José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

O GÖMBÖC: UM BRINQUEDO DO SÉCULO XXI

O Gömböc é uma forma tridimensional descoberta há poucos anos. Além de poder ser usada para construir um brinquedo fora do comum, é matematicamente muito interessante.

Imagine um sempre-em-pé, como o da figura 1. É um brinquedo infantil tradicional, que consiste num objeto sem partes planas (geralmente representando um ser humano ou um animal) que, seja qual for a posição em que é colocado numa superfície horizontal, acaba sempre por ficar estável numa mesma posição.

Figura 1. Sempre-em-pé.

Esta propriedade do sempre-em-pé deve-se ao facto de a sua massa estar quase toda concentrada junto da base. Isto faz com que o centro de massa fique bastante em baixo e com que qualquer deslocação que se faça relativamente à sua posição estável leve a que o dito centro de massa suba, o que, por sua vez, leva a que o sempre-em-pé, submetido à ação da gravidade, volte à posição original.

Isto leva a uma questão interessante: será possível construir um sempre-em-pé feito de um material homogéneo? De facto é, e é mesmo bastante simples de obter: basta ter-se uma esfera à qual falte uma esfera mais pequena do seu interior, cujo centro não seja o centro da esfera grande. Ou seja, é aquilo que se obtém rodando em torno da linha a tracejado a região cinzenta da figura 2; o resultado é um objeto esférico que, uma vez pousado numa superfície horizontal, acaba sempre por ficar apoiado no ponto *B*.

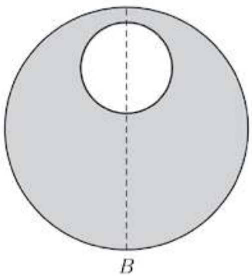

Figura 2. Construção de sempre-em-pé com material homogéneo.

O objeto atrás descrito é oco. O problema fica muito mais difícil se se impuser que o objeto seja convexo, ou seja, tal que, dados quaisquer dois pontos do objeto, todos os pontos do segmento de reta que os une também lá estiverem. Naturalmente, isto exclui objetos ocos.

Vamos agora introduzir alguns termos. Afirmar que um ponto da superfície de um objeto é um ponto de equilíbrio é o mesmo que afirmar que se o objeto for pousado sobre esse ponto numa superfície horizontal, então mantém-se imóvel (pelo menos, em teoria, como quando se equilibra uma caneta sobre a sua ponta). Só iremos lidar com objetos com somente um número finito de pontos de equilíbrio (o que exclui, por exemplo, a esfera; *todos* os pontos da sua superfície são pontos de equilíbrio). Há dois tipos de pontos de equilíbrio: estáveis e instáveis. Um ponto de equilíbrio *E* diz-se estável se, ao pousarmos o objeto sobre um ponto suficientemente próximo de *E*, ele se move até ficar novamente apoiado em *E*; é o caso do ponto *B* do exemplo da esfera oca. Caso contrário, diz-se que se trata de um ponto de equilíbrio instável. Quando se pousa um objeto sobre esse ponto numa superfície horizontal, qualquer força exercida no objeto com quase qualquer direção, por menos intensa que seja, fará com que ele mude de posição e que não volte a essa posição de equilíbrio. É como o exemplo já mencionado de tentar equilibrar uma caneta no seu bico. Deste ponto em diante, em vez de usar a expressão "sempre-em-pé", vamos falar de "corpo monostático"; o que isto designa é um objeto convexo feito de um material homogéneo com um único ponto de equilíbrio estável.

Sendo assim, somos levados à seguinte questão: será possível construir um corpo monostático? É possível provar que um tal corpo tem, além do ponto de equilíbrio estável, pelo menos um ponto de equilíbrio instável. E isto leva a um novo desafio: será possível construir um corpo monostático com um único ponto de equilíbrio instável? Um tal objeto vai ser designado por "corpo mono-monostático".

Vejamos um problema semelhante. Considere-se uma região convexa plana R limitada por uma curva C, tal como a elipse da figura 3. A partir desta região plana pode-se construir um cilindro reto, onde as secções perpendiculares ao eixo de simetria têm a forma de R. Se se colocar este cilindro de lado num plano horizontal, os pontos de C onde a curvatura tem um mínimo local correspondem aos pontos de equilíbrio estáveis e os pontos onde a curvatura tem um máximo local aos de equilíbrio instável. No caso da elipse, podem ver-se na figura 3 os pontos onde a curvatura atinge um extremo local.

Acontece que, dada qualquer curva convexa plana, a respetiva curvatura tem sempre, pelo menos, dois mínimos locais e, pelo menos, dois máximos locais, pelo teorema dos quatro vértices. Logo, em particular, o análogo bidimensional do problema de encontrar um corpo monostático feito de um material homogéneo não tem solução.

O problema de saber se existe algum corpo mono-monostático foi proposto em 1995 pelo matemático russo Vladimir Arnold (figura 4) ao engenheiro civil húngaro Gábor Domokos; um relato do encontro entre os dois (o único que tiveram antes de o problema ser resolvido) pode ser lido em [1]. Domokos pensou no problema durante vários anos, primeiro sozinho e depois com a colaboração do seu aluno de doutoramento Péter Várkonyi.

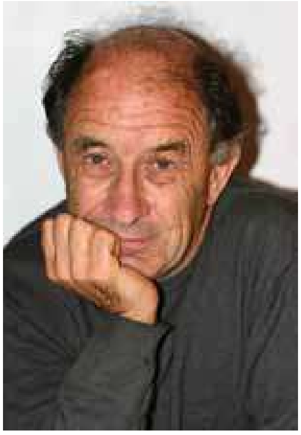

Figura 4. Vladimir Arnold.

Finalmente, em 2006, Domokos e Várkonyi conseguiram provar que um corpo mono-monostático existe de facto; veja-se [2]. O primeiro corpo nessas condições que encontraram estava muito próximo de ser um objeto esférico[1]. Mais precisamente, se esse objeto fosse construído a partir de uma esfera de um metro de diâmetro, afastando ou aproximando cada ponto da sua superfície do centro da esfera, nenhuma dessas mudanças teria de exceder um centésimo de milímetro. E isso exige um grau de precisão que excede a capacidade tecnológica atual.

Esta dificuldade teve origem no facto de Domokos e Várkonyi tentarem imaginar um objeto sem arestas. Quando se decidiram a abandonar essa restrição, obtiveram uma descrição de um objeto mono-monostático (ao qual chamaram "gömböc", que se pronuncia "gombetz", e que é um diminutivo de "gömb", que significa "esfera" em húngaro) que exigia um grau de precisão cem vezes menor do que o original. Já era possível construir um tal objeto e, quando começou a ser fabricado em série, o primeiro exemplar foi oferecido a Arnold como presente, quando celebrou 70 anos, em 2007[2]. Na figura 5 pode ver-se uma foto de um gömböc, tirada por Gábor Domokos.

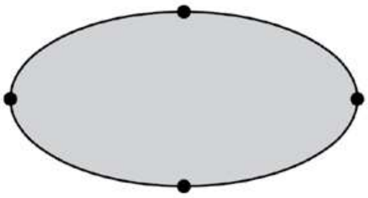

Figura 3. Elipse.

Figura 5. Gömböc.

Figura 6. Tartaruga estrelada indiana.

Embora o gömböc tenha aparecido para resolver um problema puramente matemático, já surgiram aplicações do tipo de ideias que levaram à sua descoberta à Biologia, à Astronomia e à Medicina. Por exemplo, os próprios Domokos e Várkonyi publicaram um artigo (veja-se [3]) a descrever uma tartatuga, a tartaruga estrelada indiana (veja-se a figura 6), cuja carapaça se assemelha a um gömböc, o que faz com que uma tal tartaruga tenha facilidade em virar-se caso, por algum motivo, seja colocada de patas para o ar. Este artigo atraiu a atenção de revistas como a *Nature*[3] ou a *Science*[4] o que aumentou a visibilidade do gömböc junto do grande público.

Como disse o matemático norte-americano Chandler Davis, o gömböc "é uma forma cuja impossibilidade poderia ser um teorema elegante, mas cuja existência talvez seja muito mais elegante."

BIBLIOGRAFIA

[1] Gábor Domokos, *My lunch with Arnold*, The Mathematical Intelligencer, 28 (4), pp. 31–33, 2006.

[2] Péter Várkonyi; Gábor Domokos, *Mono-monostatic bodies: The Answer to Arnold's Question* The Mathematical Intelligencer, 28 (4), pp. 34–38, 2006

[3] Péter Várkonyi; Gábor Domokos, *Geometry and self-righting of turtles*, Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences}, 275 (1630), pp. 11–17, 2008

[1] Veja-se The story of the Gömböc, de Marianne Freiberger, *https://plus.maths.org/content/story-goumlmboumlc*

[2] Veja-se *http://www.gomboc.eu/en/site.php?inc=&menuld=12&hirld=2*

[3] Veja-se *How tortoises turn right-side up: Study finds three ways that tortoises avoid getting stuck on their backs*, de Philip Ball, *https://www.nature.com/news/2007/071016/full/news.2007.170.html*

[4] Veja-se *Gömböc – Finding Consilience*, de Joseph Froncioni, *https://web.archive.org/web/20090522010319/http://www.quickswood.com/my_weblog/2008/02/gmbc-finding-co.html*