

## DEMONSTRAÇÕES COM USO DE COMPUTADORES

Até que ponto se pode confiar nas demonstrações feitas com auxílio de computadores? É um tópico bastante polémico.

Será possível fazer demonstrações usando computadores? E até que ponto são fiáveis? São questões complexas que já provocaram muita polémica.

Para começar, vejamos um caso bastante pacífico. Conforme já foi abordado em [3], Euler conjecturou no séc. XVIII a seguinte generalização do Último Teorema de Fermat: uma potência de grau  $n$  só pode escrever-se como soma de  $k$  potências de grau  $n$  (com  $k > 1$ ) quando  $k \geq n$ . Por outras palavras, quando um cubo pode escrever-se como soma de vários cubos, são necessários pelo menos três cubos, quando uma quarta potência pode escrever-se como soma de várias quartas potências, são necessárias pelo menos quatro quartas potências, e assim sucessivamente. Acontece que Euler estava enganado. O primeiro contra-exemplo à conjectura de Euler surgiu em 1966. Foi nesse ano que T. R. Parkin e J. Selfridge observaram que  $144^5 = 27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5$  (veja-se [2]). O artigo em questão é dos artigos de matemática mais curtos jamais publicados. Contém unicamente duas frases e uma referência bibliográfica. Quanto ao método adotado, consistiu numa “busca direta no CDC 6600”. Isto refere-se àquele que é geralmente considerado o primeiro supercomputador bem-sucedido da história, fabricado pela *Control Data Corporation*. Parte de um tal computador pode ser vista na figura 1.

Este tipo de uso de computadores em demonstrações é pacífico, pois é fácil confirmar à mão *a posteriori* que os cálculos estão corretos.



JOSÉ CARLOS SANTOS  
Universidade  
do Porto  
jcsantos@fc.up.pt

À medida que os cálculos ficam mais complexos, a questão da fiabilidade dos computadores começa a ganhar importância. De facto, não é tanto a fiabilidade dos computadores que costuma estar em causa (embora por vezes esteja, como sabem as pessoas que se recordam do *bug* do processador Pentium FDIV<sup>1</sup>), mas a de quem os programou. Um exemplo de um erro desta natureza pode ser observado quando se calcula o seguinte integral:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^4(t) + \sin^2(t)\cos^2(t)} dt.$$

Pode ter um aspeto assustador, mas é muito simples de calcular. Basta ver que aquilo que surge sob o sinal de raiz quadrada é simplesmente  $\sin^2(t)$ . Como se está no intervalo  $[0, \pi/2]$ , a raiz quadrada disto é  $\sin(t)$ , pelo que



Figura 1. Monitor e teclado de um CDC 6600.

o integral é igual a 1. Simples, não?! No entanto, se se pedir ao *software* Maxima para calcular aquele integral (em algumas versões, entre as quais as versões 5.30 e 5.38), o resultado obtido é  $-1$ .

Mas este tipo de uso de computadores na investigação matemática é, de um modo geral, pacífico. Só quando se começa a usar computadores para *demonstrar* teoremas, e não apenas para procurar contra-exemplos, é que surgem polémicas.

O exemplo mais famoso de uso de computadores na demonstração de um teorema ocorreu na resolução do problema das quatro cores. Este, que é bastante conhecido<sup>2</sup>, consiste em determinar se é ou não verdade que qualquer mapa pode ser colorido com somente quatro cores. Isto com as seguintes restrições:

- ▶ regiões com uma fronteira comum têm de ter cores distintas;

- ▶ não se está a ter em conta a possibilidade de uma mesma região estar dividida em vários bocados separados (basta pensar no caso de Angola e do enclave de Cabinda).

Um exemplo de como colorir o mapa dos distritos de Portugal continental usando somente quatro cores pode ser visto na figura 2.

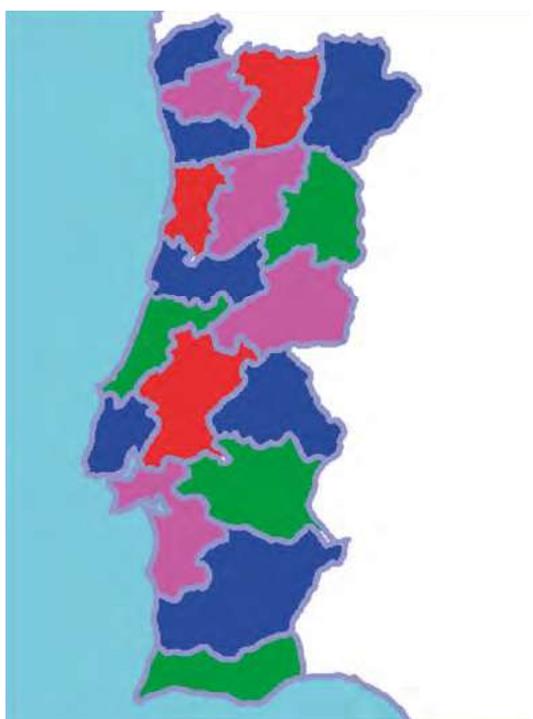


Figura 2. Distritos de Portugal continental.

No fim do séc. XIX julgou-se que o problema estava resolvido e que a resposta era afirmativa, pois foi publicada uma demonstração desse facto em 1879, por Alfred Kempe. Mas o problema foi reaberto 11 anos mais tarde, quando foi descoberto, por P. J. Heawood, que havia um erro na demonstração. Foi apenas em 1976 que surgiu aquela que é geralmente descrita como a primeira demonstração correta de que, de facto, bastam quatro cores. A demonstração, da autoria de Kenneth Appel e de Wolfgang Haken, recorreu ao uso de computadores.

Convém agora explicar o que é que se entende, neste contexto, por “uso de computadores”. Imaginemos o problema de saber se um dado número natural  $n$  é primo ou composto. Poder-se-ia pensar que é um problema fácil para um computador. Afinal, basta ver se é múltiplo de 2, caso não seja, se é múltiplo de 3, e por aí adiante. E realmente é uma tarefa simples para um computador. Mas não é uma tarefa que possa ser levada a cabo em tempo útil caso o número seja mesmo muito grande (cuja representação decimal tenha, digamos, 200 algarismos). Conseguem-se determinar se certos números muito grandes são ou não primos recorrendo a métodos muito mais sofisticados do que o simples emprego da força bruta.

No caso do problema das quatro cores, foi exatamente isso o que aconteceu. Obviamente, Appel e Haken não mandaram um computador colorir com somente quatro cores todos os mapas possíveis. Nem poderiam, pois há uma infinidade de mapas e os computadores só fazem um número finito (mesmo que potencialmente muito grande) de cálculos. O que eles fizeram foi provar que havia um conjunto finito de mapas (cerca de 1500 mapas) com a seguinte propriedade: se todos os mapas desse conjunto pudessem ser coloridos usando somente quatro cores, então isso seria verdade para qualquer mapa. Em seguida, recorreram ao uso de computadores para verificar que, de facto, todos os mapas do conjunto em questão podem ser coloridos usando meramente quatro cores.

Isto levou a uma polémica que não se extinguiu até hoje. Aquela que é talvez a crítica mais bem fundamentada a esta demonstração foi formulada pelo filósofo Thomas Tymoczko, em [5]. A sua principal objeção foi a de que a demonstração é demasiado longa para que um ser humano possa segui-la passo a passo e confirmar que

<sup>1</sup><http://www.trnicely.net/pentbug/pentbug.html>

<sup>2</sup>A história deste problema pode ser vista em [http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/The\\_four\\_colour\\_theorem.html](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/The_four_colour_theorem.html).

está correta. Além disso, o *software* utilizado (que não era genérico, ou seja, foi criado especificamente para lidar com este problema) podia conter erros. Em [4] podem ser vistas críticas às objeções de Tymoczko.

Pode-se dizer que o uso que Appel e Haken deram ao computador consistiu em fazer uma verificação puramente mecânica (mas muito longa); a parte da demonstração que consistiu numa argumentação foi feita por eles. No entanto, já há algum tempo que se desenvolve *software* para verificar demonstrações, tal como o Coq<sup>3</sup> ou o Isabelle<sup>4</sup>. De facto, uma nova demonstração de que qualquer mapa pode ser colorido usando apenas quatro cores foi feita recorrendo ao Coq; veja-se [1].

Embora o uso de computadores para fazer demonstrações ainda não esteja muito divulgado junto do grande público, é um facto que se têm feito grandes progressos nesse sentido. Há mesmo um campeonato do mundo de demonstrações automáticas de teoremas.<sup>5</sup>

Chegará o dia em que bastará introduzir num computador um enunciado matemático e esperar que ele nos diga se é ou não verdadeiro?

#### BIBLIOGRAFIA

[1] Georges Gonthier, “Formal Proof – The Four-Color Theorem”, *Notices of the American Mathematical Society*, 55 (11), pp. 1382–1393, 2008. <http://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf>

[2] L. J. Lander e T. R. Parkin, “Counterexample to Euler’s conjecture on sums of like powers”. *Bull. Amer. Math. Soc.* 72 (6), p. 1079, 1966

[3] José Carlos Santos, “Computação distribuída e Matemática”, *Gazeta de Matemática* 177, pp 26–28, 2015

[4] Edward Reinier Swart, “The philosophical implications of the four-color problem”, *American Mathematical Monthly*, 87 (9), pp. 697–702, 1980

[5] Thomas Tymoczko, “The Four-Color Problem and its Mathematical Significance”, *The Journal of Philosophy*, 76 (2):57–83, 1979.

<sup>3</sup> <http://coq.inria.fr/>

<sup>4</sup> <http://isabelle.in.tum.de/>

<sup>5</sup> <http://www.cs.miami.edu/~tptp/CASC/>

## TABELA DE PUBLICIDADE 2017

### CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1900

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

### CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

### CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

[imprensa@spm.pt](mailto:imprensa@spm.pt)

### ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

### LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

	 PÁGINA INTEIRA	 1/2 PÁGINA	 1/4 PÁGINA	 1/8 PÁGINA	 RODAPE
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

Aos valores indicados deverá ser adicionado o IVA à taxa legal em vigor.