Análise Complexa – Resolução de alguns exercícios do capítulo 2

Exercício nº1

Em todas as alíneas, o estudo da derivabilidade de f num ponto $a \in \mathbb{C}$ será feito a partir da definição de derivada. Sempre que f não for derivável em a, isto será provado do seguinte modo: considera-se uma função $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z) = f(a) + \varphi(z).(z - a)$$

e definem-se dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{C}$ tais que a pertence à aderência de ambos; em seguida mostra-se que

$$\lim_{z \to a, z \in A} \varphi(z) \neq \lim_{z \to a, z \in B} \varphi(z),$$

de onde se conclui que φ não pode ser contínua no ponto a.

1. Seja $a \in \mathbb{C}$; quer-se saber se existe alguma função $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua em a tal que

$$\begin{aligned}
&(\forall z \in \mathbb{C}) : z^3 + z^2 = a^3 + a^2 + \varphi(z).(z - a) \iff \\
&\iff (\forall z \in \mathbb{C}) : z^3 - a^3 + z^2 - a^2 = \varphi(z).(z - a) \\
&\iff (\forall z \in \mathbb{C}) : (z - a).(z^2 + az + a^2) + (z - a).(z + a) = \varphi(z).(z - a).
\end{aligned}$$

Basta então definir $\varphi(z) = z^2 + az + a^2 + z + a$. Está então provado que f é derivável em a e tem-se $f'(a) = \varphi(a) = 3a^2 + 2a$.

2. Sejam $a \in \mathbb{C}$ e φ uma função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ tal que

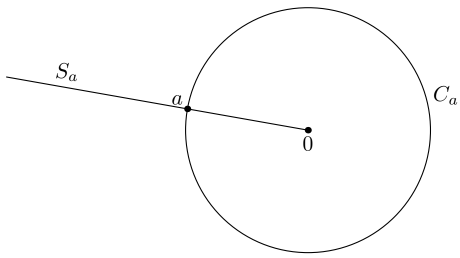
$$(\forall z \in \mathbb{C}) : |z| - |a| = \varphi(z).(z - a),$$

ou seja, tal que

$$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}) : \varphi(z) = \frac{|z| - |a|}{z - a} \cdot$$

Comece-se por ver o que acontece quando $a \in \mathbb{C}^*$. Sejam C_a a circunferência de centro 0 que passa por a (ou seja, $C_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| = |a|\}$) e S_a a semi-recta com origem no ponto 0 que passa por a (ou seja, $S_a = \mathbb{R}_+ a$); veja-se a figura ao lado. Se $z \in C_a \setminus \{a\}$, então $\varphi(z) = 0$; logo,

$$\lim_{z \to a, z \in C_a \setminus \{a\}} \varphi(z) = 0.$$



Por outro lado, se $z \in S_a$, então $z/a \in \mathbb{R}_+$ pelo que, caso $z \neq a$, se tem

$$\varphi(z) = \frac{|z| - |a|}{z - a} = \frac{|a|}{a} \cdot \frac{|z/a| - 1}{z/a - 1} = \frac{|a|}{a} \cdot$$

Mas então $\lim_{z \to a, z \in S_a \setminus \{a\}} \varphi(z) = |a|/a$.

Falta estudar a derivabilidade no ponto 0. Seja φ uma função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ tal que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : |z| = \varphi(z).z.$$

Deduz-se desta relação que

$$(\forall z \in \mathbb{R}_+^*) : \varphi(z) = 1 \text{ e } (\forall z \in \mathbb{R}_-^*) : \varphi(z) = -1,$$

pelo que

$$\lim_{z\to 0, z\in\mathbb{R}_+^*} \varphi(z) = 1 \text{ e } \lim_{z\to 0, z\in\mathbb{R}_-^*} \varphi(z) = -1.$$

3. Tal como na resolução da alínea anterior, se $a \in \mathbb{C}^*$ e se existir $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : |z|^2 - |a|^2 = \varphi(z).(z-a),$$

então

$$\lim_{z\to a, z\in C_a\setminus\{a\}} \varphi(z) = 0.$$

Por outro lado, se $z \in S_a \setminus \{a\}$, então $z/a \in \mathbb{R}_+$ pelo que, caso $z \neq a$, se tem

$$\varphi(z) = \frac{|z|^2 - |a|^2}{z-a} = \frac{|a|^2}{a} \cdot \frac{|z/a|^2 - 1}{z-a} = \overline{a}\frac{(z/a-1).(z/a+1)}{z/a-1} = \overline{a}\left(\frac{z}{a}+1\right).$$

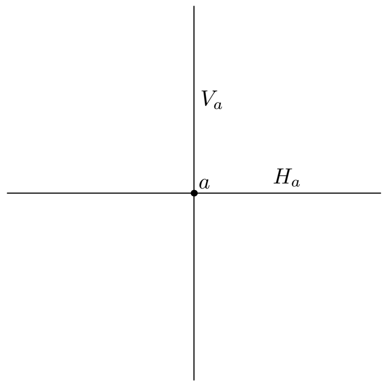
Consequentemente, $\lim_{z\to a, z\in S_a\setminus\{a\}} \varphi(z) = 2\overline{a}$.

Por outro lado, a função f é derivável no ponto 0, pois

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z) = |z|^2 = z.\overline{z},$$

e a conjugação é uma função contínua. Além disso, $f'(0) = \overline{0} = 0$.

4. Para estudar a derivabilidade da função Re num ponto $a \in \mathbb{C}$ usa-se o mesmo tipo de ideias que nas alíneas anteriores, mas desta vez com os conjuntos $H_a = \{z \in \mathbb{Z} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} a\}$ e $V_a = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} a\}$; veja-se a figura ao lado. Um cálculo simples revela que se φ for uma função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ tal que



$$(\forall z \in \mathbb{C}) : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a) + \varphi(z).(z-a),$$

então $\varphi(V_a \setminus \{a\}) = \{0\}$. Por outro lado, se $z \in H_a \setminus \{a\}$, então

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(a)}{z-a} = \frac{\operatorname{Re}(z-a)}{\operatorname{Re}(z-a)} = 1,$$

pelo que

$$\lim_{z\to a, z\in H_a\setminus\{a\}} \varphi(z) = 1 \text{ e } \lim_{z\to a, z\in V_a\setminus\{a\}} \varphi(z) = 0.$$

5. Seja $a \in \mathbb{C}$, sejam H_a e V_a como na alínea anterior e seja φ uma função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ tal que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : |\operatorname{Im} z|^2 = |\operatorname{Im} a|^2 + \varphi(z).(z-a). \tag{1}$$

Então $\varphi(H_a \setminus \{a\}) = \{0\}$, pelo que

$$\lim_{z\to a, z\in H_a\setminus\{a\}} \varphi(z) = 0.$$

Por outro lado, se $z \in V_a \setminus \{a\}$ então

$$\varphi(z) = \frac{|\operatorname{Im} z|^2 - |\operatorname{Im} a|^2}{z-a} = \frac{(\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(a)).(\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(a))}{(\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(a))i} = -(\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(a))i.$$

Consequentemente,

$$\lim_{z\to a, z\in V_a\setminus\{a\}} \varphi(z) = -2\operatorname{Im}(a)i.$$

Está então provado que f não é derivável em a caso $\operatorname{Im} a \neq 0$, ou seja, caso $a \notin \mathbb{R}$. Caso $a \in \mathbb{R}$, então define-se

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \begin{cases} (\operatorname{Im} z)^2/(z-a) & \text{se } z \neq a \\ 0 & \text{se } z = a. \end{cases} \end{array}$$

É então claro que se tem (1) e como

$$(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}) : |\varphi(z) - \varphi(a)| = \left|\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{z-a}\right| = \frac{|\operatorname{Im}(z-a)|^2}{|z-a|} \leq |z-a|,$$

φ é contínua em a. Tem-se então $f'(a) = \varphi(a) = 0$.

Exercício nº4

Seja $a \in \mathbb{C}$. Mostrar que f é derivável em a e que $f'(a) = f(a)$ é mostrar que existe alguma função $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ contínua em a tal que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : f(z) = f(a) + \varphi(z).(z-a)$$

e que $\varphi(a) = f(a)$. Define-se então

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{se } z \neq a \\ f(a) & \text{caso contrário} \end{cases} \end{array}$$

e resta apenas demonstrar que φ é contínua em a. Como, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$,

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z-a} = \frac{f((z-a)+a) - f(a)}{z-a} = \frac{f(z-a).f(a) - f(a)}{z-a} = \frac{f(z-a)-1}{z-a} \cdot f(a)$$

e como $\displaystyle\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$, tem-se

$$\lim_{z \to a} \varphi(z) = f(a) = \varphi(a).$$

Exercício nº8

1. Se $x, y \in \mathbb{R}$, sejam $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+yi) = x^2$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+yi) = xy$. Se, $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(a,b) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(a,b) \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = a \\ 0 = -b \end{cases} \iff a = b = 0.$$

2. Como o conjunto dos pontos do plano que são solução das equações de Cauchy-Riemann é $\{0\}$, o conjunto dos pontos do plano onde f é derivável ou é $\{0\}$ ou é o conjunto vazio[1] pelo que não existe qualquer aberto U nas condições do enunciado.

[1] De facto, uma vez que as derivadas parciais são funções contínuas, o conjunto dos pontos onde f é derivável é $\{0\}$ pelo corolário 2.1.2.

Exercício nº9

Se $x, y \in \mathbb{R}$ forem tais que $x + yi \in U$, então sejam $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+yi)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+yi)$. Então

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) : x + yi \in U \Longrightarrow g(x+yi) = \overline{f(x-yi)} = u(x,-y) - v(x,-y)i.$$

Então, se se definir, $u^*, v^* : U \longrightarrow \mathbb{R}$ por $u^*(x,y) = u(x,-y)$ e $v^*(x,y) = -v(x,-y)$, tem-se

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) : x + yi \in U \Longrightarrow g(x+yi) = u^*(x,y) + v^*(x,y)i.$$

Agora basta observar que se $(a,b) \in U$, então

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,-b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,-b) = \frac{\partial v^*}{\partial y}(a,b)$$

e que

$$\frac{\partial u^*}{\partial y}(a,b) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,-b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a,-b) = -\frac{\partial v^*}{\partial x}(a,b).$$

Exercício nº10

Sejam u e v duas funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e seja, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = u(x,y) + v(x,y)i$. É suficiente para que f seja holomorfa que u e v sejam parcialmente deriváveis em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, que $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ sejam funções contínuas, que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e que $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Para que f satisfaça a primeira condição do enunciado também é preciso que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} f'(x+yi) = 3(x^2 - y^2) - 4y,$$

o que implica que, para alguma função $C_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se tenha:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) : u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 4xy + C_1(y). \tag{2}$$

Por outro lado, para se ter

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3(x^2 - y^2) - 4y,$$

tem-se necessariamente

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) : v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2y^2 + C_2(x), \tag{3}$$

para alguma função $C_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Para que as funções u e v sejam parcialmente deriváveis relativamente a ambas as variáveis e que $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ basta que C_1 e C_2 sejam deriváveis e que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) : -6xy - 4x + {C_1}'(y) = -6xy - {C_2}'(x) \Longleftrightarrow {C_1}'(y) = 4x - {C_2}'(x).$$

Logo, terá que existir algum número $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : {C_1}'(x) = a \text{ e } 4x - {C_2}'(x) = a.$$

Haverá então números reais b e c tais que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : C_1(x) = ax + b \text{ e } C_2(x) = 2x^2 - ax + c. \tag{4}$$

Está então provado que se se definir u e v de modo a ter-se (2), (3) e (4) então a função f é holomorfa e satisfaz a primeira condição do enunciado. Afirmar que também satisfaz a segunda é afirmar que

$$0 = f(1+i) = u(1,1) + v(1,1)i \iff \begin{cases} -6+a+b=0 \\ 2-a+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b=6-a \\ c=a-2. \end{cases}$$

Logo, basta tomar, por exemplo, $a=0$, $b=6$ e $c=-2$ e tem-se então

$$\begin{aligned}(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2) : f(x,y) &= x^3-3xy^2-4xy+6+(3x^2y-y^3-2y^2+2x^2-2)i \\ &= (x+yi)^3+2i(x+yi)^2+6-2i,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\forall z\in\mathbb{C}) : f(z) = z^3+2iz^2+6-2i.$$

Exercício nº11

É claro que a primeira condição implica todas as outras.

Para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, sejam $u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy)$ e $v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$. Se u for constante, então $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y \equiv 0$. Deduz-se das equações de Cauchy-Riemann que $\partial v/\partial x = \partial v/\partial y \equiv 0$, pelo que $f' \equiv 0$ e, portanto, f é constante. De maneira análoga, mostra-se que se v for constante, então f é constante. Está então visto que as três primeiras condições são equivalentes.

Se $|f|\equiv 0$, é claro que $f\equiv 0$. Por outro lado, se $|f|\equiv k$ para algum $k\in\mathbb{R}_+^*$, sabe-se então que $u^2+v^2=k^2$, de onde se deduz que

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\[2ex] 2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \\[2ex] u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$$

pelas equações de Cauchy-Riemann. Para cada $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tem-se então:

$$\begin{pmatrix} u(a,b) & -v(a,b) \\[2ex] v(a,b) & u(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(a,b) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} = (0,0).$$

Visto que o determinante da matriz é $(u(a,b))^2+(v(a,b))^2=k^2\neq 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)=0$. Como isto ocorre para qualquer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, u é constante, ou seja $\operatorname{Re} f$ é constante.

Se houver $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tal que $a\operatorname{Re} f + b\operatorname{Im} f$ seja constante, então a função $\operatorname{Re}((a-bi)f)$ é constante. Já foi visto que então $(a-bi)f$ é constante, pelo que f é constante.

Exercício nº12

1. Se $z\in\mathbb{H}$, então

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-i}{z+i}\right|<1 &\iff |z-i|<|z+i| \\ &\iff |z-i|^2<|z+i|^2 \\ &\iff |z|^2-1+2\operatorname{Re}(zi)<|z|^2-1-2\operatorname{Re}(zi) \text{ (pelo exercício 3.10 do capítulo 1)} \\ &\iff |z|^2-1-2\operatorname{Im} z<|z|^2-1+2\operatorname{Im} z \\ &\iff \operatorname{Im} z>0.\end{aligned}$$

2. Uma vez que o domínio de f é um aberto, para mostrar que f é holomorfa basta mostrar que é derivável, mas isto é óbvio pois o quociente de duas funções deriváveis é derivável.

Se $z \in D(0,1)$ e se $w \in \mathbb{H}$ for tal que $f(w) = z$, então

$$f(w) = z \iff \frac{w-i}{w+i} = z \iff w(1-z) = i(1+z) \iff w = i\frac{1-z}{1+z} \cdot \tag{5}$$

Isto sugere que se considere a função

$$\begin{array}{rccc} g: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & z & \mapsto & i\dfrac{1-z}{1+z} \cdot \end{array}$$

É preciso começar por ver que esta definição faz sentido, ou seja, que se $z \in D(0,1)$, então $g(z) \in \mathbb{H}$. De facto, se $z \in D(0,1)$, então

$$\operatorname{Im}\left(i\frac{1-z}{1+z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(1-z).\overline{(1+z)}}{|1+z|^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1-|z|^2-z+\overline{z}}{|1-z|^2}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},$$

pois $-z+\overline{z} = -2i\operatorname{Im} z$; como $|z| < 1$, está provado que $\operatorname{Im} g(z) > 0$. Deduz-se de (5) que $f \circ g = \mathrm{Id}_{D(0,1)}$. Finalmente, um cálculo simples mostra que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{H}}$, pelo que $g = f^{-1}$. Tal como f, g é obviamente holomorfa.

Exercício nº15

Se $|r|, |s| < 1$, então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} s^n$ são absolutamente convergentes, pelo que, pelo teorema 2.2.5, as famílias $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ são somáveis. Logo, a família $(r^p.s^q)_{p,q\in\mathbb{N}}$ é somável, pelo teorema 2.2.4.

Se $r = 0$ ou $s = 0$, é trivial que a família $(r^p.s^q)_{p,q\in\mathbb{N}}$ é somável.

Finalmente, nos restantes casos a $(r^p.s^q)_{p,q\in\mathbb{N}}$ não é somável pois se o fosse então as famílias $(r^p.s)_{p\in\mathbb{N}}$ e $(r.s^q)_{q\in\mathbb{N}}$ seriam somáveis, pelo corolário 2.2.2. Logo, novamente pelo teorema 2.2.5 e porque $r, s \neq 0$, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} s^n$ seriam absolutamente convergentes. Mas pelo menos uma delas não o é, pois $|r| \geq 1$ ou $|s| \geq 1$.

Exercício nº18

Suponha-se que a família $(z_i)_{i\in I}$ é somável com soma s e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Existe então alguma parte finita J de I tal que

$$(\forall K \in \mathcal{P}_f(I)) : J \subset K \Longrightarrow \left| s - \sum_{i\in K} z_i \right| < \varepsilon.$$

Mas então, se $K \in \mathcal{P}_f(I))$ for tal que $J \subset K$, tem-se

$$\left| \operatorname{Re}\left(s - \sum_{i\in K} z_i \right) \right| < \varepsilon \iff \left| \operatorname{Re}(s) - \sum_{i\in K} \operatorname{Re}(z_i) \right| < \varepsilon.$$

Logo, a família $(\operatorname{Re} z_i)_{i\in I}$ é somável com soma $\operatorname{Re} s$ e o mesmo argumento prova que a família $(\operatorname{Im} z_i)_{i\in I}$ é somável com soma $\operatorname{Im} s$. Isto prova não só que a primeira condição implica a segunda como prova que, caso ambas se verifiquem,

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{i\in I} z_i\right) = \sum_{i\in I} \operatorname{Re} z_i \text{ e } \operatorname{Im}\left(\sum_{i\in I} z_i\right) = \sum_{i\in I} \operatorname{Im} z_i.$$

Caso as famílias $(\operatorname{Re} z_j)_{j\in I}$ e $(\operatorname{Im} z_j)_{j\in I}$ sejam somáveis com somas x e y respectivamente então, aplicando ambas as alíneas da proposição 2.2.3, deduz-se que a família $(x_j + y_j i)_{j\in I}(= (z_j)_{j\in I})$ é somável com soma $x + yi$.

Exercício nº20

Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$. Começa-se por escrever $\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ sob a forma $A/(1-z^n) - A/(1-z^{n+1})$. Um cálculo simples revela que se pode tomar $A = 1/(1-z)$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/(1-z)}{1-z^n} - \frac{1/(1-z)}{1-z^{n+1}} \\ &= \frac{1}{(1-z)^2} - \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1/(1-z)}{1-z^n} \\ &= \begin{cases} 1/(1-z)^2 - 1/(1-z) & \text{se } |z|<1 \\ 1/(1-z)^2 & \text{se } |z|>1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} z/(1-z)^2 & \text{se } |z|<1 \\ 1/(1-z)^2 & \text{se } |z|>1. \end{cases}\end{aligned}$$

Exercício nº22

As séries das três primeiras alíneas são séries de números reais maiores do que 0, pelo que não há distinção entre convergência e convergênca absoluta.

1. Se $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2^n-1}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n-1}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2\sqrt[n]{1-2^{-n}}}\cdot$$

Então $\lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n/(2^n-1)} = 1/2 < 1$, pelo que a série converge.

2. Se $m = 1$, tem-se a série harmónica, que diverge. Nos restante casos, a série converge, pelo critério do integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^m}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\right]_{x=1}^{x=M} = \frac{1}{m-1}\cdot$$

3. Como

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1/\sqrt{n^2+1}}{1/n} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = 1$$

e como a série harmónica diverge, a série dada diverge, pelo critério da comparação.

4. A série não converge absolutamente, pelo critério da comparação:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[m]{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt[m]{n}} \geq \frac{1}{n}\cdot$$

No entanto, a série converge (seja qual for $m \in \mathbb{N}$), pelo critério de Leibniz.

5. A série não converge absolutamente, pelo critério da comparação:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \left|\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{n}\right| = \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \geq \frac{1}{n}\cdot$$

No entanto, a série converge, pelo critério de Leibniz e porque, pelo exercício 21.4, a sucessão é $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\geq 3}$ é decrescente.

6. A série converge absolutamente pelo critério da raiz:

$$\limsup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sqrt[n]{\left|\frac{1+i}{2^n}\right|} = \lim_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{2}\cdot$$

7. Se $z = 0$, é claro que a série converge e converge absolutamente. Caso contrário, como se tem

$$\limsup_{n\in\mathbb{Z}_+}\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \lim_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{|z|}{n+1} = 0,$$

também se conclui que a série converge absolutamente e, em particular, que converge.

8. Para cada $z \in \mathbb{C}$ e cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n^m z^n} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n}^m |z| = |z|,$$

pelo que a série em questão converge absolutamente (respectivamente diverge) quando $|z| < 1$ (resp. $|z| > 1$). A série também diverge quando $|z| = 1$ (seja qual for $m \in \mathbb{N}$), pois nesse caso $(\forall n \in \mathbb{N}) : |n^m z^n| = n^m \geq 1$, pelo que a sucessão $(n^m z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para 0.

9. Se $z \in \mathbb{C}$,

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{z}{n}\right)^n\right|} = \lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{|z|}{n} = 0,$$

pelo que a série converge absolutamente e, em particular, converge.

10. Para cada $z \in \mathbb{C}$ e cada $m \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{n}\right|} = \lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{|z|}{\sqrt[n]{n}} = |z|,$$

pelo que a série em questão converge absolutamente (respectivamente diverge) quando $|z| < 1$ (resp. $|z| > 1$). A série também diverge quando $z = 1$, pois trata-se da série harmónica. Nos restantes casos (ou seja, se $|z| = 1$ e $z \neq 1$) a série não converge absolutamente (pois $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$), mas é convergente, pelo critério de Dirichlet:

- a sucessão $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de variação limitada, por ser uma sucessão real, monótona e limitada;
- a sucessão $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0;
- a sucessão $\left(\sum_{n=1}^{N} z^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ é limitada, pois

$$(\forall N \in \mathbb{N}) : \left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|\frac{z - z^{N+1}}{1-z}\right| \leq \frac{2}{|1-z|}\,.$$

11. Os números $z \in \mathbb{C}$ para os quais esta série é convergente (respectivamente absolutamente convergente) são os mesmos para os quais a série da alínea anterior é convergente (resp. absolutamente convergente), pelo critério de Abel. De facto, como a sucessão $\left(\sqrt{1+1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada (pois é real, monótona e limitada), sempre que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ de números complexos for convergente, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+1/n}z_n$ também o é e, reciprocamente, se a série $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1+1/n}z_n$ for convergente então, como a sucessão $\left(1/\sqrt{1+1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada (pois, mais uma vez, trata-se de uma sucessão real, monótona e limitada), a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge.

12. A série em questão não é absolutamente convergente pois tem-se

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{1/n}{1/|z-n|} = \lim_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{z}{n} - 1\right| = 1;$$

logo, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|z-n|$ fosse convergente, então a série harmónica também o seria. Por outro lado, deduz-se do critério de Dirichlet que a série é convergente, pois:

1. a sucessão das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ só toma os valores -1 e 0, pelo que é limitada;
2. a sucessão $\left(\dfrac{1}{z-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0;
3. a sucessão $\left(\dfrac{1}{z-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada, pois tem-se
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{z-n-1}-\frac{1}{z-n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^2+(1-2z)n+z^2-z|}$$
e
$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\frac{1/|n^2+(1-2z)n+z^2-z|}{1/n^2} = 1.$$

Exercício nº23

1. Tem-se, para cada $n\in\mathbb{N}$,
$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}z^k.$$
Logo, se $n\in\mathbb{N}$ e se $k\in\mathbb{Z}_+$ for tal que $k\leq n$, tem-se
$$a_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \frac{n.(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n};$$
naturalmente, $k>n \Longrightarrow a_{n,k}=0$. Consequentemente, se se fixar $k\in\mathbb{Z}_+$ então a sucessão $(a_{n,k})_{n\geq k}$ pode ser obtida como o produto de $1/k!$ pelo produto de k sucessões crescentes de números reais maiores do que 0 (as sucessões da forma $((n-j)/n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $j\in\{0,1,\ldots,k-1\}$) que convergem para 1, pelo que a sucessão em questão é uma sucessão crescente de números reais maiores do que 0 que converge para $1/k!$.

2. Poder-se-ia pensar que basta fazer
$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\in\mathbb{N}}a_{n,k}z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},$$
mas a segunda igualdade não é óbvia pois, em geral, dois processos de passagem ao limite não comutam.

Seja $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que existe algum número natural p tal que, se $n\in\mathbb{N}$ e $n\geq p$, então
$$\left|\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)-\left(1-\frac{z}{n}\right)^n\right|<\varepsilon \Longleftrightarrow \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-a_{n,k}\right)z^k\right|<\varepsilon,$$
e para se ter isto basta que
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-a_{n,k}\right)|z|^k<\varepsilon, \tag{6}$$

uma vez cada sucessão $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e convergente para $1/k!$ e, consequentemente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{Z}_+) : \frac{1}{k!} - a_{n,k} \in \mathbb{R}_+.$$

Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2};$$

então tem-se

$$\sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - a_{n,k}\right) |z|^k < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{7}$$

pois cada número da forma $a_{n,k}$ é maior ou igual a 0, pelo que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{Z}_+) : \frac{1}{k!} - a_{n,k} \leq \frac{1}{k!}.$$

Por outro lado, tem-se

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k}|z|^k = \sum_{k=0}^{N-1} \lim_{n\in\mathbb{N}} a_{n,k}|z|^k = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|z|^k}{k!},$$

pelo que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$, então

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{k!} - a_{n,k}\right) |z|^k < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{8}$$

Mas então (6) resulta de (7) e de (8).

Exercício nº24

Se $k = 1$, a família não é somável, pois o conjunto

$$\left\{\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

não é majorado, pelo mesmo motivo pelo qual a série harmónica diverge.

Se $k = 2$, a família também não é somável, pois, para cada $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m+n\leq N} \frac{1}{(m+n)^2} = \sum_{p=2}^{N} \sum_{m+n=p} \frac{1}{(m+n)^2} = \sum_{p=2}^{N} \frac{p-1}{p^2}$$

e $\lim_{N\in\mathbb{N}} \sum_{p=2}^{N} \frac{p-1}{p^2} = +\infty$, visto que a série $\sum_{p=2}^{\infty} \frac{p-1}{p^2}$ diverge.

O facto de a família não ser somável quando $k = 2$ permite dar uma demonstração alternativa do facto de não ser somável quando $k = 1$. Basta atender ao facto de se ter

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{m+n}$$

e ao corolário 2.2.1.

Caso $k > 2$, então a família é somável. Basta ver que se $K \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}^2)$ e se $p \in \mathbb{N}$ for tal que, para cada $(m,n) \in K$, $m + n \leq p$, então

$$\sum_{(m,n)\in K} \frac{1}{(m+n)^k} \leq \sum_{m+n\leq N} \frac{1}{(m+n)^k} = \sum_{p=2}^{N} \sum_{m+n=p} \frac{1}{(m+n)^k} = \sum_{p=2}^{N} \frac{p-1}{p^k} \leq \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p-1}{p^k} \cdot$$

Exercício nº25

O produto de Cauchy da série por si própria é $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$, onde, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt[m]{k}} (-1)^{(n+1-k)+1} \frac{1}{\sqrt[m]{n+1-k}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{k.(n+1-k)}} .$$

Mas, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k.(n+1-k) \le n^2$, pelo que

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{k.(n+1-k)}} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[m]{n^2}} = \frac{n}{\sqrt[m]{n^2}} = n^{1-2/m}.$$

Como $m \ge 2$, $1 - 2/m \ge 1$, pelo que $|c_n| \ge 1$. Como a sucessão geradora não converge para 0, a série $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ diverge.

Exercício nº27

O termo de índice n ($n \in \mathbb{Z}_+$) do produto de Cauchy das duas séries é:

$$\sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!} \frac{w^q}{q!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} z^p w^{n-p} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p w^{n-p} = \frac{(z+w)^n}{n!} .$$

Exercício nº31

No conjunto dado, a série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tem somas parciais uniformemente limitadas, pois

$$\left(\forall z \in \overline{D(0,1)} \setminus D(1,\delta)\right) (\forall n \in \mathbb{Z}_+) : \left| \sum_{k=0}^{n} z^k \right| = \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \le \frac{2}{\delta} .$$

Por outro lado, a sucessão $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão real, monótona e converge para 0. Logo, pelo critério de Dirichlet a série dada é uniformemente convergente.

Exercício nº32

Vai-se aplicar o critério de Dirichlet. Seja K um compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

1. Como, para cada $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \equiv 0$ ou $\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \equiv -1$, a sucessão das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é uniformemente limitada.

2. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $M \ge \max_{z \in K} |z|$. Então, se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $n > M$ e se $z \in K$, tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z-n} - \frac{1}{z-n-1} \right| &= \frac{1}{|z-n|.|z-n-1|} \\ &\ge \frac{1}{(n-|z|)(n+1-|z|)} \\ &\ge \frac{1}{(n-M)(n+1-M)} . \end{aligned}$$

   Como a série

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n-M)(n+1-M)} \tag{9}$$

converge, resulta do teste M de Weierstrass que a série $\sum_{n=M+1}^{\infty}\left|\frac{1}{z-n}-\frac{1}{z-n-1}\right|$ converge uniformemente. A soma da série é uma função limitada, pois é majorada pela soma da série (9). Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{z-n}-\frac{1}{z-n-1}\right|$ também converge uniformemente e a sua soma é uma função limitada pois, como K é um compacto de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, a função

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{M}\left|\frac{1}{z-n}-\frac{1}{z-n-1}\right| \end{array}$$

também é limitada.

3. Se M for como na alínea anterior, então

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall z\in K): n>M \Longrightarrow \left|\frac{1}{z-n}\right| \leq \frac{1}{n-M}\,.$$

Como $\lim_{n\in\mathbb{N}} 1/(n-M)=0$, se se definir, para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{array}{cccc} g_n: & K & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \dfrac{1}{z-n}, \end{array}$$

a sucessão $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a função nula.

Exercício nº35 (alíneas pares)

Em cada alínea o raio de convergência vai ser representado por ρ.

2. Tem-se $\rho=+\infty$, pois $\displaystyle\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\limsup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}=0$.

4. Tem-se $\rho=2$, pois $\displaystyle\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{2^{-n}n}=\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{n}/2=1/2$.

6. Tem-se $\rho=1$, pois $\displaystyle\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{n^{-2}}=\limsup_{n\in\mathbb{N}}(\sqrt[n]{n})^{-2}2=1$.

8. Para cada $n\in\mathbb{N}$, $1\leq\tau(n)\leq n$, pelo que $1\leq\sqrt[n]{\tau(n)}\leq\sqrt[n]{n}$. Logo, $\lim_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{\tau(n)}=1$, de onde resulta que $\rho=1$.

10. Primeira resolução: Tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, onde

$$(\forall n\in\mathbb{N}): a_n=\begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for um quadrado perfeito} \\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Então $\limsup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\in\mathbb{N}} a_n=1$, pelo que $\rho=1$.
Segunda resolução: Para cada $z\in\mathbb{C}^*$, tem-se

$$\lim_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{z^{(n+1)^2}}{z^{n^2}}\right|=\lim_{n\in\mathbb{N}}|z|^{2n+1}=\begin{cases} +\infty & \text{se } |z|>1 \\ 1 & \text{se } |z|=1 \\ 0 & \text{se } |z|<1.\end{cases}$$

Logo, pelo critério do quociente a série diverge se $|z|>1$ e converge absolutamente se $|z|<1$, pelo que $\rho=1$.

Exercício nº39

1. Primeira resolução: Quer-se mostrar que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists p \in \mathbb{Z}_+)(\forall m, n \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \in [0,1]) : m \geq n \geq p \Longrightarrow \left|\sum_{j=n}^{m} a_j x^j\right| < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Visto que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente, pode-se escolher $p \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z}_+) : m \geq n \geq p \Longrightarrow \left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon.$$

Seja $n \geq p$ e, para cada $j \geq n$, seja $S_j = \sum_{k=n}^{j} a_k$. Então, se tomar $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $m \geq n$ e tomar $x \in [0,1]$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=n}^{m} a_j x^j\right| &= \left|\sum_{j=n}^{m} S_j(x^j - x^{j+1}) + S_m x^{m+1}\right| \\
&\leq \sum_{j=n}^{m} |S_j|(x^j - x^{j+1}) + |S_m| x^{m+1} \\
&< \left(\sum_{j=n}^{m} x^j - x^{j+1}\right)\varepsilon + x^{m+1}\varepsilon \\
&= ((x^n - x^{m+1}) + x^{m+1})\varepsilon \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Visto que a série converge uniformemente no intervalo $[0,1]$ para a função dada na sugestão, então esta é contínua, pelo que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = s.$$

Segunda resolução: Para cada $x \in [0,1]$ e para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, sejam $f_n(x) = a_n$ e $g_n(x) = x^n$. Então:

1. a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ é uniformemente convergente;
2. a série $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n - g_{n+1}|$ converge simplesmente para a função

   $$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \left|x^n - x^{n+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1[\\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

   que é limitada;
3. a sucessão $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ é uniformemente limitada.

Logo, pela proposição 2.2.19, a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em $[0,1]$. Pode-se agora terminar a resolução usando o mesmo argumento que foi empregue no fim da resolução precedente.

2. O enunciado recíproco é falso, pois a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ diverge mas

$$\lim_{x \to 1, x \in [0,1[} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \to 1, x \in [0,1[} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \lim_{x \to 1, x \in [0,1[} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \cdot$$

3. Afirmar que as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergem é o mesmo que afirmar que as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergem quando $z = 1$; deduz-se então da proposição de Abel-Cauchy-Hadamard que se $z \in D(0,1)$, então as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergem absolutamente. Tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \lim_{x\to 1, x\in[0,1[} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ (pelo teorema de Abel)}\\
&= \lim_{x\to 1, x\in[0,1[} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) x^n\\
&= \lim_{x\to 1, x\in[0,1[} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} (a_p x^p).(b_q x^q)\\
&= \lim_{x\to 1, x\in[0,1[} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) . \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \text{ (pela proposição 2.2.11)}\\
&= \left(\lim_{x\to 1, x\in[0,1[} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) . \left(\lim_{x\to 1, x\in[0,1[} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) . \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) \text{ (pelo teorema de Abel)}\\
&= a.b.
\end{aligned}$$

Exercício nº40

1. A série diverge no ponto 1, pois $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : a_n \geq 1$. Por outro lado, a série converge em qualquer ponto z tal que $|z| < 1/2$; de facto, $(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : a_n \leq 2^n$ (isto mostra-se facilmente por indução) pelo que se deduz do critério da raiz que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge quando $|z| < 1/2$. Logo, $1/2 \leq \rho \leq 1$.

2. Escreve-se $(1 - z - z^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sob a forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Tem-se então:

$$c_n = \begin{cases} 1.a_0 = 1 & \text{se } n = 0\\ 1.a_1 + (-1)a_0 = 0 & \text{se } n = 1\\ 1.a_n + (-1)a_{n-1} + (-1)a_{n-2} = 0 & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

3. Define-se:

$$\rho_1 = \left(-1 + \sqrt{5}\right)/2 \text{ e } \rho_2 = \left(-1 - \sqrt{5}\right)/2;$$

estes números são as soluções da equação $1 - z - z^2 = 0$. Tem-se então, quando $|z| < \rho$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= -\frac{1}{z^2 + z - 1}\\
&= -\frac{1}{(z - \rho_1)(z - \rho_2)}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{z - \rho_1} - \frac{1}{z - \rho_2} \right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\rho_1} \frac{1}{1 - z/\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \frac{1}{1 - z/\rho_2} \right).
\end{aligned}$$

Logo, se $|z| < \min\{|\rho_1|, |\rho_2|\}$ (e continuando a supor que $|z| < \rho$), tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\rho_1^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z/\rho_1)^n - \rho_2^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z/\rho_2)^n\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho_1^{-n-1} - \rho_2^{-n-1}\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/\rho_1)^{n+1} - (1/\rho_2)^{n+1}}{\sqrt{5}} z^n.\end{aligned} \tag{10}$$

Visto que $1/\rho_1 = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ e que $1/\rho_2 = \left(1-\sqrt{5}\right)/2$, obtém-se assim a fórmula pretendida para a_n e como se sabe que $|\rho_1| < |\rho_2|$, deduz-se de (10) que:

1. se $|z| < |\rho_1|$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge, pois é igual à soma de duas séries convergentes;
2. se $|\rho_1| < |z| < |\rho_2|$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge, pois é igual à soma de uma série convergente com uma série divergente.

Logo, $\rho = |\rho_1| = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$.

Exercício nº41

1. A afirmação é verdadeira porque afirmar que o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é infinito é o mesmo que afirmar que $\limsup(\sqrt[n]{a_n})_n = 0$ e pode-se então calcular o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-1} z^n$ do seguinte modo:

$$\left(\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n^{-1}}\right)^{-1} = \left(\limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}^{\,-1}\right)^{-1} = \liminf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} = 0.$$

O raio de convergência tem então de ser nulo, pois pertence a $[0, +\infty]$.

2. A afirmação é falsa. Basta considerar a sucessão:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for par} \\ n^n & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

3. A afirmação é falsa. Basta considerar a sucessão:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for par} \\ 2^n & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Exercício nº44

1. Que $\rho = 1$ resulta de se ter $(\forall n \in \mathbb{N}) : \left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right| = \frac{1}{n}$ e de

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Se $|z| = 1$, então $\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} z^n\right| = \frac{1}{n}$, pelo que a série não converge absolutamente no ponto z.

2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $m = [\sqrt{n}]$. Então

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{[\sqrt{k}]}z^k &= -z - z^2 - z^3 + z^4 + \cdots + (-1)^m z^n \\ &= -z(1+z+z^2) + z^4(1+z+\cdots+z^4) - z^9(1+z+\cdots+z^6) \\ &\quad + (-1)^{m-1}z^{(m-1)^2}(1+z+\cdots+z^{2m-2}) + (-1)^m z^{m^2} + \cdots + (-1)^m z^n \\ &= -z\frac{1-z^3}{1-z} + z^4\frac{1-z^5}{1-z} - z^9\frac{1-z^7}{1-z} + \\ &\quad + (-1)^{m-1}z^{(m-1)^2}\frac{1-z^{2m-1}}{1-z} + (-1)^m z^{m^2} + \cdots + (-1)^m z^n,\end{aligned}$$

pelo que

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{[\sqrt{k}]}z^k\right| \le \frac{2(m-1)}{|1-z|} + 2m + 1 \le \frac{2(\sqrt{n}-1)}{|1-z|} + 2\sqrt{n} + 1,$$

de onde se deduz que a sucessão $\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{[\sqrt{k}]}z^k\right)/\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Pode-se mostrar que se, no enunciado do critério de Dirichlet, as condições

1. a sucessão das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é limitada;
2. a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de variação limitada;
3. a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0

forem substituídas respectivamente por

1. a sucessão $\displaystyle\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)/\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada;
2. a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(b_n - b_{n+1})$ é absolutamente convergente;
3. a sucessão $(\sqrt{n}b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0,

uma demonstração semelhante permite concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. De facto, se $m \in \mathbb{N}$ então sabe-se, pela relação (2.18) da página 72, que

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)(b_m - b_{m+1}) + \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) b_{m+1}.$$

Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Então, se $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $m \ge n > 1$ tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{m} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \\ &= s_m b_{m+1} - s_{n-1} b_n + \sum_{k=n}^{m} s_k (b_k - b_{k+1}) \\ &= \frac{s_m}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{m}{m+1}}\sqrt{m+1}\,b_{m+1} - \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n-1}}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{n}\,b_n + \sum_{k=n}^{m}\frac{s_k}{\sqrt{k}}\sqrt{k}(b_k - b_{k+1})\end{aligned}$$

e decorre agora do critério de Cauchy que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Basta agora aplicar esta versão modificada do critério de Dirichlet pondo, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^{[\sqrt{n}]} z^n$ e $b_n = 1/n$, para mostrar que a série dada no enunciado do exercício converge.

3. Vai-se recorrer à versão modificada do critério de Dirichlet que foi empregue na alínea anterior. Quer-se então mostrar que a sucessão $((\sum_{k=1}^n (-1)^{[\sqrt{k}]})/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\sigma_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{[\sqrt{k}]}$. É claro que a restrição da sucessão $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a cada intervalo de $(\mathbb{N}, \leq)$ da forma $[m^2-1, (m+1)^2-1]$ ($m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) é monótona. Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja $m = [\sqrt{n}\,]$. Então

$$\left|\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{|\sigma_n|}{m} \leq \frac{\sup\{|\sigma_{m^2-1}|, |\sigma_{(m+1)^2-1}|\}}{m}. \tag{11}$$

Demonstra-se facilmente (por indução) que $(\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) : \sigma_{m^2-1} = (-1)^{m+1}m - 1$. Decorre então de (11) que se $m > 1$ (ou seja, se $n > 3$) então

$$\left|\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{m+2}{m} \leq 2.$$

Exercício nº45

Se $D = \emptyset$, basta considerar, por exemplo, a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} z^n$. No que se segue, vai-se supor que D não é vazio.

A série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ tem raio de convergência 1 e se z for um número complexo de módulo 1, então a série converge no ponto z sse $z \neq 1$. Logo, se d for um número complexo de módulo 1, a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} d^{-n} z^n/n = \sum_{n=1}^{\infty} (z/d)^n/n$ tem a seguinte propriedade: se z for um número complexo de módulo 1, então a série converge no ponto z sse $z \neq d$.

Considera-se então a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d\in D} \frac{d^{-n}}{n} z^n = \sum_{d\in D} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{d}\right)^n.$$

Se z for um número complexo de módulo 1 que não pertence a D, então a série converge no ponto z, pois é soma de um número finito de séries que são todas convergentes no ponto z. Por outro lado, se $d \in D$, então a série diverge no ponto d pois é soma de um número finito de séries que convergem no ponto d com uma série que diverge nesse ponto.

Exercício nº49

Tem-se:

$$\begin{aligned}(\forall z \in D(0,\rho)) : f(z)^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) z^n\end{aligned}$$

e

$$(\forall z \in D(0,\rho/2)) : f(2z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n z^n$$

de onde se deduz que:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : 2^n a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Em particular, para $n = 0$ tem-se $a_0 = a_0^2$, pelo que $a_0 = 1$ pois, por hipótese, $a_0 \neq 0$.

Vai-se mostrar por indução que $(\forall n \in \mathbb{N}) : a_n = a_1^n/n!$, ou seja, que

$$(\forall z \in D(0,\rho)) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1 z)^n}{n!} = e^{a_1 z}.$$

Para $n = 1$ é trivial. Suponha-se que já se mostrou para um certo $n \in \mathbb{N}$ que $a_m = a_1^m/m!$ quando $m \leq n$ $(m \in \mathbb{N})$. Então

$$\begin{aligned}
2^{n+1} a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k a_{n+1-k} \\
&= 2a_0 a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} \\
&= 2a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_1^{n+1}}{k!(n+1-k)!} \\
&= 2a_{n+1} + \frac{a_1^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= 2a_{n+1} + \frac{a_1^{n+1}}{(n+1)!} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} - 2 \right) \\
&= 2a_{n+1} + \frac{a_1^{n+1}}{(n+1)!} \left((1+1)^{n+1} - 2 \right) \\
&= 2a_{n+1} + \frac{a_1^{n+1}}{(n+1)!} (2^{n+1} - 2)
\end{aligned}$$

de onde se deduz que $a_{n+1} = a_1^{n+1}/(n+1)!$.

Exercício nº50

Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que $f' = f$ e que $f(0) = 1$; quer-se mostrar que $f = \exp$. Veja-se que

$$\left(\frac{f}{\exp} \right)' = \frac{\exp . f' - f . \exp'}{f^2} \equiv 0,$$

pois $f' = f$ e $\exp' = \exp$. Logo, $f/\exp$ é constante e, como em 0 toma o valor $f(0)/\exp(0) = 1$, toma sempre o valor 1. Mas isto é o mesmo que dizer que $f = \exp$.

Exercício nº51

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$(\exp(ir\pi))^{3^n} = \exp\left(\frac{ip3^{n-q}\pi}{2} \right) = \cos\left(\frac{p3^{n-q}\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{p3^{n-q}\pi}{2} \right). \tag{12}$$

1. Por hipótese, p é da forma $2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo, por (12),

$$(\exp(ir\pi))^{3^n} = \cos\left(k3^{n-q}\pi \right).$$

Caso $n \geq q$, 3^{n-q} é um número natural ímpar; consequentemente, $\cos\left(k3^{n-q}\pi\right)$ é igual a 1 se k é par e é igual a -1 se k é ímpar. Em qualquer dos casos, a série $\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n} z^{3^n} \left(= \pm \sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n} \right)$ diverge, pelo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{3^n}$ diverge.

2. Por hipótese, p é da forma $2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $n \geq q$, então $p3^{n-q}\pi/2 = k3^{n-q}\pi + 3^{n-q}\pi/2$, pelo que $\cos(p3^{n-q}\pi/2) = 0$; consequentemente, por (12),

$$(\exp(ir\pi))^{3^n} = i \operatorname{sen}\left(k3^{n-q}\pi + 3^{n-q}\pi/2\right).$$

De facto,

$$(\exp(ir\pi))^{3^n} = i(-1)^{n-q} \operatorname{sen}(k\pi + \pi/2); \tag{13}$$

isto é verdade para $n = q$, pois então

$$(\exp(ir\pi))^{3^n} = i \operatorname{sen}(k\pi + \pi/2)$$

e, por outro lado, se, para um certo $n \geq q$, se tiver (13), então

$$\begin{aligned}
(\exp(ir\pi))^{3^{n+1}} &= i \operatorname{sen}\left(3^{n+1-q}(k\pi + \pi/2)\right) \\
&= i \operatorname{sen}\left(3.3^{n-q}(k\pi + \pi/2)\right) \\
&= i \operatorname{sen}\left(2.3^{n-q}(k\pi + \pi/2)\right) \cos\left(3^{n-q}(k\pi + \pi/2)\right) + \\
&\quad + i \cos\left(2.3^{n-q}(k\pi + \pi/2)\right) \operatorname{sen}\left(3^{n-q}(k\pi + \pi/2)\right) \\
&= -i \operatorname{sen}\left(3^{n-q}(k\pi + \pi/2)\right) \\
&= i(-1)^{n-q+1} \operatorname{sen}(k\pi + \pi/2).
\end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{n} z^{3^n} = i \operatorname{sen}(k\pi + \pi/2) \sum_{n=q}^{\infty} \frac{(-1)^{n-q}}{n}$ e esta série converge, pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{3^n}$ também converge.

Exercício nº55

Seja $z \in \mathbb{C}$; quer-se mostrar que existe algum $w \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{sen}(w) = z$. Mas

$$\operatorname{sen}(w) = z \iff e^{iw} - e^{-iw} = 2iz \iff \left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Considere-se então a equação $X^2 - 2izX - 1 = 0$. Pelos cálculos atrás efectuados, se u for uma solução desta equação e se $w \in \mathbb{C}$ for tal que $e^{iw} = u$, então $\operatorname{sen}(w) = z$. Seja então u uma solução da equação. Tem-se necessariamente que $u \neq 0$ e existe então algum $w' \in \mathbb{C}$ tal que $e^{w'} = u$. Se se definir $w = -iw'$, então $w' = iw$, pelo que $e^{iw} = u$.

Pode-se demonstrar pelo mesmo método que $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, ou então recorrer ao que já se demonstrou e à relação (2.23) da página 92.

Exercício nº56

Vai-se começar por mostrar que a restrição da função seno a U é injectiva. Sejam z_1 e z_2 dois elementos do conjunto em questão tais que $\operatorname{sen}(z_1) = \operatorname{sen}(z_2)$; quer-se mostrar que $z_1 = z_2$. Sabe-se, pelo exercício 53, que $z_1 - z_2 = 2\pi n$ ou que $z_1 + z_2 - \pi = 2\pi n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Mas, visto que $\operatorname{Re}(z_1), \operatorname{Re}(z_2) \in]-\pi/2, \pi/2[$, sabe-se que $\operatorname{Re}(z_1 - z_2) \in]-\pi, \pi[$ e que $\operatorname{Re}(z_1 + z_2 - \pi) \in]-2\pi, 0[$. Logo, $z_1 + z_2 - \pi$ não pode ser um elemento de $2\pi\mathbb{Z}$ e $z_1 - z_2$ só pode ser da forma $2n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$ quando se tiver $n = 0$, ou seja, quando $z_1 = z_2$.

Quer-se agora mostrar que $\operatorname{sen}(U) = \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[)$. Seja $z \in \mathbb{C}$; vai-se começar por mostrar que existe algum $w \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} w \in [-\pi/2, \pi/2]$ e que $\operatorname{sen}(w) = z$. Seja $w' \in \mathbb{C}$

tal que $\operatorname{sen}(w') = z$ (um tal w' existe pelo exercício 55) e seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Re}(w' + 2n\pi) \in [-\pi/2, 3\pi/2[$. Tome-se

$$w = \begin{cases} w' + 2n\pi & \text{se } w' + 2n\pi \in [-\pi/2, \pi/2[\\ \pi - (w' + 2n\pi) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para completar a resolução do exercício, basta mostrar que, dados $z, w \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{sen}(w) = z$ e $\operatorname{Re} w \in [-\pi/2, \pi/2]$, se tem:

$$z \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\iff \operatorname{Re} w = \pm\pi/2. \tag{14}$$

De facto, se $\operatorname{Re} w = \pm\pi/2$, então

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(w) &= \operatorname{sen}(\operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w) \\ &= \operatorname{sen}(\operatorname{Re} w)\cos(i \operatorname{Im} w) + \cos(\operatorname{Re} w)\operatorname{sen}(i \operatorname{Im} w) \\ &= \pm\cos(i \operatorname{Im} w) \\ &= \pm\frac{\exp(-\operatorname{Im} w) + \exp(\operatorname{Im} w)}{2} \\ &= \pm\frac{\exp(\operatorname{Im} w) + 1/\exp(\operatorname{Im} w)}{2} \end{aligned}$$

e, visto que $\exp(\operatorname{Im} w) \in \mathbb{R}_+^*$, $(\exp(\operatorname{Im} w) + 1/\exp(\operatorname{Im} w))/2 \in [1, +\infty[$, ou seja, $z \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Por outro lado, se $\operatorname{Re} w \in]-\pi/2, \pi/2[$, então, visto que

$$\operatorname{sen}(w) = \operatorname{sen}(\operatorname{Re} w)\frac{\exp(\operatorname{Im} w) + 1/\exp(\operatorname{Im} w)}{2} + \cos(\operatorname{Re} w)\operatorname{sen}(i \operatorname{Im} w),$$

há duas possibilidades

$\operatorname{Im} w = 0:$ então $\operatorname{sen}(w) = \operatorname{sen}(\operatorname{Re} w) \in]-1, 1[$;

$\operatorname{Im} w \neq 0:$ então $\operatorname{sen}(i \operatorname{Im} w) = \dfrac{\exp(-\operatorname{Im} w) - \exp(\operatorname{Im} w)}{2i} = \dfrac{\exp(\operatorname{Im} w) - \exp(-\operatorname{Im} w)}{2} i \in i\mathbb{R}^*$, pelo que $\operatorname{sen}(w) \notin \mathbb{R}$.

Exercício nº61

Se $z \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 &= \cos(z).\overline{\cos(z)} + \operatorname{sen}(z).\overline{\operatorname{sen}(z)} \\ &= \cos(z).\cos(\overline{z}) + \operatorname{sen}(z).\operatorname{sen}(\overline{z}) \\ &= \cos(z - \overline{z}) \\ &= \cos(2i \operatorname{Im} z) \\ &= \cosh(2 \operatorname{Im} z). \end{aligned}$$

Se $z \in \mathbb{R}$, então é claro que $\cos z, \operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\cos z, \operatorname{sen} z \in \mathbb{R}$. Então

$$1 = \cos(z)^2 + \operatorname{sen}(z)^2 = |\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh(2 \operatorname{Im} z). \tag{15}$$

Mas se $x \in \mathbb{R}$, então, uma vez que

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots,$$

é claro que $\cosh x = 1$ se e só se $x = 0$. Consequentemente, deduz-se de (15) que $\operatorname{Im} z = 0$, ou seja, que $z \in \mathbb{R}$.

Exercício nº62

Sejam, para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$h_a = \{t + ai : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad v_a = \{a + ti : a \in \mathbb{R}\}.$$

Quer-se então determinar as imagens de cada recta h_a e v_a pelas funções exponencial, seno e coseno.

Se $t \in \mathbb{R}$, então

$$e^{t+ai} = e^t(\cos(a) + \operatorname{sen}(a)i).$$

Como $\{e^t : t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+^*$ e como $\cos(a) + \operatorname{sen}(a)i$ é um número complexo diferente de 0, $\exp(h_a)$ é a semi-recta aberta com origem em 0 que pasa por $\cos(a) + \operatorname{sen}(a)i$. Por outro lado, se $t \in \mathbb{R}$, então

$$e^{a+ti} = e^a(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)i).$$

Logo, $\exp(v_a)$ é a circunferência de centro 0 e raio e^a.

Se $t \in \mathbb{R}$, então

$$\operatorname{sen}(t + ai) = \operatorname{sen}(t)\cos(ai) + \cos(t)\operatorname{sen}(ai) = \operatorname{sen}(t)\cosh(a) + \cos(t)\operatorname{senh}(a)i.$$

Logo, se $a = 0$, $\operatorname{sen}(h_a) = \{\operatorname{sen}(t) : t \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$ e, se $a \neq 0$, $\operatorname{sen}(h_a)$ é a elipse

$$\left\{x + yi \in \mathbb{C} : \left(\frac{x}{\cosh(a)}\right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{senh}(a)}\right)^2 = 1\right\}.$$

Por outro lado, se $t \in \mathbb{R}$, então

$$\operatorname{sen}(a + ti) = \operatorname{sen}(a)\cos(ti) + \cos(a)\operatorname{sen}(ti) = \operatorname{sen}(a)\cosh(t) + \cos(a)\operatorname{senh}(t)i.$$

Logo, há cinco possibilidades:

$a \in \pi\mathbb{Z}$: então $\operatorname{sen}(a+ti) = \cos(a)\operatorname{senh}(t)i = \pm\operatorname{senh}(t)i$, pelo que $\operatorname{sen}(v_a)$ é a recta dos números imaginários puros;

$a \in 2\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$: então $\operatorname{sen}(a + ti) = \cosh(t)$, pelo que $\operatorname{sen}(v_a)$ é a semi-recta fechada $[1, +\infty[$;

$a \in 2\pi\mathbb{Z} + \frac{3\pi}{2}$: então $\operatorname{sen}(a+ti) = -\cosh(t)$, pelo que $\operatorname{sen}(v_a)$ é a semi-recta fechada $]-\infty, -1]$;

$0 < \operatorname{sen}(a) < 1$: então $\operatorname{sen}(v_a)$ é o ramo de hipérbole

$$\left\{x + yi \in \mathbb{C} : x > 0 \wedge \left(\frac{x}{\operatorname{sen}(a)}\right)^2 - \left(\frac{y}{\cos(a)}\right)^2 = 1\right\};$$

$-1 < \operatorname{sen}(a) < 0$: então $\operatorname{sen}(v_a)$ é o ramo de hipérbole

$$\left\{x + yi \in \mathbb{C} : x < 0 \wedge \left(\frac{x}{\operatorname{sen}(a)}\right)^2 - \left(\frac{y}{\cos(a)}\right)^2 = 1\right\}.$$

A determinação de $\cos(h_a)$ e de $\cos(v_a)$ pode ser feito pelo mesmo método ou então recorrendo ao facto de set ter $(\forall z \in \mathbb{C}) : \cos(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$.

Exercício nº65

1. Se z pertencer ao domínio da função tangente, então $z + \pi$ também pertence e

$$\tan(z+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen}(z)}{-\cos(z)} = \tan(z),$$

pelo que π é um período da função tangente e, portanto, os múltiplos inteiros de π são períodos da função tangente. Por outro lado, se t for um período da função tangente, então $\tan(t) = \tan(0+t) = \tan(0) = 0$. Mas, por outro lado,

$$\tan(t) = 0 \iff \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)} = 0 \iff \operatorname{sen}(t) = 0 \iff t \in \pi\mathbb{Z}.$$

2. Tem-se

$$\begin{aligned}\tan(z) = \tan(w) &\iff \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{\operatorname{sen}(w)}{\cos(w)}\\ &\iff \operatorname{sen}(z)\cos(w) - \cos(z)\operatorname{sen}(w) = 0\\ &\iff \operatorname{sen}(z-w) = 0\\ &\iff z - w \in \pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Exercício nº67

Para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ e para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tem-se:

$$\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} z^{2n+3}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}\right|} = \frac{2n+1}{2n+3}|z|^2.$$

Visto que a sucessão $\frac{2n+1}{2n+3}|z|^2$ converge para $|z|^2$, deduz-se que a série converge absolutamente quando $|z| < 1$ e diverge quando $|z| > 1$; logo, o raio de convergência é igual a 1. Alternativamente, se se escrever a série dada sob a forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, então tem-se:

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2k+1} & \text{se } n = 2k+1 \text{ com } k \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Sendo assim tem-se:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Então $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e, por outro lado, a subsucessão de $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ formada pelos termos de ordem ímpar converge para 1. Deduz-se que $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ e, portanto, que o raio de convergência é igual a 1. É uma consequência imediata da continuidade da função tangente e de se ter $\tan 0 = 0$ que existe algum $\rho > 0$ tal que $|z| < \rho \Longrightarrow |\tan z| < 1$. Para mostrar que as funções $z \mapsto a(\tan z)$ e $z \mapsto z$, de domínio $D(0,\rho)$, são idênticas, é suficiente que se mostre que há algum ponto do domínio onde ambas as funções tomam o mesmo valor (o que ocorre obviamente no ponto 0) e que as funções derivadas são idênticas. Mas tem-se:

$$|z| < 1 \Longrightarrow a'(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots = 1 + (-z^2) + (-z^2)^2 + (-z^2)^3 + \cdots = \frac{1}{1+z^2}.$$

Tem-se então, quando $|z| < \rho$:

$$\begin{aligned}(a \circ \tan)'(z) &= a'(\tan z)\tan'(z)\\ &= \frac{1+(\tan z)^2}{1+(\tan z)^2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Exercício nº70

1. Sejam $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ e $w = \log z$. Pela definição da determinação principal do logaritmo, isto significa que $\exp(w) = z$ e que $\operatorname{Im} w \in]-\pi, \pi[$. Mas então

$$z = \exp(w) = \exp(\operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w) = \exp(\operatorname{Re} w).\exp(i \operatorname{Im} w).$$

Como, por outro lado, $z = |z|.\exp(i\theta(z))$, tem-se $\exp(\operatorname{Re} w) = |z|$ (ou seja, $\operatorname{Re} w = \log(|z|)$) e $\operatorname{Im}(w) - \theta(z) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Mas como os números $\operatorname{Im}(w)$ e $\theta(z)$ estão ambos em $]-\pi, \pi$, tem-se forçosamente $\operatorname{Im}(w) = \theta(z)$, pelo que

$$\log(z) = w = \operatorname{Re}(w) + i \operatorname{Im}(w) = \log(|z|) + i\theta(z).$$

2. Como $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) : \exp(\log(z)) = z$, tem-se, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

$$\exp'(\log(z)).\log'(z) = 1 \iff \exp(\log(z)).\log'(z) = 1 \iff z.\log'(z) = 1 \iff \log'(z) = z^{-1}.$$

3. Mostra-se facilmente por indução que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) : \log'(z) = (n-1)!(-1)^{n+1}z^{-n}.$$

Logo, se $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ a série de Taylor de log em z_0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = \log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n{z_0}^n}(z-z_0)^n.$$

4. Seja, para cada $z \in D(z_0, |z_0|)$, $l(z)$ a soma da série de Taylor de log no ponto z_0 (cujo raio de convergência é $|z_0|$); então,

$$\begin{aligned}l'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n{z_0}^n} n(z-z_0)^{n-1}\\ &= \frac{1}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_0-z}{z_0}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{z_0}\cdot\frac{1}{1-(z_0-z)/z_0}\\ &= z^{-1}.\end{aligned}$$

Como l e $\log|_{D(z_0,|z_0|)}$ têm a mesma derivada e tomam o mesmo valor no ponto z_0, são iguais.

5. Pela alínea anterior,

$$(\forall z \in D(1,1)) : \log(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n.$$

Seja $M = \sup_{z\in K}|z|$ e seja N' um número natural maior do que M e maior ou igual a N. Tem-se

$$(\forall z \in K)(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq N' \Longrightarrow \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)-1\right| = \frac{|z|}{n} \leq \frac{M}{N'} < 1.$$

Logo, se $z \in K$ e se n for um número natural maior ou igual a N', tem-se

$$\begin{aligned}
\left|n.\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-z\right| &= \left|n.\left(\frac{z}{n}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{z}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{z}{n}\right)^4+\cdots\right)-z\right| \\
&= \left|-\frac{z^2}{2n}+\frac{z^3}{3n^2}-\frac{z^4}{4n^3}+\cdots\right| \\
&\leq \frac{M^2}{n}+\frac{M^3}{n^2}+\frac{M^4}{n^3}+\cdots \\
&= n\cdot\frac{M^2/n^2}{1-M/n} \\
&= \frac{M^2}{n-M}\cdot
\end{aligned}$$

Como a sucessão $(M^2/(n-M))_{n\geq N'}$ converge para 0 então, dado $\varepsilon > 0$, existe algum número natural $p \geq N'$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq p \Longrightarrow \frac{M^2}{n-M} < \varepsilon.$$

Então, pelos cálculos anteriores, se $n \geq p$ e se $z \in K$ tem-se:

$$\left|n.\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-z\right| < \varepsilon.$$

6. Seja K um compacto de $\mathbb{C}$ e seja N como no enunciado da alínea anterior. Para cada número natural $n \geq N$ e para cada $z \in K$, seja $l_n(z) = n.\log(1+z/n)$. A alínea anterior mostra que $(l_n)_{n\geq N}$ converge uniformemente para a função identidade. Quer-se deduzir que $(\exp\circ l_n)_{n\geq N}$ converge uniformemente para $\exp|_K$; uma vez isto feito, o problema estará resolvido, pois, para $z \in K$ e para cada número natural $n \geq N$,

$$\exp(l_n(z)) = \exp\left(n.\log(1+z/n)\right) = \exp(\log(1+z/n))^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Seja $S = \sup_{z\in K}|\exp(z)|$. Se $z \in K$ e se n é um número natural maior ou igual a N, então

$$|\exp(z)-\exp(l_n(z))| = |\exp(z)|.\,|1-\exp(l_n(z)-z)| \leq S.\,|1-\exp(l_n(z)-z)|\,.$$

Como a sucessão $(l_n)_{n\geq N}$ converge uniformemente para a função identidade em K, para n suficientemente grande tem-se $|l_n(z)-z| \leq 1$ quando $z \in K$. Mas então sabe-se, recorrendo ao exercício 48 (no caso particular em que $n = 1$) que

$$|1-\exp(l_n(z)-z)| \leq 2|l_n(z)-z|.$$

Está então provado que, para n suficientemente grande, se tem

$$(\forall z \in K) : |\exp(z)-\exp(l_n(z))| \leq 2S|l_n(z)-z|.$$

Como a sucessão $(l_n)_{n\geq N}$ converge uniformemente para a função identidade em K, isto prova que $(\exp\circ l_n)_{n\geq N}$ converge uniformemente para $\exp|_K$.

Exercício nº73

1. Tem-se

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in \mathbb{C}) : \left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{|e^{z \log n}|} = \frac{1}{e^{\log n \operatorname{Re} z}} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}$$

e verifica-se pelo critério do integral que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\operatorname{Re} z}$ converge se $\operatorname{Re} z > 1$.

2. Se $\operatorname{Re} z \geq 1+\varepsilon$, então os cálculos da alínea anterior mostram que $|1/n^z| \leq 1/n^{1+\varepsilon}$. Deduz-se então do teste M de Weierstrass e da convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\varepsilon}$ que a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$ converge uniformemente no semi-plano dado.

3. Seja $M \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que se $s \in]1, 1+\delta[$, então $\zeta(s)(= |\zeta(s)|) > M$. Seja $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{N} 1/n > M$. Visto que

$$\lim_{s \to 1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > M,$$

existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall s \in]1, 1+\delta[) : \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} > M.$$

Logo,

$$(\forall s \in]1, 1+\delta[) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} > M.$$

Exercício nº74

Tem-se, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n.\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^z - 1\right) = \frac{\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^z - 1}{1/n} = \frac{f(1/n) - f(0)}{1/n},$$

onde $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ é a função definida por

$$f(w) = \left(\frac{1}{1+w}\right)^z.$$

Mas esta função é derivável e a sucessão dada converge então para $f'(0) = -z$.

Exercício nº76

1. Primeira resolução: Se $z_0 \in \mathbb{C}$, então

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : z^n = ((z - z_0) + z_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {z_0}^{n-k}(z - z_0)^k.$$

Logo, se se definir a sucessão $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ por

$$(\forall k \in \mathbb{Z}_+) : a_k = \begin{cases} \binom{n}{k} {z_0}^{n-k} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

então tem-se $(\forall z \in \mathbb{C}) : z^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$.

Segunda resolução: Pode-se resolver o problema por indução. Se $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $f_n(z) = z^n$. A função f_1 é a função identidade, pelo que é analítica. Por outro lado, se, para algum $p \in \mathbb{N}$, a função f_p for analítica então, como $f_{p+1} = f_p.f_1$ e como o produto de duas funções analíticas é analítica, f_{p+1} é uma função analítica.

2. Primeira resolução: Seja $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$. Então tem-se:

$$f(z) = \frac{z-1/2}{1-z/2} = \frac{(z-z_0)+(z_0-1/2)}{1-z_0/2-(z-z_0)/2} = \frac{1}{1-z_0/2} \cdot \frac{(z-z_0)+(z_0-1/2)}{1-(z-z_0)/(2-z_0)}.$$

Logo, se $|z-z_0| < |2-z_0|$, tem-se

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z_0/2}\left((z-z_0)+(z_0-1/2)\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{2-z_0}\right)^n \\ &= 2\left((z-z_0)+(z_0-1/2)\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \\ &= \frac{z_0-1/2}{1-z_0/2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_0-1/2}{(2-z_0)^{n+1}} + \frac{1}{(2-z_0)^n}\right)(z-z_0)^n \\ &= \frac{z_0-1/2}{1-z_0/2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z_0-1/2}{2-z_0}+1\right)\frac{(z-z_0)^n}{(2-z_0)^n} \\ &= \frac{z_0-1/2}{1-z_0/2} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n. \end{aligned}$$

Segunda resolução: Basta observar que o quociente de duas funções analíticas é uma função analítica.

3. Seja f a função em questão. Para cada $z \in \mathbb{C}^*$ tem-se

$$f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n-2}.$$

Como esta igualdade também se verifica quando $z = 0$, está provado que a função f é representada em $\mathbb{C}$ por uma série de potências. Logo, é analítica, pelo teorema 2.4.1.

Exercício nº77 (alíneas pares)

2. Seja f a função em questão. Tem-se, para cada $z \in D(0,1)$, $f(z) = (z-1)^{-2}$, $f^{(1)}(z) = (-2)(z-1)^{-3}$, $f^{(2)}(z) = 6(z-1)^{-4}$ e mais geralmente

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in D(0,1)) : f^{(n)}(z) = (-1)^n(n+1)!(z-1)^{-n-2},$$

o que pode ser demonstrado por indução. Logo, a série de Taylor é

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n.$$

O seu raio de convergência é igual a 1, como se pode deduzir, por exemplo, do critério do quociente.

4. Seja f a função em questão. Para cada $z \in D(0,1)$ tem-se

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2.(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \cdots).(1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \cdots) \\ &= z^2.(1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots) \text{ (produto de Cauchy)} \\ &= z^2 - 2z^3 + 3z^4 - 4z^5 + \cdots \end{aligned}$$

e o raio de convergência desta série de potências é igual a 1.

6. Para cada $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (\cos z)^2 &= \frac{1 + \cos(2z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n}\right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

O raio de convergência desta série de potências é igual a $+\infty$.

Exercício nº79

Uma tal função não existe, pois se existisse o raio de convergência da série potências que representa a função f numa vizinhança de 0 teria raio de convergência não nulo. Mas a série em questão é a série de Taylor de f em 0, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

e o raio de convergência desta série de potências é 0.

Exercício nº81

1. É visto nos cursos de Análise Real que se I for um intervalo de $\mathbb{R}$ não vazio nem reduzido a um ponto e se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de funções deriváveis de I em $\mathbb{R}$ que converge pontualmente para uma função $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, então é condição suficiente para que f seja derivável que a sucessão $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ seja uniformemente convergente para uma função $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$; caso esta condição seja verificada, então $f' = g$. Deduz-se facilmente que o enunciado é válido se a função f tomar valores em $\mathbb{C}$ (basta aplicar o resultado anterior a $\operatorname{Re}(f)$ e a $\operatorname{Im}(f)$). Aplicando este resultado à série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{in^2 x}$ (ou, mais correctamente, à sua sucessão das somas parciais) vê-se que a função f é derivável e que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} i n^2 e^{in^2 x},$$

pois a série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} i n^2 e^{in^2 x}$ converge uniformemente, pelo teste M de Weierstrass[2]. Analogamente (ou, melhor ainda, usando indução), vê-se que

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} i^k n^{2k} e^{in^2 x}. \tag{16}$$

[2]Veja-se que se $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, então $|e^{-n} i n^2 e^{in^2 x}| = e^{-n} n^2$ e que a série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} n^2$ converge.

2. Se o raio de convergência fosse maior do que zero, então, para algum $x \in \mathbb{R}_+^*$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ seria absolutamente convergente, ou seja, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| x^n$ seria convergente. Mas

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| = \frac{\left| \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} i^k k^{2n} \right|}{n!} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} k^{2n}}{n!} \, .$$

Então, se $N \in \mathbb{Z}_+$, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-k} k^{2n}}{n!} x^n \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{e^{-k} k^{2n}}{n!} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-k} k^{2n}}{n!} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{N} e^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k^2 x)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{N} e^{-k} e^{k^2 x} \\
&= \sum_{n=0}^{N} e^{-n} e^{n^2 x}.
\end{aligned}$$

Isto é impossível, pois a série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{n^2 x}$ diverge, visto que $\lim_{n\in\mathbb{N}} e^{-n} e^{n^2 x} = \lim_{n\in\mathbb{N}} e^{n^2 x - n} = +\infty$.

Exercício nº82

1. Pelo mesmo processo que na resolução da primeira alínea do exercício anterior, vê-se que f é indefinidamente derivável e que:

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (in)^k e^{inx}. \tag{17}$$

2. Fixe-se $x_0 \in \mathbb{R}$; quer-se mostrar que existe algum intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ tal que $x_0 \in I$ e que

$$(\forall x \in I) : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x).$$

De facto, tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (in)^k e^{inx_0} (x - x_0)^k \text{ (por (16))} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a_n (in)^k e^{inx_0} (x - x_0)^k \text{ (como será visto)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (in(x - x_0))^k \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx_0} e^{in(x - x_0)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Para terminar a resolução, falta justificar a segunda das igualdades anteriores ou, mais precisamente, mostrar que esta é válida em algum intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ tal que $x_0 \in I$. Para tal, basta que se mostre que, para algum intervalo aberto I de $\mathbb{R}$ tal que $x_0 \in I$, a família

$$\left(\frac{1}{k!}a_n(in)^k e^{inx_0}(x-x_0)^k\right)_{((k,n)\in {\mathbb{Z}_+}^2)}$$

é somável (para cada $x \in I$) ou, o que é equivalente, que a família

$$\left(\left|\frac{1}{k!}a_n(in)^k e^{inx_0}(x-x_0)^k\right|\right)_{((k,n)\in {\mathbb{Z}_+}^2)} = \left(\frac{1}{k!}|a_n|(n|x-x_0|)^k\right)_{((k,n)\in {\mathbb{Z}_+}^2)}$$

é somável. De facto, basta tomar $I =]x_0 - 1, x_0 + 1[$ e observar que se $x \in I$, então, para qualquer parte finita M de ${\mathbb{Z}_+}^2$, se tem

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k)\in M} \frac{1}{k!}|a_n|(n|x-x_0|)^k &\leq \sum_{n=0}^{\infty} Ce^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(n|x-x_0|)^k \\ &= C\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}e^{n|x-x_0|} \\ &= C\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{|x-x_0|-1}\right)^n \\ &= \frac{C}{1-e^{|x-x_0|-1}}. \end{aligned}$$

Exercício nº85

Seja $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $g(z) = z^5 + z$ e seja V um aberto de $\mathbb{C}$ que contenha 0 e onde g' nunca se anule (por exemplo, $V = D(0, 1/\sqrt[4]{5})$). Então $g|_V$ é localmente bianalítica, pelo que existe alguma vizinhança aberta W de 0 contida em V tal que $g|_W$ é bianalítica. Sejam $U = g(W)$ e $f = {g|_W}^{-1}$. Então $g \circ f = \mathrm{Id}_U$, ou seja,

$$(\forall z \in U) : f(z)^5 + f(z) = z.$$

Exercício nº86

1. Para cada $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ tem-se

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots} = \frac{1}{1 + z/2! + z^2/3! + \cdots}.$$

Mas esta igualdade também é valida quando $z = 0$. Logo, f é quociente de duas funções analíticas, pelo que é uma função analítica.

2. Se $z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{z}{2i}\cot\left(\frac{z}{2i}\right) - \frac{z}{2} &= \frac{z}{2i} \cdot \frac{\cos(z/(2i))}{\operatorname{sen}(z/(2i))} - \frac{z}{2} \\
&= \frac{z}{2i} \cdot \frac{(e^{z/2} + e^{-z/2})/2}{(e^{z/2} - e^{-z/2})/(2i)} - \frac{z}{2} \\
&= \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} - \frac{z}{2} \\
&= \frac{z}{2} \cdot \left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1} - 1\right) \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

3. Resulta das alíneas anteriores que, para algum $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\forall z \in D(0,r) \setminus \{0\}) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{2i}\cot\left(\frac{z}{2i}\right) - \frac{z}{2}, \tag{18}$$

o que implica que

$$(\forall z \in D(0,r) \setminus \{0\}) : B_0 + (B_1 + 1/2)z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \cdots = \frac{z}{2i}\cot\left(\frac{z}{2i}\right).$$

Mas a função

$$\begin{array}{ccc} D(0,r) \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{2i}\cot\left(\dfrac{z}{2i}\right) \end{array}$$

é par, pelo que os coeficientes de ordem ímpar da série de potências

$$B_0 + (B_1 + 1/2)z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \frac{B_3}{3!}z^3 + \cdots$$

são nulos, ou seja, $B_1 = -1/2$ e $B_n = 0$ quando n for ímpar e maior do que 1.

4. Seja r como na alínea anterior. Resulta da definição da função f que, para cada $z \in D(0,r)$,

$$\begin{aligned}
f(z).(e^z - 1) = z &\iff \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = z \\
&\iff \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}\right) z^n = z
\end{aligned}$$

Mas então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n+1-k)!} = 0 &\iff \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} B_k = 0 \\
&\iff \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0
\end{aligned}$$

5. Por um lado, $B_0 = 1 \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, se já se tiver provado, para algum $n \in \mathbb{N}$, que $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathbb{Q}$, então, uma vez que, pela alínea anterior,

$$B_n = -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k}{n+1},$$

$B_n \in \mathbb{Q}$.

6. Se a sucessão $(B_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ fosse limitada, então o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ seria $+\infty$; de facto, se M fosse um majorante de $(|B_n|)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, tinha-se que, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ e para cada $z \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{B_n}{n!} z^n\right| \leq M|z|^n/n!$ e deduzir-se-ia então do critério da comparação que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ converge. A função

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \end{array}$$

seria então analítica, pelo teorema 2.4.1. Resultaria então do teorema da identidade que, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus (2\pi i\mathbb{N} \cup -2\pi i\mathbb{N})$, $f(z) = g(z)$. Mas isto não é possível, uma vez que $\lim_{z\to 2\pi i} g(z) = g(2\pi i)$ e que o limite $\lim_{z\to 2\pi i} f(z)$ não existe.

7. Seja $r \in \mathbb{R}_+^*$ para o qual se tenha (18). Então

$$(\forall z \in D(0,r) \setminus \{0\}) : f(z) + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

Mas resulta então da segunda alínea que

$$(\forall z \in D(0,r/2) \setminus \{0\}) : z\cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2iz)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}.$$

Exercício nº93 (alíneas ímpares)

1. Não existe uma tal função. Se existisse, seria contínua no ponto 0 e, em particular, tinha-se

$$f(0) = f\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} n,$$

mas este limite não existe.

3. Não existe uma tal função. Se existisse, tinha-se

$$f(0) = f\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Por outro lado, f teria que ser derivável no ponto 0 e ter-se-ia

$$f'(0) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{f(1/n) - f(0)}{1/n} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{n},$$

mas este limite não existe.

5. Não existe uma tal função. Se existisse, tinha-se

$$f(0) = f\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Considere-se a função analítica $g : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z$. Então

$$\{z \in D(0,1) : f(z) = g(z)\} \supset \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in 2\mathbb{N}\right\};$$

em particular, o conjunto $\{z \in D(0,1) : f(z) = g(z)\}$ conteria, pelo menos, um ponto não isolado (nomeadamente 0), pelo que $f = g$. Mas isto é impossível, uma vez que $f(1/3) = -1/3$ e que $g(1/3) = 1/3$.

7. Não existe uma tal função. Se existisse, tinha-se

$$f(0) = f\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f\left(\frac{1}{n}\right) = 2.$$

e

$$(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) : f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1 + 5/n}\,.$$

Considere-se a função analítica

$$\begin{array}{rccc} g: & D(0,r) \setminus \{-1/5\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & 2/(1+5z). \end{array}$$

Então

$$\{z \in D(0,1) \setminus \{-1/5\} : f(z) = g(z)\} \supset \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\};$$

logo, o conjunto $\{z \in D(0,r) \setminus \{-1/5\} : f(z) = g(z)\}$ conteria, pelo menos, um ponto não isolado (nomeadamente 0), pelo que

$$f|_{D(0,r)\setminus\{-1/5\}} = g.$$

Mas então ter-se-ia

$$f(-1/5) = \lim_{z\to-1/5, z\neq-1/5} f(z) = \lim_{z\to-1/5} g(z),$$

o que é absurdo, pois este limite não existe.

9. Não existe uma tal função. Se existisse, tinha-se

$$f(0) = f\left(\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Considere-se a função analítica $g : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z^3$. Então

$$\{z \in D(0,1) : f(z) = g(z)\} \supset \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in 2\mathbb{N}\right\};$$

em particular, o conjunto $\{z \in D(0,1) : f(z) = g(z)\}$ conteria, pelo menos, um ponto não isolado (nomeadamente 0), pelo que $f = g$. Mas isto é impossível, uma vez que $f(-1/2) = 1/8$ e que $g(-1/2) = -1/8$.

Exercício nº96

Dadas duas funções analíticas não nulas $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$, quer-se mostrar que a função fg não é a função nula. Seja $z \in U$ tal que $f(z) \neq 0$; por continuidade, existe alguma vizinhança V de z onde f não tem zeros. A função $g|_V$ não pode ser a função nula, pois então deduzir-se-ia do princípio do prolongamento analítico que g seria a função nula. Logo, existe algum $w \in V$ tal que $f(w)g(w) \neq 0$.

Exercício nº97

Visto que f é analítica e injectiva, para mostrar que é bianalítica basta mostrar que f' nunca se anula. Isto resulta do facto de o conjunto dos zeros da função cosseno ser $\pi/2 + \pi\mathbb{Z}$.

Para cada $z \in D(0,1)$ tem-se

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(z))},$$

pelo que

$$\left((f^{-1})'(z)\right)^2 = \frac{1}{(\cos(f^{-1}(z)))^2} = \frac{1}{1-(\operatorname{sen}(f^{-1}(z)))^2} = \frac{1}{1-z^2}.$$

Logo, se, para cada $z \in D(0,1)$, se definir $g(z) = (f^{-1})'(z)$ e $h(z) = 1/(1-z^2)^{1/2}$, está provado que $g^2 = h^2$, ou seja, que $(g-h)(g+h) = 0$. Pelo exercício anterior tem-se $g = h$ ou $g = -h$ mas, visto que

$$g(0) = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{\cos(f^{-1}(0))} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

e, obviamente, $h(0) = 1$, não se pode ter $g = -h$, pelo que $g = h$.

Exercício nº98

Sejam $r, s \in [0, R[$ tais que $r < s$; quer-se mostrar que $M(r) < M(s)$. Considere-se a função

$$\begin{array}{rccc} f: & D(0,R) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \end{array}$$

Primeira resolução: Suponha-se, por redução ao absurdo, que $M(r) \geq M(s)$. Visto que f é uma função analítica não constante com domínio conexo, a função $|f|$ não tem máximos locais. Por outro lado, seja $z_0 \in \overline{D(0,s)}$ tal que $|f(z_0)|$ seja igual ao máximo da restrição de $|f|$ a $\overline{D(0,s)}$; visto que $M(r) \geq M(s)$, pode-se encontrar um tal z_0 em $D(0,s)$. Mas então a função $|f|$ tem um máximo local no ponto z_0.

Segunda resolução: Seja $z_0 \in \overline{D(0,s)}$ um ponto onde a restrição a $\overline{D(0,s)}$ de $|f|$ possui um máximo global. Como $\overline{D(0,s)}$ é compacto, um tal ponto existe e encontra-se na fronteira de $\overline{D(0,s)}$, ou seja, $|z_0| = s$. Assim sendo, se $|z| = r$, $|f(z)| < |f(z_0)| = M(s)$, pelo que

$$M(r) = \sup_{\{z:|z|=r\}} |f(z)| = \max_{\{z:|z|=r\}} |f(z)| < M(s).$$

Exercício nº99

Suponha-se, por redução ao absurdo, que f não é constante nem tem zeros; seja M (respectivamente m) o valor máximo (resp. mínimo) que a função $|f|$ toma em $\overline{D(0,1)}$ e seja z_M (resp. z_m) um ponto de $\overline{D(0,1)}$ tal que $|f(z_M)| = M$ (resp. $|f(z_m)| = m$). Visto que $f|_{D(0,1)}$ não é constante (pois se o fosse então, por continuidade, f seria constante), o princípio do máximo diz que $z_M \notin D(0,1)$, pelo que $|z_M| = 1$. Visto que f não tem zeros em $D(0,1)$, deduz-se do princípio do mínimo que $|z_m| = 1$ pelo mesmo motivo. Logo $M = m = 1$, pois a restrição de $|f|$ a $\{z : |z| = 1\}$ só toma o valor 1, pelo que a função $|f|$ é uma função constante. Mas o princípio do máximo (ou o teorema da aplicação aberta) diz que então $f|_{D(0,1)}$ é constante e, portanto, f é constante.

Exercício nº100

Visto que $D(0,1), \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\} \subset \overline{D(0,R)}$, é claro que a segunda condição implica as outras duas. Falta então mostrar que a segunda condição decorre tanto da primeira quanto da terceira.

Suponha-se que a primeira condição é satisfeita. Sabe-se, pelo critério de Cauchy para séries de funções, que, para demonstrar a segunda condição, basta mostrar que

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\right) (\exists p \in \mathbb{N}) (\forall m, n \in \mathbb{N}) \left(\forall z \in \overline{D(0,1)}\right) : m \geq n \geq p \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| < \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e seja $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$. Novamente pelo critério de Cauchy sabe-se que, para algum $p \in \mathbb{N}$,

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) (\forall z \in D(0,1)) : m \geq n \geq p \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| < \varepsilon'.$$

Logo, se $m, n \in \mathbb{N}$ e se $z \in \overline{D(0,1)}$, z é limite de alguma sucessão $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de elementos de $D(0,1)$, pelo que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| = \lim_{j \in \mathbb{N}} \left|\sum_{k=n}^{m} a_k {z_j}^k\right| \leq \varepsilon' < \varepsilon.$$

Suponha-se agora que a terceira condição é satisfeita. Se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, quer-se mostrar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \geq n \geq p$, então

$$\left(\forall z \in \overline{D(0,R)}\right) : \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| < \varepsilon.$$

Para tal, tome-se $p \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \geq n \geq p$, então

$$(\forall z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}) : \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| < \varepsilon.$$

Sabe-se, pelo princípio do máximo, que se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \geq n \geq p$, então

$$\sup_{|z| \leq R} \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| = \sup_{|z| = R} \left|\sum_{k=n}^{m} a_k z^k\right| < \varepsilon,$$

pelo que um tal p possui a propriedade desejada.