José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

A ORIGEM DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Nem os antigos gregos pensaram em tudo nem a Idade Média foi um deserto matemático. Não havia indução matemática na Antiguidade, mas é uma invenção medieval.

As contribuições dos gregos da Antiga Grécia para a matemática são assombrosas. Houve um imenso salto qualitativo (e também quantitativo) entre os conhecimentos que os gregos herdaram de outras culturas (do Egito essencialmente) e aqueles que eles produziram. Uma imensa parte da matemática considerada elementar (e uma parte que não é pequena de matemática não elementar) vem daquele tempo e daquele lugar, isto se incluirmos a matemática criada por pessoas de cultura grega a viver fora da Grécia propriamente dita.

No entanto, o princípio da indução matemática não era conhecido na Antiga Grécia e é provavelmente a técnica de demonstração mais empregue que não era conhecida pelos gregos.

Convém deixar claro que há muitas vezes uma grande dose de subjetividade quando se afirma que uma técnica matemática foi introduzida pela primeira vez por uma determinada pessoa. Há certamente demonstrações feitas na Antiga Grécia que podem ser vistas como sendo demonstrações por indução. O exemplo mais conhecido talvez seja a proposição 31 do livro VII dos *Elementos* de Euclides[1] que afirma que qualquer número natural composto tem algum fator primo. A demonstração de Euclides é a seguinte:

- seja A um número composto;
- visto que A é composto, tem algum divisor B maior do que 1;
- se B for primo, não há mais nada a demonstrar;
- caso contrário, B tem algum divisor C maior do que 1, o qual é necessariamente um divisor de A;
- se este processo não desse origem a um número primo, o número A teria uma infinidade de divisores, o que não é possível.

Esta demonstração pode ser ligeiramente modificada, dando origem a uma demonstração baseada no *princípio da boa ordenação*: qualquer conjunto não vazio de números naturais tem um elemento menor ou igual a todos os outros. E uma tal demonstração pode sempre ser convertida numa demonstração feita por *indução forte*: dada uma sucessão $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ... de proposições, se:

- $P(1)$ for verdadeira;
- para cada $n \in \mathbb{N}$, se as proposições $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, ... forem verdadeiras, então a proposição $P(n+1)$ também é verdadeira então todas as proposições da sucessão são verdadeiras.

Uma demonstração feita por uma técnica mais próxima daquilo que agora se designa por indução matemática foi feita por Al-Karajī (c. 953 – c. 1029), um matemático e engenheiro persa (veja-se [1, § 9.3.4]), que provou que, para cada número natural n, se tem

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2. \qquad (1)$$

De facto, ele provou isto somente para $n = 10$, mas a sua demonstração baseia-se na hipótese que se tem (1) quando $n = 9$ e a mesma ideia aplica-se a qualquer número natural.

A demonstração baseia-se na figura 1. O quadrilátero $[ABCD]$ é um quadrado de lado $1 + 2 + \cdots + 10$ (e, portanto, a sua área é $(1 + 2 + \cdots + 10)^2$). Além disso, os quadriláteros $[AD'C'B']$ e $[AD''C''B'']$ são quadrados de lados $1 + 2 + \cdots + 9$ e $1 + 2 + \cdots + 8$ respetivamente. Finalmente, o quadrilátero $[A\hat{D}\hat{C}\hat{B}]$ é um quadrado de lado 1 (note-se que os tamanhos são inconsistentes).

Repare-se que o polígono $[D'DCBB'C']$ (trata-se de um *gnomon*) consiste num quadrado de lado 10 e em dois retângulos idênticos, cada um dos quais tem um lado de comprimento $1 + 2 + \cdots + 9$ e um lado de comprimento 10. Logo, a sua área é igual a

$$10^2 + 2 \times 10 \times (1 + 2 + \cdots + 9).$$

Mas, como Al-Karajī já sabia, $1 + 2 + \cdots + 9 = \frac{9 \times 10}{2}$. Logo, a área da figura é igual a $9 \times 10^2 + 10^2$, ou seja, é igual a 10^3. Mas então o quadrado $[ADCB]$, cuja área é $(1 + 2 + \cdots + 10)^2$, é formado por uma região cuja área é 10^3 e por um quadrado cuja área é $(1 + 2 + \cdots + 9)^2$; por outras palavras:

$$(1 + 2 + \cdots + 10)^2 = 10^3 + (1 + 2 + \cdots + 9)^2.$$

E agora pode-se recomeçar o processo com a figura $[D''D'C'B'B''C'']$ e com o quadrado $[AD''C''B'']$ e assim sucessivamente. Prosseguindo deste modo, chega-se ao que se quer provar.

É perfeitamente claro que este argumento pode ser facilmente alterado de modo a dar origem a uma demonstração por indução matemática, tal como a conhecemos hoje. E isto leva a uma pergunta natural: quem foi a primeira pessoa a formalizar este método de demonstração? Se a pergunta fosse posta há um século (veja-se [2], por exemplo), a resposta seria Francesco Maurolico (1494 – 1575), que expôs o método de indução no seu livro *Arithmeticorum libri duo* (1575).[2] E, de facto, este livro é o primeiro texto impresso sobre o tópico. Mas há um manuscrito bastante mais antigo sobre isto, a *Arte de Calcular*, escrito em 1322 por Levi ben Gershon (1288 – 1344), mais conhecido por Gersónides.[3] O nome que ele dá a este método é "subindo passo a passo sem fim" e explica que, a fim de demonstrarmos que todas as proposições de sucessão $P(k), P(k+1), P(k+2), \ldots$ são válidas, faz-se o seguinte:

1. prova-se que sempre que se tem $P(n)$, também se tem $P(n+1)$ (aquilo que designamos por passo de indução);

2. prova-se que se tem $P(k)$.

Fora o facto de ser usual hoje em dia fazer-se isto pela ordem inversa (o que não altera nada, pois as propriedades anteriores são independentes uma da outra), nada há aqui que não nos seja familiar. E Levi ben Gershon demonstra por este método uma série de enunciados. Por exemplo, seja P_n o número de permutações de um conjunto com n elementos. Levi ben Gershon mostra que $P_{n+1} = (n+1)P_n$, para cada número natural n, e usa isto para mostrar em seguida por indução que se tem sempre $P_n = n!$. Outro dos resultados que ele demonstra é a igualdade (1), que, como vimos, já fora demonstrada por Al-Karajī.

Convém saber que a *Arte de Calcular* foi apenas uma das muitas obras de Levi ben Gershon, que, além de matemático, era rabino, teólogo e astrónomo. Foi ele quem inventou a balestilha, um instrumento de navegação que foi muito usado na época dos descobrimentos. Levi ben Gershon escrevia somente em hebraico, mas pelo menos dois dos seus textos matemáticos foram traduzidos para latim ainda em vida dele.

Desconhece-se se Francesco Maurolico leu ou não o manuscrito de Levi ben Gershon. O método de indução foi-se espalhando cada vez mais e recebeu o seu nome atual quan-

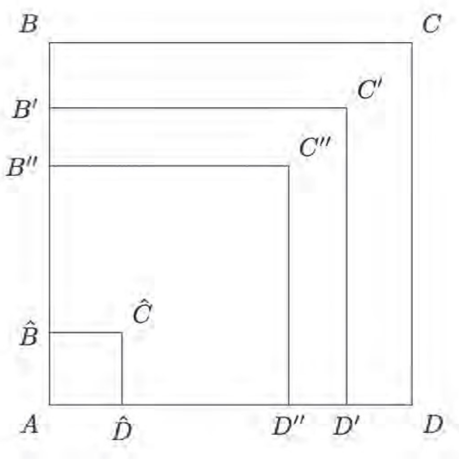

Figura 1.

[1] Veja-se *https://mathcs.clarku.edu/djoyce/java/elements/bookVII/propVII31.html*

[2] Sobre Maurolico, veja-se *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maurolico*

[3] Sobre Levi ben Gershon, veja-se *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Levi/*

do Augustus de Morgan (1806 – 1871) assim o designou, num artigo publicado em 1838. Curiosamente, o nome que ele de facto aí sugeriu foi "indução sucessiva" mas a certa altura nesse artigo emprega a expressão "indução matemática", a qual acabou por se tornar o nome do método em questão.

BIBLIOGRAFIA

[1] Victor J. Katz, *A. History of Mathematics: An introduction.* 3ª ed., Addison-Wesley, 2009

[2] Giovanni Vacca, "Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **16** (1909), 70–73