Transformadas de Möbius e equações do terceiro grau

José Carlos Santos

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Maio de 2005

Considere-se uma equação de terceiro grau com coeficientes complexos:

$$X^3 + xX^2 + yX + z = 0. \tag{1}$$

Uma maneira clássica e bem conhecida de simplificar uma tal equação consiste em substituir X por $Y - x/3$, obtendo-se assim uma nova equação de terceiro grau da forma:

$$Y^3 + pY + q = 0. \tag{2}$$

Caso $p = 0$, as soluções desta equação são as raízes cúbicas de $-q$. Suponha-se agora que $p \neq 0$. Para resolver a equação (2), os métodos usuais consistem em escrever Y sob a forma de uma soma $u + v$ ou recorrer à substituição de Viète $Y = Z - p/(3Z)$, a fim de se obter a fórmula de Cardano:

$$Y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

sobre a qual mais será dito abaixo. Gerações de estudantes queixaram-se da existência de algo de mágico nestes métodos. Um destes estudantes foi Mark Kac, que conseguiu (aos 15 anos de idade!) chegar à fórmula de Cardano sem usar nenhum destes métodos; veja-se [1] e [4, pp. 56–60]. Outra abordagem é a de E. W. von Tschirnhaus, que recorreu a uma substituição do tipo $Y^2 = aY + b + Z$ para obter uma nova equação do terceiro grau na qual os coeficientes de Z e de Z^2 são ambos iguais a 0 (veja-se [3, §4]).

Neste artigo, a equação (2) será resolvida por outro método que, embora leve a mais cálculos que as substituições $Y = u + v$ ou $Y = Z - p/(3Z)$, é talvez mais natural e que, contrariamente ao método de Kac, não pressupõe a existência de soluções. A ideia é análoga à abordagem de von Tschirnhaus, mas leva a cálculos mais simples (veja-se [5, §5.4] para uma descrição moderna do método de von Tschirnhaus para resolver equações do terceiro grau) e consiste no uso de transformações de Möbius, i. e. o uso de substituições da forma

$$Y = \frac{aZ + b}{cZ + d},$$

onde $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ pertence ao conjunto $GL(2, \mathbb{C})$ das matrizes invertíveis da forma 2×2 e com entradas complexas. Após esta substituição, $Y^3 + pY + q$ torna-se numa fracção racional. Caso a e c tenham sido escolhidos tais que

$$a^3 + pac^2 + qc^3 \neq 0, \tag{3}$$

então esta fração racional pode ser escrita como o quociente de dois polinómios de terceiro grau, cujo numerador é da forma

$$Z^3 + x'Z^2 + y'Z + z',$$

com

$$x' = \frac{b\left(3a^2 + c^2p\right) + d\left(2acp + 3c^2q\right)}{a^3 + pac^2 + qc^3}, \tag{4}$$

$$y' = \frac{a\left(3b^2 + d^2p\right) + c\left(2bdp + 3d^2q\right)}{a^3 + pac^2 + qc^3} \tag{5}$$

e

$$z' = \frac{b^3 + pbd^2 + qd^3}{a^3 + pac^2 + qc^3} \,. \tag{6}$$

Quer-se tentar encontrar a, b, c e d tais que

1. $x' = y' = 0$;
2. a, b, c e d obtêm-se de x, y e z usando unicamente operações aritméticas e extracção de raízes.

Será sempre possível encontrar a, b, c e d nestas condições? De facto, a resposta é negativa. Para compreender porquê, é necessário recorrer ao conceito de solução múltipla. Se $P(X)$ é um polinómio com coeficientes complexos, dizer que um número complexo r é solução da equação $P(X) = 0$ equivale a dizer que $P(X)$ é múltiplo de $X - r$. Naturalmente, é mesmo possível que $P(X)$ seja múltiplo de $(X - r)^n$, para algum $n > 1$. Diz-se que r é uma raiz simples de $P(X)$ caso isto não aconteça, diz-se que é uma raiz dupla caso isto aconteça para $n = 2$ mas não para valores superiores de n e diz-se que é uma raiz tripla caso isto aconteça para $n = 3$ mas não para valores superiores de n. Como, neste artigo, só estamos interessados em polinómios de terceiro grau, é claro que, de facto, n não pode exceder 3. Diremos que r é uma solução simples, dupla ou tripla da equação $P(X) = 0$ quando r for, respectivamente, uma raiz simples, dupla ou tripla do polinómio $P(X)$.

É agora fácil compreender porque é que nem sempre é possível encontrar a, b, c e d nas condições atrás descritas. Uma vez que a equação $Z^3 + z' = 0$ ou tem três soluções simples (caso $z' \neq 0$) ou uma solução tripla (caso $z' = 0$), quando o método atrás descrito puder ser aplicado, a equação $Y^3 + pY + q = 0$ não poderá ter uma solução dupla. Como iremos ver, este é o único obstáculo e pode ser facilmente contornado.

Suponha-se que $3b^2 + d^2p \neq 0$. Então, se se tomar

$$a = -c \cdot \frac{2bdp + 3d^2q}{3b^2 + d^2p}, \tag{7}$$

resulta de (4) e de (5) que $y' = 0$ e que x' pode ser escrito como uma fracção racional cujo numerador é

$$3c^2\left(b^3 + pbd^2 + qd^3\right)\left(3b^2p + 9bdq - d^2p^2\right).$$

Tome-se agora $d = 1$ e seja b tal que $3b^2p + 9bq - p^2 = 0$, pelo que $x' = 0$. Há diversas maneiras de se obter uma expressão explícita para b. Será conveniente para o que se segue introduzir uma raiz quadrada s de $q^2/4+p^3/27$ (este número é o quociente do discriminante do polinómio $Y^3 + pY + q$ por -108; veja-se [2, p. 259] ou [6, p. 102]); com estas notações, podemos tomar

$$b = \frac{-q/2 + s}{p/3} \cdot$$

Um cálculo simples mostra que $3b^2 + p = 54s(s - q/2)p^{-2}$; logo, uma vez que a igualdade $s - q/2 = 0$ implicaria que $p = 0$, tem-se a desigualdade $3b^2 + p \neq 0$ se e só se $s \neq 0$. Vai-se supor então que $s \neq 0$; o caso em que $s = 0$ será tratado mais à frente. Tome-se agora $c = 1$. Resulta de (7) que

$$a = -\frac{2bp + 3q}{3b^2 + p} = -\frac{6s}{54s(s - q/2)p^{-2}} = -\frac{p^2}{9(s - q/2)} = \frac{-q/2 - s}{p/3} \cdot$$

Observe-se que com estas escolhas de a, b, c e d,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b = -\frac{6s}{p} \neq 0$$

e, portanto, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL(2, \mathbb{C})$. Resulta então do que foi feito atrás que as soluções da equação (2) são os números da forma

$$\frac{ar + b}{r + 1}, \tag{8}$$

onde r é uma raiz cúbica de $-z'$. Note-se que em (8) não se está a dividir por 0; por outras palavras, z' não pode ser igual a 1. A fim de se demonstrar isto, observe-se que

$$a^3 + pa + q = 36a.\left(\frac{s}{p}\right)^2 \quad \text{e} \quad b^3 + pb + q = 36b.\left(\frac{s}{p}\right)^2, \tag{9}$$

o que resulta de um cálculo directo. Deduz-se de (6) e de se ter tomado $c = d = 1$ que

$$z' = \frac{b^3 + pb + q}{a^3 + pa + q} = \frac{b}{a};$$

logo, $z' = 1 \iff a = b \iff s = 0$. Por outro lado, resulta de (9) que a condição (3) se verifica. Finalmente, uma vez que $z' = b/a$, um número é da forma (8) para alguma raiz cúbica r de $-z'$ se e só se for da forma $(b-ar')/(1-r')$ para alguma raiz cúbica r' de b/a.

O facto de o algoritmo atrás descrito não funcionar quando $s = 0$ pode ser contornado do seguinte modo: se continuarmos a definir a, b, c e d no caso em que $s = 0$ (e $p \neq 0$) da mesma maneira que anteriormente, obtemos $a = b = -\frac{3q}{2p}$ e, portanto,

$$\frac{aZ + b}{cZ + d} = -\frac{3q}{2p} \cdot$$

Resulta de (9) que este número é efectivamente uma solução de (2). De facto, prova-se facilmente que $-\frac{3q}{2p}$ é uma solução dupla de (2) e que $\frac{3q}{p}$ é uma solução simples; por outras palavras,

$$Y^3 + pY + q = \left(Y + \frac{3q}{2p}\right)^2 \left(Y - \frac{3q}{p}\right).$$

Resumindo, o algoritmo para resolver a equação (2) consiste em:

Caso $\mathbf{p = 0}$: as soluções da equação são as raízes cúbicas de $-q$.

Caso $\mathbf{p \neq 0}$ e $\mathbf{q^2/4 + p^3/27 = 0}$: $-\frac{3q}{2p}$ é uma solução dupla de (2) e $\frac{3q}{p}$ é uma solução simples.

Caso $\mathbf{p, q^2/4 + p^3/27 \neq 0}$: seja s uma raiz quadrada de $q^2/4+p^3/27$ e defina-se

$$\alpha = \frac{-q/2 - s}{p/3} \text{ e } \beta = \frac{-q/2 + s}{p/3} \cdot$$

Então as soluções da equação (2) são os números da forma

$$\frac{\beta - \alpha r}{1 - r},$$

onde r é uma raiz cúbica de β/α.

Observe-se que é possível obter um algoritmo análogo partindo directamente da equação (1) sem se ter a equação (2) como passo intermédio.

Comparemos agora este algoritmo com a fórmula de Cardano (veja-se [2, p. 264] ou [6, p. 189]). Com as notações atrás introduzidas, esta fórmula afirma que as soluções da equação (2) são os números da forma $u + v$, onde u e v são raízes cúbicas de $-q/2 + s$ e de $-q/2 - s$ respectivamente, sendo estas raízes cúbicas escolhidas de modo a que o seu produto seja igual a $-p/3$. Outra maneira de descrever a fórmula de Cardano é a seguinte: se definirmos $\omega = \cos(2\pi/3) + i \operatorname{sen}(2\pi/3)$ e se u e v forem raízes cúbicas de $-q/2 + s$ e de $-q/2 - s$ respectivamente cujo produto seja igual a $-p/3$, então as soluções da equação (2) são $u + v$, $\omega u + \omega^2 v$ e $\omega^2 u + \omega v$. Logo, a fórmula de Cardano tem a vantagem de não exigir separação em diversos casos, enquanto que o algoritmo atrás descrito tem a vantagem de apenas exigir o cálculo de uma única raiz cúbica. Naturalmente, se, na fórmula de Cardano, tivessemos definido v como sendo o quociente de $-p/3$ por u, então também só haveria necessidade de se calcular uma única raiz cúbica, mas então teríamos também de separar o problema de resolver a equação (2) em vários casos, visto que seria possível ter-se $u = 0$.

Finalmente, vejamos que a fórmula de Cardano e o algoritmo levam aos mesmos resultados. Isto é fácil no primeiro caso do algoritmo, visto que $s = \pm q/2$. No segundo caso, uma vez que estamos a supor que $q^2/4 + p^3/27 = 0$, então

$$\left(\frac{3q}{2p}\right)^3 = \frac{27q^3}{8p^3} = -\frac{q}{2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{3q}{2p}\right)^2 = \frac{9q^2}{4p^2} = -\frac{p}{3};$$

logo, a fórmula de Cardano diz que as soluções são

$$\frac{3q}{2p} + \frac{3q}{2p} = \frac{3q}{p},\ \omega\frac{3q}{2p} + \omega^2\frac{3q}{2p} = -\frac{3q}{2p} \text{ e } \omega^2\frac{3q}{2p} + \omega\frac{3q}{2p} = -\frac{3q}{2p} \cdot$$

No terceiro caso, sejam s, α, β e r como no algoritmo. No que se segue, sempre que os números $\sqrt[3]{-q/2 - s}$ e $\sqrt[3]{-q/2 + s}$ surgirem na mesma expressão, as raízes cúbicas são escolhidas de modo a que o seu produto seja igual a $-p/3$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{\beta-\alpha r}{1-r} &= \frac{1}{p/3}\cdot\frac{(-q/2+s)\sqrt[3]{-q/2-s}-(-q/2-s)\sqrt[3]{-q/2+s}}{\sqrt[3]{-q/2-s}-\sqrt[3]{-q/2+s}}\\
&= \frac{\sqrt[3]{-q/2+s}.\sqrt[3]{-q/2-s}.\left(-\sqrt[3]{-q/2+s}-\sqrt[3]{-q/2-s}\right)}{p/3}\\
&= \sqrt[3]{-q/2+s}+\sqrt[3]{-q/2-s},
\end{aligned}$$

sendo a segunda igualdade um caso particular da igualdade

$$(\forall x, y \in \mathbb{C}) : x \neq y \Longrightarrow \frac{x^3y - xy^3}{x-y} = xy(x+y).$$

Referências

[1] M. Feigenbaum, *An interview with Stan Ulam and Mark Kac*, J. Stat. Phys. **39** (1985), pp. 455–476

[2] N. Jacobson, "Basic Algebra I", W. H. Freeman, 1985

[3] M. Kracht; E. Kreyszig, *E. W. von Tschirnhaus: His role in early Calculus and his work and impact on Algebra*, Hist. Math. **17** (1990), pp. 16–35

[4] M. Kac; S. M. Ulam, "Mathematics and Logic", Dover, 1992

[5] J. Shurman, "Geometry of the Quintic", John Wiley & Sons, 1997

[6] B. L. van der Waerden, "Algebra I", Springer-Verlag, 1991