Grupos gerados por rotações em torno de dois eixos

José Carlos Santos

Introdução

Em [2], Jorge Buescu menciona dois problemas, que podem ser enunciados do seguinte modo:

> Sejam g_1 e g_2 duas rotações de ordem finita e superior a 1 em torno de duas rectas de $\mathbf{R}^3$ que passam pela origem.
>
> 1. Quando é que o grupo gerado por g_1 e g_2 é finito?
> 2. Quando não for finito, será necessariamente denso no grupo $SO(3, \mathbf{R})$ de todas as rotações em $\mathbf{R}^3$?

De facto, em [2] supõe-se também que os eixos de rotação são ortogonais e que as ordens de g_1 e de g_2 são superiores a 3; sob essas hipóteses, podem-se ver em [1] as soluções para estes problemas: o grupo é finito caso $\operatorname{ord}(g_1) = \operatorname{ord}(g_2) = 4$ e é denso caso contrário. Neste artigo serão dadas as soluções dos problemas no caso geral. Aliás, em [1] sugere-se precisamente ao leitor que tente resolver os problemas sem estar a supor que os eixos de rotação são ortogonais.

Convém fazer notar que a abordagem feita neste artigo difere da de [1] no seguinte aspecto: enquanto que naquele artigo se parte do conhecimento da classificação dos subgrupos fechados de $SO(3, \mathbf{R})$, neste artigo será visto como classificar os subgrupos fechados infinitos de $SO(3, \mathbf{R})$, pelo que só será necessário depender da classificação dos subgrupos finitos de $SO(3, \mathbf{R})$ (que já é conhecida desde o século XIX).

Comecemos por fixar a terminologia empregue neste artigo. Todo este texto é feito num contexto de Álgebra Linear e, em particular:

- sempre que se falar de «eixo» ou de «recta», isto significará uma recta que passa pela origem;
- analogamente, qualquer plano será um plano que contém a origem;

- sempre que se falar de «rotações», estar-se-á a fazer referência a rotações em torno de eixos que, como foi dito acima, passam pela origem; em particular, estas rotações são aplicações lineares de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}^3$.

Convém ser mais preciso relativamente a este último ponto. Dada qualquer rotação g não trivial (i. e. $g \neq \mathrm{Id}$), existe uma e uma só recta r e um e um só ângulo $\theta \in]0, \pi]$ (medido em radianos, como todos os ângulos cuja amplitude é mencionada neste texto) tal que:

1. $(\forall v \in r) : g.v = v$;

2. se P for o plano perpendicular a r, então $g.P \subset P$ e, além disso, $g|_P$ é uma rotação de ângulo θ, querendo isto dizer que existe alguma base ortonormal de P tal que a matriz de $g|_P$ relativamente a essa base é $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$.

É a recta r que se designa por eixo da rotação g. O ângulo θ vai ser designado por ângulo de rotação de g. Prova-se facilmente que qualquer rotação de ângulo θ é conjugada a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Resulta daqui que

1. as rotações g de ordem 2 são precisamente as de ângulo π e também são precisamente aquelas para as quais há vectores $v \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tais que $g.v = -v$;

2. se g for uma rotação de ângulo θ, então
$$\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}(g) - 1}{2}\right). \tag{1}$$

1 Comutatividade em $SO(3, \mathbf{R})$

Antes de se passar aos problemas propriamente ditos, vai-se estudar uma afirmação que vem em [2], nomeadamente a de que «rotações em torno de eixos diferentes em geral não comutam». De facto, assim é. Um enunciado mais preciso é o seguinte:

Proposição 1 *Duas rotações não triviais em torno de dois eixos distintos comutam se e só se os eixos forem perpendiculares e ambas as rotações forem de ângulo π.*

Sejam g_1 e g_2 duas rotações não triviais de $\mathbf{R}^3$, sejam r_1 e r_2 os respectivos eixos de rotação e suponha-se que $r_1 \neq r_2$.

Se r_1 e r_2 forem perpendiculares e se os ângulos de rotação de g_1 e de g_2 forem iguais a π, sejam v_1 um vector não nulo de r_1, v_2 um vector não nulo de r_2 e v_3 um vector não nulo perpendicular a v_1 e a v_2. Então $g_1(v_1) = v_1$, $g_1(v_2) = -v_2$, $g_1(v_3) = -v_3$, $g_2(v_1) = -v_1$, $g_2(v_2) = v_2$ e $g_2(v_3) = -v_3$. Resulta daqui que tanto $g_1 \circ g_2$ como $g_2 \circ g_1$ enviam v_1, v_2 e v_3 em $-v_1$, $-v_2$ e v_3 respectivamente. Logo, tanto $g_1 \circ g_2$ como $g_2 \circ g_1$ são rotações de ângulo π e o eixo de rotação é a recta que passa por v_3; em particular, $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$.

Suponha-se agora que g_1 e g_2 comutam; vai-se provar que são rotações de ângulo π e que r_1 e r_2 são perpendiculares. Sejam v_1 e v_2 vectores de norma 1 de r_1 e de r_2 respectivamente. Como, por hipótese, $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$, tem-se em particular que

$$g_1\big(g_2(v_1)\big) = g_2\big(g_1(v_1)\big) = g_2(v_1);$$

por outras palavras, $g_2(v_1)$ é um ponto fixo de g_1 e, portanto, $g_2(v_1) \in r_1$. Mas então v_1 e $g_2(v_1)$ são dois vectores de norma 1 de r_1 de onde resulta que

$$g_2(v_1) = \pm v_1 \tag{2}$$

e, portanto, que $(g_2 \circ g_2)(v_1) = v_1$. Então $g_2 \circ g_2$ tem dois pontos fixos linearmente independentes (nomeadamente v_1 e v_2), pelo que $g_2 \circ g_2 = \mathrm{Id}$; posto de outro modo, g_2 tem ordem 2. Mas já foi visto que isto é o mesmo que dizer que o ângulo de rotação de g_2 é π. Um argumento análogo mostra que g_1 é uma rotação de ângulo π.

Para terminar a demonstração, só falta provar que r_1 e r_2 são perpendiculares, o que é o mesmo que afirmar que v_1 e v_2 são perpendiculares. Se se tivesse $g_2(v_1) = v_1$ então, pelo argumento empregue no parágrafo anterior para provar que $g_2 \circ g_2 = \mathrm{Id}$, deduzir-se-ia que $g_2 = \mathrm{Id}$. Mas está-se a supor que $g_2 \neq \mathrm{Id}$, pelo que, por (2), $g_2(v_1) = -v_1$. Posto de outro modo, v_1 é um vector próprio de g_2 com valor próprio -1. Mas o espaço próprio correspondente ao valor próprio -1 não pode ter dimensão superior a 2 (pois $g_2 \neq -\mathrm{Id}$) e já contém o plano perpendicular a v_2, de onde resulta que aquele espaço próprio é precisamente o plano perpendicular a v_2; em particular, v_1 pertence àquele plano, ou seja, v_1 e v_2 são perpendiculares.

2 Grupos de matrizes

A fim de resolver o problema 2, serão empregues alguns resultados elementares referentes a grupos e álgebras de Lie. Os dois primeiros capítulos de [5] contêm as demonstrações de tudo o que for afirmado nesta secção. Quem só estiver interessado na solução do problema 2 não precisa de ler esta secção nem a próxima.

Não será necessário recorrer ao conceito geral de grupo de Lie; no contexto que nos interessa, um *grupo de Lie* não é mais do que um subgrupo fechado do grupo $GL(n,\mathbf{R})$ das matrizes quadradas invertíveis de ordem n com entradas reais, para algum $n \in \mathbf{N}$. Em particular, $SO(3,\mathbf{R})$ os seus subgrupos fechados são grupos de Lie. Dado um grupo de Lie $G \subset GL(n,\mathbf{R})$, o conjunto das matrizes quadradas M de ordem n com entradas reais tais que

$$(\forall t \in \mathbf{R}) : \exp(tM) \in G$$

forma um espaço vectorial real $\mathfrak{g}$. Este espaço vectorial, por ser conexo e dada a continuidade da função exponencial, só depende da componente conexa do elemento neutro de G. Além disso, tem a seguinte propriedade: se $M, N \in \mathfrak{g}$, então $[M,N](= M.N - N.M) \in \mathfrak{g}$. A álgebra $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ designa-se por *álgebra de Lie* do grupo de Lie G; $\dim \mathfrak{g}$ designa-se por *dimensão* do grupo de Lie G e representa-se por $\dim G$.

Não é difícil provar que a álgebra de Lie de $SO(3,\mathbf{R})$, que é geralmente representada por $\mathfrak{so}(3,\mathbf{R})$, é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbf{R} \right\},$$

ou seja, é formada pelas matrizes anti-simétricas de ordem 3 com entradas reais; em particular, $\dim SO(3,\mathbf{R}) = 3$. Convém observar que a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathfrak{so}(3,\mathbf{R}) \\ & (x,y,z) & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

é tal que

$$(\forall v,w \in \mathbf{R}^3) : f(v \times w) = \big[f(v), f(w)\big]. \tag{3}$$

Resulta imediatamente da definição de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G que $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$ e pode-se provar que $\exp(\mathfrak{g})$ é uma vizinhança em G da matriz identidade. Também se pode provar que, dado um grupo de Lie G, se H for um subgrupo de Lie de G conexo e de dimensão 1, então existe algum $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ tal que $H = \exp(\mathbf{R}X)$.

Vejamos o que isto diz acerca dos subgrupos de Lie conexos de dimensão 1 de $SO(3, \mathbf{R})$. Seja então H um tal grupo e seja

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3, \mathbf{R})$$

(com $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) tal que $H = \exp(\mathbf{R}X)$. Prova-se facilmente que existe alguma matriz $M \in SO(3, \mathbf{R})$ tal que

$$M^{-1}.X.M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix},$$

com $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, de onde resulta que

$$M^{-1}.\exp(tX).M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t.r) & -\operatorname{sen}(t.r) \\ 0 & \operatorname{sen}(t.r) & \cos(t.r) \end{pmatrix}$$

e, portanto, que

$$H = \left\{ M. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.M^{-1} \,\middle|\, \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

Isto é o mesmo que dizer que H é o grupo de *todas* as rotações em torno de um eixo (nomeadamente, a recta que contém o ponto (a, b, c), sendo a, b e c respectivamente a primeira, a segunda e a terceira entrada da primeira coluna de M^{-1}).

3 Subgrupos fechados de $SO(3, \mathbf{R})$

Para resolver o problema 2, convém introduzir a seguinte terminologia: um subgrupo G de $SO(3, \mathbf{R})$ dir-se-á *planar* se existir algum plano P em $\mathbf{R}^3$ tal que $(\forall g \in G) : g.P \subset P$.

Teorema 1 *Seja G um subgrupo de $SO(3, \mathbf{R})$. Tem então lugar uma e só uma das seguintes possibilidades:*

1. *G é finito;*

2. *G é infinito e planar;*

3. G é um subgrupo denso de $SO(3, \mathbf{R})$.

É óbvio que se G for finito, então nem é infinito planar nem é denso. Que um subgrupo de $SO(3, \mathbf{R})$ não pode ser simultaneamente planar e denso é algo que resulta do facto de, dado um plano P, o conjunto

$$\{g \in SO(3, \mathbf{R}) \mid g.P \subset P\} \tag{4}$$

ser claramente um fechado de $SO(3, \mathbf{R})$ distinto de $SO(3, \mathbf{R})$; logo, nenhum subgrupo de $SO(3, \mathbf{R})$ contido em (4) poderá ser denso.

Vejamos agora porque é que alguma das possibilidades mencionadas no enunciado do teorema 1 tem que ter necessariamente lugar. Seja G um subgrupo de $SO(3, \mathbf{R})$. Então $\overline{G}$ é um subgrupo fechado de $SO(3, \mathbf{R})$ e, em particular, um grupo de Lie. Seja $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie e vejamos o que se pode dizer sobre a dimensão de $\overline{G}$. Há quatro possibilidades a considerar pois *a priori* $\dim \overline{G}$ poderá tomar o valor 0, 1, 2 ou 3. De facto, como será visto,

- se $\dim \overline{G} = 0$, então G é finito;
- se $\dim \overline{G} = 1$, então G é infinito planar;
- nunca se tem $\dim \overline{G} = 2$;
- se $\dim \overline{G} = 3$, então G é denso.

Se $\dim \overline{G} = 0$, então $\dim \mathfrak{g} = 0$, o que é o mesmo que dizer que $\mathfrak{g} = \{0\}$. Logo, $\exp(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{Id}\}$ mas, como já foi observado, $\exp(\mathfrak{g})$ é uma vizinhança de Id em $\overline{G}$. Logo, Id é um ponto isolado de $\overline{G}$. Resulta daqui que qualquer ponto de $\overline{G}$ é um ponto isolado, pois, se $g \in \overline{G}$, a função

$$\begin{array}{ccc} \overline{G} & \longrightarrow & \overline{G} \\ h & \mapsto & gh \end{array}$$

é um homeomorfismo que envia Id em g. Por outro lado, $\overline{G}$ é compacto, pois é um fechado de $SO(3, \mathbf{R})$, que é compacto. Se G fosse infinito, existiria alguma sucessão injectiva $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de elementos de G, a qual teria alguma subsucessão convergente para algum elemento $g \in \overline{G}$, por $\overline{G}$ ser compacto. Mas então g não seria um ponto isolado de $\overline{G}$ o que, como já foi provado, não é possível. Está então demonstrado que se $\dim \overline{G} = 0$, então $\overline{G}$ é finito e, portanto, que G é finito.

Passemos ao caso em que $\dim \overline{G} = 1$. Seja H a componente conexa da matriz identidade em $\overline{G}$. Já foi visto que, como H é um subrupo de Lie conexo de $SO(3, \mathbf{R})$ de dimensão 1, H é o grupo de todas as rotações em torno de algum eixo r. Se $H = \overline{G}$, então resulta desta observação que $\overline{G}$ é planar; basta considerar o plano P perpendicular a r. Caso $H \subsetneq \overline{G}$, seja $g \in \overline{G} \setminus H$; vai-se provar que $g.P \subset P$. Sabe-se que $g.H.g^{-1}$ é uma parte conexa de $\overline{G}$ que contém Id pelo que, pela definição de H, $g.H.g^{-1} \subset H$. Seja $h \in H$ a rotação de ângulo π em torno de r. O que é que se pode dizer de $g.h.g^{-1}$? Já foi visto que pertence a H, ou seja, que é uma rotação em torno de r. Por outro lado, se θ for o seu ângulo de rotação, então, por (1),

$$\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}\bigl(g.h.g^{-1}\bigr) - 1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}(h) - 1}{2}\right) = \arccos(-1) = \pi.$$

Mas h é a única rotação de H de ângulo π, pelo que $g.h.g^{-1} = h$, o que equivale a afirmar que g e h comutam. Logo, a proposição 1 implica que g é uma rotação de ângulo π em torno de uma recta perpendicular a r. Uma tal recta está necessariamente contida em P e, como a rotação é de ângulo π, $g.P \subset P$. Isto conclui a demonstração de que $\overline{G}$ é um grupo planar infinito e decorre daí que G também tem que o ser.

Vejamos agora que não se pode ter $\dim \overline{G} = 2$. Se tal fosse possível, então $\dim \mathfrak{g} = 2$ e, portanto, se M e N fossem elementos linearmente independentes de $\mathfrak{g}$, $\{M, N\}$ seria uma base de $\mathfrak{g}$, pelo que $[M, N]$ seria combinação linear de M e de N. Mas isso não é possível pois, por (3), isso é o mesmo que afirmar que é possível encontrar dois vectores linearmente independentes $v, w \in \mathbf{R}^3$ tais $v \times w$ seja combinação linear de v e de w.

Finalmente, falta ver que $\dim \overline{G} = 3$ implica que $\overline{G} = SO(3, \mathbf{R})$, ou seja, que G é denso em $SO(3, \mathbf{R})$. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de $\overline{G}$. Então

$$\dim \overline{G} = 3 \iff \dim \mathfrak{g} = 3 \iff \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3, \mathbf{R}).$$

Resulta daqui que $\overline{G} \supset \exp\bigl(\mathfrak{so}(3, \mathbf{R})\bigr)$. Mas $\exp\bigl(\mathfrak{so}(3, \mathbf{R})\bigr) = SO(3, \mathbf{R})$, pois, dado um elemento g de $SO(3, \mathbf{R})$, se $h \in SO(3, \mathbf{R})$ e $\theta \in \mathbf{R}$ forem tais que

$$h^{-1}.g.h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

então

$$g = h.\exp\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix}.h^{-1} = \exp\left(h.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix}.h^{-1}\right).$$

Observe-se que com um pequeno esforço extra se pode obter do que foi feito na demonstração anterior a classificação dos subgrupos fechados infinitos de $SO(3, \mathbf{R})$ (à qual [1] faz referência). De facto, se G for um tal grupo, então, pelo teorema 1, G é um grupo planar infinito ou $G = SO(3, \mathbf{R})$. No caso de G ser planar infinito, foi visto que ou G é o grupo de todas as rotações em torno de algum eixo ou que G contém todas as rotações em torno de algum eixo r e, além disso, G também contém algumas rotações de ângulo π em torno de alguma recta contida no plano perpendicular a r. Mas se estivermos neste último caso, se H for o grupo das rotações em torno de r e se g for uma rotação de ângulo π em torno de uma recta perpendicular a r, não é difícil provar que gH é o conjunto de todas as rotações de ângulo π em torno de alguma recta perpendicular a r. Logo, só há dois tipos de subgrupos fechados de $SO(3, \mathbf{R})$ que são simultaneamente planares e infinitos:

1. os grupos de todas as rotações em torno de alguma recta fixa;
2. os grupos formados por todas as rotações em torno de alguma recta fixa r bem como por todas as rotações de ângulo π em torno de cada recta perpendicular a r.

Quaisquer dois grupos do primeiro (respectivamente segundo) tipo são conjugados entre si e isomorfos a $SO(2, \mathbf{R})$ (resp. $O(2, \mathbf{R})$).

4 Resolução dos problemas

4.1 Finito versus denso

Sejam então g_1 e g_2 duas rotações de ordem finita e superior a 1 em torno de dois eixos r_1 e r_2. Vamos ver que $\langle g_1, g_2 \rangle$ é finito ou é denso. Se $r_1 = r_2$, trata-se de um grupo finito. De facto, o problema é claramente equivalente ao seguinte: dadas duas rotações de ordem finita do plano $\mathbf{R}^2$, quando é que geram um grupo finito? Não é difícil provar que a ordem do grupo gerado pelas duas rotações é o menor múltiplo comum das ordens de g_1 e de g_2.

Suponha-se agora que $r_1 \neq r_2$. Vejamos o que se passa quando r_1 e r_2 são perpendiculares e alguma das rotações (g_1, digamos) é de ângulo π. Vamos provar que $g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2^{-1}$. Para cada $v \in r_2$, $g_1(v) = -v$ (pois $r_2 \perp r_1$) e, portanto,

$$(\forall v \in r_2) : \left(g_1 g_2 g_1^{-1}\right)(v) = (g_1 g_2)(-v) = g_1(-v) = v.$$

Logo, como $g_1 g_2 g_1^{-1} \neq \mathrm{Id}$, $g_1 g_2 g_1^{-1}$ é uma rotação em torno de r_2. Se θ for o ângulo de rotação de g_2 então, por (1),

$$\theta = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}(g_2) - 1}{2}\right) = \arccos\left(\frac{\operatorname{tr}\left(g_1 g_2 g_1^{-1}\right) - 1}{2}\right);$$

por outras palavras, g_2 e $g_1 g_2 g_1^{-1}$ têm os mesmos eixos e os mesmos ângulos de rotação, pelo que são iguais ou são inversas uma da outra. Caso o ângulo de rotação de g_2 seja π, então g_1 e g_2 comutam (pela proposição 1), o que é o mesmo que dizer que $g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2 = g_2^{-1}$. Caso contrário, então (novamente pela proposição 1) g_1 e g_2 não comutam, o que exclui a possibilidade de se ter $g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2$. Logo, tem-se necessariamente $g_1 g_2 g_1^{-1} = g_2^{-1}$. Mas sabe-se que, a menos de isomorfismo, só há um grupo gerado por dois elementos a e b tais que $\operatorname{ord}(a) = n \in \mathbf{N}$, $\operatorname{ord}(b) = 2$ e $bab^{-1} = a^{-1}$, nomeadamente o grupo diedral D_n, cuja ordem é $2n$ e, em particular, é finita. Está então provado que, neste caso, $\langle g_1, g_2 \rangle$ é um grupo finito.

Falta ver o que se passa supondo que $r_1 \neq r_2$ e que, caso sejam perpendiculares, ambas as rotações g_1 e g_2 tenham ângulo de rotação diferente de π. Neste caso, o único plano P tal que $g_1.P \subset P$ é o plano perpendicular a r_1 (caso o ângulo de rotação de g_1 fosse π haveria ainda todos os planos perpendiculares a esse) e o mesmo se aplica a g_2. Então, como $r_1 \neq r_2$, deduz-se que $\langle g_1, g_2 \rangle$ não é um grupo planar. Logo, pelo teorema 1, ou é finito ou é denso. Está então respondida pela afirmativa a pergunta do problema 2.

4.2 Grupos finitos gerados por duas rotações

Passemos finalmente ao problema 1: quando é que $\langle g_1, g_2 \rangle$ é finito? Para tal, é necessário recorrer-se à classificação dos grupos finitos de rotações do espaço (veja-se [3, §20] ou [4, §17.2]). Esta lista consiste em:

1. os grupos C_n gerados por uma rotação de ordem finita $n \in \mathbf{N}$;
2. os grupos D_n gerados por uma rotação g de ordem finita $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ e por uma rotação de ângulo π cujo eixo de rotação seja perpendicular ao de g;
3. os grupos T de rotações que preservam um tetraedro regular centrado na origem;
4. os grupos C de rotações que preservam um cubo centrado na origem;
5. os grupos D de rotações que preservam um dodecaedro regular centrado na origem.

Além disso, quaisquer dois subgrupos desta lista que estejam na mesma categoria são conjugados um do outro em $SO(3, \mathbf{R})$.

A lista anterior poderá parecer incompleta. Já que se fala em tetraedro regular, em cubo e em dodecaedro regular, não faltarão também o octaedro regular e o icosaedro regular? De facto não, pois os centros das faces de um cubo formam os vértices de um octaedro regular e, portanto, uma rotação que preserve o cubo também preserva aquele tetraedro regular. Reciprocamente, como os centros das faces de um octaedro regular formam os vértices de um cubo, uma rotação que preserva o tetraedro regular também preserva aquele cubo. Tem-se o mesmo tipo de dualidade entre o dodecaedro regular e o icosaedro regular.

Para ver quando é que $\langle g_1, g_2 \rangle$ é finito, basta ver (como em [1]) quais os casos em que os grupos acima descritos contêm rotações em torno de dois eixos distintos. É claro que isso acontece com todos excepto com os grupos cíclicos C_n. Por outro lado, basta, por uma questão de simetria, que se procurem somente os pares (g_1, g_2) de rotações para os quais $\operatorname{ord}(g_1) \leqslant \operatorname{ord}(g_2)$.

Comecemos por ver o caso dos grupos diedrais D_n. É claro que se dois elementos $g_1, g_2 \in D_n$ forem rotações em torno de dois eixos distintos, então esses eixos são ortogonais e o ângulo de rotação de g_1 ou de g_2 é igual a π. Está então visto que a ordem de $\langle g_1, g_2 \rangle$ é finita sempre que $\operatorname{ord}(g_1) = 2$ e que os eixos de rotação de g_1 e de g_2 são ortogonais; neste caso, $\operatorname{ord}\langle g_1, g_2 \rangle = 2 \operatorname{ord}(g_2)$.

Antes de se prosseguir convém, para evitar ambiguidades, fixar que, dadas duas rectas r e r', se vai designar por ângulo entre as duas rectas o ângulo de menor amplitude da forma $\angle vOv'$, onde O é a origem, $v \in r \setminus \{O\}$ e $v' \in r' \setminus \{O\}$. Em geral (mais precisamente, quando r e r' nem coincidem nem são perpendiculares) os ângulos do tipo $\angle vOv'$ têm duas amplitudes possíveis, uma das quais é superior a $\pi/2$ e a outra é inferior; está-se então a convencionar que é a menor das duas que se designa por ângulo entre r e r'.

O grupo das rotações de um tetraedro regular contém dois tipos de rotações não triviais: de ordem 2 em torno dos eixos que unem os pontos médios de pares de arestas disjuntas e de ordem 3 em torno dos eixos que unem um vértice ao ponto médio da face oposta. Se θ for o ângulo entre dois eixos de rotação, a lista completa das possibilidades é:

$\operatorname{ord}(g_1) = \operatorname{ord}(g_2) = 2$: $\theta = \frac{\pi}{2}$;

$\operatorname{ord}(g_1) = 2$ e $\operatorname{ord}(g_2) = 3$: $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$;

$\operatorname{ord}(g_1) = \operatorname{ord}(g_2) = 3$: $\cos\theta = \frac{1}{3}\cdot$

O grupo das rotações de um cubo contém quatro tipos de rotações não triviais: de ordem 2 em torno do eixo que une o centro de uma aresta ao centro da aresta oposta bem como do eixo que une o centro de uma face ao centro da face oposta, de ordem 3 em trono do eixo que une um vértice ao vértice oposto e de ordem 4 em torno do eixo que une o centro de uma face ao centro da face oposta. As possibilidades são:

$\operatorname{ord}(g_1) = \operatorname{ord}(g_2) = 2$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\cos\theta = \frac{1}{2}$;

$\operatorname{ord}(g_1) = 2$ e $\operatorname{ord}(g_2) = 3$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$;

$\operatorname{ord}(g_1) = 2$ e $\operatorname{ord}(g_2) = 4$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{\pi}{4}$;

$\operatorname{ord}(g_1) = \operatorname{ord}(g_2) = 3$: $\cos\theta = \frac{1}{3}$;

$\operatorname{ord}(g_1) = 3$ e $\operatorname{ord}(g_2) = 4$: $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$;

$\operatorname{ord}(g_1) = \operatorname{ord}(g_2) = 4$: $\theta = \frac{\pi}{2}\cdot$

Antes de se passar ao caso do dodecaedro, é interessante observar que, tanto no caso das rotações de um tetraedro regular como no caso das rotações de um cubo, surge a possibilidade de haver duas rotações de ordem 3 em torno de eixos que formam um ângulo θ tal que $\cos\theta = 1/3$, bem como a possibilidade de haver uma rotação de ordem 2 e uma rotação de ordem 3 em torno de eixos que formam um ângulo θ tal que $\cos\theta = \sqrt{1/3}$. Esta coincidência tem uma explicação geométrica simples, que se baseia no facto de que se V é o conjunto dos vértices de um cubo, então há uma e uma só maneira de obter V como reunião de dois subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 de modo a que nenhum V_i ($i \in \{1, 2\}$) contenha dois vértices adjacentes (i. e. que sejam extremidades de uma mesma aresta). Então tanto V_1 como V_2 são os conjuntos dos vértices de um tetraedro regular centrado no centro do cubo de que se partiu; veja-se na figura 1 o cubo e um desses tetraedros. Acontece que qualquer rotação de ordem 3 em torno de uma recta que une pares de vértices opostos de um cubo também é uma rotação de ordem 3 em torno de uma recta que une um dos vértices de V_i ($i \in \{1, 2\}$) ao centro da face oposta e que qualquer rotação de ordem 2 em torno da recta que une os centros de faces opostas do cubo também é uma rotação de ordem 2 em torno de uma recta que une os pontos médios de arestas não adjacentes de ambos os tetraedros.

Finalmente, o grupo das rotações do dodecaedro contém três tipos de rotações não triviais: de ordem 2 em torno do eixo que une o centro de uma aresta ao centro da aresta oposta, de ordem 3 em trono do eixo que une um vértice ao vértice oposto e de ordem 5 em torno do eixo que une o centro de uma face ao centro da face oposta. As possibilidades são:

$\operatorname{ord}(g_1) = \operatorname{ord}(g_2) = 2$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = \frac{2\pi}{5}$ ou $\theta = \frac{\pi}{5}$;

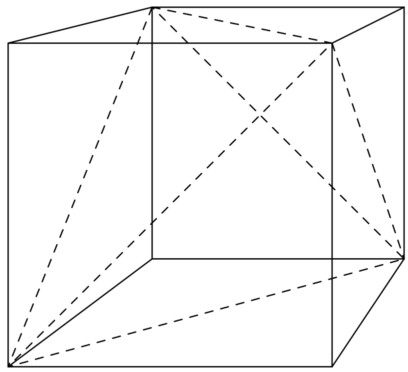

Figura 1: Tetraedro formado por quatro vértices não adjuntos de um cubo

$\mathrm{ord}(g_1) = 2$ e $\mathrm{ord}(g_2) = 3$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{6}}$;

$\mathrm{ord}(g_1) = 2$ e $\mathrm{ord}(g_2) = 5$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}}$;

$\mathrm{ord}(g_1) = \mathrm{ord}(g_2) = 3$: $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ou $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

$\mathrm{ord}(g_1) = 3$ e $\mathrm{ord}(g_2) = 5$: $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{15}}$;

$\mathrm{ord}(g_1) = \mathrm{ord}(g_2) = 5$: $\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}}$ ·

Em todos os pares de rotações que foram obtidos tem-se $\mathrm{ord}(g_1), \mathrm{ord}(g_2) \leqslant 5$, excepto no caso dos grupos diedrais, caso esse em que $\mathrm{ord}(g_1) = 2$. Logo, está demonstrada a

Proposição 2 *Para que duas rotações $g_1, g_2 \in SO(3, \mathbf{R})$ gerem um subgrupo denso de $SO(3, \mathbf{R})$, é condição suficiente que uma delas tenha ordem superior a 2 e que a outra tenha ordem superior a 5.*

5 Ângulos «bonitos»

Se g_1 e g_2 são duas rotações não triviais em torno de dois eixos distintos r_1 e r_2, já se viu quais são os valores possíveis para o ângulo θ entre r_1 e r_2 quando g_1 e g_2 geram um grupo finito. De facto, com excepção dos casos em que θ toma um dos valores $\pi/2$, $2\pi/5$, $\pi/3$, $\pi/4$ ou $\pi/5$, aquilo que foi visto na secção anterior foi o valor de $\cos\theta$ e não o valor de θ em si. Por exemplo, no caso em que g_1 e g_2 são duas rotações distintas de ordem 3 que preservam um tetraedro regular, foi afirmado que $\cos\theta = 1/3$. Efectivamente, à primeira vista parece que este θ não poderá ser um múltiplo racional de π. Mais geralmente, nenhum dos valores de $\cos\theta$ que se podem ver na secção anterior parece corresponder a um ângulo θ que sejam um múltiplo racional de π. Mas é claro que isto não prova nada porque tem-se, por exemplo

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

e *a priori* poderia parecer que o membro da direita da iqualdade anterior não é o cosseno de um ângulo que seja um múltiplo racional de π.

De facto, $\pi/2$, $2\pi/5$, $\pi/3$, $\pi/4$ e $\pi/5$ são efectivamente os únicos ângulos que surgem no parágrafo anterior que são múltiplos racionais de π. Vejamos como se pode provar isso num dos casos mais complicados, nomeadamente quando g_1 e g_2 são rotações de ordens 3 e 5. Tem-se nesse caso

$$\begin{aligned}\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{15}} &\Longrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{5}}{15}\\ &\Longrightarrow \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = -\frac{1}{3} \pm \frac{4\sqrt{5}}{15}\\ &\Longrightarrow 2\cos(2\theta) = -\frac{2}{3} \pm \frac{8\sqrt{5}}{15}\cdot\end{aligned}$$

Mas $2\cos(2\theta) = \exp(2\theta i) + \exp(-2\theta i)$ e, caso θ fosse um múltiplo racional de π, os números $\exp(\pm 2\theta i)$ seriam ambos inteiros algébricos e, portanto, $2\cos(2\theta)$ seria um inteiro algébrico. Ora $-2/3 \pm 8\sqrt{5}/15$ não é um inteiro algébrico, pois é raiz do polinómio $45x^2 + 60x - 44$. O mesmo argumento aplica-se aos outros valores de $\cos\theta$ mencionados na secção anterior.

Referências

[1] S. Abreu; S. Castro; I. Labouriau, *Flores ou ervas daninhas?*, Bol. Soc. Port. Mat. **53** (2005), 23–34

[2] J. Buescu, *O norte e os seus problemas*, Bol. Soc. Port. Mat. **38** (1998), 123–127

[3] B. A. Dubrovin; A. T. Fomenko; S. P. Novikov, «Modern Geometry — Methods and applications. Part I: The Geometry of surfaces, transformation groups, and fields (2$^{\text{nd}}$ edition)», Springer-Verlag, Nova Iorque, 1992

[4] G. E. Martin, «Transformation Geometry: An introduction to Symmetry», Springer-Verlag, Nova Iorque, 1982

[5] W. Rossmann, «Lie groups: An introduction through linear groups», Oxford University Press, Oxford, 2004