A linearidade das transformadas de Lorenz

José Carlos Santos
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre 687
4169–007 Porto, Portugal
e-mail: `jcsantos@fc.up.pt`

Resumo: A linearidade das transformadas de Lorenz é deduzida directamente dos pressupostos da Teoria da Relatividade, sem hipóteses adicionais.

Abstract: The linearity of the Lorenz transformations is deduced directly from the assumptions of Relativity Theory, without further hypothesis.

palavras-chave: Transformadas de Lorenz; linearidade; Teoria da Relatividade.

keywords: Lorenz transformations; linearity; Relativity Theory.

Introdução

Considerem-se dois observadores O e O' a moverem-se em referenciais inerciais, que se deslocam a uma velocidade uniforme relativamente um ao outro, sendo v a velocidade de O' relativamente a O. Se, para o observador O, um evento tiver lugar num determinado lugar e num determinado momento, em que lugar e em que momento têm lugar relativamente ao observador O'? A resposta relativística a esta pergunta é distinta da clássica. Veja-se [2] para uma introdução à Teoria da Relatividade e [4] para a sua história.

Para simplificar, vai-se supor que tudo se passa a uma dimensão espacial e que, além disso, quer o local 0 quer o instante 0 são os mesmos para ambos os observadores. Então, se o evento E teve lugar em (x, t) (onde a primeira coordenada é a coordenada espacial e a segunda é a temporal) relativamente a O e teve lugar em (x', t') relativamente a O', a relação clássica entre os pares (x, t) (x', t') é

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t, \end{cases} \tag{1}$$

enquanto que a relação relativística é dada pela transformada de Lorenz:

$$\begin{cases} x' = \gamma.(x - vt) \\ t' = \gamma.\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \end{cases} \tag{2}$$

onde c é a velocidade da luz no vazio e $\gamma = \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1}$.

Há muitas maneiras de demonstrar a validade das transformadas de Lorenz. Einstein, no seu artigo original sobre a Teoria da Relatividade (reproduzido no apêndice de [4]) faz isso de uma maneira quase completa (mais detalhes serão vistos à frente), partindo de dois pressupostos explícitos:

1. o princípio da relatividade (as leis naturais são as mesmas para dois observadores a moverem-se a uma velocidade uniforme relativamente um ao outro);
2. a velocidade da luz no vazio é constante e é a mesma para todos os observadores;

e dois implícitos:

1. isotropia do espaço;
2. homogeneidade do espaço-tempo.

De facto, quase desde o início da Relatividade que foi despendido esforço para provar que, mesmo sem se supor que a velocidade da luz no vazio é constante e é a mesma para todos os observadores, se tem necessariamente (1) ou (2), para alguma velocidade c, podendo então o valor de c ser determinado experimentalmente; veja-se [1] e a bibliografia aí incluída.

Repare-se que (2) exprime (x', t') como uma função linear de (x, t); por outras palavras, $(x', t') = f_v(x, t)$, para alguma aplicação linear f_v, dependente de v. Um ponto de partida para a demonstração de que se tem de facto (2) consiste então em começar por demonstrar que f_v é uma aplicação linear; isso reduz a determinação da relação entre (x, t) e (x', t') à determinação de apenas quatro números. Einstein provou que f_v preserva a adição, o que quase basta para concluir que se trata de uma aplicação linear. Com efeito, qualquer função mensurável (segundo Lebesgue) de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que preserve a adição é linear e supor que f_v é mensurável é uma hipótese extra muito fraca, tantos mais que há modelos da teoria dos conjuntos para os quais todas as funções são mensuráveis (veja-se [5]). Há outras demonstrações da linearidade de f_v supondo outras hipóteses mais fortes (mais uma vez, consulte-se a bibliografia de [1]), tal como, por exemplo, f_v ser de classe C^2. O objectivo deste artigo consiste em demonstrar a linearidade de f_v sem recorrer a hipóteses adicionais.

Antes de se prosseguir, convém observar que f_v é necessariamente uma bijecção. Com efeito, está implícito que, a cada evento espaço-temporal E, corresponde um e um só par de coordenadas espaço-temporais $\psi(E)$, que são as coordenadas de E relativamente ao observador O. E, analogamente, a E corresponde um e um só par de coordenadas espaço-temporais $\psi^\star(E)$, que são as coordenadas de E relativamente ao obsrvador O'. Mas então ψ e $\psi^\star$ são bijecções e, como $f_v = \psi^\star \circ \psi^{-1}$, f_v é uma bijecção.

A fim de se provar a linearidade de f_v, considere-se um objecto sobre o qual não actua nenhuma força. Como os observadores O e O' estão em referenciais inerciais, ambos descrevem o conjunto de todas as sucessivas coordenadas espaço-temporais do objecto como um segmento de recta. Posto de outro modo, a função f_v envia segmentos de recta em segmentos de recta. Mas qualquer bijecção de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que envie segmentos de recta em segmentos de recta é uma aplicação afim (veja-se [3]) e, como se está a supor que $f_v(0,0) = (0,0)$, resulta daqui que f_v é linear.

Referências

[1] S. Cacciatori, V. Gorini and A. Kamenshchik, "Special relativity in the 21st century", *Ann. Phys. (Berlin)*, Vol. 17, No. 9–10 (2008), pp. 728–768.

[2] J. J. Callahan, *The geometry of spacetime: An introduction to special and general relativity*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[3] J. Jeffers, "Lost theorems of Geometry", *Am. Math. Mon*, Vol. 107, No. 9, pp. 800–812.

[4] A. I. Miller, *Albert Einstein's Special Theory of Relativity: Emergence (1905) and early interpretation (1905–1911)*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] R. M. Solovay, "A model of Set-Theory in which every set of reals is Lebesgue measurable", *Ann. of Math. (2) (Princeton)*, Vol. 92, No. 1 (1970), pp. 1–56