



Implementação e Análise de Curvas e suas Propriedades em Software de Geometria Dinâmica

Rosário Campos Ribeiro, *FacUnicamps*,

José Carlos Santos, *Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP)* e

Antonio Carlos Oliveira Jr., *Instituto de Informática (INF) da Universidade Federal de Goiás (UFG)*

rosariocamposribeiro@gmail.com; jcsantos@fc.up.pt; antonio@inf.ufg.br

Resumo—A cicloide, a conchoide de Nicomedes, a limaçon de Pascal, a trissectriz de Hípias e a cissoide de Diocles são curvas que devidos às suas propriedades foram estudadas ao longo de muitos séculos. Neste artigo é relatado algumas propriedades desta curvas que são fundamentais para a discussão de problemas da antiguidade. O objetivo deste trabalho é analisar, implementar e simular as principais propriedades da cicloide e soluções para os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega em software livre de Geometria Dinâmica.

Palavras-chave—Curvas, Propriedades, Geometria Grega, Software Livre, GeoGebra.

Implementation and Analysis of Curves and their Properties in Dynamic Geometry Software

Abstract—

There are some curves, namely, the Cycloid, the Conchoid of Nicomedes, the Pascal limaçon, the trisectrix of Hippias and the cissoid of Diocles, which have been studied over many centuries because of their properties. In this work, we report some properties of those curves which are fundamental to the discussion of antiquity problems. We also analyzed, implemented and simulated the main properties of the cycloid curve and the three classical problems of Greek geometry in dynamic geometric open source software.

Index Terms—Curves, Properties, Greek Geometry, Open Software, GeoGebra.

I. INTRODUÇÃO

Os matemáticos da Grécia Antiga analisaram problemas de geometria, entre os quais o estudo de curvas e os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega, que desempenharam um papel importante no desenvolvimento da matemática. Os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega são problemas de construção e resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando somente a régua sem graduação e o compasso, os únicos instrumentos utilizados por Euclides nos Elementos [1].

O estudo das curvas e das suas propriedades, por vezes é complexo, podendo ser administrado com recurso a um

software de Geometria Dinâmica para minimizar a sua complexidade. Devido às suas propriedades, a cicloide, a conchoide de Nicomedes, a limaçon de Pascal, a trissectriz de Hípias e a cissoide de Diocles foram curvas bastante estudadas ao longo de muitos séculos.

Existem uma variedade de softwares de Geometria Dinâmica que, tais como o *Cabri Géomètre* [2], o *Cinderella* [3], o *The Geometer's Sketchpad* [4] e o *GeoGebra* [5], permitem implementar e explorar propriedades de curvas. Usamos o software livre de Geometria Dinâmica *GeoGebra* para a análise, experimentação e compreensão das propriedades matemáticas. Neste trabalho, optamos pelo *GeoGebra* por ser um software livre amplamente utilizado, de fácil aprendizagem e ainda possui objetos pré-definidos.

Neste trabalho, o objetivo é analisar, implementar e simular o Paradoxo da Roda de Aristóteles, as principais propriedades da Cicloide, assim como as propriedades da conchoide de Nicomedes, da limaçon de Pascal, da trissectriz de Hípias e da cissoide de Diocles que contribuíram para a solução dos Três Problemas Clássicos da Geometria Grega. Com esta análise, queremos mostrar que é possível realizar o estudo de propriedades de curvas importantes usando software livre de geometria dinâmica de forma a facilitar a compreensão dos alunos e melhorar o ensino da matemática.

Para além desta Introdução, apresentamos a definição de cicloide na seção II. Na seção III analisamos e implementamos o paradoxo da roda de Aristóteles e na seção IV descrevemos uma construção em que pode verificar que a área sob uma cicloide é três vezes a área do seu círculo gerador.

A seção V apresenta a análise, implementação e simulação do problema da braquistócrona. A solução do problema da braquistócrona é a cicloide invertida, portanto, implementamos duas simulações computacionais (i.e. uma na forma discreta e outra na forma contínua) para este problema. Dessa forma, na seção VI, comparamos o tempo que uma partícula demora a percorrer uma cicloide invertida com o tempo que demora a percorrer um plano inclinado considerando ambas implementações.

Na seção VII descrevemos os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega. Na seção VII-A apresentamos dois

Autor correspondente: Rosário Ribeiro, *rosariocamposribeiro@gmail.com*

métodos de resolução do problema da trisseção do ângulo. No primeiro método começamos por analisar a redução do problema da trisseção do ângulo a um problema de *tipo nêusis*, posteriormente, utilizamos as propriedades da curva concoide de Nicomedes para resolver esse problema. No segundo método usamos uma das curvas mais antigas da matemática atualmente conhecida por *trissetriz de Hípias*.

Na seção VII-B analisamos uma possível resolução do problema da quadratura do círculo. Na seção VII-C descrevemos dois métodos de resolução do problema da duplicação do cubo que utilizam a redução de Hipócrates e habitualmente designados por solução de Menecmo e solução de Diocles. As conclusões e os trabalhos futuros são discutidos na seção VIII.

II. A CICLOIDE

NA Figura 1 está representada uma cicloide definida na página 617 de [6] como “a curva traçado por um ponto no aro de uma roda a rolar ao longo de uma reta”.

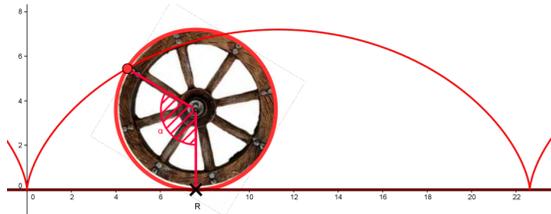


Fig. 1. Cicloide

Se a roda tem raio 1, se a base da roda está a rodar, sem deslizar, ao longo da reta $y = 0$ e se o centro da roda se desloca da esquerda para a direita, então pode-se inferir que a equação paramétrica (1) do centro da roda.

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Nesse caso, podemos perguntar qual deverá ser a trajetória de um ponto da roda? Fazendo simulações com o GeoGebra e levando em conta que o ponto de partida do ponto que traça a cicloide deverá ser $(0, 0)$, pode-se constatar que melhor opção será a roda rodar no sentido dos ponteiros do relógio e que a maneira de obter isto consiste que a posição instantânea do ponto em relação ao centro da roda é dada por $(-\sin(t), -\cos(t))$.

Combinando isto com o movimento do centro da roda, obtemos então a representação paramétrica da cicloide: $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$. A partir destas fórmulas obtemos a seguintes propriedades da cicloide.

Propriedade da cicloide 1: Seja C uma circunferência de raio r , s uma reta e P um ponto de C . Denominamos por cicloide a curva descrita pelo ponto P quando C rola sobre a reta s sem deslizar, dada pela equação paramétrica (2) onde o α representa a amplitude do arco que a roda rodou.

$$\begin{aligned} x &= r(\alpha - \sin(\alpha)) \\ y &= r(1 - \cos(\alpha)) \end{aligned} \quad (2)$$

Propriedade da cicloide 2: A equação cartesiana da cicloide é dada pela equação (3).

$$x = r \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{2ry - y^2} \quad (3)$$

III. O PARADOXO DA RODA DE ARISTÓTELES

UM paradoxo é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum. Aos poucos, alguns dos paradoxos foram sendo explicados, mas ainda assim, não se trata de um assunto sem controvérsia.

Nesta seção descrevemos o Paradoxo da Roda de Aristóteles [7] e refletir sobre uma explicação possível para este conhecido paradoxo.

Consideremos duas rodas com centro no mesmo ponto e raios diferentes e rolando simultaneamente. Quando a roda maior rola de A para A' , dando uma volta completa, o aro da roda menor rola de B para B' , ao longo de uma linha paralela como podemos ver na Figura 2. Temos que em cada instante, um único ponto do aro da roda grande toca no segmento AA' e um único ponto do aro da roda pequena toca no segmento BB' . Não se excluiu ponto algum de qualquer das duas circunferências. Isto leva-nos ao paradoxo da Roda de Aristóteles, uma vez que, em primeira análise podemos concluir que os perímetros das duas circunferências são iguais. E sabemos que esta conclusão não é verdadeira, uma vez que o perímetro de uma circunferência é dado por $2\pi r$, e como os raios são diferentes, a circunferência que tem raio menor, terá consequentemente, perímetro menor.

Na Figura 2 está representada uma construção que realizamos, em *GeoGebra*, do paradoxo de roda. Nesta construção deve-se deslocar o ponto R de forma às rodas rolarem uma volta completa e analisar a imagem. Na análise desta construção deve ser confrontados com a possibilidade de os perímetros das duas rodas serem iguais e refletirem sobre como podem explicar:

- o perímetro ser o mesmo se os raios são diferentes;
- o perímetro ser diferente se, tal como observam, em cada instante, um único ponto do aro da roda grande toca no segmento AA' e um único ponto do aro da roda pequena toca no segmento BB' , logo o perímetro tem de ser igual.

Após a reflexão sobre o paradoxo poderá ser apresentada uma ideia de uma possível explicação deste paradoxo. A definição de circunferência utilizada mais frequentemente é que esta é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão a uma dada distância (raio) de um ponto fixo (centro da circunferência). Mas a circunferência pode ser encarada como um polígono regular com um número infinito de lados.

Arquimedes usou este conceito para determinar o perímetro de um círculo. Este calculou o valor do perímetro de um círculo a partir da sucessão dos perímetros dos polígonos regulares inscritos nele. À medida que o número de lados aumenta, o perímetro do polígono aproxima-se cada vez mais do perímetro do círculo.

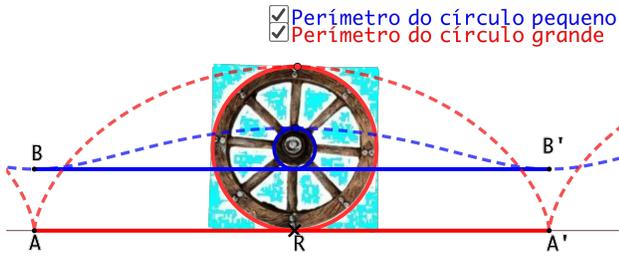


Fig. 2. Paradoxo da Roda

Assim, o perímetro do círculo corresponde ao limite da sucessão dos perímetros correspondentes ao limite da sucessão dos perímetros dos polígonos inscritos, quando os números de lados tende para infinito conforme apresentado na Figura 3.

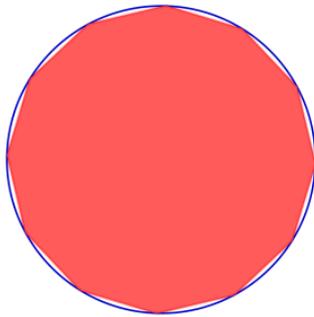


Fig. 3. Perímetro do círculo corresponde ao limite da sucessão dos perímetros dos polígonos inscritos.

Para dar a ideia da explicação do paradoxo da roda fizemos uma construção, em *GeoGebra*, onde recorreremos à noção de circunferência usada por Arquimedes. Tal como se pode observar na Figura 4 construímos dois polígonos regulares concêntricos com seis lados.

Com essa construção pode-se observar o que acontece ao rolar dois polígonos regulares com um número de lados finitos e concêntricos. O polígono menor deixa um conjunto de espaços em branco e generalizando consegue-se explicar o Paradoxo da Roda de Aristóteles.

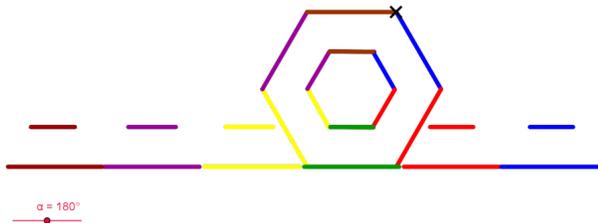


Fig. 4. Explicação do Paradoxo

IV. ÁREA SOB UM ARCO DE CICLOIDE

O Matemático Gilles Roberval, por volta de 1637, demonstrou que a área sob uma cicloide é três vezes a área do círculo gerador.

Para tal, este matemático utilizou o que hoje é conhecido pelo *Princípio de Cavalieri*, mas que já havia sido usado por matemáticos como Herão e Galileu.

Princípio de Cavalieri: “Se duas Figuras planas têm alturas iguais e se secções feitas por linha paralelas às bases e a distâncias iguais delas são sempre na mesma proporção, então as Figuras planas também estão nesta proporção.”[6]

Gilles Roberval definiu ainda uma nova curva à qual chamou *companheira da cicloide*. Esta era definida como sendo o lugar geométrico definido pelo ponto $(x(R), y(R'))$ da Figura 5.

Na Figura 5 está representada uma construção feita em *GeoGebra*, assim podemos:

- deslocar o ponto R e verificar que os segmentos representados pela cor verde têm o mesmo comprimento;
- deslocar o ponto I e verificar que os segmentos representados pela cor roxo têm o mesmo comprimento.

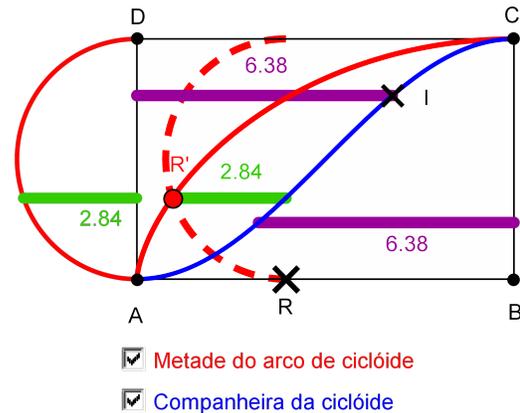


Fig. 5. Área sob um arco de cicloide

Após a análise da construção, conclui-se que a área sob uma cicloide é três vezes a área do círculo gerador. Para tal conclusão deve-se ter em conta que:

- a área entre metade do arco de cicloide e a companheira da cicloide é igual a metade da área do círculo gerador;
- a área do retângulo $[ABCD]$ é igual ao produto de metade do perímetro do círculo pelo seu diâmetro, isto é, $2\pi r^2$, onde r é o raio do círculo gerador;
- a área sob a curva companheira da cicloide é metade da área do retângulo $[ABCD]$ logo é igual à área do círculo gerador, ou seja, πr^2 ;
- a área sob metade do arco de cicloide é igual a $\frac{3}{2}$ da área do círculo;
- a área sob o arco inteiro é três vezes a área do círculo.

V. O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA

O Problema da Braquistócrona foi apresentado pela primeira vez aos leitores da revista científica *Acta Eruditorum* pelo matemático suíço Johann Bernoulli, em 1696, como um problema que já havia resolvido.

Na publicação Johann Bernoulli desafiava os filósofos da época a apresentarem soluções para o problema. O enunciado original é o seguinte [8]:

“Sejam A e B dois pontos de um plano vertical. Encontre a curva na qual uma partícula M , sujeita somente a ação da gravidade, descreve a trajetória mais rápida entre os pontos A e B .”

O Problema da Braquistócrona consiste, portanto, em encontrar a curva ao longo da qual uma partícula se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo, sendo que esta partícula está sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula. Para além disso, é suposto que os dois pontos não se encontrem sobre a mesma reta horizontal ou sobre a mesma reta vertical. Uma vez que, se os pontos estiverem sobre a mesma reta horizontal não haverá movimento e se os pontos estiverem sobre a mesma reta vertical a solução do problema é a própria reta.

A curva que resolve este problema denomina-se Braquistócrona, do grego brachistos (mínimo) e chronos (tempo). A solução do Problema da Braquistócrona é uma cicloide invertida [9].

Efetuamos diversas tentativas para fazer uma simulação computacional do Problema da Braquistócrona no caso particular em que pretendemos encontrar a curva ao longo da qual uma partícula, com forma de bola e de massa 1, se desloca entre os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (\pi, -2)$ no menor intervalo de tempo. Neste caso a solução do Problema da Braquistócrona é a cicloide invertida cujo círculo gerador tem raio 1. Das várias tentativas que realizamos decidimos descrever neste documento uma simulação em que consideramos o tempo discreto e outra simulação em que consideramos o tempo contínuo.

Para construir esta simulação do Problema da Braquistócrona, com base na discretização do tempo, foi necessário utilizar a folha de cálculo do programa de geometria dinâmica *GeoGebra*. Começamos esta construção com a definição das quantidades $g = 9,8$ e $t_1 = 0,01$ e com a criação de uma ferramenta que, aplicada a um ponto P com ordenada entre -2 e 0 (inclusive), dá a interseção do arco de cicloide com a reta horizontal que passa pelo ponto P . Mais precisamente, aplicando a ferramenta ao ponto de coordenadas (x, y) , obtém-se o ponto

$$\begin{aligned} &(\arccos(y + 1) - \sin(\arccos(y + 1)), y) = \\ &= \left(\arccos(y + 1) - \sqrt{-y^2 - 2y}, y \right) \end{aligned}$$

determinado com base nas equações, paramétrica (2) e cartesiana (3), da cicloide de raio 1.

O desafio encontrado, considerando o tempo discreto, é que o *software* de Geometria Dinâmica utilizado não efetua interseções entre uma curva e outros tipos de representações (como por exemplo, retas, circunferências, gráficos, curvas) e não representar graficamente funções escritas em função de y (isto é, como a função dada pela equação cartesiana (3)). Para resolver esta dificuldade, optamos por na execução desta simulação discretizar o tempo em

intervalos de tempo ($t_1 = 0,01$) pequenos e prever, por cálculos efetuados na Folha de Cálculo, qual a posição da partícula no instantes seguinte, como podemos ver na Figura 6.

Folha de Cálculo				
	A	B	C	D
1	(0, 0)	0	0	$(x - 0,08)^2 + y^2 = 0,0064$
2	(0,00001, -0,00049)	0,03131	0,01	$(x - 0,08)^2 + (y - 0,00076)^2 = 0,0064$
3	(0,00003, -0,00147)	0,05423	0,02	$(x - 0,08)^2 + (y - 0,0007)^2 = 0,0064$
4	(0,00008, -0,00317)	0,0796	0,03	$x - 0,08002)^2 + (y - 0,00002)^2 = 0,0064$
5	(0,0002, -0,00566)	0,10641	0,04	$(x - 0,08009)^2 + (y + 0,0014)^2 = 0,0064$
6	(0,0004, -0,00898)	0,13412	0,05	$x - 0,08022)^2 + (y + 0,00362)^2 = 0,0064$

Fig. 6. Folha de Cálculo Utilizada na Simulação

A seguir descrevemos a função de cada uma das quatro colunas da Folha de Cálculo utilizadas na construção.

- **Coluna A:** É uma coluna de pontos, dos quais o primeiro é $(0, 0)$ e o segundo é o resultado de se aplicar a ferramenta a $\left(0, -\frac{gt_1^2}{2}\right)$. A partir da terceira linha, cada ponto A_{i+1} é obtido de A_i pelo seguinte processo:
 - soma-se a A_i o vetor tangente unitário à cicloide no ponto onde A_i toca na cicloide, multiplicado pela velocidade escalar da bola nesse momento (que é o produto de t_1 pela raiz quadrada do produto de $2g$ pelo simétrico da ordenada de A_i , em que g representa a aceleração da gravidade e o simétrico da ordenada de A_i representa o deslocamento vertical da partícula, como é demonstrado mais abaixo);
 - aplica-se a ferramenta ao ponto anterior.

Ou seja,

$$A_{i+1} = Ferramenta$$

$$\left[A_i + t_1 \sqrt{-2gy(A_i)} \left(\sin \left(\frac{B_i}{2} \right), -\cos \left(\frac{B_i}{2} \right) \right) \right]$$

Este método não poderia ser aplicado logo no primeiro passo devido à velocidade inicial ser nula.

- **Coluna B:** Se $A_i = (\theta - \sin(\theta), -1 + \cos(\theta))$ então $B_i = \theta$, isto é, $B_i = \arccos(1 + y(A_i))$. Esta coluna é necessária para calcular A_{i+1} uma vez que o vetor tangente unitário é $\left(\sin \left(\frac{\theta}{2}\right), -\cos \left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.
- **Coluna C:** $C_i = t_1 \times i$.
- **Coluna D:** Equação do círculo de raio r (partícula) tangente à cicloide no ponto A_i , isto é, $D_i = Circunferência \left[A_i + r \left(\cos \left(\frac{B_i}{2} \right), \sin \left(\frac{B_i}{2} \right) \right), A_i \right]$. O valor de r é controlável por um seletor. Além disso, o círculo só é visível quando t (que toma valores de 0 a 1,5 com saltos de t_1) for igual a C_i .

Obtivemos destas forma a animação do movimento de uma partícula, com forma de bola, sobre a cicloide representado na Figura 7. Nesta construção, em *GeoGebra*, pode-se alterar o raio da partícula entre 0 e 0,2, visualizar a posição da partícula num dado instante de tempo entre

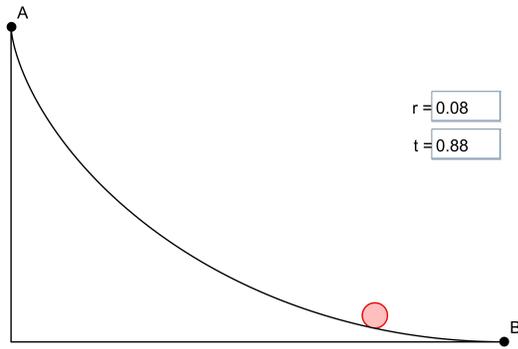


Fig. 7. Representação do movimento de uma bola sobre um plano definido pela braquistócrona conforme simulação realizada dentro do GeoGebra. Na figura, t representa o tempo decorrido desde o início da simulação e r o raio do círculo gerador da braquistócrona usada para definir o plano

0 e 1,5 e verificar o tempo que esta leva a percorrer a cicloide invertida.

Para elaboramos a simulação computacional na qual consideramos o tempo contínuo, para o nosso caso particular do Problema da Braquistócrona, tivemos de encontrar uma expressão analítica da curva Braquistócrona que satisfaça uma duas propriedades seguintes:

1ª Propriedade: a velocidade escalar (v) de um corpo (de massa m) que se desloca sobre uma curva (partindo da altura 0 e com velocidade nula) num campo sujeito apenas à força gravítica é $\sqrt{2gy}$ em que g é a aceleração da gravidade e y representa o deslocamento vertical da partícula;

2ª Propriedade: a aceleração tangencial ($\vec{a}_T(t)$) de um corpo (de massa m) que se desloca sobre uma curva (partindo da altura 0 e com velocidade nula) num campo sujeito apenas à força gravítica é, a cada instante t , igual ao produto de $-g \sin(\theta)$ pelo vetor tangente unitário $\vec{T}(t)$ em que g é a aceleração da gravidade e θ é o ângulo que este último vetor faz com a horizontal.

Demonstramos que a expressão analítica da curva Braquistócrona que resolve o nosso problema tem que respeitar a **1ª Propriedade**, obter uma expressão analítica que respeite a **1ª Propriedade** e verificar que esta expressão analítica também respeita a **2ª Propriedade**.

Pelo princípio da conservação da energia sabemos que a energia total (E) de um sistema isolado é conservada. Isto é, sabemos que a soma das duas componentes da energia total (energia cinética e energia potencial) respeita a seguinte igualdade (4)

$$E = mgy + \frac{1}{2}mv^2 = k \tag{4}$$

em que m é a massa do corpo, g a aceleração da gravidade, y a altura a que o corpo se encontra, v a velocidade escalar e k uma constante.

Consideremos um corpo cuja altura inicial é 0 e este corpo começa-se a mover logo a sua velocidade inicial é nula e, por conseguinte, a energia potencial e a energia

cinética são nulas, isto é, obtemos a igualdade 5.

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = 0 \tag{5}$$

Quando este corpo atinge a altura $-y$ ($y \geq 0$) a igualdade 5 equivale a afirmar que

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{6}$$

Demonstramos assim que um corpo nas condições acima respeita a **1ª Propriedade**. Encontramos a expressão analítica da curva Braquistócrona que respeita esta propriedade.

Uma expressão analítica da curva que resolve o nosso problema é dada pela função $c : [0, \pi] \rightarrow R$ definida pela igualdade 7.

$$c(t) = (t - \sin(t), -1 + \cos(t)) \tag{7}$$

Mas como esta expressão analítica da curva Braquistócrona (c) não envolve a aceleração da gravidade não conseguimos obter, através desta expressão, a velocidade escalar dada pela equação 6.

Portanto, podemos re-parametrizar c de modo à velocidade escalar ser dada pela equação 6. Pretendemos então substituir c pela função $c \circ s$, onde s é alguma bijeção derivável de algum intervalo de tempo $[0, T]$ em $[0, \pi]$. Então, como

$$\begin{aligned} c'(t) &= (1 - \cos(t), -\sin(t)) \\ &= (1 - (1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})), -2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})) \\ &= 2\sin(\frac{t}{2})(\sin(\frac{t}{2}), -\cos(\frac{t}{2})), \end{aligned}$$

como $\|(\sin(\frac{t}{2}), -\cos(\frac{t}{2}))\| = 1$ e como $2\sin(\frac{t}{2}) \geq 0$, a velocidade escalar no instante t é $2\sin(\frac{t}{2})$. Logo, se se considerar $c \circ s$, a velocidade escalar no instante t será $2\sin(\frac{s(t)}{2})s'(t)$ e afirmar que se tem 6 é afirmar que:

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{s(t)}{2}\right)s'(t) &= \sqrt{g(1 - \cos(s(t)))} \\ &= 2\sqrt{g}\sin\left(\frac{s(t)}{2}\right), \end{aligned}$$

ou seja, que $s'(t) = \sqrt{g}$. Logo, $s(t) = \sqrt{g}t$. Assim sendo, podemos definir a expressão analítica da curva Braquistócrona que resolve o nosso problema, pois respeita a **1ª Propriedade**, pela função:

$$c_1 : \begin{cases} \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{g}}\right] & \longrightarrow & R \\ t & \longmapsto & (\sqrt{g}t - \sin(\sqrt{g}t), -1 + \cos(\sqrt{g}t)). \end{cases}$$

Com esta definição c_1 da curva Braquistócrona, o ponto inicial é $(0, 0)$ e a velocidade inicial é nula como pretendíamos.

Quando um corpo (de massa m) que se desloca sobre uma curva num campo sujeito apenas à ação da gravidade (partindo da altura 0 e com velocidade nula) temos que:

$$\vec{a} = -g\vec{e}_y = \vec{a}_N(t) + \vec{a}_T(t) = -g\cos(\theta)\vec{N}(t) - g\sin(\theta)\vec{T}(t)$$

em que g é a aceleração da gravidade, \vec{e}_y o vetor unitário segundo o eixo dos yy , $\vec{a}_N(t)$ a aceleração normal, $\vec{N}(t)$ vetor normal unitário, $\vec{a}_T(t)$ aceleração tangencial,

$\vec{T}(t)$ vetor tangente unitário e θ é o ângulo que este último vetor faz com a horizontal.

Demonstramos que c_1 respeita a **2ª Propriedade**, isto é, que a aceleração tangencial $\vec{a}_T(t)$ é, a cada instante t , igual ao produto de $-g \sin(\theta)$ pelo vetor tangente unitário $\vec{T}(t)$. Um cálculo direto revela que:

$$\vec{a}_T(t) = g \cos\left(\frac{\sqrt{gt}}{2}\right) \underbrace{\left(\sin\left(\frac{\sqrt{gt}}{2}\right), -\cos\left(\frac{\sqrt{gt}}{2}\right)\right)}_{\vec{T}(t)}. \quad (8)$$

Mas

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \left(\sin\left(\frac{\sqrt{gt}}{2}\right), -\cos\left(\frac{\sqrt{gt}}{2}\right)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{gt}}{2}\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{gt}}{2}\right)\right) = \\ &= \left(\cos\left(\frac{\sqrt{gt}}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\sqrt{gt}}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Logo, $\theta = \frac{\sqrt{gt}}{2} - \frac{\pi}{2}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} -g \sin(\theta) &= -g \sin\left(\frac{\sqrt{gt}}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= g \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{gt}}{2}\right) \\ &= g \cos\left(\frac{\sqrt{gt}}{2}\right) \end{aligned}$$

o que, juntamente com 8, confirma que $\vec{a}_T(t) = -g \sin(\theta) \vec{T}(t)$.

Com base na expressão analítica de c_1 construímos uma simulação onde pode-se visualizar a posição da partícula num dado instante de tempo entre 0 e 1,2 e verificar o tempo exato que a partícula leva a percorrer a cicloide invertida ($t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \approx 1,00354$). O aspecto visual desta construção é igual ao da Figura 7.

VI. O PROBLEMA DA BRAQUISTÓCRONA VS. MOVIMENTO SOBRE O PLANO INCLINADO

NESTA seção comparamos o tempo que uma partícula demora a percorrer uma cicloide invertida e um plano inclinado, nas nossas simulações, com o tempo previsto analiticamente.

Para tal fizemos duas construções em *GeoGebra*, com aspecto visual igual, retratadas na Figura 8. Nestas simulações os estudantes podem comparar o movimento de uma partícula, com forma de bola e de massa 1, que se desloca entre os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (\pi, -2)$ sobre a cicloide invertida (numa considerando o tempo discreto e na outra contínuo) e sobre um plano inclinado. Nestas simulações pode-se constatar que, realmente, a partícula chega mais rapidamente a $B = (\pi, -2)$ quando se desloca sobre a cicloide invertida.

As simulações do movimento de uma partícula sobre a cicloide invertida desta seção foi construída da mesma forma das simulações descrita na seção V. Tendo por base estes apontamentos a equação posição de um corpo de massa 1 que desliza desde a posição inicial $x_0 = 0$, sem

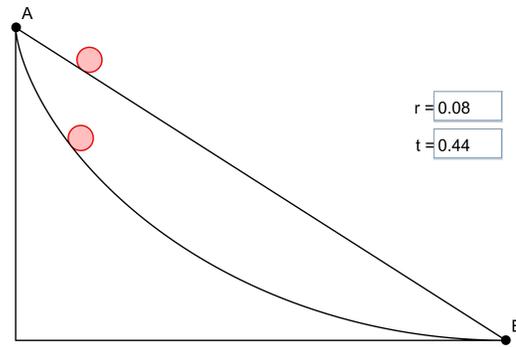


Fig. 8. Comparação entre o movimento de uma partícula sobre a cicloide invertida e sobre o plano inclinado.

rolar, sem atrito, com velocidade inicial nula ($v_0 = 0$), num plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal é dada pela equação (9).

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 g \sin \theta \quad (9)$$

Para calcular analiticamente o tempo que uma partícula demora a percorrer, de A para B, uma cicloide invertida e um plano inclinado para determinar o tempo total ($t(x)$) que a partícula demora a se deslocar de A para B pode ser determinado pelo seguinte integral (10)

$$t(x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1+y'^2(s)}{-y(s)}} ds \quad (10)$$

no qual (11)

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+y'^2(\xi)} d\xi \quad (11)$$

Curva	Cicloide invertida	Plano inclinado
x	$\theta - \sin(\theta)$	x
y	$-1 + \cos(\theta)$	$-\frac{y}{\pi}x$
$t(x)$	1,00354	1,18965
$t(x)$ (simulação discreta)	[0,99, 1]	[1,18; 1,19]

TABELA I

TEMPO QUE UMA PARTÍCULA DEMORA A SE DESLOCAR DE A PARA B SOBRE UMA DADA CURVA.

Com base nestes integrais obtivemos os valores da tabela I. No caso da simulação que contem a cicloide invertida em que consideramos o tempo contínuo o tempo que a partícula demora a chegar a B é igual ao valor obtido analiticamente, por isso, não os diferenciamos na tabela. Tal como era de esperar constatamos que, realmente, a partícula chega mais rapidamente a $B = (\pi, -2)$ quando se desloca sobre a cicloide invertida.

Quando comparamos e analisamos o tempo que a partícula leva a chegar ao ponto B obtido analiticamente com o da simulação da Braquistócrona em que consideramos o tempo discreto verificamos, conforme a tabela I que:

- no caso da cicloide invertida o tempo da nossa simulação é ligeiramente inferior;
- no caso do plano inclinado o tempo é igual.

A ligeira diferença, no caso da cicloide invertida, se deve à discretização do tempo em intervalos de tempo ($t_1 = 0,01$) e aos arredondamentos.

VII. TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA GREGA

PENSA-SE que a matemática dos antigos gregos nasceu do contato deste povo com o Oriente e, em particular, com o Egito, onde os sábios mais ilustres da Grécia foram ampliar as suas ideias e o seu saber.

Os primeiros quatro séculos do período helênico (séc. VI a.C. a V d.C.) constituem um período de realizações excepcionais da matemática grega. Foi neste período que se iniciou o estudo de três problemas geométricos que desafiaram a criatividade de inúmeros matemáticos e intelectuais, ao longo de mais de dois mil anos.

Durante séculos diversas soluções foram propostas para a resolução destes problemas geométricos mas não estavam de acordo com as “regras do jogo”, presumivelmente, colocadas na Academia de Platão, onde apenas construções com régua não graduada e compasso eram admitidas. Estes problemas ficaram famosos, talvez por serem os primeiros onde surgem diversas dificuldades de resolução, de acordo com as regras inicialmente colocadas. São conhecidos pelos *Três Problemas Clássicos da Geometria Grega*:

Trisseção do ângulo: o problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais;

Quadratura do círculo: o problema de construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado;

Duplicação do cubo: o problema de construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do de um cubo dado.

Hoje já se sabe que estes problemas não podem ser resolvidos utilizando unicamente régua não graduada e compasso. A prova desta impossibilidade é que as únicas medidas que se podem obter nas construções utilizando apenas régua não graduada e compasso, são as que se podem obter através da adição, subtração, multiplicação, divisão e extração da raiz quadrada a partir de números naturais.

A resolução destes problemas envolve a construção de medidas que não podem ser obtidas desta forma, como por exemplo, a construção de medidas cujo comprimento é um número transcendente, isto é, um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial não nula com coeficientes racionais. Podemos consultar uma demonstração do que acabamos de referir em [10, Cap. 7].

Nas seções seguintes analisamos algumas das contribuições de vários matemáticos para a resolução destes três problemas. Descrevemos também as construções que realizamos no programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra* sobre este assunto e as dificuldades que surgiram na sua execução. Na seção VII-A apresentamos dois métodos de resolução do problema da trisseção do ângulo. No primeiro método começamos por analisar a redução do problema da

trisseção do ângulo a um problema de *tipo nêusis*. Posteriormente, utilizamos as propriedades da curva concoide de Nicomedes para resolver esse problema. No segundo método usamos uma das curvas mais antigas da matemática a *trissetriz de Hípias*. Na seção VII-B analisamos uma possível resolução do problema da quadratura do círculo. Na seção VII-C descrevemos dois métodos de resolução do problema da duplicação do cubo que utilizam a redução de Hipócrates e habitualmente designados por solução de Menecmo e solução de Diocles.

A. A trisseção do ângulo

Existe pelo menos um aspeto em que o problema da trisseção do ângulo se diferencia dos outros dois problemas da geometria grega. Com efeito, não é possível quadrar um círculo ou duplicar um cubo, com régua não graduada e compasso, sejam quais forem os valores do raio do círculo ou da aresta do cubo, mas, no entanto, é possível trissetar ângulos com algumas amplitudes. Por exemplo, no livro IV da obra *Coleção Matemática*, Papo de Alexandria descreve um método para trissetar um ângulo reto que respeita “às regras”.

Nesta seção consideramos que, para resolver o problema de trissetar um ângulo, basta resolver o problema de trissetar um ângulo agudo. Pois, no caso de um ângulo reto é possível trissetá-lo com régua não graduada e compasso, recorrendo à bisseção de um ângulo de um triângulo equilátero; no caso de um ângulo obtuso podemos decompô-lo na soma de um ângulo reto com um ângulo agudo.

Decidimos nesta seção apresentar dois métodos de resolução deste problema. No primeiro método começamos por analisar a redução do problema da trisseção do ângulo a outro problema e, posteriormente, utilizamos as propriedades da curva concoide de Nicomedes para resolver esse problema. No segundo método usamos uma das curvas mais antigas da matemática atualmente conhecida por *trissetriz de Hípias*.

1) *Construções tipo Nêusis*: Os matemáticos gregos não se limitaram à utilização da régua não graduada e do compasso nas suas construções. Por vezes, sentiam necessidade de recorrer a construções que exigiam instrumentos de tipo diferentes. De entre estas construções estão as construções de *tipo nêusis*. As construções *tipo nêusis* estão definidas em [11] segundo a definição abaixo.

Definição: Dados um ponto P , um segmento de reta e duas linhas L_1 e L_2 , a construção de dois pontos A e B tais que A , B e P sejam colineares, os segmentos de reta AB e s tenham o mesmo comprimento, A esteja sobre L_1 e B esteja sobre L_2 diz-se uma *construção por nêusis* (ou construção de *tipo nêusis*).

Isto é, uma construção de *tipo nêusis* consiste em inserir entre as duas linhas um segmento de reta igual a s e de tal modo que P esteja ou sobre ele ou no seu prolongamento.

A Figura 9 demonstra uma construção *tipo nêusis*.

Papo da Alexandria, geômetra e comentador dos séculos III e IV d.C., apresenta uma *construção por nêusis* da terça parte de qualquer ângulo agudo. Os historiadores pensam

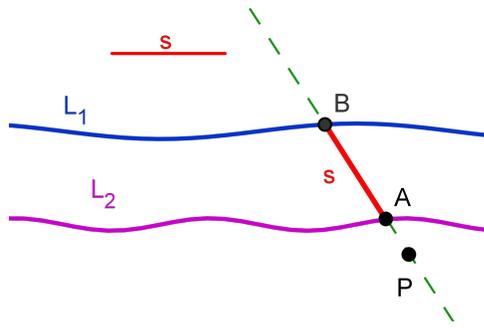


Fig. 9. Construção por Nêusis

que este modo de trissectar um ângulo já era utilizado muitos séculos antes.

- Trisseção do ângulo reduzida a outro problema do tipo *nêusis*

Sejam, como na Figura 10, BA e BC os lados que determinam o ângulo que pretendemos trissectar. Pelo ponto A de um dos lados, tiram-se uma paralela e uma perpendicular ao outro lado. O segmento DE é inserido entre estas duas retas de modo a que o seu comprimento seja duplo do comprimento do segmento AB e, ainda, de tal modo que o ponto B , vértice do ângulo a trissectar, esteja no seu prolongamento. Então, o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC .

Na Figura 10 está representada uma construção em *GeoGebra*, na qual pode-se deslocar o X para alterar a amplitude do ângulo agudo e verificar o descrito acima.

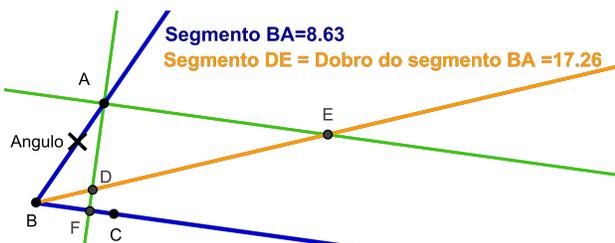


Fig. 10. Trisseção do ângulo

Segundo a afirmação acima o problema da trisseção de um ângulo agudo fica resolvido se soubermos inserir o segmento DE (duplo de BA) entre as retas FA e AE e apontado para o ponto B . Assim, o problema da trisseção do ângulo fica reduzido a um problema do tipo *nêusis*. O problema de encontrar tal segmento não foi resolvido utilizando apenas régua não graduada e compasso, como analisamos a seguir.

A seguir demonstramos que o ângulo ABC é trissectado pelo reta BD , ou seja, que o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC .

Demonstração: Seja M e o ponto médio de DE . Temos que os segmentos AB , AM , DM e ME são iguais, uma vez que, por um lado, $AB = DM = ME$ porque $DE = 2AB$ e M e o ponto médio de DE , e, por outro lado, $AB = DM$ porque o triângulo DAE é um triângulo retângulo contido numa semicircunferência de

diâmetro DE e centro M (o triângulo DAE é um triângulo retângulo por construção).

Como os segmentos AB e AM são iguais então o triângulo ABM é isósceles e a amplitude do ângulo ABM é igual à amplitude do ângulo AMB .

Como os segmentos MA e ME são iguais então o triângulo AME é isósceles e a amplitude do ângulo MAE é igual à amplitude do ângulo MEA .

O ângulo AMB é um ângulo externo do triângulo AME , logo é igual à soma dos ângulos MAE e MEA (internos a adjacentes). Mas, os ângulos ABM e AMB são iguais, logo o ângulo ABM é também igual à soma dos ângulos MAE e MEA .

A reta DE intercepta as retas AE e BC (paralelas), logo os ângulos internos MEA e DBC são geometricamente iguais.

Portanto, os ângulos MAE , MEA e DBC são iguais. Conclui-se que o ângulo ABM é o dobro do ângulo DBC e, por conseguinte, o ângulo DBC é a terça parte do ângulo ABC . **C.Q.D.**

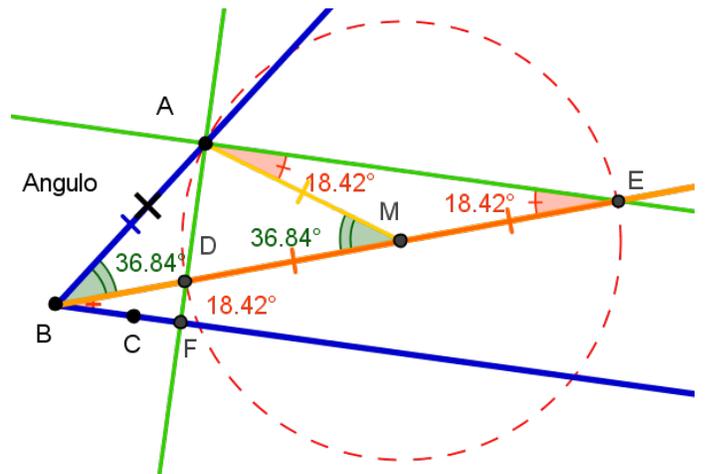


Fig. 11. Prova da construção por Nêusis

A Figura 11 apresenta uma construção que fizemos em *GeoGebra* para verificar os passos da demonstração anterior. Pode-se ainda deslocar o X para alterar a amplitude do ângulo agudo inicial e verificar que são verdadeiros os passos da demonstração independentemente desse ângulo inicial.

- Concoide

Pensa-se que Nicomedes por volta de 225 d.C. inventou a concoide (curva em forma de concha), para resolver o problema de trisseção do ângulo e o problema da duplicação do cubo.

“Vários comentadores antigos relacionam Nicomedes (séculos II – III d.C.) com a invenção da concoide. Os mais importantes são Papo de Alexandria (séculos III – IV d.C), Proclo de Lícia (século V d.C) e Eutócio de Áscalon (séculos VI d.C.)”[15]

Começamos por definir a concoide de uma curva de forma análoga à definição em [16]: consideremos um ponto O

(pólo), uma curva e um ponto P pertencente à curva. Na reta OP consideremos os dois pontos, A e B , que estão à mesma distância (distância dada previamente) de P . Ao lugar geométrico obtido pelos pontos A e B quando P varia na curva chama-se *concoide* da curva relativamente a O . A concoide de uma curva varia conforme a curva, o ponto fixo escolhido, bem como com o distância dada previamente considerada. Alguns tipos de concoide têm o nome do matemático que as descobriu. A seguir apresentamos exemplos de algumas concoides e dentro desta falaremos da concoide de Nicomedes e da Limaçon de Pascal.

- No caso da curva ser uma reta a concoide chama-se *concoide de Nicomedes*. A Figura 12 ilustra uma construção da concoide de Nicomedes que fizemos em *GeoGebra*:
 - deslocar o ponto P e verificarem que os pontos A e B encontram-se à mesma distância de P e verificarem que realmente se trata de uma concoide;
 - animar a imagem para verificarem as diferentes concoides que se obtêm quando a distância dada varia.

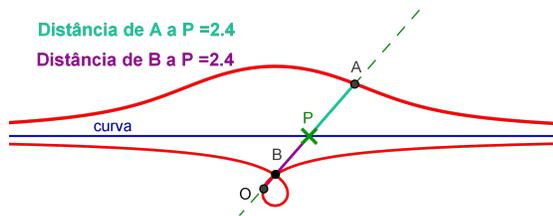


Fig. 12. Concoide de Nicomedes

- No caso da curva ser uma circunferência, podemos ver na Figura 13 uma ilustração de uma construção, que fizemos em *GeoGebra*, deste tipo de concoides. Nesta construção pode-se realizar o mesmo tipo de análise efetuada na construção da concoide de Nicomedes e ainda:
 - deslocar o ponto O ;
 - alterar o raio da curva (circunferência) no seletor.

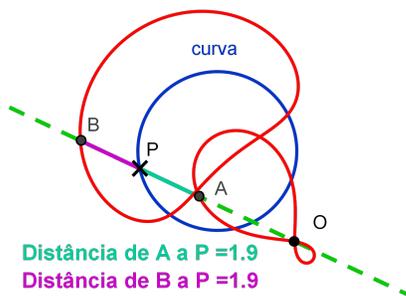


Fig. 13. Concoide se a curva for uma circunferência

- No caso da curva ser uma circunferência e o ponto O um ponto da circunferência à concoide chama-se

Limaçon de Pascal. A Figura 14 ilustra uma construção da Limaçon de Pascal que fizemos em *GeoGebra*. Nesta construção pode-se realizar o mesmo tipo de análise efetuada na construção anterior, mas apenas pode deslocar o ponto O na curva (circunferência).

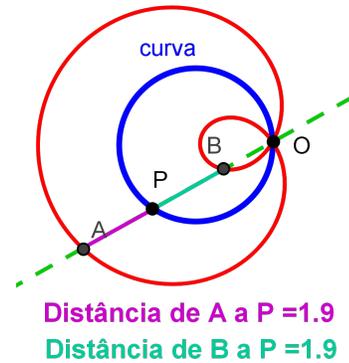


Fig. 14. Limaçon de Pascal

- Trisseção de um ângulo utilizando a concoide de Nicomedes

Podemos usar a *concoide de Nicomedes* para efetuar a trisseção do ângulo utilizando o método *tipo nêusis*.

Tal como já referimos na sub-seção VII-A1, neste método pretende-se inserir um segmento de reta, de comprimento predefinido, entre duas retas, de forma que um certo ponto se encontre no prolongamento desse segmento.

Dado um ângulo ABC para trissetar, podemos construir uma concoide do seguinte modo: Por um ponto A de um dos lados do ângulo, tiram-se uma paralela e uma perpendicular ao lado BC , seja F a interseção da perpendicular com o lado BC . Traça-se a *concoide de Nicomedes* definida pela reta AF , pelo polo B e por uma circunferência de raio $2BA$ e centro sobre a reta. Conforme Figura 15, seja E a interseção do ramo da concoide, no lado oposto ao polo, com a reta, paralela a BC , que passa por A . Portanto, utilizando a *concoide de Nicomedes*, inserimos o segmento DE , duplo do segmento BA , entre as retas AF e AE e apontado para o ponto B , que tal como demonstramos era necessário para trissetar o ângulo ABC .

Na Figura 15 está representada uma construção que realizamos em *GeoGebra*, na qual podemos:

- deslocar o X para alterar a amplitude do ângulo agudo ABC ;
- mover o ponto A para verificar que a posição do ponto não altera a solução do problema;
- verificar que ângulo DBC é, realmente, a terça parte do ângulo ABC .

Na execução desta construção debatemo-nos contra uma limitação do *GeoGebra*. Este *software* de Geometria Dinâmica não consegue determinar o ponto de interseção entre uma curva e uma reta. Por conseguinte, foi necessário utilizar um artifício para determinar o ponto E da nossa construção. O ponto E deveria ser a interseção do ramo da concoide, no lado oposto ao pólo, com a reta, paralela a BC , que passa por A . Mas, este ponto foi determinado

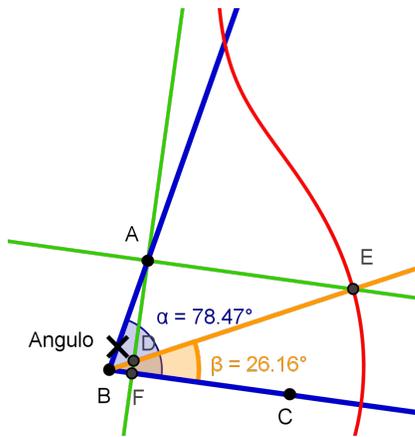


Fig. 15. Trisseção de um ângulo utilizando a conoide de Nicomedes.

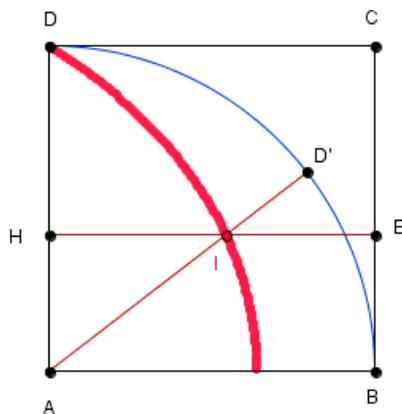
pela interseção da reta paralela a BC e que passa por A com a reta resultante da rotação de BC em torno de B e de um ângulo igual a um terço do ângulo ABC .

2) *Trissectriz de Hípias*: Papo de Alexandria no livro IV da sua *Coleção Matemática* descreve uma das mais antigas curvas da matemática atualmente conhecida por *trissectriz de Hípias*. Esta curva permite trissectar um ângulo e, posteriormente, foi usada por Dinóstrato de Atenas para a quadratura do círculo.

Realizamos a construção da trissectriz de Hípias, em *GeoGebra*, e para tal tivemos em conta a definição descrita de seguida.

Considerem-se dois movimentos sincronizados, um retilíneo e outro circular. Conforme Figura 16, o lado DC do quadrado $ABCD$ desloca-se paralelamente a si próprio, até coincidir com o lado AB . Simultaneamente, o lado AD gira em torno de A , até coincidir com AB . Os dois movimentos são uniformes (isto é, as suas velocidades são constantes), devendo começar no mesmo instante e acabar no mesmo instante. Em cada instante, com a exceção do último, os dois segmentos HE e AD' intersectam-se num ponto I . Enquanto os segmentos se deslocam, I traça a curva de Hípias.

A construção desta curva está representada na Figura 16. Podemos animar a construção e observarem a curva a ser traçada.



Pelo método de construção da curva de Hípias podemos afirmar que:

- a distância percorrida pelo lado DC é proporcional ao tempo gasto no seu percurso;
- a amplitude do arco determinado na circunferência de centro A e raio AD é proporcional ao tempo percorrido no percurso circular deste raio.

Assim, existe proporcionalidade entre a distância retilínea percorrida pelo lado DC e a amplitude angular percorrida pelo lado AD . Ou seja, em todas as posições do ponto I , a condição (12) é verificada.

$$\frac{AD}{AH} = \frac{\text{arco } BD}{\text{arco } D'B} \quad (12)$$

Portanto, a *trissectriz de Hípias* permite transformar todas as questões de proporcionalidade entre ângulos a questões análogas entre segmentos de reta e, em particular, permite reduzir a trisseção de um ângulo dado à trisseção de um segmento de reta.

Tal como já foi referido nesta seção, para resolver o problema de trissectar um ângulo basta resolver o problema de trissectar um ângulo agudo. Sendo o segmento AG a terça parte do segmento AH , considere-se o segmento GJ paralelo ao segmento AB e seja K a sua interseção com a curva. Sendo L a interseção de AK com o quarto de circunferência, o ângulo BAL é a terça parte do ângulo BAD' .

Fizemos uma construção em *GeoGebra* (Figura 17) onde pode-se verificar facilmente a afirmação acima. Nesta construção podemos deslocar o ponto H , de forma a alterar o ângulo agudo inicial, e verificarem que para qualquer ângulo inicial tem-se que: o ângulo BAL é a terça parte do ângulo BAD' .

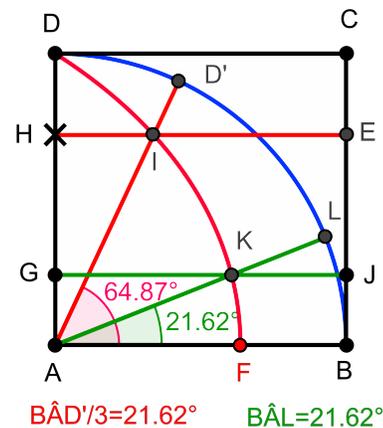


Fig. 17. Ilustração de que a trissectriz de Hípias realmente trissecta o ângulo

Na realização desta construção voltamos a contornar a limitação que o *GeoGebra* tem, de não conseguir determinar o ponto de interseção entre uma curva e uma reta. Neste caso não conseguimos determinar o ponto K como a interseção entre o segmento GJ paralelo ao segmento AB com a trissectriz de Hípias. Para ultrapassar este obstáculo, como representando na Figura 17, determinamos o ponto

K através da interseção entre o segmento GJ , paralelo ao segmento AB , com a reta resultante da rotação de AB em torno de A e de um ângulo igual a um terço do ângulo BAD' .

Demonstração: Designemos por D' e L os pontos de interseção do quarto de circunferência DB com as retas AI e AK , respetivamente, e por E e J os pontos de interseção do lado CB com as retas HI e GK , respetivamente.

No instante em que o lado DC ocupa a posição HE , o lado AD ocupa a posição AD' (uma vez que HE e AD' se intersectam num ponto da trissetriz, I); analogamente, no instante em que o lado DC ocupa a posição GJ , o lado AD ocupa a posição AL (uma vez que GJ e AL se intersectam num ponto da trissetriz, K). Portanto, temos a proporcionalidade (13).

$$\frac{AH}{AG} = \frac{\text{arco } D'B}{\text{arco } LB} = \frac{\angle BAD'}{\angle BAL} \tag{13}$$

Como o segmento de reta AG é a terça parte do segmento de reta AH temos que também o ângulo BAL é a terça parte do ângulo BAD' . **C.Q.D**

Esta curva não permite apenas trissectar um ângulo. Se procedemos de um modo semelhante ao descrito nesta subseção, a trissetriz de Hípias possibilita também a divisão de um ângulo agudo em qualquer outra razão, desde que esta possa ser expressa como razão de dois segmentos de reta.

B. Quadratura do círculo

O problema da quadratura de círculo consiste no problema de construir um quadrado cuja área é igual à de um círculo dado. O matemático alemão Ferdinand Lindemann, em 1882, provou que π é um número transcendente, ou seja, que não existe um polinômio com coeficientes inteiros ou racionais, não nulos, dos quais π seja uma raiz (segundo [18] podemos consultar uma demonstração em [12]). Desta forma ficou provado que o problema da quadratura do círculo não pode ser resolvido utilizando apenas régua não graduada e compasso, pois se π fosse transcendente tal acontecia conforme demonstrado em [18].

Nesta seção analisamos uma possível resolução deste problema clássico da antiga Grécia.

Um século depois de Hípias de Elis ter descoberto a trissetriz, outro matemático ateniense, Dinóstrato, descobriu que essa curva podia também ser utilizada na solução de um problema geométrico diferente: a retificação da circunferência e, por conseguinte, solução do problema da quadratura do círculo. Proclo Lício designa a curva de Hípias por quadratriz (Figura 18), embora não lhe associe o nome de Dinóstrato. Papo de Alexandria, por sua vez, ao descrever a curva, associa-lhe os nomes de Dinóstrato e de Nicomedes, e afirma que ambos a utilizaram para quadrar o círculo.

Dinóstrato terá descoberto que o lado do quadrado é meio proporcional entre o (comprimento do) arco de circunferência DB e o segmento de reta AF , o que se pode escrever segundo a equação (14).

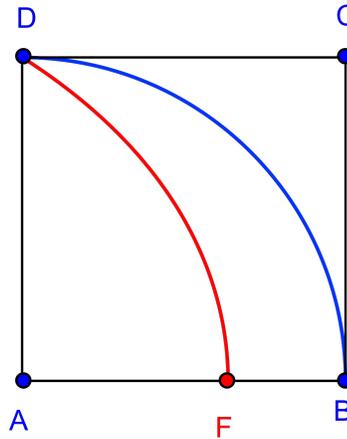


Fig. 18. Trissetriz de Hípias ou Quadratriz

$$\frac{\text{arco } DB}{AD} = \frac{AD}{AF} \tag{14}$$

Consideramos relevante chamar a atenção de que do ponto de vista da matemática grega a determinação do ponto F desta forma é problemática. Pois, tal como podemos observar quando os dois segmentos de reta móveis ocupam ambos a posição do lado AB , isto é, quando são coincidentes, estes não determinam nenhum ponto. Do ponto de vista moderno o ponto F é obtido como um limite.

Papo da Alexandria apresenta a demonstração deste resultado por dupla redução ao absurdo. Esta demonstração assenta em dois resultados que são pela primeira vez formulados por Arquimedes no *Tratado Da Esfera e do Cilindro* [13]:

“o perímetro do círculo é maior do que o perímetro de qualquer polígono inscrito e menor do que o perímetro de qualquer polígono circunscrito.”

Pode-se consultar mais sobre a demonstração de Papo em [11, pág. 296] ou em [14, pág. 66].

A equação 14 permite construir um segmento de reta igual à quarta parte do perímetro da circunferência de raio AD .

O resultado de Dinóstrato não fornece diretamente uma quadratura do círculo, mas sim uma retificação da circunferência. No século seguinte àquele em que Dinóstrato viveu, Arquimedes de Siracusa estabeleceu a ligação entre as duas questões (a da quadratura do círculo e a da retificação da circunferência), ao demonstrar que todo o círculo tem área igual a um triângulo com altura igual ao raio do círculo e base igual ao perímetro do círculo (o perímetro do círculo é igual ao comprimento da retificação da circunferência com o mesmo raio), isto é (15),

$$A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \frac{r \times 2\pi r}{2} = A_{\text{triângulo}} \tag{15}$$

em que r é o raio do círculo. Por conseguinte, demonstrou que todo o círculo tem área igual a um retângulo com largura igual ao raio do círculo e comprimento igual a metade do perímetro do círculo.

Consideremos $r = AD$ e temos que a área do círculo é dado pelas fórmulas (16) e (17), isto é, a área do círculo é igual à área do retângulo de comprimento $2 \times arco\ DB$ e largura AD , ou seja,

$$A_{circulo} = AD \times \frac{perimetro\ do\ círculo}{2} \tag{16}$$

$$A_{circulo} = AD \times 2 \times arco\ DB. \tag{17}$$

De seguida descrevemos uma possível forma de utilizar o resultado de Dinóstrato para quadrar um círculo de raio AD . Como já referimos o resultado de Dinóstrato, expresso na equação (14), refere que o lado do quadrado, AD , é meio proporcional entre o (comprimento do) arco de circunferência DB e o (comprimento do) segmento de reta AF .

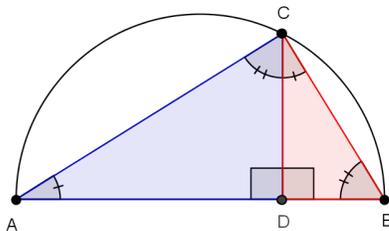


Fig. 19. Caso de semelhança de triângulos pelo Teorema de Tales

Utilizando este resultado os matemáticos da época conseguiam determinar o comprimento do *arco DB* tendo conhecimento do comprimento de AD e de AF .

Estes matemáticos tinham conhecimento, pelo Teorema de Tales, que “se dois triângulos tiverem os ângulos dois a dois iguais então semelhantes [11, pág. 263] e, por conseguinte, já sabiam que os triângulos, a vermelho e a azul, da Figura 19 são semelhantes.

Por outro lado, os matemáticos também tinham conhecimento do Teorema da Altura [11, pág. 264].

Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é o meio proporcional entre os segmentos que determina na hipotenusa.

Se considerarmos o triângulo $[ABC]$, retângulo em C da Figura 19 utilizando o Teorema da Altura obtém-se a proporção (18).

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \tag{18}$$

E se consideramos AD , CD e DB da proporção (18), respetivamente, arco DB , AD e AF da equação (14) conseguimos obter um segmento com o comprimento do *arco DB*, como podemos ver na Figura 20.

Com o conhecimento do comprimento do *arco DB*, os matemático sabiam determinar geometricamente o comprimento de metade do perímetro do círculo (o dobro do comprimento do *arco DB*) e, conseqüentemente, as medidas do retângulo de comprimento $2 \times arco\ DB$ e largura AD cuja área é igual à área do círculo de raio AD , pela equação (16).

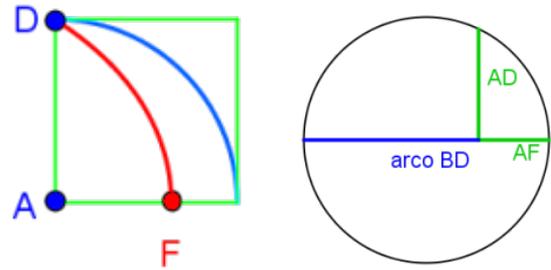


Fig. 20. Determinação do comprimento do *arco DB*.

Bastava, portanto, determinarem o comprimento do lado do quadrado que quadra o retângulo para conseguirem quadrar o círculo. Podemos traduzir o que acabamos de referir pela equação (19) que é equivalente à equação (20) e utilizando mais uma vez o Teorema da Altura obtemos o comprimento do lado do quadrado pretendido, como podemos ver na Figura 21.

$$Lado\ do\ quadrado^2 = AD \times 2 \times arco\ DB \tag{19}$$

$$\frac{AD}{Lado\ do\ quadrado} = \frac{Lado\ do\ quadrado}{2\ arco\ DB} \tag{20}$$

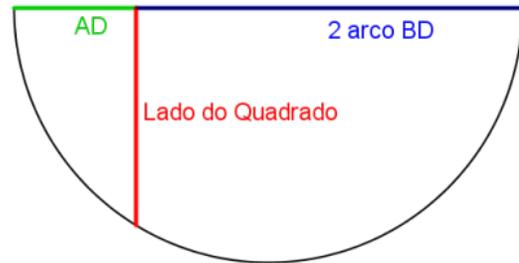


Fig. 21. Quadratura do círculo de raio AD .

C. Duplicação do cubo

O problema da duplicação do cubo resume-se à construção de uma aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de um cubo dado inicialmente.

Segundo José Miguel Rodrigues de Sousa [15] numa suposta carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu relata que Hipócrates de Quios (século V a.C.) menciona que:

“se entre duas linhas retas, das quais a maior seja dupla da menor, se inscreverem duas médias em proporção contínua, o cubo ficará duplicado”.

Este matemático reduziu o problema da duplicação do cubo a um outro, que continua a não ser resolvido somente com régua não graduada e compasso.

Ainda segundo autor acima referido (ver [15]) o que declara é que se, dado um cubo de aresta a , existem dois segmentos x e y tais que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \tag{21}$$

ou seja, que existem dois meios proporcionais entre os segmentos a e b , então o cubo de aresta x tem o volume ampliado na razão ba . Apresentamos a demonstração do que acabamos de referir.

Podemos deduzir das proporcionalidades (21) que $x^3 = a^2b$. Esta dedução é demonstrada abaixo para $b = 2a$.

Logo, tem-se:

$$x = \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^3 \frac{b}{a}} = a \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \tag{22}$$

e, portanto,

$$x^3 = \left(a \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right)^3 = a^3 \frac{b}{a} \tag{23}$$

Portanto, pela equação (23) se existem os dois meios proporcionais entre os segmentos a e b , então o cubo de aresta x tem o volume ampliado na razão ba .

A duplicação do cubo é um caso particular, quando $b = 2a$ e pretendemos portanto encontrar os segmentos x e y que verifiquem as proporcionalidades (24):

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \tag{24}$$

Conseguimos deduzir das proporcionalidades (24) que $x^3 = 2a^3$. Podemos obter esse fato da seguinte forma, pela equação (24) sabemos que (25)

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \tag{25}$$

e (26)

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \tag{26}$$

é equivalente a (27)

$$ay = x^2 \tag{27}$$

e (28)

$$y = \frac{2a^2}{x} \tag{28}$$

logo (29)

$$x^3 = 2a^3 \tag{29}$$

Este resultado demonstra que o cubo de aresta x tem o dobro do volume do cubo de aresta a . E, portanto, fica demonstrada a equivalência entre o problema da duplicação do cubo e o problema da construção de dois meios proporcionais entre a aresta do cubo inicial e o seu dobro.

Posteriormente à redução do problema efetuada por Hipócrates pensa-se que os esforços dos matemáticos concentraram-se somente no sentido de encontrarem uma construção para os dois meios proporcionais em causa.

Nesta subseção descrevemos dois métodos de resolução deste problema que utilizam a redução de Hipócrates: a solução de Menecmo e a solução de Diocles.

1) *Solução de Menecmo*: O matemático do século IV a.C. Menecmo está relacionado com as curvas que atualmente designamos por cônicas (elipse, parábola e hipérbole). Este matemático está ligado mais especificamente à descoberta de que as cônicas podem ser obtidas através da interseção de um cone reto de base circular com um plano.

As soluções de Menecmo para o problema da duplicação do cubo, que pensa-se terem sido preservadas por Eutócio, baseiam-se na construção de um ponto através da interseção de duas cônicas, num dos casos duas parábola e no outro caso uma parábola e um hipérbole.

Tendo em conta a redução (21) de Hipócrates de Quios, como já foi referido, o problema da duplicação do volume do cubo fica reduzido à determinação de dois meios proporcionais (x e y) entre os segmentos a e $b = 2a$ tais que as proporcionalidades 24 são respeitadas e, em que, a é a aresta do cubo a duplicar e x a aresta do cubo que duplica o volume.

Das proporcionalidades (24) aferimos que basta que se satisfaçam duas das três equações apresentadas abaixo para obtermos x .

$$x^2 = ay \tag{30}$$

$$xy = 2a^2 \tag{31}$$

$$y^2 = 2ax \tag{32}$$

Logo, podemos obter x de três modos:

- como abcissa do ponto de interseção da parábola $y = \frac{x^2}{a}$ com a hipérbole $xy = 2a^2$ a primeira solução de Menecmo;
- como abcissa do ponto de interseção da parábola $y = \frac{x^2}{a}$ com a parábola $x = \frac{y^2}{2a}$ a segunda solução de Menecmo;
- como abcissa do ponto de interseção da parábola $x = \frac{y^2}{2a}$ com a hipérbole $xy = 2a^2$.

Segundo a fonte biográfica [15] Menecmo apenas apresenta os dois primeiros métodos para obter x .

Na Figura 22 representamos uma construção, em *Geo-Gebra*, das duas soluções de Menecmo. Nesta construção podemos verificar que independentemente do valor atribuído a a a solução obtida é, realmente, solução para o problema da duplicação do cubo. Na construção efetuada é possível visualizar os modos para obter x em simultâneo, mas também é possível visualizar os dois modos separadamente. Através da análise da construção deve concluir que é possibilidade de obter x pelo o terceiro modo.

2) *Solução de Diocles*: Pensa-se que o matemático grego Diocles (c. 240 a.C. – c. 180 a.C.) foi quem inventou uma curva designada por cissoide com o intuito de resolver o problema da duplicação do cubo.

Mais tarde, o processo utilizado para criar a curva que se atribui a Diocles foi generalizado e todas as curvas obtidas por um método análogo ao da cissoide deste matemático são denominadas por cissoides.

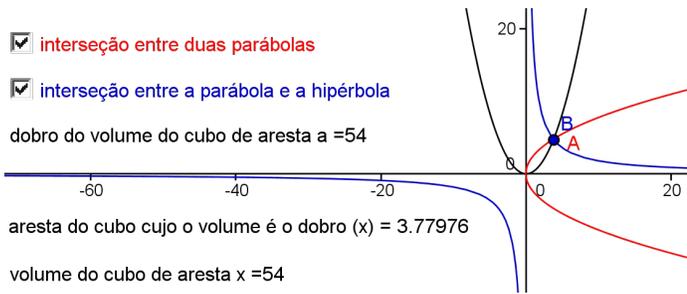


Fig. 22. As soluções de Menecmo

De seguida expomos com base na definição dada por Robert Yates em [16] a curva cissoide, no caso geral.

Definição: Sejam f_1 e f_2 duas curvas quaisquer e O um ponto fixo. Desenhemos uma semirreta com origem em O e que intersete f_1 e f_2 em R e Q , respectivamente. Consideremos ainda um ponto P tal que $OP = QR$. Ao lugar geométrico descrito por P chama-se *cissoide de f_1 e f_2 relativamente ao ponto O* .

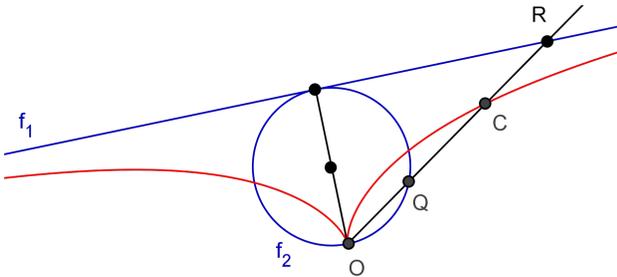


Fig. 23. Cissoide de Diocles pela definição atual.

Na Figura 23 representamos o que atualmente conhecemos por cissoide de Diocles. Neste caso as duas curvas envolvidas são uma circunferência e uma linha reta tangente à circunferência e o ponto fixo é o ponto da circunferência diametralmente oposto ao ponto de tangência. Contudo este matemático grego definiu a sua curva em relação, apenas, a um quadrante da circunferência envolvida, como podemos ver na Figura 24.

Na Figura 24 está representada a cissoide definida por Diocles com base em [15].

Consideramos uma circunferência de centro O em que AB e DC são diâmetros perpendiculares entre si. Sejam E e F pontos da circunferência pertencentes aos quadrantes BD e BC , respetivamente, e colocados de modo a que os arcos EB e BF sejam iguais.

Desenhemos os segmentos GE e HF perpendiculares a DC e o segmento EC . Consideramos P o ponto de interseção entre EC e HF . A cissoide de Diocles é a curva traçada pelo ponto P quando os pontos E e F ocupam todas as posições possíveis nas condições referidas acima.

Nesta construção, representada na Figura 24, é necessário mover o ponto E para obter o traçado do ponto P .

A solução de Diocles para a resolução do problema da duplicação do cubo passou, tal como a solução de Menecmo, pela determinação de dois meios proporcionais

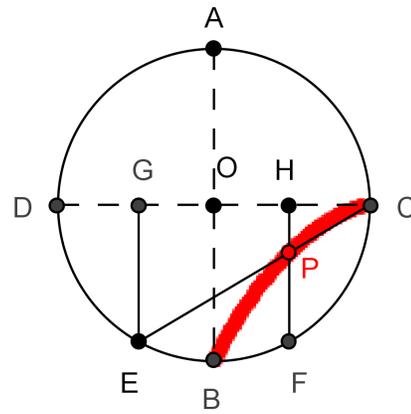


Fig. 24. Cissoide pela definição de Diocles.

entre dois os segmentos. A seguir, observa-se como encontrar os dois meios proporcionais utilizando a cissoide de Diocles.

Tendo em conta a construção do ponto P descrita acima podemos demonstrar que os segmentos HF e HC são dois meios proporcionais entre os segmentos DH e HP , ou seja, a igualdade (33) que será demonstrada abaixo.

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} = \frac{HC}{HP} \quad (33)$$

Pelo Teorema VII-B temos que HF é o meio proporcional entre os segmentos DH e HC , isto é, $\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC}$.

Pelas condições da construção no GeoGebra representada na Figura 24 sabemos que $\frac{DH}{HF} = \frac{GC}{GE}$, uma vez que $HF = GE$ e $DG = HC$.

Por outro lado, como os triângulos GEC e HPC são proporcionais os quocientes entre os lados correspondentes são sempre iguais, logo, $\frac{GC}{GE} = \frac{HC}{HP}$. E portanto a igualdade (33) fica demonstrada.

A seguir descrevemos como podemos construir os dois meios proporcionais entre os segmentos a e b .

Começemos por construir uma circunferência de centro $O = (0, 0)$ em que AB e DC são os diâmetros perpendiculares entre si. Seguidamente, construímos a cissoide pelo método de Diocles, mas desta vez utilizamos o comando *Locus*, e criamos um ponto K no segmentos OB de maneira a que a igualdade (34) seja respeitada.

$$\frac{DO}{OK} = \frac{a}{b} \quad (a > b) \quad (34)$$

Unimos o ponto D ao ponto K e prolongamos o segmento DK de modo a intersecar a curva cissoide num ponto que designamos por Q .

O programa de Geometria Dinâmica utilizado não permite intersecar semirretas com lugares geométrico. Portanto, necessitamos de o construir este ponto através de um artifício. Nesta seção, descrevemos o artifício usado para determinar o ponto Q , que aparentemente será determinado pela interseção do prolongamento o segmento DK com a cissoide.

Supomos que conseguimos obter o ponto Q pela forma descrita acima. Passando por Q construímos o segmento ML paralelo a AB .

Pelo que demonstramos anteriormente, ML e MC são dois meios proporcionais entre DM e MQ , ou seja, verificam as igualdades (35).

$$\frac{DM}{ML} = \frac{ML}{MC} = \frac{MC}{MQ} \tag{35}$$

Os passos desta construção estão ilustrados na Figura 25.

dobro do volume do cubo de aresta $a = 2$
volume do cubo de aresta $2x = 2$

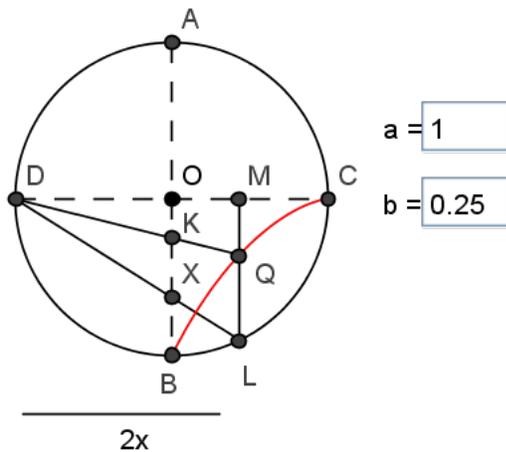


Fig. 25. Solução de Diocles para o problema da duplicação do cubo.

Temos ainda que, como os triângulos DMQ e DOK são proporcionais, os quocientes entre os lados correspondentes são sempre iguais, logo, obtemos a igualdade (36).

$$\frac{GC}{GE} = \frac{HC}{HP} \tag{36}$$

Das igualdades (34) e (36) obtemos a igualdade (37).

$$\frac{DM}{MQ} = \frac{a}{b} \tag{37}$$

Até este momento conseguimos inserir entre DM e MQ dois meios proporcionais (ML e MC). Mas o nosso objetivo é encontrar dois meios proporcionais entre os segmentos a e b , isto é, estamos à procura de x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ ou seja, respeita as proporcionalidades (21).

Podemos encontrar x e y através de duas construções, uma vez que, x e y são tais que respeita as proporcionalidades (38) e (39), respetivamente.

$$\frac{DM}{a} = \frac{ML}{x} \tag{38}$$

$$\frac{MQ}{b} = \frac{MC}{y} \tag{39}$$

Portanto, por um lado, sabemos que se existirem dois meios proporcionais entre os segmentos a e b , então o cubo de aresta x tem o volume ampliado na razão ba e x é dado

pela igualdade (22); e, por outro lado, sabemos que x é obtido através do quarto proporcional da proporção (38).

Destes dois fatos surgiu o artifício que usamos para a construção do ponto Q . Para construir o ponto Q começamos por construir um ponto X segundo (40).

$$X = \left(x(D) + a, -a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) \tag{40}$$

Estamos, portanto, a obrigar a que x seja a distância do ponto X ao segmento DC da Figura 25.

Tendo em conta a proporcionalidade (38) conseguimos determinar o ponto L , realizando a interseção da semirreta $\dot{D}X$ com a circunferência.

Determinamos o ponto M executando a interseção da reta que passa por L perpendicular ao segmento DC com o próprio segmento DC . Construímos o segmento ML . E por fim, determinamos o ponto Q pela interseção do segmento ML com a semirreta $\dot{D}K$.

Demonstramos que, realmente, podemos obter os meios proporcionais x e y , entre os segmentos a e b , através da construção dos quarto proporcional das proporcionalidades (38) e (39).

Temos que as proporcionalidades (38) e (39) são equivalentes às proporcionalidades (41) e (42), respetivamente.

$$\frac{DM}{ML} = \frac{a}{x} \tag{41}$$

$$\frac{MQ}{MC} = \frac{b}{y} \tag{42}$$

Por outro lado, tendo em conta (37), temos que:

$$\frac{ML}{MC} = \frac{ML}{DM} \times \frac{DM}{MQ} \times \frac{MQ}{MC} = \frac{x}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{y}$$

ou seja, a igualdade (43).

$$\frac{ML}{MC} = \frac{x}{y} \tag{43}$$

Por fim, tendo em conta (41), (42) e (43) temos que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, isto é, encontramos os dois meios proporcionais, x e y , entre os segmentos a e b .

Para resolver o problema da duplicação do cubo basta considerar $b = a4$ e a aresta do cubo com volume o dobro do volume do cubo inicial é $2x$. Pois, pela igualdade (c.f. 22) temos que (44),

$$x = a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = a\sqrt[3]{\frac{a}{4a}} = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} \tag{44}$$

e, portanto (45),

$$(2x)^3 = \left(2\frac{a}{\sqrt[3]{4}} \right)^3 = 2a^3 \tag{45}$$

como pretendemos.

Realizamos outra construção para o problema da duplicação do cubo com recurso à cissoide de Diocles. Esta construção está descrita na Figura 26.

Neste caso, para resolver o problema da duplicação do cubo temos de considerar $b = 2a$ e a aresta do cubo

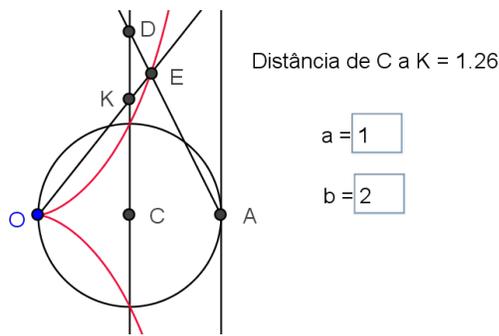


Fig. 26. Solução utilizando a cissoide de Diocles segundo [17].

com volume o dobro do volume do cubo inicial é dada pela distância entre os pontos C e K . Podemos ver uma demonstração de que esta construção funciona em [17].

De seguida, descrevemos os passos que efetuamos, com base no primeiro volume do Tratado das Curvas de Gomes Teixeira, para executar esta construção (conforme Figura 26):

- 1) construir o que atualmente conhecemos por cissoide de Diocles em que as duas curvas envolvidas são uma circunferência de raio a e centro $C = (a, 0)$ e uma linha reta tangente à circunferência em $A = (2a, 0)$ e o ponto fixo é o ponto $O = (0, 0)$;
- 2) designemos por D o ponto pertencente à reta paralela à assíntota da cissoide que passa por C e tal que a distância desse ponto ao ponto C seja b ;
- 3) o ponto E é o ponto de interseção da semirreta $\hat{A}D$ com a cissoide. Mas voltamo-nos a deparar com a mesma limitação, do programa de Geometria Dinâmica *GeoGebra*, da construção anterior, por conseguinte, passamos para o passo seguinte;
- 4) o ponto K é o ponto de interseção da semirreta $\hat{O}E$ com a reta definida por C e por D , como não construímos o ponto E passamos ao passo seguinte.
- 5) como a distância entre os pontos C e K é $a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, para resolver as limitações dos passos anteriores marcamos o ponto K da seguinte forma (46)

$$K = \left(0, a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) \tag{46}$$

e depois determinamos o ponto E pela interseção entre as semirretas $\hat{O}K$ e $\hat{A}D$.

VIII. CONSIDERAÇÕES FINAIS

NESTE trabalho, utilizamos o software livre GeoGebra para analisar, implementar e simular as principais propriedades da Cicloide e soluções para os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega. Relativamente às propriedades da cicloide apresentou-se o Paradoxo da Roda de Aristóteles, que a área sob uma cicloide é três vezes a área do seu círculo gerador e a resolução do problema da braquistócrona.

Exibimos os resultados da comparação entre o movimento de uma partícula sobre cicloide invertida e o plano

inclinado. Os resultados demonstram que o movimento é mais rápido na cicloide invertida. Com relação aos Três Problemas Clássicos da Geometria Grega apresentamos:

- dois métodos de resolução do problema da trisseção do ângulo em que o primeiro método utiliza propriedades da conoide de Nicomedes e o segundo método utiliza propriedades trissetriz de Hípias.
- uma resolução do problema da quadratura do círculo que utiliza um resultado do matemático Dinóstrato.
- dois métodos de resolução do problema da duplicação conhecidos por solução de Menecmo e solução de Diocles.

Como trabalhos futuros, pretendemos analisar outras propriedades da cicloide, abordar propriedades de outras curvas da antiguidade e expandir o estudo à utilização do GeoGebra 3D. Posteriormente, utilizar as implementações em um estudo de caso real.

REFERÊNCIAS

- [1] Richard Courant and Herbert Robbins. *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, London: Oxford University Press. ISBN 0-19-502517-2, 1941.
- [2] Rudolf Sträßer. *Cabri-géomètre: Does a Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning?* International Journal for Computers in Mathematics Learning, 3(6):319?333, 2001.
- [3] Rudolf Sträßer. *Research on Dynamic Geometry Software (DGS) - an introduction*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 3(34):65, 2002.
- [4] Scher, Daniel. *Lifting the Curtain: The Evolution of The Geometer's Sketchpad Mathematics Educator*, v10 n 2 pp 42?48, 2000.
- [5] Markus Hohenwarter. *GeoGebra - ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Master's thesis, Universität Salzburg, 2002.
- [6] Katz, Victor J.. *História da Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2010.
- [7] Drabkin, Israel E. Aristotle's Wheel: Notes on the History of the Paradox. *Osiris* 9, 162–198, 1950.
- [8] Cunha Junior, Americo Barbosa. *O Problema da Braquistócrona e Algumas Noções de Cálculo Variacional*. Retirado de <http://web.me.com/americopubs/other.html> em 10 de Outubro de 2016.
- [9] Pedro, H. A.; Precioso, J. C. Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição. *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, Bauru, v. 3, p. 17-34, dez. 2014.
- [10] Stewart, Ian. *Galois theory*. Chapman & Hall, 1989.
- [11] Estrada, Maria Fernanda; Sá, Carlos; Queiró, João; Silva, Maria do Céu e Costa, Maria José. *História da Matemática*. Universidade Aberta, Lisboa, 2000.
- [12] Gupta, R. C. *Lindemann's discovery of the transcendence of pi: a centenary tribute*. *Ganita-Bharati. Bulletin of the Indian Society for the History of Mathematics* (1982).
- [13] Heath, Thomas. *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 1912.
- [14] Boyer, Carl B.. *História da Matemática 2ª Edição* (Tradução: Elza F. Gomide). Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 2001.
- [15] Sousa, José Miguel. *Trisseção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia*. Universidade do Porto, 2001. Retirado de <http://www.prof2000.pt/users/miguel/tese/pdf.html> em 10 de Outubro de 2017.
- [16] Yates, Robert C. *Curves and Their Properties*. The National Council of Teachers of Mathematics. United States of America, 1974.
- [17] Teixeira, F. Gomes. *Obras sobre Matemática*. Volume 4, Capítulo 1, Secção 1. Editora Imprensa da Universidade de Coimbra, 1908.
- [18] Felix Klein. *Lectures on Mathematics*, American Mathematical Soc., 1894.