José Carlos Santos
Universidade
do Porto
jcsantos@fc.up.pt

E SE SOMÁSSEMOS TODOS OS NÚMEROS NATURAIS?

Que sentido terá somarmos os números 1 + 2 + 3 + 4 + ··· ? Há quem defenda que a soma é $-1/12$, mas é preciso ter algum cuidado com estas afirmações.

Há um vídeo de matemática no *YouTube*[1] que, no momento que este texto está a ser escrito, já teve mais de seis milhões de visualizações e que deu origem a uma grande polémica. A causa desta polémica torna-se clara logo pelo título:

$$\text{ESPANTOSO: } 1+2+3+4+5+\cdots = -\frac{1}{12}.$$

É natural que um tal título chame a atenção e que não seja consensual.

O ponto de partida dos autores para chegarem à igualdade do título do vídeo é a série $1-1+1-1+\cdots$, por vezes designada por *série de Grandi*. É claro que se somarmos os primeiros termos desta série obtemos 0 (se somarmos um número par de termos) ou 1 (caso contrário). Daí, os autores saltam para a conclusão (?) de que a soma daquela série é $1/2$, ou seja, tem-se

$$1-1+1-1+\cdots = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Em seguida, consideram a série

$$S = 1-2+3-4+\cdots,$$

a qual somam a ela própria, mas com um ligeiro desfasamento. Mais precisamente, fazem esta soma:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & 5 & - \cdots \\ + & & & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + \cdots, \end{array}$$

obtendo $1-1+1-1+\cdots$, que já tinham determinado ser igual a $1/2$. Assim sendo, deduzem que $2S = 1/2$ e, portanto, que $S = 1/4$.

O passo seguinte consiste em pegar na soma 1 + 2 + 3 + 4 + ··· e subtrair-lhe a soma 1 – 2 + 3 – 4 + ··· :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots \\ - & 1 & - & 2 & + & 3 & - & 4 & + & \cdots, \end{array}$$

obtendo 0 + 4 + 0 + 8 + ···, ou seja o quádruplo da soma que queremos obter. Sendo assim,

$$(1+2+3+4+\cdots) - \frac{1}{4} = 4 \times (1+2+3+4+\cdots),$$

pelo que

$$-3 \times (1+2+3+4+\cdots) = \frac{1}{4},$$

ou seja,

$$1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}. \qquad (2)$$

Os autores do vídeo explicam em seguida que a igualdade (2) até tem aplicações à Física e dão mesmo uma referência bibliográfica para apoiar esta afirmação [3, pág 22].

Para já, vejamos a parte matemática da igualdade (2). Por vezes, é afirmado que já Euler e Ramanujan afirmavam que esta é válida. No caso de Euler, embora se trate de alguém que manipulava séries sem as preocupações atuais relativamente à sua convergência, aparentemente

[1] *https://www.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww*

nunca fez essa afirmação [1, § 7]. Em contrapartida, é verdade que Ramanujan defendeu que a igualdade (2) é válida (fê-lo numa carta dirigida a G. H. Hardy, acrescentando logo a seguir que o mais natural era que este, em seguida, lhe indicasse o caminho para o manicómio mais próximo) [2, pág. 53]. A justificação dada por Ramanujan sobre como deduzir (2) da igualdade

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4} \tag{3}$$

foi essencialmente a que foi descrita acima. Mas a demonstração, por assim dizer, de que se tem (3) é muito diferente. O que Ramanujan fez foi observar que, se $x \in]-1,1[$, então

$$1-2x+3x^2-4x^3+\cdots=\frac{1}{(1+x)^2}$$

(o que está inteiramente correto). Em seguida, substituiu x por 1, a fim de obter (3).

Há outra maneira de ligar a soma 1 + 2 + 3 + 4 + ··· ao número $-1/12$ a qual tem bastante a ver com Euler (veja-se [1] ou [4]). Este estudou a função

$$s \mapsto 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots, \tag{4}$$

que se designa por função ζ (zeta) de Riemann. Acontece que a série (4) só converge quando $s > 1$ (supondo que s é real). Mas Riemann mostrou que é possível prolongar esta função a uma e uma só função derivável ζ de $ $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ em $\mathbb{C}$. E acontece que, para essa função, tem-se, de facto, $\zeta(-1) = -1/12$, o que, juntamente com a expressão (4), parece justificar a igualdade do vídeo. Mas é uma interpretação bastante forçada.

Pode provar-se que

$$\lim_{s\to 1, s\in]1,+\infty[} 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots=+\infty.$$

Por causa disso, não é possível prolongar a função (4) (originalmente definida unicamente quando $s \in]1,+\infty[$) a uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Assim sendo, é natural que, se quisermos prolongar a função ζ de forma a termos uma função bem-comportada, isso seja feito rodeando o ponto 1 e passando por números complexos não reais. Mas, embora esta seja uma maneira frequentemente empregue para justificar a igualdade (2), não deixa de ser bizarro o uso de números complexos não reais para justificar aquela relação.

De facto, Terence Tao (que, entre muitos outros prémios, recebeu a medalha Fields em 2006) publicou no seu blogue *What's new* um texto muito interessante sobre este tópico[2], no qual explica como dar uma interpretação puramente real à soma 1 + 2 + 3 + 4 + ··· de modo a dar $-1/12$. Aí ele também tece algumas considerações interessantes sobre este tipo de somas, tais como:

- Naturalmente, há algo de anómalo em a soma de números positivos dar um número negativo.
- As igualdades envolvidas não parecem consistentes entre si. Por exemplo, se à igualdade (2) se subtrair a igualdade (1), obtém-se

$$2+3+4+5+\cdots=-\frac{7}{12},$$

mas se se subtrair 1 à igualdade (2), o que se obtém é

$$2+3+4+5+\cdots=-\frac{13}{12}.$$

Um aspeto essencial aqui reside na palavra "interpretação". O uso do símbolo de igualdade em (1), em (2) e em (3) está errado, a menos que se redefina o que se entende por soma de uma série. Um dos problemas reside precisamente no facto de os autores do vídeo não fazerem isso.

Foi feita, no início deste texto, uma referência a aplicações à Física da igualdade (2). Uma tal aplicação consiste no chamado efeito Casimir[3], que é uma força de atração entre placas metálicas prevista pelos físicos holandeses Hendrik Casimir e Dirk Polder em 1948 e confirmada experimentalmente em 1997. Os cálculos empregues por estes físicos envolvem, se não se tiver cuidado, a igualdade

$$1+2^3+3^3+4^3+\cdots=\frac{1}{120} \tag{5}$$

(e, já agora, sim, $\zeta(-3) = 1/120$) e uma versão simplificada e unidimensional daqueles cálculos envolve a igualdade (2). Daí a afirmar-se que uma demonstração experimental da validade das igualdades (2) e (5) já foi obtida é um passo que já foi dado... mas não devia ter sido.[4] O que, de facto, aconteceu, foi que aqueles físicos empregaram numa passagem dos seus cálculos o valor $1/120$ ao qual chegaram não da aplicação da igualdade (5) mas sim de uma técnica próxima daquela que foi descrita por Terence Tao no texto acima mencionado.

Mas isto não deixa de sugerir que não se devem ignorar as igualdades (2) e (5). Afinal, parecem ter aplicações práticas. Isto é defendido por Edward Frenkel[5] (matemático conhecido do público português através do seu livro *Amor e Matemática*), que estabelece a seguinte analogia: a fórmula de Cardano para resolução de equações de terceiro grau envolve números complexos não reais. Deveria ter sido ignorada porque, inicialmente, ninguém conseguia explicar o que é a raiz quadrada de –1? É uma observação muito pertinente e há outras analogias da mesma natureza que se poderiam fazer, como, por exemplo, com as bases do Cálculo Infinitesimal, as quais suscitaram durante muito tempo grandes dúvidas quanto à sua consistência.

Sendo assim, a melhor opção consiste provavelmente em continuar a investigar em que contextos é que é legítimo substituir $1+2+3+4+\cdots$ por $-1/12$ ou substituir $1+2^3+3^3+4^3+\cdots$ por $1/120$ e tentar construir uma teoria geral sobre esse tipo de situações. E, ao mesmo tempo, evitar cuidadosamente o uso do símbolo de igualdade nestes casos. Um bom motivo para isso foi dado pelo Dr. SkySkull (pseudónimo de um físico norte-americano) no seu blogue *Skulls in the Stars*[6]:

> " Uma proporção deprimentemente grande da população parte automaticamente do princípio de que a matemática consiste numa feitiçaria bizarra e anti-intuitiva que somente os superinteligentes conseguem dominar. Mostrar-lhe resultados malucos deste tipo sem quaisquer reservas só reforça esta ideia e, na minha opinião, isso presta um mau serviço à matemática."

REFERÊNCIAS

[1] R. Ayoub, "Euler and the zeta function", *The American Mathematical Monthly* 81, N.º10 (dez. 1974), pp. 1067–1086.

[2] B. C: Berndt; A. C. Rankin, *Ramanujan: Letters and Commentary*, American Mathematical Society, 1995.

[3] J. Polchinski, *String Theory, vol.I*, Cambridge University Press, 1998.

[4] A. Weil, "Prehistory of the Zeta-function", *Number theory, trace formulas and discrete groups*, pp. 1–9, Academic Press, 1989.

[2] https://terrytao.wordpress.com/2010/04/10/the-euler-maclaurin-formula--bernoulli-numbers-the-zeta-function-and-real-variable-analytic-continuation

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect

[4] http://math.ucr.edu/home/baez/physics/General/summingNaturals.html

[5] https://www.youtube.com/watch?v=0Oazb7IWzbA

[6] https://skullsinthestars.com/2014/01/18/infinite-series-not-quite-as-weird-as--some-would-say/