Método de indução

José Carlos Santos

O termo «indução» tem origem na Filosofia. A entrada do *Dicionário de Filosofia* de Simon Blackburn que lhe diz respeito começa do seguinte modo:

Indução Termo usado sobretudo para designar qualquer processo de raciocínio que nos conduza de premissas empíricas a conclusões empíricas, que, apesar de apoiadas pelas premissas, não são dedutivamente deriváveis delas.

Assim, *induzir* é passar de algum conjunto de hipóteses para uma conclusão que é compatível com essas hipóteses mas não pode ser deduzida delas. Por exemplo, seria natural induzir do estudo dos mamíferos que não há mamíferos que nasçam em ovos e que em todos eles as fêmeas amamentam os filhos. Ambas as conclusões são compatíveis com tudo aquilo que podemos observar sobre mamíferos num raio de milhares de quilómetros em redor de Portugal. Mas apenas a segunda das conclusões é verdadeira, pois os ornitorrincos e os equidnas são ovíparos.

É frequente em Matemática surgir a tentação de se passar da observação de vários casos particulares para uma conclusão geral. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1: Se $n \in \mathbb{N}$, então $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Isto é o mesmo que dizer que se tem

1) $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3}$;

3) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{3}{4}$

e assim sucessivamente. É fácil verificar directamente que aquilo que se afirma no exemplo 1 é verdade para pequenos valores de n (ou até não tão pequenos como isso, se se recorrer a um computador). Mas será que é sempre verdade?

Exemplo 2: Se $n \in \mathbb{N}$, então $n^2 - n + 41$ é primo.

Facilmente se verifica que isto é verdade para pequnos valores de n. Assim, por exemplo, se n for igual a 1, 2, 3, 4 ou 5, então $n^2 - n + 41$ é igual a 41, 43, 47, 53 ou 61 respectivamente; estes cinco números são primos. Isso continuará a ocorrer à medida que n cresce?

Exemplo 3: Qualquer número natural par maior do que 2 pode ser escrito como soma de dois números primos.

Mais uma vez, facilmente se verifica que esta afirmação é verdadeira para números pequenos ($4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5, \ldots$) mas será sempre verdade?

Os exemplos anteriores podem ser vistos como exemplos de afirmações que pretendem ser válidas para todos os números naturais. Isto é óbvio nos casos dos exemplos 1 e 2; quanto ao exemplo 3, este pode ser enunciado da seguinte forma:

> Se n for um número natural, então $2n+2$ pode ser escrito como soma de dois números primos.

As afirmações feitas nos exemplos anteriores serão verdadeiras ou falsas? Vejamos isso uma a uma:

Exemplo 1: A afirmação é verdadeira. A maneira mais simples de ver porquê é talvez a seguinte: tem-se

$$\frac{1}{1\times 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

e assim sucessivamente. Logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)} &= \\ = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) &+ \cdots + \\ + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) &+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).\end{aligned}$$

Mas há aqui muitos termos que se cancelam entre si ($-1/2$ e $1/2$, por exemplo). Cancelando tudo o que se pode cancelar sobra apenas

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Exemplo 2: A afirmação é falsa. Seja $p(n) = n^2 - n + 41$. Então os números $p(1)$, $p(2)$, ..., $p(40)$ são primos, mas $p(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$, que não é primo.

Exemplo 3: Neste caso pura e simplesmente não se sabe se a afirmação é verdadeira ou falsa! Até hoje nunca foi descoberto nenhum número inteiro par maior do que 2 que não possa ser escrito como soma de dois números primos, apesar do muito que já se pensou sobre o assunto nos últimos dois séculos e meio e do uso de computadores nas últimas décadas! O enunciado do exemplo 3 é conhecido por «conjectura de Goldbach».

O método de indução (que também se designa por princípio de indução) é um método de demonstrar enunciados que são válidos para todos os números naturais. Ao contrário do que sucede na contexto da Filosofia, trata-se aqui de uma verdadeira demonstração.

Vejamos em que é consiste o método. Seja $P(n)$ uma afirmação relativa a um número natural n; por exemplo, retomando o exemplo 1 a afirmação $P(n)$ poderá ser

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \tag{1}$$

Então dizer que aquilo que é afirmado no exemplo 1 é verdade é o mesmo que dizer que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ é uma afirmação verdadeira. O método de indução consiste no seguinte: para provar que cada $P(n)$ é uma afirmação verdadeira, prova-se que

- $P(1)$ é uma afirmação verdadeira;
- sempre que $P(n)$ for uma afirmação verdadeira (com $n\in\mathbb{N}$), $P(n+1)$ também é verdadeira.

Vejamos como fazer isto no caso do exemplo 1.

- $P(1)$ é a afirmação
$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1\times 2},$$
a qual é obviamente verdadeira;
- seja n um número natural qualquer; quer-se provar que se $P(n)$ for verdade (ou seja, se se tiver (1)) então também se tem $P(n+1)$, isto é
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$
Mas estamos a supor que se tem (1) e, portanto,
$$\overbrace{\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}}^{=\frac{n}{n+1}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Vejamos outros exemplos.

Exemplo 4: Se $n \in \mathbb{N}$, então $n^3 - n$ é múltiplo de 3.

Tal como no caso anterior, seja $P(n)$ a afirmação «$n^3 - n$ é múltiplo de 3». Apliquemos então o método de indução.

- Tem-se $P(1)$, pois isto apenas quer dizer que $1^3 - 1$ é múltiplo de 3, ou seja, que 0 é múltiplo de 3, o que é obviamente verdade.

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha-se que se tem $P(n)$, i. e. suponha-se que $n^3 - n$ é múltiplo de 3; quer-se provar que se tem $P(n+1)$, o que equivale a afirmar que $(n+1)^3 - (n+1)$ é múltiplo de 3. Mas

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1\\ &= n^3 - n + 3(n^2 + n).\end{aligned}$$

  Então $(n+1)^3 - (n+1)$ é a soma de $n^3 - n$ (que se está a supor que é múltiplo de 3) com $3(n^2+n)$ (que é obviamente múltiplo de 3). Logo, $(n+1)^3 - (n+1)$ é também múltiplo de 3.

Considere-se agora o seguinte problema: quanto dá a soma dos n primeiros números naturais ímpares? Comece-se por calcular esta soma para pequenos valores de n:

- $1 = 1$;

- $1 + 3 = 4$;

- $1 + 3 + 5 = 9$;

- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

e assim sucessivamente. Os quatro números que surgem à direita nas quatro igualdades anteriores são, respectivamente, 1^2, 2^2, 3^2 e 4^2. Será que este padrão continua indefinidamente? Mesmo que verificássemos que este padrão continua para os 10, 100 ou 1000 números seguintes, não poderíamos concluir desse facto que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é sempre igual a n^2. Para o demonstrar, vai-se empregar o método de indução.

Exemplo 5: Se $n \in \mathbb{N}$, então

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2. \tag{2}$$

Seja $P(n)$ a afirmação (2). Então

- Ter-se $P(1)$ é ser verdade que $1 = 1^2$, coisa que não oferece dúvidas.

- Se, para $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ for verdadeira, então quer-se provar que $P(n+1)$ também o é, ou seja, que

  $$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2.$$

  Mas a soma das primeiras n parcelas do membro da esquerda é, por hipótese, igual a n^2; logo,

  $$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

Porque é que o método de indução funciona? Para perceber isso, é preciso ter em mente o que é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Este conjunto é formado por 1, pelo número que vem a seguir a 1 (ou seja, 2), pelo número que vem a seguir a esse (ou seja, 3) e assim sucessivamente. Por outro lado, se se consegue aplicar o método de indução a uma sucessão de proposições[1] $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, … então aquilo que se terá provado é que

1) a proposição $P(1)$ é verdadeira;

2) sempre que a proposição $P(n)$ for verdadeira (esta hipótese designa-se por *hipótese de indução*), a proposição $P(n+1)$ também é verdadeira.

Mas então tem-se:

1) a proposição $P(1)$ é verdadeira porque se provou isso;

2) a proposição $P(2)$ é verdadeira porque $P(1)$ é verdadeira e porque se provou que sempre que se tem $P(n)$, tem-se $P(n+1)$ e, em particular, como se tem $P(1)$, tem-se $P(2)$;

3) a proposição $P(3)$ é verdadeira porque $P(2)$ é verdadeira e porque se provou que sempre que se tem $P(n)$, tem-se $P(n+1)$ e, em particular, como se tem $P(2)$, tem-se $P(3)$;

4) a proposição $P(4)$ é verdadeira porque $P(3)$ é verdadeira e porque se provou que sempre que se tem $P(n)$, tem-se $P(n+1)$ e, em particular, como se tem $P(3)$, tem-se $P(4)$

e assim sucessivamente. Quais serão então as proposições $P(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) que se terão demonstrado? A primeira ($P(1)$), a que vem a seguir a essa ($P(2)$), a que vem a seguir a essa ($P(3)$) e assim sucessivamente. Mas então estará provado que se tem $P(n)$ *para qualquer número natural n!*

Isto também permite ver que não se pode usar indução para demonstrar propriedades dos números reais. Por exemplo, considere-se a seguinte proposição: se $x \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{sen}(x\pi)=0$. Tem-se então:

[1] Uma *proposição* é uma afirmação que é verdadeira ou falsa. Por exemplo, «$4>2$» e «$2+2=5$» são proposições. Por outro lado, «$x \geqslant 0$» não é uma proposição (ser verdadeira ou falsa depende de x) mas «para cada $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 0$» ou «há números reais x tais que $x \geqslant 0$» já são proposições.

1) $\operatorname{sen}(1.\pi) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$;

2) se $\operatorname{sen}(x\pi) = 0$, então

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\big((x+1)\pi\big) &= \operatorname{sen}(x\pi+\pi)\\ &= \operatorname{sen}(x\pi)\cos(\pi)+\cos(x\pi)\operatorname{sen}(\pi)\\ &= 0+0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Mas, no entanto, a proposição *não* é verdadeira! O enunciado é falso para, por exemplo $x = 1/2$. O que falha aqui é que, embora $\mathbb{R}$ contenha 1, $1+1$, $1+1+1$ e assim sucessivamente, $\mathbb{R}$ não é formado somente por aqueles números.

Mas isto não quer dizer que o método de indução só possa ser aplicado aos números naturais. Pela mesma razão que a que foi dada para explicar porque é que o método de indução funciona, ele aplica-se, por exemplo, para demonstrar que uma determinada propriedade é válida para todos os números inteiros maiores ou iguais a um número inteiro dado p; basta provar que a propriedade é válida para o número p e que, se for válida para um número $n (\geqslant p)$, então também é válida para $n+1$.

Exemplo 6: Se $n \geqslant 3$, então $2n+1 \leqslant n^2$.

É claro que $7(= 2\times 3+1)$ é menor ou igual a $9(= 3^2)$. Por outro lado, suponha-se que, para um número $n \geqslant 3$, se tem $2n+1 \leqslant n^2$ (hipótese de indução); quer-se provar que $2(n+1)+1 \leqslant (n+1)^2$. Mas

$$2(n+1)+1 = 2n+3 = (2n+1)+2 \leqslant n^2+2,$$

pela hipótese de indução; basta então provar que $n^2+2 \leqslant (n+1)^2 = n^2+2n+1$. Ora,

$$\cancel{n^2}+2 \leqslant \cancel{n^2}+2n+1 \iff 2 \leqslant 2n+1 \iff 1 \leqslant 2n,$$

o que é verdade qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Ao tentar-se demonstrar por indução uma sucessão $P(1)$, $P(2)$, ... de proposições, por vezes deparamo-nos com o seguinte fenómeno: ao provar-se que $P(n)$ implica $P(n+1)$ (aquilo que se designa por *passo de indução*), constata-se que para fazer aquela demonstração é necessário usar indução novamente! Que fique claro que isso não tem mal nenhum.

Exemplo 7: Se $n \geqslant 5$, então $2^n > n^2$.

Para $n = 5$, não há problema $(32 > 25)$. Suponha-se agora que, para $n \geqslant 5$, se tem $2^n > n^2$; quer-se provar que $2^{n+1} > (n+1)^2$. Mas

$$2^{n+1} = 2\times 2^n > 2n^2,$$

pela hipótese de indução; portanto, basta provar que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$. Mas tem-se

$$2n^2 \geqslant (n+1)^2 \iff 2n^2 \geqslant n^2+2n+1 \iff n^2 \geqslant 2n+1,$$

que é precisamente a desigualdade do exemplo 6! Além disso, no exemplo 6 provou-se que se tem aquela desigualdade sempre que $n \geqslant 3$; por maioria de razão, a desigualdade é válida quando $n \geqslant 5$, como se queria provar.

Concluindo: demonstrar por indução uma proposição relativa a todos os números naturais consiste em demonstrar que é válida para o número 1 e em demonstrar o passo de indução. É só isso! Naturalmente, demonstrar que é válida para o número 1 pode ser mais ou menos difícil e o mesmo se aplica a demonstrar o passo de indução.

Existe também um outro método de demonstrar resultados sobre os números naturais que se designa por *indução forte* e que consiste no seguinte: para se demonstrar que as proposições $P(1)$, $P(2)$, ... são todas verdadeiras demonstra-se que $P(1)$ é verdadeira e que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se as proposições $P(1)$, $P(2)$, ..., $P(n)$ forem verdadeiras, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Exemplo 8: Qualquer número natural maior do que 1 pode ser escrito como produto de números primos.

Antes de se passar à demonstração, é preciso deixar claro que, ao falar-se de «produto de primos», está-se também a considerar a possibilidade de haver um único primo envolvido; assim, 18 pode ser escrito como produto de primos porque $18 = 2 \times 3 \times 3$ (e 2 e 3 são primos), 49 pode ser escrito produto de primos porque $49 = 7 \times 7$ (e 7 é primo) e 5 pode ser escrito como produto de primos porque $5 = 5$ (e 5 é primo).

Demonstrar-se o que é enunciado no exemplo 8 é então o mesmo que demonstrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, é válida a seguinte proposição: $n = 1$ ou n pode ser escrito como produto de primos. Para $n = 1$, é claro que se tem isto. Seja agora $n \in \mathbb{N}$ e suponha-se que já se provou que os números de 1 a n têm todos a propriedade de serem iguais a 1 ou poderem ser escritos como produto de primos; quer-se provar que acontece o mesmo com $n+1$. É claro que $n+1$ não é igual a 1; quer-se então provar que pode ser escrito como produto de primos. Se $n+1$ for primo, então pode ser escrito como produto de primos. Por outro lado, se $n+1$ não for primo, então pode-se escrever $n+1$ como um produto $k \times l$ onde k e l são números naturais maiores do que 1 e menores do que $n+1$. Mas então $k \in \{2, \dots, n\}$, pelo que, por hipótese, k pode ser escrito como produto de primos. O mesmo argumento aplica-se a l e, como $n+1 = k \times l$, $n+1$ pode ser escrito como produto de primos.

Uma propriedade básica dos números naturais que está relacionada com o método de indução é o *princípio da boa ordenação*. Para o enunciar é conveniente introduzir a seguinte expressão: diz-se que um elemento a de um conjunto C de números reais é *primeiro elemento* de C se:

- $a \in C$;

- para cada $x \in C$, $a \leqslant x$.

É frequente o primeiro elemento de um conjunto ser também designado por *mínimo* desse conjunto. Naturalmente, um conjunto de números reais não tem que ter primeiro elemento; $]0,+\infty[$, $\mathbb{Z}$ ou $\emptyset$, por exemplo, não têm.[2] O princípio da boa ordenação diz então o seguinte: qualquer conjunto não vazio de números naturais tem primeiro elemento. E porque é que isto é verdade? Como talvez fosse de esperar, vai-se demonstrar a validade do princípio da boa ordenação usando indução. Mais precisamente, vai-se usar indução para demonstrar que, para cada número natural n, se C for um conjunto de números naturais que contenha n, então C tem primeiro elemento.

É claro que se $1 \in C$, então 1 é o primeiro elemento de C, pois $1 \in C$ (por hipótese) e qualquer número natural é maior ou igual a 1; por maioria de razão, qualquer elemento de C é maior ou igual a 1. Suponha-se agora que, para um $n \in \mathbb{N}$, qualquer conjunto C de números naturais que contenha n tem primeiro elemento; quer-se provar que qualquer conjunto C de números naturais que contenha $n+1$ tem primeiro elemento. É claro que, como já foi visto atrás, se $1 \in C$ então 1 é o primeiro elemento de C. Por outro lado, se $1 \notin C$, seja C' o conjunto obtido a partir de C subtraindo 1 a cada um dos seus elementos. Então $C' \subset \mathbb{N}$, pois 1 é o único número natural n tal que $n-1 \notin \mathbb{N}$ e, por hipótese, $1 \notin C$. Por outro lado, $n \in C'$, pois $n+1 \in C$. Mas então, pela hipótese de indução, C' tem primeiro elemento p e é então claro que $p+1$ é o primeiro elemento de C.

O princípio da boa ordenação também permite demonstrar teoremas. Vai-se dar um exemplo humorístico, mas que ilustra a ideia básica.

Exemplo 9: Todos os números naturais são interessantes.

Se o conjunto dos números naturais desinteressantes não fosse vazio, teria um primeiro elemento n. Mas então n, sendo o primeiro número desinteressante, até que era interessante!

Com um pouco de prática, é fácil ver que qualquer demonstração que se possa fazer por indução forte também pode ser feita recorrendo ao princípio da boa ordenação e vice-versa.

Analogamento ao método de indução, que é um método de demonstrar sucessões de proposições, também há a possibilidade de se fazerem definições por indução. O tipo mais simples de uma definição deste tipo consiste em definir-se uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do seguinte modo:

1) define-se a_1;

2) para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se a_{n+1} a partir de a_n.

[2] Mas deve-se observar que quando um conjunto C tem primeiro elemento, então só pode ter um. De facto, se a e b forem ambos primeiros elementos de C então, pela definição de primeiro elemento, $a \leqslant b$ e $b \leqslant a$, pelo que $a = b$.

Exemplo 10: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de números naturais tal que $a_1 = 1$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Que sucessão é esta? Por definição, $a_1 = 1$. Quanto é a_2? Como $2 = 1+1$ e a_1 está definido (é igual a 1), então $a_2 = 2a_1 + 1 = 3$. Quanto a a_3, como $3 = 2+1$, tem-se que $a_3 = 2a_2 + 1 = 7$. É claro que $a_4 = 2a_3 + 1 = 15$, que $a_5 = 2a_4 + 1 = 31$ e assim sucessivamente.

Exemplo 11: Dada uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, é usual definir-se o somatório $\sum_{k=1}^{n} a_k$ como sendo igual a $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Uma maneira mais elegante de definir o somatário consiste em defini-lo indutivamente[3]:

1) $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$;

2) $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$.

Este método de definir o somatório tem a vantagem de não usar reticências, que podem ser uma fonte de ambiguidade.

Exemplo 12: Dado um número natural k, considere-se a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

1) $a_1 = k$;

2) a_{n+1} é igual $3a_n + 1$ se a_n for ímpar e é igual a metade de a_n se a_n for par.

Que sucessão é esta se $k = 1$? É claro que $a_1 = 1$. Como a_1 é ímpar, $a_2 = 3a_1 + 1 = 4$. Este número é par e então $a_3 = a_2/2 = 2$. Pelo mesmo argumento, $a_4 = a_3/2 = 1$. Agora regressou-se ao valor 1 e então o processo recomeça. Vê-se então que, para $k = 1$, a sucessão é

$$1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, \ldots$$

Os cálculos a fazer são os mesmos se $k = 2$ ou $k = 4$; obtêm-se respectivamente as sucessões

$$2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots \quad \text{e} \quad 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, \ldots$$

Se $k = 3$, a sucessão é ligeiramente mais complicada:

$$3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, \ldots$$

Uma coisa que se constata à medida que se vão calculando estas sucessões com valores cada vez maiores de k é que a sucessão acaba sempre por ir dar a 1. Será que isso acontece para qualquer k? É um problema em aberto!

É também possível fazer definições por recorrência nas quais se definem os dois primeiros termos e depois se define cada um dos restantes à custa dos dois anteriores.

[3] As definições indutivas costumam ser designadas por *definições por recorrência*.

Exemplo 13: A *sucessão de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ define-se por

1) $F_1 = 1$;

2) $F_2 = 1$;

3) se $n \in \mathbb{N}$, então $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Os primeiros termos desta sucessão são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Exemplo 14: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de números naturais tal que

1) $a_1 = 8$;

2) $a_2 = 55$;

3) se $n \geqslant 3$, a_n é o menor número natural para o qual seja verdade que

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}.$$

Quanto é a_3? É o menor número natural tal que

$$\frac{a_3}{55} > \frac{55}{8} \iff a_3 > \frac{55^2}{8} = 378{,}125;$$

logo, $a_3 = 379$. Por seu lado, a_4 é o menor número natural para o qual

$$\frac{a_4}{379} > \frac{379}{55} \iff a_4 > \frac{379^2}{55} = 2611{,}65;$$

logo, $a_4 = 2612$.

A sucessão do exemplo anterior cresce bastante rapidamente; os dez primeiros termos são 8, 55, 379, 2 612, 18 002, 124 071, 855 106, 5 893 451, 40 618 081 e 279 942 687.

Naturalmente, podem-se também definir sucessões por recorrência definindo primeiro os três primeiros termos e definindo cada um dos restantes à custa dos três anteriores, definindo os quatro primeiros termos e definindo cada um dos restantes à custa dos quatro anteriores e assim sucessivamente.

Exemplo 15: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão do exemplo 14 e seja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de números naturais tal que

1) $b_n = a_n$ para cada $n \in \{1,2,3,4\}$;

2) se $n \geqslant 5$, $b_n = 6b_{n-1} + 7b_{n-2} - 5b_{n-3} - 6b_{n-4}$

Então

$$\begin{aligned} b_5 &= 6b_4 + 7b_3 - 5b_2 - 6b_1 \\ &= 6 \times 2\,612 + 7 \times 379 - 5 \times 55 - 6 \times 8 \\ &= 18\,002. \end{aligned}$$

Não é necessária uma grande perspicácia para se ver que os cinco primeiros termos desta sucessão são também os cinco primeiros termos da sucessão do exemplo 14. Quanto aos quatro primeiros, isso não será propriamente surpreendente, pois resulta da própria definição de b_n para $n \in \{1,2,3,4\}$, mas à partida não havia nenhum motivo para se pensar que $b_5 = a_5$. De facto, quem prosseguir com os cálculos não terá dificuldade em constatar que $b_6 = a_6$, $b_7 = a_7$, $b_8 = a_8$ e assim por diante. Será que as duas sucessões são idênticas? Não são, mas é preciso levar os cálculos *mesmo* muito longe para nos apercebermos disso, pois tem-se $a_n = b_n$ para cada $n < 11\,057$. Quanto aos números $a_{11\,057}$ e $b_{11\,057}$, são números com 9 270 algarismos cada que diferem em uma unidade! Isto é mais um exemplo de como, quando se está perante uma proposição relativa a números naturais, não basta provar que é verdadeira para um grande número deles para se concluir que é verdadeira em todos os casos.