O conjunto de Cantor

Para cada $\alpha \in]0,1]$, defino o conjunto C_α do seguinte modo:

1. Seja I_0 o intervalo $[0,1]$.

2. Subtraio a I_0 o intervalo aberto central de comprimento $\alpha/3$; seja I_1 o conjunto restante. Por outras palavras, $I_1 = I_0 \setminus]1/2-\alpha/6, 1/2+\alpha/6[= [0, 1/2-\alpha/6] \cup [1/2+\alpha/6, 1]$.

3. O conjunto I_1 é formado pela reunião disjunta de dois intervalos fechados de $[0,1]$. A cada um destes intervalos subtraio o intervalo aberto central de comprimento $\alpha/9$. Seja I_2 o conjunto restante.

4. Construo assim sucessivamente uma família decrescente $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de sub--conjuntos de $[0,1]$. Cada I_n é uma reunião disjunta de 2^n intervalos fechados de $[0,1]$ e I_{n+1} obtém-se retirando a cada um destes intervalos o intervalo aberto central de comprimento $\alpha/3^{n+1}$.

5. Defino:
$$C_\alpha = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} I_n.$$

Há uma passagem nesta definição cuja legitimidade exige uma demonstração. Para que o quarto ponto faça sentido é necessário demonstrar que o comprimento de cada um dos 2^n intervalos fechados cuja reunião disjunta forma I_n é maior de que $\alpha/3^{n+1}$; caso contrário, não faz sentido falar no «intervalo aberto central de comprimento $\alpha/3^{n+1}$». Para justificar a passagem, repare-se que o conjunto I_1 é obtido retirando-se de $[0,1]$ um segmento de comprimento $\alpha/3$; logo, $l(I_1) = 1-\alpha/3$. Em seguida, obtém-se I_2 retirando de I_1 dois segmentos de comprimento $\alpha/9$, pelo que $l(I_2) = 1-\alpha/3-2\alpha/9$. Vê-se então que se tem:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : l(I_n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}\alpha}{3^k} = 1 - \alpha\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)$$

e então o que se quer mostrar é que:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : \frac{1}{2^n}\left(1 - \alpha\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)\right) > \frac{\alpha}{3^{n+1}}.$$

Verifica-se facilmente que esta expressão equivale a:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : \frac{1-\alpha}{2^n} > -\frac{2\alpha}{3^{n+1}}$$

e esta última proposição é obviamente verdadeira.[1]

Usualmente, a expressão «conjunto de Cantor» refere-se ao conjunto C_1. Por isso, para designar este conjunto em particular vai ser usada a letra C, sem qualquer índice.

Teorema: Para cada $\alpha \in]0,1]$ tem-se:

1. O cardinal de C_α é igual ao cardinal de $\mathbb{R}$.
2. $l(C_\alpha) = 1 - \alpha$.
3. C_α é compacto.
4. C_α é perfeito (i. e. não tem pontos isolados).
5. C_α é totalmente desconexo (i. e. os únicos sub-conjuntos conexos são os que são formados por um único ponto).

Além disso, o conjunto C é formado pelos números de $[0,1]$ que podem ser escritos na base 3 usando unicamente os algarismos 0 e 2.

Demonstração: Cada I_n é reunião disjunta de 2^n intervalos fechados; sejam $I(n,0), I(n,1), \ldots, I(n,2^n-1)$ esses conjuntos, numerados de modo que se $k < l$, então qualquer elemento de $I(n,k)$ seja menor do que qualquer elemento de $I(n,l)$. Vê-se então que:

$$I(n,k) \supset I(n+1,l) \text{ sse } l = 2k \text{ ou } l = 2k+1. \tag{1}$$

Visto que os intervalos $I(n,0), I(n,1), \ldots, I(n,2^n-1)$ são dois a dois disjuntos, o comprimento de cada um deles não excede 2^{-n}. Além disso, os extremos de cada $I(n,k)$ são elementos de C_α, pois $I(n,k)\backslash C_\alpha$ é um aberto e como tal está contido no interior de $I(n,k)$, enquanto que os extremos de $I(n,k)$ estão na fronteira. Repare-se que se $x \in C_\alpha$, então $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} I(n,k(n))$, sendo os $k(n)$ tais que $I(n,k(n)) \supset I(n+1,k(n+1))$. De facto $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} I(n,k(n))$, visto que o comprimento dos intervalos converge para zero.

Seja $2^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\{0,1\}$. Vou construir uma bijecção B entre $2^{\mathbb{N}}$ e C_α. Seja $(a_n)_n \in 2^{\mathbb{N}}$. Defino então $B((a_n)_n)$ como sendo o único elemento do conjunto:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I\left(n, \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k}\right).$$

Para justificar que esta definição faz sentido, veja-se que (1) implica que a família de intervalos de que estamos a calcular a intersecção é decrescente. Como todos

[1] Também se deduz desta expressão que α não pode ser maior do que 1.

estes intervalos são fechados, o princípio do encaixe dos intervalos diz que a intersecção não é vazia. Finalmente, como o comprimento dos intervalos tende para 0, a intersecção reduz-se a um ponto. Vê-se pela definição de C_α que esse ponto está necessariamente em C_α.

Para ver que a função B é injectiva, tomo dois elementos distintos $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ de $2^{\mathbb{N}}$. Seja N o menor número natural tal que $a_N \neq b_N$. Então $B((a_n)_n) \in I\left(N, \sum_{k=1}^{N} a_k 2^{N-k}\right)$ e $B((b_n)_n) \in I\left(N, \sum_{k=1}^{N} b_k 2^{N-k}\right)$. Estes dois conjuntos são disjuntos, de onde se tira que $B((a_n)_n) \neq B((b_n)_n)$. Quanto à sobrejectividade, se $x \in C_\alpha$ então $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} I(n, k(n))$. Visto que cada $I(n, k(n))$ contém $I(n+1, k(n+1))$, $k(n+1) = 2k(n)$ ou $k(n+1) = 2k(n) + 1$. Vê-se então que $x = B((a_n)_n)$, sendo a_n tal que $k(n) = 2k(n-1) + a_n$.[2] Visto que o cardinal de $\mathbb{R}$ é igual ao cardinal de $2^{\mathbb{N}}$, deduz-se que também é igual ao cardinal de C_α.

O conjunto C_α está contido em $[0, 1]$ e $[0, 1]\backslash C_\alpha$ é a reunião disjunta de um intervalo de comprimento $\alpha/3$ com dois intervalos de comprimento $\alpha/9$ com quatro intervalos de comprimento $\alpha/27$, etc. Logo, tem-se:

$$l([0, 1]\backslash C_\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}\alpha}{3^k} = \alpha$$

pelo que $l(C_\alpha) = 1 - \alpha$.

O conjunto C_α foi definido como sendo a intersecção de uma família de compactos. Logo, C_α é compacto.

Afirmar que C_α é totalmente desconexo é o mesmo que afirmar que não contém nenhum intervalo $]a, b[$. Para justificar isso, tomo um $n \in \mathbb{N}$. Então tem-se:

$$C_\alpha \subset \bigcup_{j=0}^{2^n-1} I(n, j).$$

Esta reunião é disjunta. Se escolher n tal que $2^{-n} < b - a$, então cada $I(n, j)$ tem comprimento inferior a $b - a$; logo:

$$]a, b[\not\subset \bigcup_{j=0}^{2^n-1} I(n, j).$$

Seja $x \in C_\alpha$. Vou mostrar que x não é um ponto isolado. Sei que:

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} I(n, k(n)).$$

[2] De facto, se se introduzir em $2^{\mathbb{N}}$ a distância $d((a_n)_n, (b_n)_n) = \sum_n 2^{-n}|a_n - b_n|$, B é um homeomorfismo. Isto mostra que os C_α são homeomorfos dois a dois.

Considero então as sucessões:

$$\begin{aligned} m_n &= \min I(n, k(n)) \\ M_n &= \text{máx}\, I(n, k(n)) \end{aligned}$$

Os extremos de cada intervalo $I(n, j)$ pertencem a C_α, pelo que as duas sucessões são sucessões de elementos de C_α. Vê-se facilmente que se tem:

1. $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : m_n \leq x \leq M_n$
2. $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : 0 < M_n - m_n \leq 2^{-n}$

pelo que ambas as sucessões $(m_n)_n$ e $(M_n)_n$ convergem para x e pelo menos uma delas não é constante a partir de uma certa ordem. Logo, x não é um ponto isolado.

Finalmente, no caso do conjunto C, verifica-se facilmente que I_n $(n \geq 1)$ é formado pelos números do intervalo $[0, 1]$ que se podem escrever na base 3 usando unicamente os algarismos 0 e 2 nas n primeiras casas decimais.[3]

Q. E. D.

Exercício: Mostre que se U é um aberto de $\mathbb{R}$ e $\alpha \in]0, 1]$, então $l(U \cap C_\alpha) < l(U)$.

Nota: Entre as propriedades mais interessantes do conjunto de Cantor destacam-se as seguintes:

1. Qualquer espaço métrico compacto, perfeito e totalmente desconexo é homeomorfo a C.
2. Se M é um espaço métrico compacto, então existe uma aplicação contínua sobrejectiva de C em M.

Para a demonstração destes resultados, veja-se o livro *General Topology* de S. Willard.

[3]Repare-se que $1 \in C$ uma vez que, na base 3, o número 1 pode-se escrever sob a forma 0,222222222222...