

A incompletude do espaço das funções integráveis segundo Riemann

José Carlos Santos

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Maio de 2006

Introdução

Considere-se o seguinte teorema clássico de Topologia, cuja demonstração pode ser vista em [2, §7.5] ou em [5, §11.2]:

Teorema 1 *Se E for um espaço métrico, então existe algum espaço métrico completo F tal que E é isométrico a um subespaço de F .*

Este é um teorema de existência, i. e. um teorema que afirma que, dado um objecto matemático A com determinadas propriedades, existe algum objecto matemático A' que satisfaz uma certa relação relativamente a A . Teoremas deste tipo são frequentes em Matemática. Veja-se, por exemplo, o teorema que afirma que qualquer corpo é um subcorpo de algum corpo algebricamente fechado.

Há, no entanto, uma diferença psicológica importante entre o teorema 1 e o exemplo do parágrafo anterior, do ponto de vista de um aluno de Matemática. Afinal, não é difícil para um tal aluno constatar a existência de corpos para os quais não é claro se são subcorpos de algum corpo algebricamente fechado (os corpos finitos, por exemplo). Em contrapartida, os exemplos de espaços métricos não completos E que são vistos em cursos de introdução à Topologia (tais como \mathbb{Q} ou $]0, 1[$ munidos da métrica usual) são exemplos para os quais é usualmente muito fácil descrever um espaço métrico completo que contém E ; excepções parciais a esta regra podem ser vistas em [1, §II.3] e em [5, §9.2] e serão comentadas com mais detalhe mais à frente. Isto leva a que um aluno que se depare com o teorema 1 pela primeira vez possa ser levado a pensar que

1. o teorema 1 é inútil, no sentido de ser óbvio, em cada situação concreta onde seja dado um espaço métrico não completo, como é que se deve proceder para o completar;
2. a única maneira de se provar que um espaço métrico E não é completo consiste em mergulhá-lo num espaço métrico completo F e ou mostrar que E não é um fechado de F ou tomar um ponto da fronteira de E (em F) que não pertença a E e usá-lo para construir uma sucessão de Cauchy de elementos de E que não seja convergente em E .

Em [1, §II.3] é de facto demonstrado que \mathbb{Q} não é completo (relativamente à métrica usual) sem se recorrer ao facto de ser mergulhável em \mathbb{R} (o que,

aliás, seria impossível dada a maneira como aquele livro está organizado, pois os números reais só são aí definidos dois capítulos mais à frente). Para tal, mostra-se que a sucessão

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k(k+1)/2}} \right)_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

é de Cauchy mas não converge em \mathbb{Q} . No entanto, este exemplo, embora inatacável do ponto de vista lógico, dificilmente será convincente do ponto de vista psicológico, pois um estudante de Topologia já conhece a existência dos números reais.

O objectivo deste artigo consiste em fornecer exemplos de espaços métricos para os quais não seja óbvia a existência de um espaço métrico completo que contenha um subespaço que lhe seja isométrico. Pretende-se, além disso, que os exemplos sejam «naturais», i. e. que sejam obtidos a partir de entidades matemáticas já conhecidas dos alunos, para não transmitir a impressão de que uma tal situação só pode surgir em situações de certo modo artificiais.

Os exemplos que vão ser apresentados, obtidos a partir do espaço das funções integráveis segundo Riemann definidas num intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} , também poderão servir de estímulo para o estudo do integral de Lebesgue, uma vez que, como é explicado, completamentos dos espaços em questão podem ser construídos recorrendo àquele integral.

1 Exemplos

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ e sejam $\mathcal{C}([a, b])$ e $\mathcal{R}([a, b])$ os espaços formados pelas funções de $[a, b]$ em \mathbb{R} que são, respectivamente, contínuas e integráveis segundo Riemann. Como se sabe, $\mathcal{C}([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b])$ (veja-se [3, teorema 6.8], por exemplo). Vamos ver que existe uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{C}([a, b])$ que não converge em $\mathcal{R}([a, b])$, o que mostrará que nem $\mathcal{C}([a, b])$ nem $\mathcal{R}([a, b])$ são completos. Naturalmente, para que isto faça sentido é necessário começar por explicar qual é a métrica com que se vai trabalhar nestes espaços. Trata-se da «métrica» do integral:

$$d(f, g) = \int_a^b |f - g|.$$

As aspas da frase anterior justificam-se pelo facto de não se tratar realmente de uma métrica mas somente de uma pseudo-métrica; por outras palavras, d satisfaz todas as condições de uma métrica excepto que não se tem necessariamente $d(f, g) = 0 \implies f = g$ quando $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ (mas a implicação é válida se $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$). Quando se está perante um conjunto E munido de uma pseudo-métrica d , é usual considerar-se em E a relação de equivalência

$$x \sim y \quad \text{se e só se} \quad d(x, y) = 0,$$

definir no quociente E/\sim a métrica

$$\begin{array}{ccc} E/\sim \times E/\sim & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ ([x], [y]) & \rightsquigarrow & d(x, y) \end{array}$$

e trabalhar com o novo espaço métrico assim obtido. Alternativamente, pode-se continuar a trabalhar com E e com a pseudo-métrica d e observar que noções como «aberto», «fechado», «sucessão convergente», «sucessão de Cauchy», etc., continuam a fazer sentido. Ambas as abordagens conduzem aos mesmos resultados.

Para simplificar a exposição, ir-se-á trabalhar com o intervalo $[0, 1]$ e não com um intervalo $[a, b]$ arbitrário.

Considere-se a sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{C}([0, 1])$ assim definida: se $n \in \mathbb{N}$, então f_n é a função

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{se } x \geq 1/n^2 \\ n & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

É fácil demonstrar que se trata de uma sucessão de Cauchy, pois tem-se

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : d(f_m, f_n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|.$$

No entanto, esta sucessão não converge em $\mathcal{R}([0, 1])$. De facto, se convergisse para uma função f daquele espaço, então f seria limitada (pela definição de função integrável segundo Riemann). Seja M um majorante de f que seja maior ou igual a 1. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ para o qual $n \geq M$, ter-se-ia

$$\begin{aligned} d(f, f_n) &= \int_0^1 |f - f_n| \\ &\geq \int_0^{1/M^2} |f - f_n| \\ &\geq \int_0^{1/n^2} (n - M) dx + \int_{1/n^2}^{1/M^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - M \right) dx \\ &= \frac{1}{M} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Mas então $\lim_{n \in \mathbb{N}} d(f, f_n) \geq 1/M$, o que é absurdo.

Está então provado que nem $\mathcal{C}([0, 1])$ nem $\mathcal{R}([0, 1])$ são espaços métricos completos. Observe-se que, em [5, §9.2], é visto um exemplo de uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{C}([0, 1])$ que não é convergente em $\mathcal{C}([0, 1])$. No entanto, a sucessão em questão converge em $\mathcal{R}([0, 1])$ e, portanto, não pode ser usada para demonstrar que $\mathcal{R}([0, 1])$ não é completo. Esta é a segunda das «excepções parciais» a que foi feita referência na Introdução.

2 Mais exemplos

Examinemos o exemplo anterior para perceber como obter outros exemplos de sucessões de Cauchy de elementos de $\mathcal{C}([0, 1])$ que não sejam convergentes em $\mathcal{R}([0, 1])$. Não é difícil adivinhar o que é que está por trás da sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$: considera-se a função

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow 1/\sqrt{x}, \end{aligned}$$

cujos integrais impróprios $\int_0^1 f$ convergem, i. e. o limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 f$ existe; toma-se então

$$f_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq a_n \\ f(a_n) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1)$$

para uma sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $]0, 1]$ convergente para 0 (no exemplo em questão, empregou-se $a_n = n^{-2}$). Não é difícil ver que este método funciona sempre. Mais precisamente, se $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pm\infty$, se o integral $\int_0^1 f(x)$ convergir e se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sucessão de elementos de $]0, 1]$ convergente para 0, então (1) define uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{C}([0, 1])$ que não converge em $\mathcal{R}([0, 1])$.

Isto leva naturalmente à seguinte questão: será que todos os exemplos são deste tipo, ou seja, passíveis de serem obtidos a partir de integrais impróprios de funções não limitadas? Mais precisamente: será que dada uma sucessão de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções contínuas de $]0, 1]$ em \mathbb{R} , a não convergência dessa sucessão em $\mathcal{R}([0, 1])$ implica que $\lim_n \sup |f_n| = +\infty$? Vamos ver que a resposta é negativa, ou seja, vamos ver que há sucessões de Cauchy uniformemente limitadas (ou seja, para as quais há algum número real M tal que o valor absoluto de qualquer elemento da sucessão é majorado por M) de elementos de $\mathcal{C}([0, 1])$ que não são convergentes em $\mathcal{R}([0, 1])$. Outra maneira de formular isto é a seguinte: se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$, sejam

$$\mathcal{C}_{a,b}([0, 1]) = \{ f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f([0, 1]) \subset [a, b] \}$$

e

$$\mathcal{R}_{a,b}([0, 1]) = \{ f \in \mathcal{R}([0, 1]) \mid f([0, 1]) \subset [a, b] \}.$$

Então vai-se provar que o espaço $\mathcal{R}_{a,b}([0, 1])$ não é completo e que, mais precisamente, é possível encontrar uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{C}_{a,b}([0, 1])$ que não converge em $\mathcal{R}_{a,b}([0, 1])$. Para simplificar a exposição, isto será feito para $a = 0$ e $b = 1$, mas é claro que o mesmo método se aplica a quaisquer outros valores de a e de b .

3 O conjunto de Cantor

Vai-se agora introduzir um conjunto particularmente interessante.

Definição 1 Para cada $\alpha \in]0, 1]$, define-se o **conjunto de Cantor** C_α do seguinte modo:

1. Seja I_0 o intervalo $[0, 1]$.
2. Subtrai-se a I_0 o intervalo aberto central de comprimento $\alpha/3$; seja I_1 o conjunto restante. Por outras palavras,

$$I_1 = I_0 \setminus]1/2 - \alpha/6, 1/2 + \alpha/6[= [0, 1/2 - \alpha/6] \cup [1/2 + \alpha/6, 1].$$

3. O conjunto I_1 é formado pela reunião disjunta de dois intervalos fechados de $[0, 1]$. A cada um destes intervalos subtrai-se o intervalo aberto central de comprimento $\alpha/9$. Seja I_2 o conjunto restante.

4. Vai-se construindo assim uma família decrescente $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ de sub-conjuntos de $[0, 1]$. Cada I_n é uma reunião disjunta de 2^n intervalos fechados de $[0, 1]$ e I_{n+1} obtém-se retirando a cada um destes intervalos o intervalo aberto central de comprimento $\alpha/3^{n+1}$.
5. Define-se C_α como sendo $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} I_n$.

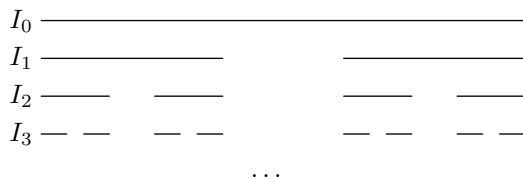


Figura 1: Construção do conjunto de Cantor (com $\alpha = 3/4$)

Esta construção está ilustrada pela figura 1 (nesta e em todas as outras figuras que envolvam o conjunto de Cantor, será empregue o valor $\alpha = 3/4$).

Há uma passagem nesta definição com a qual é preciso ter algum cuidado. Para que o ponto 4. faça sentido é necessário demonstrar que o comprimento de cada um dos 2^n intervalos fechados cuja reunião disjunta forma I_n é maior de que $\alpha/3^{n+1}$; caso contrário, não se pode falar no «intervalo aberto central de comprimento $\alpha/3^{n+1}$ ». Para justificar a passagem, repare-se que o conjunto I_1 é obtido retirando-se de $[0, 1]$ um segmento de comprimento $\alpha/3$; logo, I_1 é formado por dois segmentos de comprimento $(1-\alpha/3)/2$. Em seguida, obtém-se I_2 retirando de I_1 dois segmentos de comprimento $\alpha/9$, pelo que I_2 é formado por quatro segmentos de comprimento $((1-\alpha/3)/2-\alpha/9)/2 = (1-\alpha-2\alpha/9)/4$. Prosseguindo este tipo de cálculos, vê-se que cada I_n é reunião de 2^n intervalos disjuntos de comprimento

$$2^{-n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}\alpha}{3^k} \right) = 2^{-n} \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{2^n}{3^n} \right) \right)$$

e então o que se quer mostrar é que:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : 2^{-n} \left(1 - \alpha \left(1 - \frac{2^n}{3^n} \right) \right) > \frac{\alpha}{3^n}.$$

Verifica-se facilmente que esta desigualdade equivale a:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : \frac{1-\alpha}{2^n} > -\frac{2\alpha}{3^n}$$

e esta última afirmação é obviamente verdadeira. Também se deduz desta desigualdade que α não pode ser maior do que 1.

Usualmente, a expressão «conjunto de Cantor» refere-se ao conjunto C_1 mas para dar um exemplo de uma sucessão de Cauchy uniformemente limitada de elementos de $\mathcal{C}([0, 1])$ que não converge em $\mathcal{R}([0, 1])$ é preciso recorrer a algum C_α com $\alpha < 1$. De facto, vai-se começar por construir um exemplo de uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{R}([0, 1])$ que não é convergente e explicar em seguida como se pode modificar este exemplo de modo a ter-se uma sucessão

nas condições atrás descritas. Seja então C_α um conjunto de Cantor com $\alpha < 1$ e considere-se a sucessão de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ assim definida:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \in [0, 1]) : f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I_n \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{R}([0, 1])$ e que

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : \int_0^1 f_n = 1 - \alpha \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right).$$

Deduz-se então que

- a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ é uma sucessão de Cauchy, pois se $m, n \in \mathbb{Z}_+$ com $m \geq n$ tem-se

$$\int_0^1 |f_m - f_n| = \int_0^1 f_n - f_m = \alpha \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^m \right);$$

- se a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ convergir para $f \in \mathcal{R}([0, 1])$, então

$$\int_0^1 f = \lim_{n \in \mathbb{Z}_+} \int_0^1 f_n = 1 - \alpha > 0. \quad (2)$$

Para se mostrar que uma tal função f não pode existir é conveniente provar que C_α não contém intervalos da forma $]a, b[$ (em termos topológicos, isto é o mesmo que afirmar que o conjunto de Cantor tem interior vazio). De facto, se contivesse um tal intervalo então $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) :]a, b[\subset I_n$. Mas isto é impossível uma vez que I_n é um sub-conjunto de $[0, 1]$ que é reunião de 2^n intervalos disjuntos de comprimento $2^{-n} \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}\alpha}{3^k}\right) < 2^{-n}$ e, se $n \in \mathbb{Z}_+$ for suficientemente grande, $b - a > 2^{-n}$.

Para terminar a demonstração de que uma tal função f nas condições atrás descritas não pode existir, vai-se mostrar que, se P for uma partição de $[0, 1]$, então $\underline{\Sigma}(f, P)$ não excede 0, o que contradiz (2). Para tal, basta mostrar que se $a, b \in [0, 1]$ e $a < b$, então $\inf f([a, b]) \leq 0$. Se assim não fosse, i. e. se existisse um intervalo não degenerado $[a, b] \subset [0, 1]$ com $\inf f([a, b]) > 0$, então, uma vez que $]a, b[\not\subset C_\alpha$, $]a, b[$ teria de conter algum $c \notin C_\alpha$. Pela definição de C_α , haveria algum intervalo $]a', b'[$ contendo c e contido em $[a, b]$ tal que $]a', b'[\cap I_n = \emptyset$ para cada n suficientemente grande, pelo que $f_n([a', b']) = \{0\}$ para n suficientemente grande. Para um tal n tem-se

$$\int_0^1 |f - f_n| \geq \int_{a'}^{b'} |f - f_n| = \int_{a'}^{b'} |f|,$$

pelo que

$$\int_{a'}^{b'} |f| \leq \lim_{n \in \mathbb{Z}_+} \int_0^1 |f - f_n| = 0. \quad (3)$$

Mas se $\inf f([a, b]) = x > 0$ então $\int_{a'}^{b'} |f| \geq x(b - a) > 0$, pelo que

$$\int_{a'}^{b'} |f| \geq x(b - a) > 0,$$

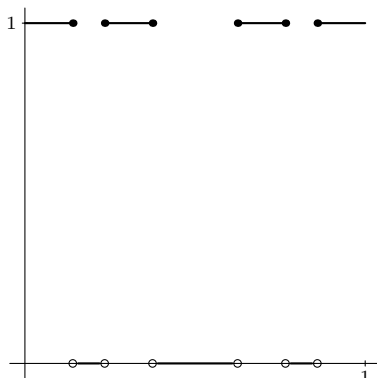


Figura 2: Gráfico de f_2

o que contradiz (3).

Não é difícil modificar o exemplo anterior de modo a mostrar que existe alguma sucessão de Cauchy e uniformemente limitada de elementos de $\mathcal{C}([a, b])$ que não converge em $\mathcal{R}([a, b])$. Basta para tal substituir cada função f_n por uma função contínua g_n de modo a ter-se $\lim_{n \in \mathbb{N}} d(f_n, g_n) = 0$. Para se ver como se pode fazer isso, basta ver que o gráfico da função f_2 , por exemplo, é aquele que se pode ver na figura 2. Mas basta então tomar para g_n uma função como aquela cujo gráfico se pode ver na figura 3. Os detalhes ficam ao cuidado do leitor.

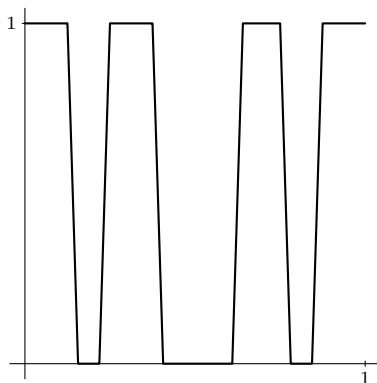


Figura 3: Gráfico de g_2

4 A densidade das funções contínuas

O facto de, para cada função f_n ($n \in \mathbb{N}$) do exemplo anterior, se poderem encontrar funções contínuas tão próximo delas quanto se queira não depende de modo algum das daquelas funções em particular.

Teorema 2 *O espaço $\mathcal{C}([0, 1])$ é denso em $\mathcal{R}([0, 1])$. Mais precisamente, se $f \in \mathcal{R}([0, 1])$ e se $a, b \in \mathbb{R}$ forem tais que $(\forall x \in [0, 1]) : a \leq f(x) \leq b$, então*

existe alguma sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções contínuas de $[0, 1]$ em \mathbb{R} tal que $(\forall n \in \mathbb{N}) : f_n([0, 1]) \subset [a, b]$ e que $\lim_n f_n = f$.

Para demonstrar este teorema, convém introduzir a seguinte noção:

Definição 2 Diz-se que uma função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função em escada** se existir uma partição $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$ do intervalo $[0, 1]$ tal que a restrição de f ao intervalo $[a_{k-1}, a_k[$ é constante, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

A figura 4 representa o gráfico de uma função em escada.

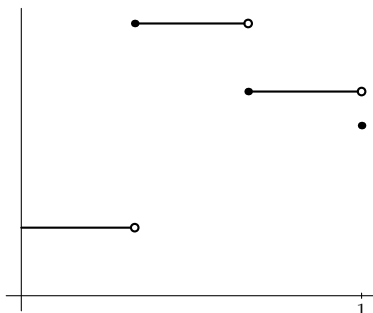


Figura 4: Gráfico de função em escada

Que as funções contínuas formam uma parte densa do espaço das funções integráveis segundo Riemann pode ser demonstrado em dois passos: primeiro mostra-se que tão perto quanto se queira de uma função integrável segundo Riemann há funções em escada e seguidamente mostra-se que tão perto quanto se queira de uma função em escada há funções contínuas.

Sejam então $f \in \mathcal{R}([0, 1])$ e $\varepsilon \in]0, +\infty[$; quer-se mostrar que existe uma função em escada $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(f, g) < \varepsilon/2$ e que existe uma função contínua $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(g, h) < \varepsilon/2$; deduz-se então que $d(f, h) < \varepsilon$.

Para cada partição P do intervalo $[0, 1]$, sejam $\bar{\Sigma}(f, P)$ e $\underline{\Sigma}(f, P)$ a soma superior e a soma inferior de f relativamente a P . Sabe-se, pela definição do integral de Riemann, que existe alguma partição P do intervalo $[0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 f - \frac{\varepsilon}{4} < \underline{\Sigma}(f, P) \leq \int_0^1 f \leq \bar{\Sigma}(f, P) < \int_0^1 f + \frac{\varepsilon}{4};$$

em particular, $\bar{\Sigma}(f, P) - \underline{\Sigma}(f, P) < \varepsilon/2$, ou seja, se $P = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ com $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$,

$$\sum_{k=1}^n \left(\sup_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t) - \inf_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t) \right) (a_k - a_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4)$$

Seja então

$$g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightsquigarrow \begin{cases} f(a_{k-1}) & \text{se } k \text{ for tal que } t \in [a_{k-1}, a_k[\\ f(1) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A função g é então uma função em escada e

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_0^1 |f - g| \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f - g| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} \sup_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t) - \inf_{t \in [a_{k-1}, a_k]} f(t) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

por (4).

Obter uma função $h \in \mathcal{C}([0, 1])$ tal que $d(g, h) < \varepsilon/2$ é igualmente simples (veja-se a figura 5). Para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, seja $b_k \in]a_{k-1}, a_k[$ tal que

$$(a_k - b_k) \cdot |g(a_k) - g(a_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Define-se então $h \in \mathcal{C}([0, 1])$ de modo que, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, a restrição de h a $[a_{k-1}, a_k]$ seja dada por

$$t \rightsquigarrow \begin{cases} g(a_{k-1}) & \text{se } t < b_k \\ g(a_{k-1}) + \frac{t-b_k}{a_k-b_k} \cdot (g(a_k) - g(a_{k-1})) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então h é contínua e

$$d(g, h) = \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_k} \frac{t - b_k}{a_k - b_k} \cdot |g(a_k) - g(a_{k-1})| dt < n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

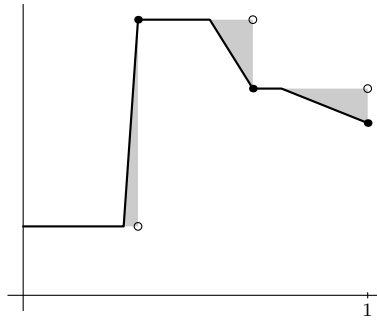


Figura 5: Gráficos de g e de h (sendo g a função cujo gráfico se pode ver na figura 4). A distância de g a h é igual à soma das áreas dos triângulos cinzentos. Neste exemplo, todos os triângulos têm a mesma área.

Não é difícil ver que, pela mesma demonstração, se $f \in \mathcal{R}([0, 1])$ for tal $f([0, 1]) \subset [a, b]$, para algum a e algum b reais tais que $a < b$, então, para cada $\varepsilon > 0$, existe alguma função $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ tal que $d(f, g) < \varepsilon$ e que $g([0, 1]) \subset [a, b]$.

5 O integral de Lebesgue

A incompletude dos espaços $\mathcal{R}([a, b])$ pode ser vista como uma falha do integral de Riemann. O teorema 1 sugere uma pergunta natural neste contexto: haverá um integral que generalize o de Riemann para o qual o espaço das funções integráveis seja completo (relativamente à métrica análoga à que se definiu em $\mathcal{R}([a, b])$)? O resposta é afirmativa: existe efectivamente um tal integral: o integral de Lebesgue. Pode-se demonstrar que o espaço $\mathcal{L}([a, b])$ das funções integráveis segundo Lebesgue tem as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{L}([a, b])$ é completo;
2. $\mathcal{C}([a, b])$ é denso em $\mathcal{L}([a, b])$;
3. $\mathcal{C}([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b]) \subsetneq \mathcal{L}([a, b])$;

(veja-se [4, cap. 3] para as duas primeiras afirmações e [3, teorema 11.33] para a terceira). Decorre novamente destes resultados que $\mathcal{C}([a, b])$ é denso em $\mathcal{R}([a, b])$ e que este último espaço não é completo.

Referências

- [1] Bourbaki, N., *Topologie Générale. Chapitres 1 à 4*, Masson, 1990
- [2] Lima, E. Lages, *Espaços métricos*, INPA — CNPq, 1977
- [3] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Singapura, 1976
- [4] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Singapura, 1986
- [5] Sutherland, W. A., *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, Oxford, 1989