \tag{36a}$$
$$g \to \Lambda_2^{-2} g \tag{36b}$$
$$\theta_0 \to \theta_0 \tag{36c}$$
$$T \to \Lambda_2 T, \tag{36d}$$

o que dá

$$T' = \Lambda_2 T = f(\Lambda_2^{-2}\frac{g}{l}, \theta_0), \tag{37}$$

isto é,

$$f(\frac{g}{l}, \theta_0) = \Lambda_2^{-1} f(\Lambda_2^{-2}\frac{g}{l}, \theta_0) \tag{38}$$

Usando a mesma técnica que anteriormente, escolhendo Λ_2 de modo a que $\Lambda_2^{-2} g/l = 1$, concluímos que

$$T = f(\frac{g}{l}, \theta_0) = \sqrt{\frac{l}{g}} f(1, \theta_0). \tag{39}$$

Em resumo, a análise dimensional, determina toda a dependência em l e g,

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} f(\theta_0). \tag{40}$$

A função $f(\theta_0)$ fica indeterminada por esta análise. O regime de pequenas oscilações corresponde a $\theta_0 \ll 1$ (recorde-se que um ângulo recto são $\pi/2$ radianos, isto é cerca de 1.57). Corresponde ao limite

$$T \approx \sqrt{\frac{l}{g}} f(0) = \alpha \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{41}$$

Neste limite a nossa análise determina o valor de T a menos de um constante multiplicativa (a análise completa das equações de movimento mostra que $\alpha = 2\pi$).

O método seguido na dedução do resultado da Eq. 40 é algo longo, mas tem a vantagem de tornar bem explícito o conteúdo de uma análise dimensional e o princípio de invariância que lhe está subjacente. Mas é habitual proceder de um modo mais expedito.

A função $f(g, l, m, \theta_0)$ da Eq. 28 tem claramente as dimensões de um tempo. Olhando para as equações de dimensões dos parâmetros (Eqs. 33a a 33d) não é difícil ver que podemos definir um tempo com l e g, nomeadamente $\sqrt{l/g}$. Assim podemos desde logo escrever, sem perda de generalidade

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} h(g, l, m, \theta_0) \tag{42}$$

em que a função h é adimensional, isto é *tem um valor invariante em qualquer mudança de unidades.* Mas então é claro que ela só pode depender de parâmetros adimensionais, igualmente invariantes. Uma inspecção das equações de dimensões mostra que com g, l, m, θ_0 a única combinação adimensional possível é o próprio θ_0. Basta reparar, por exemplo, que só m tem dimensão de massa não nula. Logo não pode formar com g e l um parâmetro adimensional. Por outro lado não é possível anular a dimensão temporal entre g e l. Logo concluímos directamente que h só depende de θ_0, e T tem a forma da Eq. 40.

Antes de abandonar este exemplo, convém reflectir um pouco sobre o que fizemos. Ao fim ao cabo acabamos de *deduzir* uma lei física, a Eq.(40), sem fazer uma única experiência. Será que podemos de facto recostar-nos num sofá e, usando as nossas células cinzentas, descobrir como se comporta o mundo? Na verdade, a ausência de um conteúdo empírico no nosso raciocínio é apenas aparente. A nossa suposição inicial sobre as variáveis de que pode depender o período do pêndulo resume observações muito importantes. O período do pêndulo poderia, à partida, depender de muito mais variáveis como, o tipo de material que o constitui, o local onde oscila (latitude e/ou longitude), o diâmetro do fio de suspensão etc, etc. Não deixa no entanto de ser interessante que tendo assim limitado o número de parâmetros, foi depois possível chegar tão longe com base no princípio de homogeneidade dimensional.

2.2 Velocidade do Som

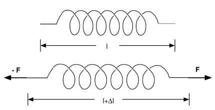

Figura 2: O elongamento da mola é proporcional a F.

Suponhamos que aplicamos duas forças iguais e opostas no extremo de uma mola. Sabemos que a deformação é proporcional à força

$$F = k\Delta l \qquad (k, \text{ constante da mola}) \tag{43}$$

Exercício 3.
É mais usual definir a constante da mola supondo uma das extremidades fixas e aplicando a força F na outra. A constante da mola é dada pela razão entre F e a variação de comprimento da mola. Esta definição é equivalente à do texto? Porquê?

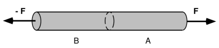

Figura 3: Cada metade da barra está sujeita às mesmas forças que a barra completa.

Suponhamos agora que, em vez da mola temos uma barra sólida. Se a força não ultrapassar o limite de elasticidade da barra temos de novo a relação da Eq.(43) entre a variação de comprimento da barra e a força. Como depende k do material e da geometria da barra? Se duplicarmos o seu comprimento k varia? E se variarmos a secção?

Para responder a estas perguntas, imaginemos a barra constituída por duas partes do mesmo comprimento colocadas topo a topo. Cada metade da barra está sujeita às mesmas forças que a barra completa. É óbvio que a barra A, estando em equilíbrio tem uma resultante das forças aplicadas nula. Isto é a barra B exerce sobre A uma força $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$. Aplicando a lei de Hooke, Eq.(43), à metade A da barra e designando por k_1 a respectiva constante de força

$$\Delta l_A = \frac{F}{k_1} \tag{44}$$

As forças nas extremidades de B são também e $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ e a barra B é idêntica a A. Logo

$$\Delta l_B = \frac{F}{k_1} \tag{45}$$

Ora, a barra completa tem uma variação de comprimento que é a soma das variações de cada metade.

$$\Delta l = \Delta l_A + \Delta l_B = F(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}) = F\frac{2}{k_1} \tag{46}$$

A lei de Hooke aplicada à barra completa dá então

$$k := \frac{F}{\Delta l} = \frac{k_1}{2}$$

$$k = \frac{k_1}{2} \tag{47}$$

Por outras palavras, a constante k de uma barra de comprimento l é metade da constante k_1 de uma barra de comprimento $l/2$. Não é difícil concluir que k é inversamente proporcional ao comprimento da barra.

Em relação às dimensões transversais podemos raciocinar de modo semelhante. Imaginamos a barra dividida longitudinalmente em duas. As forças aplicadas a cada uma nas extremidades, a cada metade, tem agora módulo $F/2$, pois F é a soma destas duas forças. Como é óbvio, cada uma das duas partes sofre o mesmo elongamento que a barra completa. Assim a constante de cada metade da barra é

$$k_2 \Delta l = \frac{F}{2} \tag{48}$$

e neste caso $k = F/\Delta l = 2k_2$: a constante k é proporcional à área da secção da barra. Em resumo, para uma barra de área A e comprimento l

$$k = \frac{F}{\Delta l} = E\frac{A}{l} \tag{49}$$

em que E deve ser independente das dimensões da barra, característico do material de que é feita. É conhecido como módulo de Young. Assim temos para a relação entre o elongamento da barra e a força de estiramento

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \tag{50}$$

As dimensões de E são exactamente as de uma pressão. No SI a respectiva unidade é o Pa (Pascal). Valores típicos para sólidos andam na gama das dezenas a centenas de GPa (1 GPa $= 10^9$ Pa, consultar *Young modulus* na Wikipedia).

Agora que sabemos caracterizar as forças elásticas que se exercem num sólido, vejamos o que podemos aprender sobre a propagação do som nos mesmos. Como o som implica a propagação de uma deformação elástica, parece claro que a sua velocidade vai depender do módulo de Young [1]. Este determina as forças que cada parte do sólido exerce sobre as vizinhas. Mas se pensarmos nas leis de Newton, sabemos que o movimento é determinado, não apenas pelas forças que actuam sobre os corpos, mas também pelas respectivas massas. Por outro lado é um dado adquirido que a velocidade de propagação do som é uma característica de cada material e não depende da geometria dos corpos onde se propaga. Assim sendo, deve depender, não da massa do corpo, mas da massa volúmica do material que o constitui. Sem mais informações arrisquemos

$$v_{som} = f(E, \rho) \tag{51}$$

Olhemos para as dimensões

$$[E] = [\text{Pressão}] = \left[\frac{F}{A}\right] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} \tag{52}$$

$$\rho = ML^{-3} \tag{53}$$

Ora

$$\left[\frac{E}{\rho}\right] = L^2T^{-2}, \tag{54}$$

as dimensões do quadrado de uma velocidade. Logo

$$v_{som} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}h(E, \rho) \tag{55}$$

em que $h(E, \rho)$ é adimensional. Mas não é possível formar um parâmetro adimensional de E e ρ, pelo que h não pode depender de quaisquer destes parâmetros e terá que ser uma constante adimensional.

$$v_{som} = \alpha\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{56}$$

Como exemplo calculemos $\sqrt{E/\rho}$ para o alumínio , $E = 71\,\text{GPa}, \rho = 2.7\,\text{gcm}^{-3}$ [4], o que dá

$$v_{som}(\mathsf{Al}) = 5.13 \times 10^3\,\text{ms}^{-1} \tag{57}$$

[1] Estamos a pensar em ondas sonoras em que a deformação da barra é de variações de comprimento no sentido de propagação: ondas longitudinais. Estas são as que se podem transmitir ao ar, criando alternância de compressão e expansão, isto é *som*.

A velocidade do som no alumínio é, 5100 m s^{-1}. Uma análise mais completa mostra que $\alpha = 1$.

A experiência mostra que as constantes adimensionais, como α, em regra, não afetam a *ordem de grandeza* das quantidades onde aparecem. Nesses casos a análise dimensional permite-nos estimar a ordem de grandeza da quantidade analisada. Neste exemplo diríamos, sem mais informação, que a velocidade do som neste material deve ser da ordem de alguns quilómetros por segundo.

Exercício 4.
Tenta generalizar este problema da propagação do som numa barra para o seguinte sistema. Tens uma cadeia linear de molas ligadas, todas idênticas, com a mesma constante, a mesma massa e o mesmo comprimento. Usa análise dimensional para tentar estimar a velocidade de propagação de uma vibração longitudinal (deformações segundo o eixo das molas).

2.3 Forca de Stokes e Número de Reynolds

Dentro da mesma filosofia consideremos agora um exemplo no campo da física de fluidos. É uma área onde a análise dimensional é particularmente útil.

Consideremos um corpo de forma esférica imerso num fluido. Se este se mover exercerá sobre o corpo uma força na direcção do seu movimento. Note-se que poderemos também considerar que é o corpo que se move no fluido em repouso. O importante é o movimento relativo sólido–fluido. De que poderá depender tal força? Certamente da velocidade relativa sólido–fluido, U e das dimensões do corpo. Poderemos também pensar que pode depender da massa volúmica do fluido. Um fluido muito rarefeito não deve arrastar com muita força o sólido. Vejamos então as dimensões

$$[R] = L, \qquad \text{(raio)}$$
$$[\rho] = ML^{-3} \qquad \text{(massa volúmica)}$$
$$[U] = LT^{-1} \qquad \text{(velocidade)}$$
$$[F] = MLT^{-2} \qquad \text{(força)}$$

Vemos, por inspecção que $F \propto \rho$ (dimensão 1 na massa); por outro lado $F \propto U^2$(para acertar as dimensões de T). Portanto

$$\left[\rho U^2 R^2\right] = MLT^{-2} = [F] \tag{58}$$

ou seja,

$$F = \rho U^2 R^2 h(\rho, U, R) \tag{59}$$

A função h deve ser adimensional. Como não é possível, com os seus argumentos, formar um parâmetro adimensional, h deve reduzir-se a uma constante:

$$F = k\rho U^2 R^2 \tag{60}$$

e toda a dependência de F nos parâmetros do problema fica determinada.

Nesta altura podemos tentar impressionar um experimentalista com esta lei física deduzida por raciocínio puro! Ele poderia argumentar, com justeza, que o nosso ponto de partida (a selecção dos parâmetros de que cremos que F possa depender) resulta de uma experiência prévia, tem pois um forte conteúdo empírico. Mas, mais provavelmente, limitar-se-á a apontar que o nosso resultado está errado pois, é bem conhecido experimentalmente que, a baixas velocidades, a força é proporcional a U, não a U^2. Trata-se da força de atrito de Stokes. Como é possível?

Com efeito, a nossa suposição de partida é demasiado restritiva, pois ignora uma característica do fluido, *a viscosidade*. Para explicar o que é teremos que fazer um longo parêntesis.

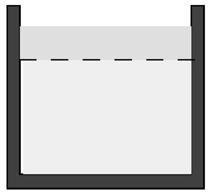

Figura 4: O peso da camada sombreada de líquido é suportado pela pressão do líquido que está em baixo.

2.3.1 Viscosidade de Stokes

Consideremos um recipiente cheio de líquido, por exemplo água. A porção de líquido sombreada na fig(1.2) é actuada pela força de gravidade. O respectivo peso vale

$$\Delta p = \rho g \Delta V \tag{61}$$

(ρ, massa volúmica, ΔV, volume)

O que sustenta esta porção de líquido e o impede de cair? Naturalmente as forças de pressão exercidas pelo líquido que está por baixo. Este líquido é comprimido pelo peso do líquido acima dele (e da coluna de ar por cima deste). Deforma-se (muito pouco, pois os líquidos, como os sólidos, são pouco compressíveis) e daí resultam forças de pressão que se exercem normalmente à fronteira entre as duas porções de líquido. Essas forças são proporcionais à área da superfície e por isso é bem definida a força por unidade de área, a pressão. O ponto é que os líquidos se comportam de modo muito semelhante aos sólidos sob acção de tensões compressivas (normais às superfícies através das quais se exercem). Consideremos agora uma situação um pouco diferente. Uma camada de líquido está contida entre duas placas horizontais, sólidas. O líquido, normalmente, adere ao sólido. Isto é, se arrastarmos uma das placas horizontalmente o líquido que está em contacto com ela move-se também. Se entre as placas estivesse um sólido o deslocamento horizontal induziria uma deformação no mesmo. Surgiria uma força elástica que se oporia ao deslocamento. Seria necessário manter aplicada uma força externa para manter a placa deslocada da sua posição inicial. Se imaginarmos uma superfície a separar o sólido em duas camadas vemos claramente que a condição de equilíbrio da parte superior implica que a inferior exerça sobre ela uma força *paralela à superfície através da qual ela se exerce* . Estas tensões são designadas por tensões de corte.

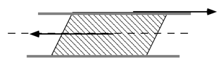

Figura 5: sólido sujeito a tensões de corte..

Um líquido responde a tensões de corte de um modo muito diferente de um sólido. As camadas de líquido podem deslizar umas sobre as outras. A placa superior pode estar em equilíbrio, sem forças externas, em qualquer posição. Em equilíbrio, num líquido, não há tensões de corte. Mas por experiência sabemos que *enquanto a placa e o líquido estão em movimento* surgem de facto tensões de corte que se lhe opõem—as forças de viscosidade.

Para uma classe vasta de líquidos (não todos) verifica-se que para uma velocidade da placa superior U e uma camada de espessura l de líquido, a força por unidade de área que é necessário exercer externamente sobre a placa para a manter em velocidade uniforme vale

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{U}{l} \tag{62}$$

O coeficiente η é a viscosidade. Note-se que, como a placa se desloca a uma velocidade uniforme, a resultante das forças que nela actuam é nula. Logo esta expressão determina também o valor da força que o líquido exerce sobre a placa. À primeira vista esta definição pareceria indicar que a viscosidade é uma propriedade da interface líquido—sólido, mais do que do líquido em si. De facto não é assim. O que na realidade se verifica na situação considerada é que a velocidade no seio do líquido varia de um valor nulo na placa inferior até U, na superior, de um modo linear. Isto é

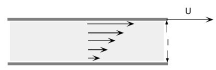

Figura 6: para mover a placa a velocidade uniforme é necessário manter uma força aplicada. O deslizamento de camadas de líquido origina tensões de corte.

$$v_x(y) = U \frac{y}{l} \tag{63}$$

Se imaginarmos uma superfície paralela às placas a separar duas partes do líquido vemos que a força que cada uma destas partes exerce sobre a outra é ainda dada pela Eq. 62 uma vez que não há acelerações no sistema. O que estamos a dizer, portanto, é que a força exercida através da superfície de separação entre as partes A e B do líquido vale

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{U}{l} = \eta \frac{dv_x(y)}{dy} \qquad \text{(No sentido negativo do eixo } xx\text{)} \tag{64}$$

Em conclusão, um deslizamento de uma camada de líquido sobre outra, (variações de componentes da velocidade segundo um dado eixo numa direcção perpendicular ao mesmo, $dv_x/dy \neq 0$) dá origem a tensões de corte proporcionais à viscosidade do líquido.

2.3.2 A Força de Stokes

Estamos agora em condições de voltar à discussão da força sobre um sólido em torno do qual se move um fluido. Parece claro que a viscosidade do líquido é relevante. Com efeito se o líquido adere à superfície do sólido terá que haver variações de velocidade no seio do fluido e surgirão tensões de corte determinadas pela viscosidade. Analisando dimensionalmente η

$$\begin{aligned} [\eta] &= (MLT^{-2})(L^{-2})(L)(LT^{-1})^{-1} && (65) \\ &= (MLT^{-2})(L^{-2})(L)(L^{-1}T) = ML^{-1}T^{-1} && (66) \end{aligned}$$

Levemos em conta a informação do nosso amigo experimentalista, $F \propto U$. Temos

$$F = Uf(\rho, R, \eta) \tag{67}$$

As dimensões da função f são fáceis de determinar

$$[f] = \left[\frac{F}{U}\right] = MT^{-1} \tag{68}$$

O produto ηR tem precisamente estas dimensões pelo que

$$F = \eta UR \times h(\rho, R, \eta) \tag{69}$$

em que a função h é agora adimensional. Mas não há nenhum parâmetro adimensional que se possa formar a partir de produtos de potências de ρ, R e η. Senão vejamos

$$\rho^\alpha R^\beta \eta^\gamma = M^{\alpha+\gamma} L^{-3\alpha+\beta-\gamma} T^{-\gamma} \tag{70}$$

Para termos um produto adimensional

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ -3\alpha + \beta - \gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{aligned}$$

que só tem a solução $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Em conclusão a função h reduz-se a uma constante adimensional

$$F = k_s \eta UR \tag{71}$$

Neste regime, de $F \propto U$, a dependência no raio da esfera é linear e a força não depende da massa volúmica do líquido.

Finalmente, e para encerrar esta discussão sobre fluidos, podemos colocar o problema com toda a generalidade, sem fazer suposições sobre a dependência da força na velocidade.

$$F = f(\rho, \eta, R, U) \tag{72}$$

que podemos sempre escrever na forma

$$F = \eta UR \times h(\rho, \eta, R, U) \tag{73}$$

em que, de novo, h é adimensional. Mas com estes quatro parâmetros já é possível formar um produto adimensional. De facto, o trabalho já está feito. Como ηUR e $\rho U^2 R^2$ tem as mesmas dimensões (as de uma força) a razão entre eles é adimensional

$$\mathcal{R} = \frac{\rho U^2 R^2}{\eta UR} = \frac{\rho UR}{\eta} \tag{74}$$

Este parâmetro é designado por *número de Reynolds*.

A análise dimensional conduz então ao resultado

$$F = \eta U R \times h(\mathcal{R}) \tag{75}$$

Repare-se que, na medida em que incluímos na discussão todos os parâmetros relevantes, a função $h(\mathcal{R})$ é universal, a mesma para todos os fluidos (desde que caracterizados por uma viscosidade do tipo acima definido) e esferas sólidas (para outras formas geométricas a função será diferente).

O número de Reynolds caracteriza o regime de variação de F com U. Para $\mathcal{R} \ll 1$ será de esperar que $h(\mathcal{R}) \approx h(0)$ e teremos um regime em que $F \propto U$. Mas para $\mathcal{R} \approx 1$ ou superior esse regime pode ser modificado. Com efeito as características do escoamento variam substancialmente com $\mathcal{R}$. Para $\mathcal{R}$ pequeno o escoamento é ordenado e estacionário. A velocidade do fluido em cada ponto não varia no tempo. Para $\mathcal{R} \approx 20$ desenvolvem-se turbilhões na parte de trás do corpo sólido, que para $\mathcal{R} \approx 100$, acabam por descolar dando origem a variações temporais na velocidade do fluido em cada ponto. Para $\mathcal{R}$ muito elevado a esteira do sólido tem um comportamento desordenado (turbulento, ver Fig. 7).

Convém notar o poder da análise dimensional. A descrição que acabamos de fazer aplica-se a inúmeras situações. Dois quaisquer escoamentos com η's, R's, U's e ρ's totalmente diferentes terão as mesmas características *se os respectivos números de Reynolds forem idênticos.* Uma das consequências práticas destas ideias é que é possível estudar o comportamento de grandes massas líquidas (por exemplo, uma albufeira) com modelos de dimensões reduzidas, se a massa volúmica e a viscosidade do líquido do modelo forem escolhidas de modo a conduzir ao mesmo número de Reynolds. O número de Reynolds é apenas um de muitos parâmetros adimensionais que surgem no estudo da mecânica de fluidos.

3 Leituras Recomendadas

- *Classical and Modern Physics*, K. Ford, Vol I Cap. 2. Uma boa obra, na tradição americana de curso introdutório com cobertura global de todas as áreas da Física. Tem alguns anos e tem sido suplantado por obras mais recentes, com apresentações gráficas excepcionais, mas nem sempre com lucidez comparável.

- *Forces and Particles*, B. Pippard, Cap. 7 Um livro relativamente avançado, que contém uma discussão cuidada de alguns dos tópicos deste capítulo.

- *Sistema Internacional* Guilherme de Almeida Cap. 3 A ênfase é mais em sistemas de unidades mas no capítulo 3, trata alguns exemplos de análise dimensional.

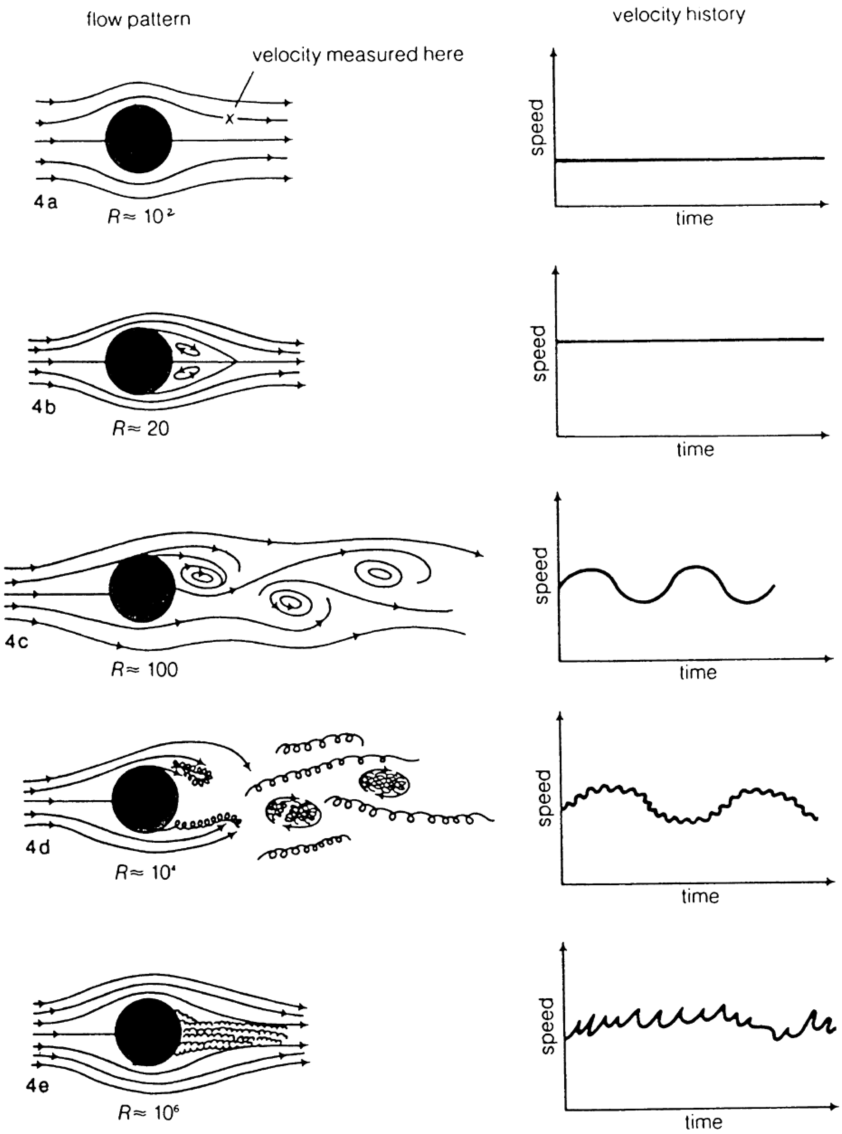

Figure 7: escoamentos de um fluido em torno de uma esfera para vários valores do número de Reynolds [5]

References

[1] *Introdução à Física da Matéria*, J. Bessa de Sousa.

[2] F. Quate, Physics Today, Agosto 1986 pag. 26

[3] *Handbook of Physics* , Condon & Odishaw, McGraw-Hill, NY, 1958

[4] *Science Data Book*, R. M. Tennent (ed) Oliver & Boyd, Edinburgh, 1979

[5] *From Order to Chaos*, L. P. Kadanoff, World Scientific, Singapore, 1980