José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

DA LÓGICA À FÍSICA

Os teoremas da incompletude de Gödel podem ser vistos como um exemplo acabado de Matemática Pura, sem ligação a qualquer área fora da matemática. Mas descobriu-se recentemente que têm consequências ligadas à Mecânica Quântica.

OS TEOREMAS DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL

Os teoremas da incompletude de Gödel contam-se entre as descobertas matemáticas mais famosas do século XX. Publicados em 1931, estes teoremas revelam as limitações inerentes a qualquer tentativa de formalizar a matemática (e, mais especificamente, a Aritmética) a partir de um sistema de axiomas.

Um conceito central para se compreender estes teoremas é o de *indecidibilidade*. Consideremos um ramo da matemática, tal como, por exemplo, a Aritmética. Agora consideremos uma axiomática para esse ramo da matemática. No caso da Aritmética, a axiomática mais frequentemente empregue são os axiomas de Peano.[1] Finalmente, consideremos uma proposição P desse ramo, tal como, por exemplo: o produto de quaisquer dois números naturais consecutivos é um número par. Uma questão natural neste contexto é: é ou não possível deduzir dos axiomas em questão que a proposição P é verdadeira ou, em alternativa, que é falsa? Se for possível, dizemos que a proposição é *decidível*; caso contrário, que é *indecidível*.

Há proposições aritméticas que são indecidíveis face aos axiomas de Peano. Por exemplo, o matemático inglês Reuben Goodstein definiu uma família de sucessões de inteiros não negativos e provou que, para cada uma delas, todos os termos da sucessão acabam por ser 0 a partir de certa altura. Mas não se pode provar este resultado (nem a sua negação) a partir dos axiomas de Peano.[2] Gödel provou que isto não pode ser visto como um defeito dos axiomas de Peano, no sentido de que, para *qualquer* axiomática da Aritmética, haverá sempre proposições indecidíveis... a menos que a axiomática seja inconsistente (ou seja, conduza a resultados contrários), caso em que *qualquer* proposição (bem como a respetiva negação) poderá ser deduzida desses axiomas.

INCOMPLETUDE E FÍSICA

Naturalmente, este tipo de resultados é um exemplo acabado de Matemática Pura. Mas poderão ter algum interesse fora da matemática? Conta-se (veja-se [1, cap.3], por exemplo) que, uma vez, o físico norte-americano John Archibald Wheeler foi ao gabinete de Gödel no Instituto de Estudos Avançados de Princeton, e perguntou-lhe se havia alguma relação entre os teoremas da incompletude e o Princípio da Incerteza de Heisenberg. Gödel ficou furioso com a pergunta a pôs Wheeler fora do seu gabinete. É uma história engraçada... e quase sem qualquer base factual. O que aconteceu[3] foi que, num simpósio, Wheeler fez aquela pergunta a Gödel e este não se mostrou interessado no assunto. Um ano mais tarde, num *cocktail*, Wheeler perguntou a Gödel porque é que não estava interessado no Princípio da Incerteza e, pela resposta que obteve, ficou com a impressão de que Einstein lhe tinha feito uma lavagem ao cérebro, que teve como efeito eliminar de Gödel qualquer interesse em Mecânica Quântica.[4]

Mas eis que, em 2015, foi provado que um problema de Física, que tem origem na Mecânica Quântica, é indecidível; veja-se [2]. O problema tem a ver com a própria origem da Mecânica Quântica: em 1900, Max Planck propôs que, para uma onda eletromagnética com uma frequência dada, nem todas as energias são possíveis, como se julgava até então. Em particular, existe uma lacuna entre a energia 0 e a menor energia possível. Essa menor energia possível passou a ser designada por um *quantum* de energia.

Gradualmente, foram surgindo problemas importantes na Física e na matemática ligados à existência ou não de uma lacuna para uma teoria física dada. Existe mesmo um prémio de um milhão de dólares para quem conseguir resolver um destes problemas: o problema da existência e da lacuna de massa de Yang-Mills.[5]

Não é claro à partida que o conceito de decidibilidade tenha importância para a Física, mas em 1974 Georg Kreisel (veja-se [3]), da Universidade de Stanford, fez notar que provar-se que um problema de Física é indecidível tem consequências práticas computacionais.[6]

O que foi provado em 2015 foi que, para uma família de tais problemas, não há (nem pode haver) nenhum algoritmo que permita decidir se existe ou não uma tal lacuna. É claro que uma reação natural à demonstração de que um problema não tem solução é a de que se trata de um resultado inteiramente negativo. Mas não é assim. Como disse, numa entrevista, um dos autores do artigo:[7]

> No entanto, nem tudo são más notícias. Este problema não pode ser resolvido em geral porque, a este nível, os modelos exibem um comportamento extremamente bizarro que basicamente condena ao fracasso qualquer tentativa de o analizar. Mas este comportamento bizarro também prevê uma Física nova e muito bizarra que nunca foi vista anteriormente. Por exemplo, os nossos resultados mostram que acrescentar uma única partícula a uma grande porção de matéria pode, por maior que esta seja, alterar dramaticamente as suas propriedades. Uma nova Física deste tipo é frequentemente explorada tecnologicamente mais tarde.

CONCLUSÃO

Não se pode afirmar de nenhum enunciado matemático, por mais isolado que possa parecer de tudo o que seja exterior à matemática, que nunca poderá ter aplicações científicas. Os teoremas da incompletude de Gödel são um exemplo disso.

REFERÊNCIAS

[1] John D. Barrow, *New Theories of Everything* (2.ª edição), Oxford University Press, 2008

[2] Toby S. Cubbitt, David Perez-Garcia e Michael M. Wolf, "Undecidability of the spectral gap", *Nature*, **528** (2015), pp. 207–211

[3] Georg Kreisel, "A notion of mechanistic theory", *Synthese*, **29** (1974), pp. 11-26.

[1] *http://mathworld.wolfram.com/PeanosAxioms.html*

[2] *https://en.wikipedia.org/wiki/Goodstein\%27s_theorem*

[3] *https://www.youtube.com/watch?v=YlutbiPiJVg*

[4] *https://www.youtube.com/watch?v=rZXcVkUqTkU*

[5] *https://en.wikipedia.org/wiki/Yang\%E2\%80\%93Mills_existence_and_mass_gap*

[6] Para se saber mais sobre as ideias de Kreisel e sobre como estão ligadas à descoberta concreta mencionada neste artigo, veja -se *Why some physicists are excited about the undecidability of the spectral pap problem and why should we*, de Vladik Kreinovich: *https://digitalcommons.utep.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=2163&context=cs_techrep*

[7] *https://m.phys.org/news/2015-12-quantum-physics-problem-unsolvable-godel.html*