



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

DEPARTAMENTO DE FÍSICA |

Projecto Faraday

Texto do 11^o ano

Departamento de Física
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto
Fundação Calouste Gulbenkian

Ficha Técnica

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: <http://www.fc.up.pt/faraday>

Texto do 11º Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques

Prefácio

Caro aluno(a):

Bem vindo(a) ao segundo ano do *Projecto Faraday*. O nosso objectivo continua a ser estimular-te a pensar através da Física. Entre as ciências da Natureza a Física ocupa um lugar muito especial, uma vez que se dedica ao estudo das leis fundamentais que regem todos os fenómenos. Como verás, o nascimento da Física como ciência moderna tem pouco mais de 300 anos e coincidiu com uma introdução da matemática como linguagem fundamental da descrição do real. Mas a Física não é Matemática. O seu objectivo é falar de coisas concretas, prever o resultado de experiências; mas fazê-lo de uma maneira precisa e quantitativa. A Física não é futebol ou filatelia. Os físicos não se limitam a “achar que...”. Perante as situações, fazem previsões quantitativas, que tem de submeter à verificação experimental. Por isso, continuaremos a propor um conjunto variado de actividades experimentais, nas quais basearemos a discussão das leis que iremos estudar este ano.

A primeira parte do curso será dedicada ao estudo do movimento e das leis que o regem. Falaremos de situações da vida corrente e também discutiremos movimento de corpos celestes. A segunda parte do curso será mais qualitativa e versará o tema das comunicações.

A propósito, 2005 é o Ano Internacional da Física. Aproveita as iniciativas que vão surgir perto de ti!

Bons pensamentos!

Os autores

Conteúdo

Ficha Técnica	ii
Prefácio	v
I Movimento e Leis de Newton	19
1 As missões Voyager	21
1.1 Dois lançamentos	21
1.1.1 Onde estão hoje?	22
1.1.2 O êxito das Voyager	24
1.2 Órbitas das Voyager	24
1.3 Comunicação	26
1.4 Actividades, questões e problemas	27
1.4.1 Questões	27
1.4.2 Actividades	28
1.4.3 Problemas	28
2 Descrição do Movimento	31
2.1 Posição e coordenadas	34
2.1.1 Sistemas de Coordenadas	34
Folha A4	34
Plano	34
Esfera	35
2.1.2 Localização com sistema GPS	36
2.2 Deslocamento	37

	Uma analogia	39
2.2.1	Coordenadas do deslocamento	41
2.3	Velocidade média	43
2.3.1	Varição por unidade de tempo	43
2.3.2	Velocidade média de deslocamento	45
	Vector velocidade média	46
	Movimento no plano	46
2.3.3	Velocidades negativas?	47
2.3.4	Movimento Uniforme	49
	Equação do movimento uniforme rectilíneo.	50
2.4	Velocidade instantânea	51
2.4.1	Movimento com velocidade variável	52
2.4.2	Vector velocidade instantânea	55
	Norma da velocidade instantânea	56
2.5	Aceleração	57
2.5.1	Aceleração média	57
	Acelerações negativas	59
2.5.2	Movimento Uniformemente Variado	60
2.5.3	Direcção e sentido do vector aceleração	61
2.6	Sumário	62
2.7	Questões, actividades e problemas	64
2.7.1	Actividades	64
2.7.2	Questões	64
2.7.3	Problemas	67
2.7.4	Desafios	72
3	Uma conversa com o meu tio	75

4	Leis de Newton	81
4.1	Um livro muito importante	81
4.1.1	Como se demonstram as leis de Newton?	83
	86
4.2	Leis de Newton em acção	86
4.2.1	O conceito de força	86
4.2.2	Movimentos estudados no Capítulo 2	87
	Forças num carro em movimento numa calha.	88
	Calha horizontal	91
	Calha inclinada	92
	Carro puxado por massa em queda	94
4.2.3	Forças de atrito	94
4.2.4	Queda livre	98
	Movimento do projectil	100
4.2.5	Leis de Newton e condições iniciais	102
4.2.6	Resumo	102
4.3	Surpresas	103
4.3.1	Forças impulsivas	103
	Força sobre um bola de golfe.	104
	Força num colisão a 60 km h^{-1}	105
4.3.2	O burro e a carroça	107
	Propulsão de um foguetão	109
4.3.3	Relatividade do movimento	109
4.4	Conclusões	110
4.5	Actividades, Questões e Problemas	111
4.5.1	Actividades	111
4.5.2	Questões	112
4.5.3	Problemas	113
4.5.4	Desafios	117

5	Por que é que a Lua não cai?	119
5.1	Introdução	119
5.2	Movimentos planetários e gravitação	122
5.2.1	Aceleração dos planetas	122
	Aceleração centrípeta	124
5.2.2	Aceleração dos Planetas e distância ao Sol .	126
5.2.3	A queda da Lua e de um corpo	127
5.2.4	Lei da Gravitação Universal	129
5.2.5	Terceira Lei de Kepler	130
5.2.6	Resumo	132
5.3	Energia e órbitas	133
5.3.1	Órbitas fechadas e abertas	133
5.3.2	Energia no campo gravítico	135
5.3.3	Órbitas abertas e energia	138
5.4	Movimento assistido por gravitação	139
5.5	Conclusões	141
5.6	Actividades, Questões e Problemas	142
5.6.1	Actividades	142
5.6.2	Questões	142
5.6.3	Problemas	143
II	Comunicações	147
6	Comunicações	149
6.1	Descoberta dos Pulsars	149
6.1.1	Sinais, mensagens e comunicações	152
	Sistema de comunicações	153
	A Física e as comunicações	154
6.2	Actividades, Questões e Problemas	155
6.2.1	Actividades	155

7 O Som	157
7.1 O que é uma onda	157
7.1.1 Onda no semáforo	157
7.1.2 Geração e propagação do som	161
7.2 Sinais periódicos	162
7.2.1 Sinais sinusoidais	164
7.2.2 Espectro de um sinal	165
Espectros de riscas e espectros contínuos . .	167
7.3 Modulação	168
7.3.1 Amplitude e Frequência modulada	168
7.3.2 Sistemas Digitais	169
7.4 Actividades, Questões e Problemas	170
7.4.1 Actividades	170
III Anexos	173
A Soluções do Capítulo 2	175
A.1 Soluções	175
A.1.1 Actividades	175
A.1.2 Questões	175
A.1.3 Problemas	176
A.1.4 Desafios	180
B Soluções do Capítulo 4	181
B.1 Soluções	181
B.1.1 Actividades	181
B.1.2 Questões	181
B.1.3 Problemas	182
B.1.4 Desafios	183

C Soluções do Capítulo 5	185
C.1 Soluções	185
C.1.1 Actividades	185
C.1.2 Questões	185
C.1.3 Problemas	186
D Anexo Matemático: vectores	189
D.1 Definição de Vector	189
D.2 Operações sobre vectores	192
D.2.1 Soma de vectores	192
Componentes da soma de vectores	193
D.2.2 Produto por um escalar	195
Propriedades	196
D.3 Decomposição de um vector segundo os eixos coordenados	197
D.4 Exercícios	198
E Anexo sobre gráficos	201
E.1 Para que serve um gráfico	201
E.1.1 Vantagens	202
E.2 Escolha de escalas	203

Lista de Figuras

1.1	Lançamento de uma <i>Voyager</i>	21
1.2	A sonda <i>Voyager</i> [3].	21
1.3	Saturno e seus anéis, fotografado pela <i>Voyager</i> [3].	22
1.4	Onda de choque resultante da colisão do vento estelar da estrela LL Orionis com a matéria interestelar na nebulosa Oríon. [6].	23
1.5	As <i>Voyager</i> estão perto da zona de transição entre a região em que a maior parte da energia é devida ao vento solar e a região em que ela é devida à matéria inter-estelar. [3]	23
1.6	As órbitas das <i>Voyager</i> nos primeiros doze anos das missões. De notar os encontros com os grandes planetas do Sistema Solar, Júpiter, Saturno, para a <i>Voyager I</i> e ainda Urano e Neptuno para a <i>Voyager II</i>	25
1.7	Com a velocidade imprimida pelo foguetão de lançamento, e sujeitas à atracção do Sol, as sondas <i>Voyager</i> teriam ficado num órbita elíptica, com um afastamento máximo do Sol da ordem da distância Sol-Júpiter.	25
1.8	Os tamanhos aparentes de <i>A</i> e <i>B</i> são iguais se $d_1/R_1 = d_2/R_2$	29

2.1	Aristóteles (384 AC-322 AC) e Galileu (1564-1642). Aristóteles foi um filósofo macedónio, cujas obras marcaram profundamente todo o pensamento da Idade Média. Galileu, dezassete séculos depois de Aristóteles, deu início à ciência moderna ao sujeitar a validade das ideias e conceitos sobre a natureza à experiência e observação cuidadas. Deste modo, efectuou um corte radical com as ideias de Aristóteles.	32
2.2	Coordenadas cartesianas de um ponto sobre uma folha de papel A4.	34
2.3	A longitude, θ , e a latitude, ϕ , definem a posição de um ponto sobre a esfera.	35
2.4	Sistema de Coordenadas na Terra. Note-se a deformação necessária para representar a Terra num plano. Os Polos são representados por linhas. [1] .	36
2.5	Sabendo a distância a três pontos de posição conhecida ficamos a conhecer a nossa posição.	36
2.6	Movimento de uma moeda: (a) sem rotação; (b) com rotação.	37
2.7	A sucessão de dois deslocamentos é representada pela soma dos vectores respectivos.	38
2.8	Posições de um projectil, lançado da direita, registadas em vídeo. Intervalo de tempo entre posições sucessivas, $\Delta t = 0,1$ s.	42
2.9	O declive da recta é a velocidade média de $A(t)$ entre t_i e t_f	44
2.10	Se o deslocamento de A para B demorou $\Delta t = 3$ s, o deslocamento por unidade de tempo é o dos segmentos menores, <i>se o deslocamento for igual para intervalos de tempo iguais</i>	46
2.11	Se o vector velocidade média for constante, deslocamentos em intervalos de tempo iguais são iguais e o movimento é rectilíneo.	49
2.12	Se $x = mt + b$ o declive da recta, é $m = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$	50

2.13	Os círculos são os pontos experimentais; a linha tem como finalidade facilitar a visualização do gráfico. A velocidade média nos dois intervalos representados é a mesma, pois $\Delta x_1 = \Delta x_2$ e os dois intervalos de tempo também são iguais. Os três primeiros pontos estão sobre uma recta.	51
2.14	Gráfico de tempo-posição para movimento numa calha linear inclinada.	52
2.15	À medida que consideramos intervalos de tempo cada vez menores, a velocidade média aumenta. Os valores parecem tender para o valor marcado no gráfico que pode ser identificado com a <i>velocidade no instante $t = 0$</i>	53
2.16	Se imaginarmos B a deslizar sobre a curva até A , as secantes têm um limite que é a tangente à curva em A	54
2.17	A velocidade instantânea tem a direcção da tangente à trajectória.	56
2.18	Movimento com aceleração constante.	59
2.19	O vector velocidade, tangente à trajectória, roda quando a trajectória curva. O vector $\Delta \vec{v}$ aponta sempre para o lado para onde curva a trajectória. O vector aceleração média tem a direcção e sentido de $\Delta \vec{v}$	61
2.20	Gráficos de x em função de t	65
2.21	Órbita da Terra.	66
2.22	Dois gráficos de velocidade (a) e (d) e dois de posição (b) e (c) para quatro movimentos.	66
2.23	Que movimento é este?	70
2.24	Que movimento é este?	70
2.25	Velocidade em função do tempo para um corpo em queda com abertura de para quedas.	71
2.26	Trajectória de uma bola de futebol	72
2.27	Meio círculo.	72
2.28	Qual é o comprimento, d , da corda?	72
4.1	Página de título do exemplar 80 dos <i>Principia</i> de Newton.[9]	81

4.2	Urbain Le Verrier (1881-1877) e John C. Adams (1819-1892) previram teoricamente a existência do planeta Neptuno, a partir dos desvios da órbita de Urano relativamente às previsões da teoria newtoniana. O astrónomo George Airy, do Observatório de Greenwich, ignorou as previsões de Adams. Le Galle, em Berlim, seguiu as indicações de Le Verrier e foi o primeiro a observar Neptuno ao telescópio. [10].	83
4.3	As forças somam-se como vectores. Forças de igual intensidade e direcção e sentidos opostos têm resultante nula.	87
4.4	Forças sobre um carro em cima de uma superfície sólida. Note-se que só representámos as forças exercidas sobre o carro, não as exercidas sobre a superfície. O facto de o carro não penetrar nem descolar da superfície significa que a resultante, \vec{R} , é nula (a) ou paralela à superfície (b).	88
4.5	As molas deformadas exercem sobre o homem uma força que cancela o efeito do seu peso.	90
4.6	Que força é necessária para que o carro não deslize?	91
4.7	Gráfico de $x(t)$ para um carro sobre uma calha horizontal. Para um movimento uniforme, o gráfico seria uma linha recta. Estes resultados mostram uma ligeira curvatura negativa, ou seja, uma diminuição da velocidade devida ao atrito. Os dados são os pontos: a linha é apenas uma ajuda de visualização.	92
4.8	Gráfico de tempo-velocidade para movimento numa calha linear inclinada (Actividade A18). Os pontos são os dados experimentais, a linha é um ajuste linear.	93
4.9	A coordenada do peso paralela à calha é $mg\sin\theta$. .	93
4.10	O carro é puxado enquanto a massa cai; deixa de ser puxado quando ela atinge o batente. Que tipo de movimento tem o carro?	94
4.12	A aceleração do carro ao subir a calha ($v > 0$) é superior em módulo à aceleração quando desce ($v < 0$). A componente do peso paralela à calha tem a mesma direcção nos dois casos, mas a força de atrito não.	97

4.11	As forças de atrito têm sentidos opostos na subida e na descida.	97
4.13	Escolha de eixos.	98
4.14	Resultados da análise do clip queda_esfera_divx_656x480	98
4.15	No movimento de um projectil a variação do vector velocidade, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ é vertical.	100
4.16	Coordenada horizontal, x , e coordenada vertical da velocidade, v_y , do movimento de uma esfera registado no clip projectil_divx_1_1_656x480.avi .	101
4.17	Coordenadas verticais da velocidade de uma esfera em queda vertical e em movimento parabólico. Dados obtidos dos clips queda_esfera_divx_650x480 e projectil_divx5_1_1650x480.	102
4.18	Um modelo para um força impulsiva.	104
4.19	Se a força do burro na carroça é oposta da força da carroça sobre o burro, como se move o conjunto? .	107
4.20	Qual a posição ocupada pelo ponto de união dos elásticos?	111
4.21	Qual é o ângulo entre os elásticos, quando os comprimentos são iguais?	111
4.22	A soma destas forças é nula.	112
4.23	Qual das cordas está sujeita a maior esforço? . . .	112
4.24	Colisão de dois carros	112
4.25	Qual é a intensidade da reacção normal da mesa em cada carro?	113
4.26	Quanto se afunda o prato da balança?	113
4.27	Que força exerce cada homem?	114
4.28	Como calcular v_0 , sabendo h e L ?	115
4.29	O arqueiro puxa a seta de uma distância x	116
4.30	Qual é a força sobre a corda?	117
5.1	Uma ilustração dos <i>Principia</i> de Newton.	120
5.2	Se os semi-eixos menor, b , e maior, a , da elipse forem iguais esta é uma circunferência.	122

- 5.3 Se o Sol desaparecesse quando o planeta está em O , este passaria a deslocar-se ao longo de uma recta; ao fim de 1 segundo teria andado uma distância igual à que estava a percorrer na órbita em cada segundo. 123
- 5.4 A velocidade do planeta rodou entre O e Q . v_y é nula em O e negativa em Q , logo há uma aceleração na direcção do centro da órbita. 123
- 5.5 Movimento de um projectil à superfície da Terra. . 126
- 5.6 haverá alguma relação entre a aceleração da gravidade à superfície da Terra e a aceleração centrípeta da Lua na sua órbita? 128
- 5.7 Órbitas possíveis em torno da Terra. 133
- 5.8 No mesmo intervalo de tempo, a "queda", Δh , é a mesma, mas a velocidade é maior na órbita b ; a órbita tem menor curvatura. 134
- 5.9 Uma órbita aberta. 135
- 5.10 Capa da novela, *Rendez-Vous with Rama* uma novela de Arthur C. Clark. 135
- 5.11 Para variações de altitude muito menores que o raio da Terra, o peso pode ser considerado constante. . 136
- 5.12 Para variações de altitude da ordem, ou superiores, ao raio da Terra, o peso não pode ser considerado um força constante. 136
- 5.13 Com a velocidade imprimida pelo foguetão de lançamento, e sujeitas à atracção do Sol, as sondas *Voyager* teriam ficado num órbita elíptica, com um afastamento máximo do Sol da ordem da distância Sol-Júpiter. 139
- 5.14 (a) Posições da *Voyager* relativamente a Júpiter espaçadas de 20 horas; (b) Posições de Júpiter em relação ao Sol nos mesmos instantes. 140
- 5.15 Para obter o deslocamento da sonda em relação ao Sol temos que somar ao deslocamento em relação a Júpiter, ($1 \rightarrow 2$) e ($8 \rightarrow 9$), o deslocamento de Júpiter em relação ao Sol, (c). O deslocamento em 20 horas é maior após o encontro, (b), do que antes, (a). 141
- 5.16 Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se? 143

5.17	Um circuito automóvel.	144
6.1	S. Jocelyn Bell com o telescópio que ajudou a construir e com o qual descobriu os pulsars.	149
6.2	Um sistema típico de comunicações.	153
6.3	Descobertas fundamentais de Física e desenvolvimentos em telecomunicações acompanharam-se ao longo dos anos.	154
6.4	Chave de transmissão telegráfica de S. Morse, 1845, National Museum of American History.	154
6.5	Primeiro rádio da Phillips, 1927.	155
6.6	Primeiro transistor de estado sólido. A sua descoberta, em 1947, marca o início da revolução da electrónica.	155
6.7	A internet foi desenvolvida pelo projecto ARPA do Departamento de Defesa dos estados Unidos. A primeira rede de computadores funcionou em 1969.	155
7.1	Uma onda num semáforo. Quando o sinal passa a verde, o “movimento dos carros” propaga-se para trás na fila.	157
7.2	Uma onda num semáforo. $v(t)$ é a velocidade dos carros de uma fila que arranca e volta a parar em sinais de trânsito. Os gráficos (a) e (b) correspondem a posições diferentes na fila.	158
7.3	Quando batemos duas placas uma contra a outra, a pressão aumenta na região à volta.	161
7.4	O valor de corrente em função do tempo de um sinal em código Morse. Os intervalos mais curtos de corrente não nula são os pontos e os períodos mais longos os traços.	162
7.5	Um sinal harmónico, ou sinusoidal, de período $T = 2$ e amplitude $A = 1,5$, representado entre $t = 0$ e $t = 10$	164
7.6	Um sinal construído com três sinusóides de frequências f_0 , $3f_0$ e $5f_0$ (ver actividade 7.2).	165

7.7	Espectro do som do ficheiro <code>triang_3harm.wav</code> . Note-se que só existe intensidade significativa às frequências de 440 Hz, $3 \times 440 = 1330$ Hz e $5 \times 440 = 2200$ Hz, precisamente as frequências das sinusóides cuja soma gerou o sinal sonoro em análise.	166
7.8	Espectro de frequências de um bater de palmas. Neste caso, o espectro apresenta intensidade significativa a todas as frequências entre 0 e 10 kHz; é um espectro contínuo.	167
7.9	Pelo processo de amostragem (a) e quantificação (b), esta função fica representada dez números f_i que são os valores de $f(t)$ em $t = 0, 1, 2, \dots, 9$ aproximados à unidade. Se os valores de f estão no intervalo $[0, 10]$ teremos apenas um total de 110 funções possíveis.	170
A.1	Que movimento é este?	179
A.2	Trajectória de uma bola de futebol	180
C.1	Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se?	185
D.1	Os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo vector	190
D.2	O módulo de \vec{a} é dado pelo Teorema de Pitágoras, $\ \vec{a}\ = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$. . .	192
D.3	Para somar o vector \vec{b} ao vector \vec{a} podemos usar o método de (a): representar \vec{b} por um segmento colocado na extremidade de \vec{a} ; ou (b): a regra do paralelogramo.	193
D.4	As componentes do vector soma $\vec{a} + \vec{b}$ são as somas das componentes respectivas de \vec{a} e \vec{b}	194
D.5	O vector $2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$ tem a direcção e sentido de \vec{a} e o dobro do módulo.	195
D.6	Decomposição de um vector segundo os eixos coordenados.	197
D.7	Se o quadriculado tiver lado unitário, quais são as componentes destes vectores?	198

E.1	Para que serve um gráfico?	201
E.2	Escalas num gráfico.	203
E.3	Gráfico dos resultados da Tabela E.1. Num papel milimétrico cada uma das menores divisões aqui indicadas corresponderia a 1 cm, equivalente a 0,2 s no eixo das abcissas e a 0,2 m no eixo das ordenadas.	205
E.4	Este gráfico tem uma escala de ordenadas mal escolhida.	206
E.5	Escolha aceitável de escalas não tem que incluir a origem dos eixos coordenados.	207

Lista de Tabelas

2.1	Posições de uma esfera lançada ao ar, obtidas de um clip de vídeo.	41
2.2	Tabela de tempos e posições do movimento de um carro sobre uma calha linear.	45
2.3	Movimento linear numa calha inclinada.	52
2.4	Velocidades médias para intervalos de tempo sucessivamente decrescentes e com início em $t = 0$	52
4.1	Coefficientes de atrito entre algumas substâncias (superfícies secas). Estes valores são extremamente sensíveis às condições das superfícies.	95
E.1	Tabela de valores de tempo e comprimento.	204
E.2	Tabela de valores de temperatura e resistência	205

Parte I

Movimento e Leis de
Newton

Capítulo 1

As missões Voyager

1.1 Dois lançamentos

Em 20 de Agosto de 1977, no Cabo Canaveral, Florida, foi lançada para o espaço uma nave não tripulada, a *Voyager II*, com um foguetão *Titan-Centaur*. Duas semanas depois, a 5 de Setembro, partiu uma segunda nave, idêntica à primeira, a *Voyager I*.

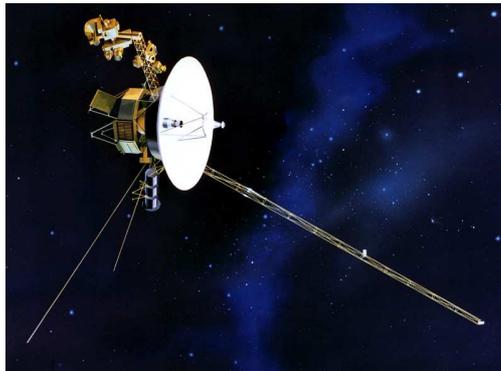


Figura 1.2: A sonda *Voyager* [3].

Estas naves, com massas de 850 kg^1 , transportam uma variedade de instrumentos científicos: detectores de partículas em várias gamas de energia, detectores de radiação no ultravioleta, infravermelho e visível, magnetómetros para medir campos magnéticos, *etc.* Foram construídas para durar 5 anos e passar na vizinhança dos grandes planetas do Sistema Solar, Júpiter, Saturno, Urano e

¹Excluindo, naturalmente, o foguetão que se separa da nave após o lançamento.



Figura 1.1: Lançamento de uma Voyager.

Neptuno. As informações recolhidas por estas duas naves permitiram avanços extraordinários no nosso conhecimento sobre estes planetas e sobre este grão de poeira no Universo, que é o nosso Sistema Solar. As imagens dos planetas recolhidas pelas suas câmaras são de uma rara beleza. Recomenda-se, fortemente, uma visita ao Portal da NASA dedicado a esta missão [3].

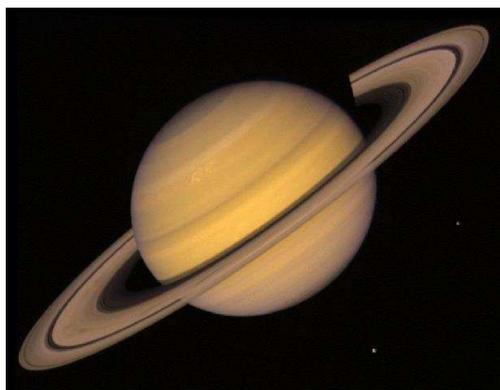


Figura 1.3: Saturno e seus anéis, fotografado pela *Voyager* [3].

1.1.1 Onde estão hoje?

Hoje, 27 anos depois, estas naves encontram-se a cerca de 90 UA (a Unidade Astronómica, a distância média da Terra ao Sol, vale 150 milhões de quilómetros), já fora da órbita de qualquer dos planetas do Sistema Solar. As transmissões de rádio, mesmo viajando à velocidade da luz, demoram cerca de 12 horas a chegar à Terra. Em comparação, para ir do Sol à Terra, a luz demora cerca de 8 minutos. Para viajar entre o Sol e a estrela mais próxima, α – Centauri, demora 4 anos.

Apesar desta enorme distância, continuam a transmitir informações valiosas para a Terra. Espera-se que possam continuar a fazê-lo até 2020, altura em que os reactores termonucleares que têm a bordo deixarão de produzir a energia necessária para operar as naves (“acabam-se as pilhas!”).

O Sol, além da radiação, emite também um fluxo contínuo de partículas carregadas (protões, electrões e outras partículas), o **vento solar**. Este vento interage com as partículas do gás interestelar e cria uma onda de choque, semelhante à onda que se forma na frente de um navio. Em 1995 o telescópio espacial *Hubble* produziu um imagem de uma onda de choque semelhante, resultante

da colisão do vento estelar da estrela LL Orionis com a matéria interestelar da nebulosa Oríon (Fig. 1.4).



Figura 1.4: Onda de choque resultante da colisão do vento estelar da estrela LL Orionis com a matéria interestelar na nebulosa Oríon. [6].

Podemos dizer que o Sol transporta uma bolha de vento solar no seu movimento através do gás interestelar. Alguns cientistas crêem que a *Voyager I* pode já estar a entrar na zona de transição entre essa bolha e a zona dominada pelo gás interestelar. Os dados que obtiver poderão vir a ser decisivos na comparação entre as várias teorias que existem para estes fenómenos.

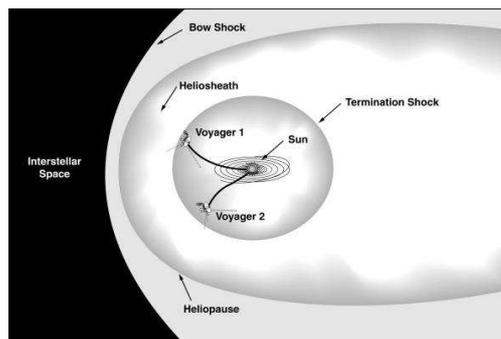


Figura 1.5: As *Voyager* estão perto da zona de transição entre a região em que a maior parte da energia é devida ao vento solar e a região em que ela é devida à matéria inter-estelar. [3]

1.1.2 O êxito das Voyager

As missões *Voyager* são um dos maiores êxitos científicos e tecnológicos da Agência Espacial Americana, a NASA.

Como foi possível enviar duas sondas até aos limites do Sistema Solar e possivelmente para além disso?

Como é possível continuar a comunicar com as naves a estas distâncias, recolhendo informações científicas tão valiosas para a compreensão do Sistema Solar? Como conseguimos “ouvir” as *Voyager* a uma distância de 13 500 milhões de quilómetros!?

Estas questões têm a ver com os temas principais do programa de Física do corrente ano:

Leis de movimento O planeamento das viagens das *Voyager* começou uma dezena de anos antes dos lançamentos. A missão tornou-se possível graças a uma conjunção particular das posições dos planetas exteriores do sistema solar, que só ocorre uma vez em cada 175 anos. Mas a NASA não escolheu o momento de lançamento por esta conjunção ser “favorável” por alguma razão astrológica! Fê-lo, sim, porque um conhecimento detalhado das leis de movimento, aplicadas às sondas e aos planetas junto dos quais passaram, permitiu programar estas fantásticas viagens.

Gravidade Durante a quase totalidade das suas viagens as sondas estão sujeitas apenas à atracção gravítica do Sol e dos planetas do Sistema Solar. Os seus meios autónomos de propulsão reduzem-se a modestos foguetões, que só funcionaram durante alguns minutos em manobras de correcção de órbita nos encontros com os planetas.

Comunicações As sondas continuam a enviar dados, através de uma distância de 13 500 milhões de quilómetros. Esses sinais de rádio são detectados por uma antena parabólica, *Deep Space Probe*, de 70m de diâmetro. O gerador de rádio das *Voyager* tem uma potência de apenas 28W (equivalente a uma lâmpada modesta)!

1.2 Órbitas das Voyager

Na Figura 1.6, mostram-se as órbitas iniciais das duas naves. Terá sido o poder dos foguetões *Titan-Centaur* que impulsionou estas

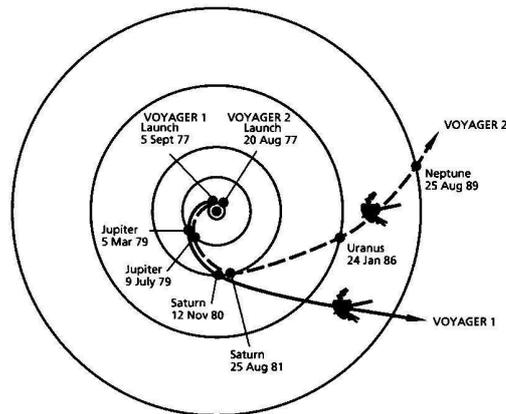


Figura 1.6: As órbitas das *Voyager* nos primeiros doze anos das missões. De notar os encontros com os grandes planetas do Sistema Solar, Júpiter, Saturno, para a *Voyager I* e ainda Urano e Neptuno para a *Voyager II*.

naves para uma viagem que lhes permite continuar a afastar-se do Sol, apesar da sua atracção gravítica? Vejamos o que se passou com a *Voyager II*, que se encontrou com os quatro planetas exteriores. A *Voyager I* passou apenas junto de Júpiter e Saturno.

Na realidade, a velocidade que o foguetão de lançamento imprimiu à *Voyager II* não lhe permitiria ir além da órbita de Júpiter (fig. 1.7). A atracção do Sol é suficiente para a fazer voltar para trás, mantendo-a numa órbita elíptica, com uma distância máxima ao Sol semelhante à de Júpiter.

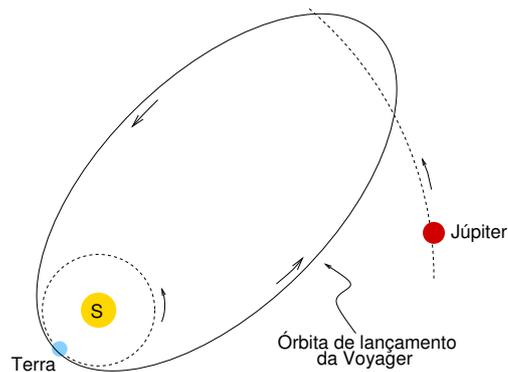


Figura 1.7: Com a velocidade imprimida pelo foguetão de lançamento, e sujeitas à atracção do Sol, as sondas Voyager teriam ficado num órbita elíptica, com um afastamento máximo do Sol da ordem da distância Sol-Júpiter.

Mas, como sabemos calcular exactamente o movimento da nave e de Júpiter, foi possível programar o lançamento de modo a garantir uma passagem da nave muito próximo de Júpiter. A força gravítica entre a nave e Júpiter permitiu uma troca de energia entre os dois corpos. Uma parte ínfima da energia de movimento orbital de Júpiter no campo gravítico do Sol foi transferida para a *Voyager II*. A massa de Júpiter é cerca de 2×10^{27} kg; a massa da *Voyager II* não chega a 1000 kg. Por causa desta enorme diferença de massas, a fracção quase nula da energia orbital de Júpiter, transferida para a *Voyager II*, foi suficiente para aumentar a velocidade de movimento da sonda relativamente ao Sol, permitindo que esta continuasse a afastar-se do Sol, em direcção a Saturno.

A *Voyager II* teve ainda mais três encontros “rasantes”, com Saturno, Urano e Neptuno, que lhe permitiram ganhar ainda mais energia; este último encontro desviou-a para fora do plano da órbitas dos planetas do sistema Solar. Os modestos foguetões da sonda foram usados apenas por alguns instantes, para corrigir as órbitas de aproximação aos planetas, garantindo uma velocidade de saída com o módulo e a direcção desejados.

Para avaliarmos a precisão com que é necessário “apontar” a nave convém perceber que Neptuno, com um diâmetro de 48 600 km, a uma distância do Sol de 4 497 milhões de quilómetros tem um tamanho semelhante ao de uma pulga num alvo a 100 m. Só foi possível programar as viagens das *Voyager* porque conhecemos em grande detalhe as leis de movimento de corpos sujeitos a forças, como a força da gravidade, e podemos usar essas leis para calcular, antecipadamente, os movimentos (o mesmo não podemos dizer em relação às pulgas).

Nos próximos capítulos vamos começar a estudar a maneira como descrevemos matematicamente o movimento, as leis que o regem e as leis do fenómeno de atracção gravítica.

1.3 Comunicação

O problema da *Consciência* é considerado um dos maiores problemas científicos do Século XXI. Porquê? Talvez, em parte, porque, ao contrário do mundo físico, dos objectos e dos sentidos, a consciência não pode ser partilhada. Não pensamos os pensamentos dos outros, só os nossos.

Mas apercebemo-nos da existência de outras consciências porque *comunicamos*. Utilizamos fenómenos do mundo físico (som, luz,

fenómenos eléctricos, ondas de rádio) para partilhar *mensagens*: usamos sons, como numa conversa; imagens visuais, como as letras de um livro ou uma expressão facial; correntes eléctricas num telefonema (rede fixa) ou na televisão por cabo; ondas de rádio, como os sinais das *Voyager* ou dos telemóveis. Em suma, usamos fenómenos físicos, intencionalmente modificados, para permitir alguma partilha de informação entre consciências.

Esta comunicação pode ser feita a grande proximidade, como no caso de uma conversa entre duas pessoas. Os sentidos captam sinais sonoros (audição), ópticos (visão), químicos (olfacto), que, em conjunto, permitem alguma partilha dos mundos interiores dos dois intervenientes. Mas pode também ser feita a distâncias tão grandes como 13 500 milhões de quilómetros, através do espaço, como quando uma das *Voyager* emite sinais de rádio, de acordo com programas previamente instalados nos seus computadores, e que contêm informação sobre as leituras dos seus instrumentos científicos.

Que fenómenos físicos permitem esta comunicação? Como é que os produzimos? Como se propagam a distâncias que podem ser tão vastas? Quais as características que nos permitem detectá-los de modo a recuperar as mensagens que quem os emitiu quis enviar?

Algumas destas questões serão abordadas na segunda parte do programa deste ano. Estudaremos alguns dos fenómenos físicos que tornam possível este aspecto tão central da vida humana, a *Comunicação*.

1.4 Actividades, questões e problemas

1.4.1 Questões

As seguintes questões podem ser respondidas com uma leitura atenta do texto.

- 1.1. Com os meios de propulsão de que dispõe as *Voyager* o seu lançamento poderia ter sido feito em qualquer altura, sem prejudicar a missão?
- 1.2. Os encontros com os planetas permitiram uma observação das suas características que não era possível da Terra. Foi essa a única finalidade desses encontros?
- 1.3. Que factor limita o tempo útil de vida destas duas naves?

- 1.4. O que é vento solar?
- 1.5. Qual é o interesse científico dos dados que a *Voyager I* está a enviar neste momento, do local onde se encontra?
- 1.6. Como comunicam as *Voyager* com a Terra?
- 1.7. Um acidente no lançamento das *Voyager* poderia ter graves consequências ambientais. Porquê?

1.4.2 Actividades

- 1.1. As viagens das *Voyager* permitiram obter dados importantes sobre os planetas exteriores do Sistema Solar. Consultando o portal sobre a missão *Voyager* do *Jet Propulsion Laboratory* [3], procurar as respostas às seguintes perguntas:
 - (a) Em que datas se deram os encontros das duas naves com Júpiter?
 - (b) Foi feita uma descoberta inesperada numa das luas de Júpiter: que lua e que descoberta?
 - (c) Qual é a composição da atmosfera de Saturno? Que velocidades atingem os ventos neste planeta?
 - (d) Quais são os planetas gasosos?
 - (e) Qual é o principal constituinte do anel **epsilon** de Urano?
 - (f) O planeta Neptuno é na verdade o Planeta Azul. A bela cor azul revelada nas fotografias da *Voyager II* é devida à presença de que composto químico?
 - (g) A observação a partir da Terra tinha revelado a existência de anéis incompletos (arcos de anéis) em Neptuno. Anéis são regiões com poeiras e partículas em órbita à volta de um Planeta. Os mais conhecidos são os de Saturno, mas Júpiter e Urano também têm estas estruturas. Mas ao contrário do que acontece em Júpiter, Saturno e Urano, os anéis de Neptuno não pareciam estender-se por 360° em torno de Neptuno. A *Voyager II* confirmou estas observações?

1.4.3 Problemas

- 1.1. O sinal das *Voyager* detectado pela antena *Deep Space Probe* tem uma potência de 10^{-16} W. Se o quiséssemos usar para

aquecer água, quanto tempo demoraria a fazer subir a temperatura de um grama de água de um kelvin? (Capacidade térmica mássica da água, $4,18 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

- 1.2. Em 9 de Setembro de 1977 a *Voyager I* estava a 1,01 UA do Sol. Em 15 de Janeiro de 2005 estará a 94,3 UA do Sol. Qual é, em km s^{-1} , a velocidade média de afastamento do Sol?
- 1.3. A velocidade da *Voyager II*, relativamente ao Sol, após o encontro com Júpiter aumentou de 10 km s^{-1} para 28 km s^{-1} . Estas velocidades referem-se a instantes antes e depois do intervalo de tempo em que a atracção gravitacional de Júpiter teve um efeito importante na órbita da *Voyager*. Júpiter tem uma órbita em torno do Sol quase circular, com um raio de 5,2 UA e um período de 11,9 anos (terrestres). A massa da *Voyager* é 850 kg e a de Júpiter $1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$.
 - (a) Qual é a velocidade orbital de Júpiter?
 - (b) Qual foi o aumento de energia cinética da *Voyager II*?
 - (c) As energias potenciais de Júpiter e da sonda no campo gravítico do Sol quase não variam durante a colisão, pois a distância ao Sol é quase constante. Qual foi a variação da velocidade orbital de Júpiter ?
 - (d) Qual foi o aumento do período da órbita de Júpiter?

- 1.4. O tamanho aparente de um objecto observado a uma certa distância é determinado pelo *ângulo* subtendido pelo objecto. Assim, na Figura ?? os objectos *A* e *B* têm o mesmo tamanho aparente para o observador. Se *A* fosse menor, deixaria uma parte de *B* descoberta e este pareceria maior que *A*. A lei de semelhança de triângulos implica

$$\frac{d_1}{R_1} = \frac{d_2}{R_2}.$$

Mostre que o tamanho aparente de Neptuno, visto do Sol, é semelhante ao de uma pulga a 100m. O diâmetro de uma pulga é cerca de 1 mm. Tire os restantes dados do texto.

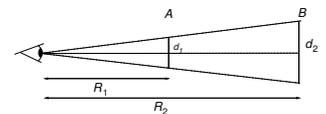


Figura 1.8: Os tamanhos aparentes de *A* e *B* são iguais se $d_1/R_1 = d_2/R_2$.

Capítulo 2

Descrição do Movimento

A filosofia está escrita neste grande livro, o Universo, permanentemente aberto ao nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido antes de aprendermos a perceber a linguagem e a ler os caracteres em que está escrito. Está escrito na linguagem da matemática e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem os quais é humanamente impossível compreender uma única palavra do livro; sem estes vagueamos num labirinto escuro.

Galileo Galilei

O nascimento da Física como ciência moderna está associado aos nomes de Galileu e Newton. Ambos contribuíram decisivamente para a formulação de conceitos precisos para a **descrição** matemática do movimento.

No tempo de Galileu (século XVI-XVII), o ensino nas universidades era ainda fortemente influenciado pelas obras de Aristóteles, redescobertas na Idade Média após terem sido traduzidas do grego antigo por sábios árabes, por volta do século XI.

Aristóteles, um filósofo macedônio do século III AC, discípulo e depois professor na Academia de Platão, deixou uma obra verdadeiramente fenomenal que cobria todas as áreas do conhecimento, desde a Matemática (Lógica), a Física e Astronomia, as Ciências Naturais, a Ética, a Política, a Teologia, etc.

Aristóteles propunha uma visão global das causas de todos os movimentos. Era defensor da ideia de que a Terra ocupava o centro

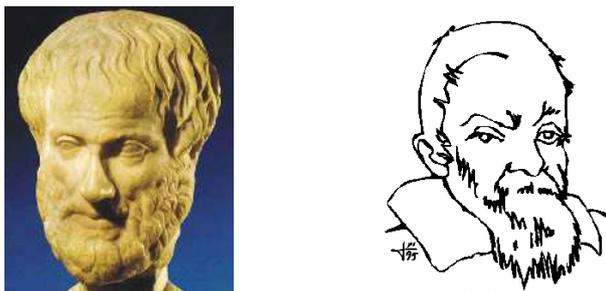


Figura 2.1: Aristóteles (384 AC-322 AC) e Galileu (1564-1642). Aristóteles foi um filósofo macedônio, cujas obras marcaram profundamente todo o pensamento da Idade Média. Galileu, dezassete séculos depois de Aristóteles, deu início à ciência moderna ao sujeitar a validade das ideias e conceitos sobre a natureza à experiência e observação cuidadosas. Deste modo, efectuou um corte radical com as ideias de Aristóteles.

do Universo e achava que os corpos eram constituídos por diferentes quantidades de quatro essências: terra, água, fogo e ar. Corpos pesados, feitos sobretudo de terra e água, tinham um lugar próprio no centro da Terra e para lá tendiam no seu movimento natural, até serem impedidos pelo solo. Corpos mais leves (fogo ou ar quente), pelo contrário, afastavam-se do centro da Terra. Aristóteles admitia ainda outro tipo de causas a que chamava movimento “violento”, como quando alguém dispara uma flecha para o ar. As causas violentas “gastam-se” porque como os corpos se movem em meios materiais como o ar, acabarão por ter o seu movimento natural: o movimento final da flecha é vertical, em direcção ao centro da Terra. O movimento dos corpos celestes era visto por Aristóteles como revelando a existência de uma quinta-essência no Céu (além das quatro da Terra: fogo, ar, água e terra), à qual correspondia um movimento natural circular.

A oposição de Galileu aos ensinamentos de Aristóteles, no que respeita ao movimento, não tomou a forma de uma explicação global alternativa das causas de todos os movimentos. A observação e experimentação, e a possibilidade de medir tempos com muito maior precisão, permitiram a Galileu uma *descrição* muito mais detalhada de certos movimentos particulares (a queda livre, o movimento em plano inclinado, o movimento de projecteis) que, claramente, não correspondia à de Aristóteles.

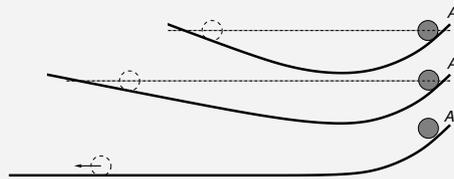
Neste capítulo, vamos estudar alguns dos conceitos matemáticos fundamentais para a descrição do movimento:

- Posição e coordenadas;

■ Galileu e Aristóteles ■

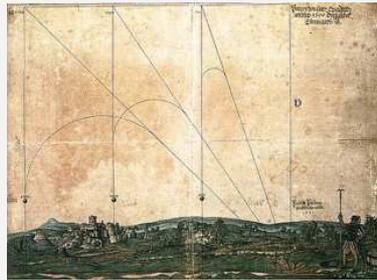
A Física de Aristóteles era muito influenciada pela observação de situações de atrito elevado.

Em estudos de plano inclinado, Galileu reparou que, quando o atrito era reduzido, um corpo descendo de uma dada altura numa rampa inclinada, seguida de uma rampa ascendente com diferente inclinação, subia até quase à altura de partida na rampa ascendente. Daqui concluiu que, se a rampa ascendente tivesse uma inclinação cada vez menor, o corpo percorreria uma distância cada vez maior para chegar à mesma altura. No limite do plano horizontal, sem atrito, o corpo não deveria parar nunca, em contradição com a ideias de Aristóteles, que acreditava que um corpo sem acção exterior tendia para um estado natural de repouso.



Se a bola rola até à altura inicial, não deveria rolar sem parar no plano horizontal?

Outro ponto de discordância dizia respeito ao movimento de projecteis. Aristóteles acreditava que este movimento tinha uma primeira parte, dita violenta, em que o corpo gastava o seu ímpeto inicial, seguida de um parte final em que o corpo caía na vertical, o seu movimento natural, em direcção ao centro da Terra. Galileu notou que em situações de baixo atrito a trajectória é uma parábola e não tem uma secção vertical.



Teoria do ímpeto de Aristóteles. Aristóteles acreditava que a parte final do movimento era vertical.[4]

Caixa 2.1: Aristóteles e Galileu, separados de dezassete séculos, partilharam a vontade de compreender a Natureza.

- deslocamento;
- velocidade;
- aceleração.

É frequente os estudantes acharem este estudo um pouco árido. Mas, como diz Galileu na citação de abertura deste capítulo, sem conhecer os caracteres deste alfabeto não é possível entender uma única palavra deste livro que é o Universo. Não é uma coincidência que o nascimento da Física coincida com a descoberta destes conceitos: eles são fundamentais não apenas para descrever o movimento, como também para descrever a variação de qualquer grandeza física.

2.1 Posição e coordenadas

2.1.1 Sistemas de Coordenadas

Na disciplina de Matemática foi introduzida a *Geometria Cartesiana* que nos permite traduzir proposições geométricas (sobre pontos, linhas, superfícies, polígonos, círculos) em equações matemáticas, através da introdução de um *sistema de coordenadas*. Vejamos alguns exemplos.

Folha A4

Tomemos o exemplo de uma folha de papel A4. Um canto da folha pode ser a origem do sistema de coordenadas. Um dos lados maiores pode ser o eixo xx e um dos lados menores o eixo yy . Se usarmos a mesma unidade para os dois eixos, o centímetro, cada ponto da folha terá coordenadas (x, y) com $0 \leq x \leq 29,7$ e $0 \leq y \leq 21,0$ (as dimensões de uma folha A4 são 21,0 cm por 29,7 cm). Para atingir um ponto de coordenadas $(3, 4)$, partindo da origem deslocamo-nos 3 cm ao longo do eixo xx e depois movemo-nos 4 cm na direcção paralela ao eixo dos yy , na perpendicular a xx (ou na ordem inversa, é indiferente).

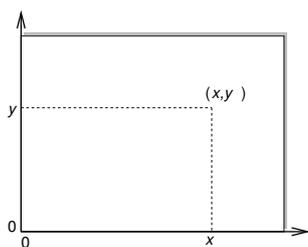


Figura 2.2: Coordenadas cartesianas de um ponto sobre uma folha de papel A4.

Plano

Se imaginarmos a folha prolongada em todas as direcções formando um plano infinito, as coordenadas dos pontos do plano serão da forma (x, y) com $-\infty < x < +\infty$ e $-\infty < y < +\infty$.

Esfera

A introdução de um sistema de coordenadas na superfície de uma esfera é um pouco mais complexa, mas também muito importante pelo facto de vivermos à superfície de um planeta aproximadamente esférico.

Os sistemas de coordenadas do plano são construídos com base em linhas rectas. Na superfície de uma esfera é conveniente usar *círculos máximos*: linhas correspondentes à intersecção da superfície da esfera com planos que passam no seu centro. O perímetro dos círculos máximos é $2\pi r$ em que r é o raio da esfera. Qualquer outro círculo na esfera tem um raio e um perímetro menores. Uma propriedade interessante da esfera é que o trajecto mais curto entre dois pontos sobre a sua superfície é um arco de círculo máximo.

No caso da Terra o sistema de coordenadas envolve o Equador (círculo máximo correspondente a um plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra) e os *meridianos* (círculos máximos correspondentes a planos que contêm o eixo de rotação da Terra). A origem de coordenadas é determinada pelo intersecção do equador com um meridiano particular que atravessa Greenwich, na Inglaterra. Partindo da origem, podemos atingir qualquer ponto da esfera do seguinte modo:

- deslocamo-nos para Oeste ou Este, ao longo do equador, até atingirmos o meio meridiano (arco entre o Polo Norte e Polo Sul) que contém o ponto desejado.
- deslocamo-nos para norte ou sul ao longo desse meridiano até atingirmos o ponto em causa.

O arco descrito ao longo do Equador subtende um ângulo que é a *longitude* do local em causa. Pode ser longitude **OESTE** ou **ESTE**, variando em ambos os casos entre 0 e 180° . Alternativamente, podíamos medir a longitude entre -180° e 180° , os valores negativos correspondendo a longitudes **ESTE**.

O arco descrito ao longo do meridiano é a *latitude*, que pode ser norte ou sul e varia entre 0 e 90° . Podíamos, igualmente, tomar a latitude como variando entre -90° e 90° , correspondendo os valores negativos a pontos do hemisfério Sul, por exemplo.

Estes exemplos mostram que os sistemas de coordenadas se podem ajustar aos espaços que pretendemos estudar. Não usamos

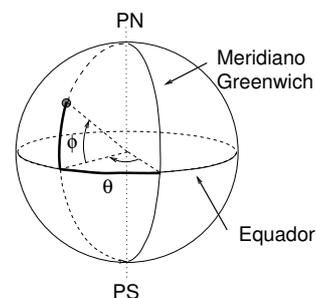


Figura 2.3: A longitude, θ , e a latitude, ϕ , definem a posição de um ponto sobre a esfera.

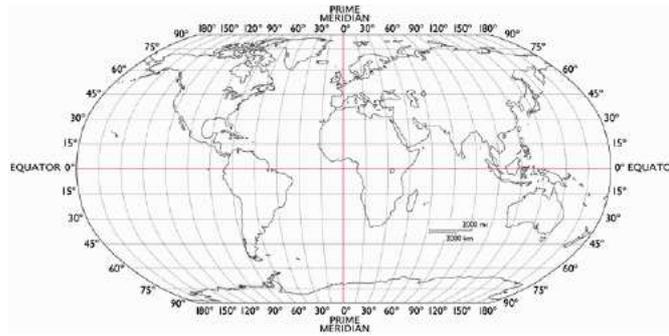


Figura 2.4: Sistema de Coordenadas na Terra. Note-se a deformação necessária para representar a Terra num plano. Os Polos são representados por linhas. [1]

as mesmas coordenadas numa esfera ou num plano. Neste curso, vamo-nos limitar a situações em que podemos usar sistemas coordenados, determinados a partir de eixos retilíneos e mutuamente ortogonais. Todos os movimentos que vamos estudar se desenrolam num plano fixo. Por isso precisaremos apenas de dois eixos como nos dois primeiros exemplos considerados.

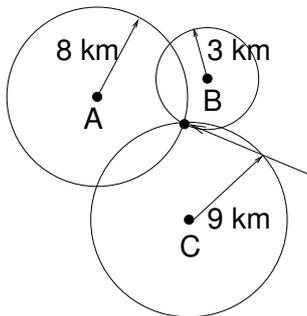


Figura 2.5: Sabendo a distância a três pontos de posição conhecida ficamos a conhecer a nossa posição.

2.1.2 Localização com sistema GPS

Imaginemos-nos perdidos num deserto. Temos na mão um mapa onde estão marcados três oásis, A , B e C . Suponhamos que temos uma maneira de calcular a distância a que estamos de cada um. Sabendo que a distância a A , por exemplo, é de 8 km , podemos marcar no mapa uma circunferência centrada em A que contém a nossa posição; mas continuamos sem saber onde estamos. Sabemos também a distância a B , por exemplo 3 km ; as circunferências centradas em A de raio 8 km e em B de raio 3 km , terão, no máximo, dois pontos comuns. Se conhecermos a distância a um terceiro ponto C , a nossa posição fica determinada. Três distâncias a pontos conhecidos determinam univocamente a nossa posição no plano.

O sistema GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) funciona com base neste princípio. É constituído por uma rede de satélites, tal que há sempre quatro acessíveis a comunicação por sinais de micro-ondas de qualquer ponto do planeta. Os satélites emitem sinais identificadores em tempos pré-determinados. Um receptor GPS contém um relógio sincronizado com o dos satélites e recebe o sinal de

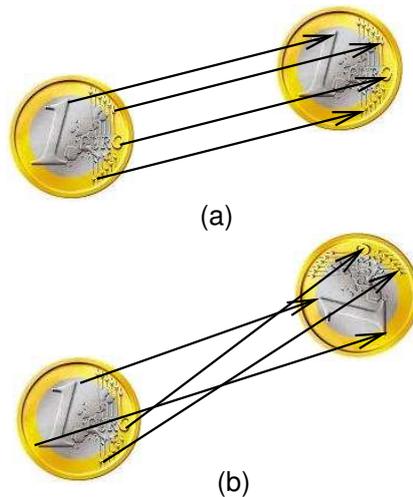


Figura 2.6: Movimento de uma moeda: (a) sem rotação; (b) com rotação.

cada satélite um pouco depois da emissão devido à velocidade finita de propagação das micro-ondas. Esse atraso permite o cálculo da distância a cada satélite. A partir destas distâncias o receptor calcula a sua posição e exprime-a em coordenadas convencionais de latitude e longitude.

Esta descrição, muito breve, não faz justiça à complexidade dos sistema GPS. No portal do Faraday encontra-se um artigo com mais informação sobre este tópico.

2.2 Deslocamento

Para esta experiência precisamos de uma moeda de um euro. Pousemos a moeda em cima de uma mesa. Desloquemos a moeda para outra posição. A posição final está rodada relativamente à inicial ou não?

A figura 2.6 mostra como podemos responder a esta pergunta comparando as posições inicial e final. Desenhando segmentos orientados, ligando posições iniciais a posições finais de pontos correspondentes da moeda, vemos que se todos tiverem o mesmo comprimento, forem paralelos e tiverem o mesmo sentido, a moeda não rodou. Estes segmentos dizem-se **equipolentes**.

Na disciplina de matemática do 10^o ano aprendemos que um conjunto de segmentos equipolentes é **um vector**. Por outras pa-

▷ Definição de vector.
▷ ver Anexo A para um resumo sobre vectores

lavras, dois segmentos com a mesma direcção, sentido e comprimento, representam o *mesmo* vector, independentemente do respectivo ponto inicial.

O movimento sem rotação designa-se por **translação** e é, então, caracterizado por um vector, designado por **vector deslocamento**.

O vector deslocamento define a variação de posição de um corpo numa translação e é representado por qualquer segmento orientado equipolente a um que una as posições inicial e final de um ponto do corpo.

Note-se que o deslocamento de um corpo extenso é especificado exactamente do mesmo modo que o de uma partícula material: a descrição de movimentos de translação pode ser feita usando o modelo de partícula material.

Vejamos algumas consequências desta definição de vector deslocamento ou, simplesmente, deslocamento.

A definição de deslocamento nada diz sobre o movimento que ocorreu entre os instantes inicial e final: só depende das posições antes e depois do movimento.

Correcto! Isto significa, por exemplo, que o deslocamento do Michael Schumacher, numa volta a um circuito de Fórmula 1, é nulo pois as posições inicial e final têm as mesmas coordenadas.

Se somarmos dois deslocamentos sucessivos, usando a regra de soma de vectores, obtemos o deslocamento total.

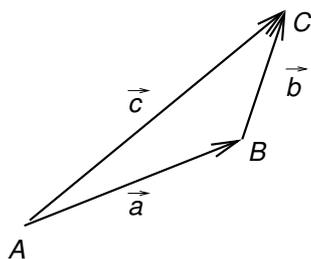


Figura 2.7: A sucessão de dois deslocamentos é representada pela soma dos vectores respectivos.

Se um corpo se desloca de A para B e depois de B para C, o deslocamento total é de A para C. Esta regra, mais que óbvia, da operação física de deslocamento, traduz-se na regra de soma de vectores. Com efeito a soma de um vector $\vec{a} = \vec{AB}$ (representado pelo segmento $[A, B]$) com $\vec{b} = \vec{BC}$ (representado pelo segmento $[B, C]$) é $\vec{c} = \vec{AC}$ (representado pelo segmento $[A, C]$).

O módulo ou norma do deslocamento é a distância entre as posições final e inicial,

$$d = \|\vec{AB}\|.$$

A norma ou módulo de um vector é o comprimento de um segmento que o represente, ou seja a distância entre os extremos do segmento. Dois deslocamentos só são iguais se, além do mesmo módulo, tiverem a mesma direcção e sentido.

Mas, atenção: a distância entre o ponto final e inicial de um deslocamento não é, necessariamente, a distância *percorrida*. No caso do Michael Schumacher acima referido, depois de uma volta ao circuito, a distância entre o ponto final e inicial é nula! Por outro lado, a distância percorrida é o perímetro do circuito.

Para que serve, então, esta definição? Um pessoa pode dar a volta ao mundo e um físico diz-lhe que o seu deslocamento foi nulo? Que coisa mais tola!

Parece tola, à primeira vista, mas não é. O que torna a definição de deslocamento muito útil é a maneira como podemos representar deslocamentos consecutivos. Podemos sempre dividir um dado intervalo de tempo em intervalos mais pequenos. Somando os deslocamentos nesses intervalos obtemos o deslocamento total. Por outras palavras, usando este conceito de deslocamento, podemos analisar um movimento com todo o detalhe necessário. Voltando ao exemplo do Michael Schumacher, se registarmos o seu movimento de segundo a segundo, a sequência de deslocamentos nesses intervalos já contém muito mais informação sobre o seu movimento do que as posições no início e fim de uma volta.

Uma analogia

A seguinte analogia pode ser útil para entender este conceito de deslocamento. Imaginemos que comprávamos 1000 acções de uma dada companhia a 10,5 euros por acção em Janeiro. Um ano depois vendíamos a 11 euros por acção. O lucro seria

$$1000 \times (11 - 10,5) = 500 \text{ euros.}$$

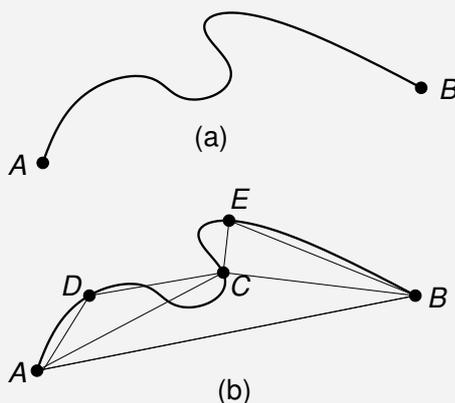
Pouco importa que as acções valessem 15 euros em Julho. A variação entre os instantes de compra e venda é que é relevante para as nossas finanças; não o que se passa no meio. Contudo, se quisermos seguir o preço das acções, podemos ver a sua *variação* mês a mês, dia a dia, hora a hora ou mesmo minuto a minuto. Repare-se também que não é o módulo da variação que é importante. Se tivéssemos vendido a 10 euros, o módulo da variação seria o mesmo mas o “lucro” seria

$$1000 \times (10 - 10,5) = -500 \text{ euros.}$$

■ Distância percorrida ■

O que é a distância percorrida por um corpo no seu movimento entre A e B ?

Imaginemos que a curva da figura representa a sua trajectória. Queremos saber qual o comprimento desta curva. Intuitivamente poderíamos pensar em pousar um fio sobre a curva, seguindo todas as suas convoluções: esticando o fio poderíamos depois medir o comprimento da curva com um régua ou fita métrica. Será possível transformar esta ideia num conceito mais preciso?



O comprimento do segmento $[A, B]$, d_{AB} , é o módulo do deslocamento do corpo. Será certamente uma má medida do comprimento da curva, pois corresponderia a esticar o fio entre os pontos inicial e final:

$$S_1 = d_{AB}$$

Mas podemos melhorar: escolhendo um ponto intermédio da trajectória, C , teremos uma nova aproximação para o comprimento da curva, somando os módulos dos deslocamentos \vec{AC} e \vec{CB} ,

$$S_2 = d_{AC} + d_{CB}.$$

Subdividindo as curvas de A a C e de C a B , teremos uma ainda melhor aproximação:

$$S_4 = d_{AD} + d_{DC} + d_{CE} + d_{EB}.$$

Este processo pode continuar, e, à medida que cresce o número de pontos intermédios, aproximamo-nos da situação que consiste em colocar um fio flexível sobre a curva.

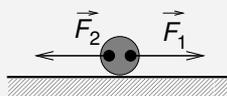
Sendo então S_n a soma de comprimentos de n segmentos, construídos com os pontos inicial e final, e $n - 1$ pontos intermédios, distribuídos sobre a curva, podemos definir o comprimento desta como sendo o valor limite de S_n quando n tende para infinito.

Note-se que precisamos apenas do conceito de deslocamento para definir deste modo o comprimento de uma curva. No desafio 2.1 aplica-se este conceito para calcular o perímetro do círculo.

■ Forças como vectores ■

A representação de deslocamentos por vectores é muito natural. Podemos até dizer que a definição de adição de vectores é exactamente a que é necessária para representar a sucessão de deslocamentos.

O conceito de força também está naturalmente associado a um módulo (intensidade da força) e a uma direcção e um sentido. Mas o que realmente nos permite representar forças por vectores é o facto de a adição de forças seguir a mesma lei que a adição de vectores. Por exemplo, actuando num corpo com forças de igual intensidade, mesma direcção e sentidos opostos este mantém-se em equilíbrio. Isto é, o efeito das duas forças é o mesmo que o da sua soma vectorial, que é zero.



Este aspecto do conceito de força será retomado no capítulo 4.

Caixa 2.3: Forças como vectores

O sinal, neste caso, é crucial para o nosso bem estar!

O vector deslocamento caracteriza a variação de posição, tal como a diferença do preço de venda e compra define o lucro da transacção. Note-se, contudo, que, para caracterizar uma posição, são necessárias três coordenadas; o preço de uma transacção é dado por um único número. As analogias são sempre isso mesmo: analogias.

2.2.1 Coordenadas do deslocamento

O movimento de um projectil estudado na Actividade 2.4 é um exemplo de movimento plano.

A figura 2.8 mostra os pontos sucessivos de uma trajectória deste tipo, obtidos a partir de um registo vídeo como na Actividade 2.4. A figura mostra também os eixos coordenados que usámos para fixar as coordenadas de cada ponto, listadas na tabela 2.1.

Na figura 2.8 representámos, com um segmento orientado, o deslocamento entre as posições ocupadas em $t = 0,1$ s, coordenadas (1,69; 0,87) m, e $t = 0,2$ s, coordenadas (1,40; 1,14) m.

t/s	x/m	y/m
0,0	1,94	0,51
0,1	1,68	0,87
0,2	1,40	1,14
0,3	1,12	1,32
0,4	0,83	1,38
0,5	0,55	1,35
0,6	0,26	1,22

Tabela 2.1: Posições de uma esfera lançada ao ar, obtidas de um clip de vídeo.

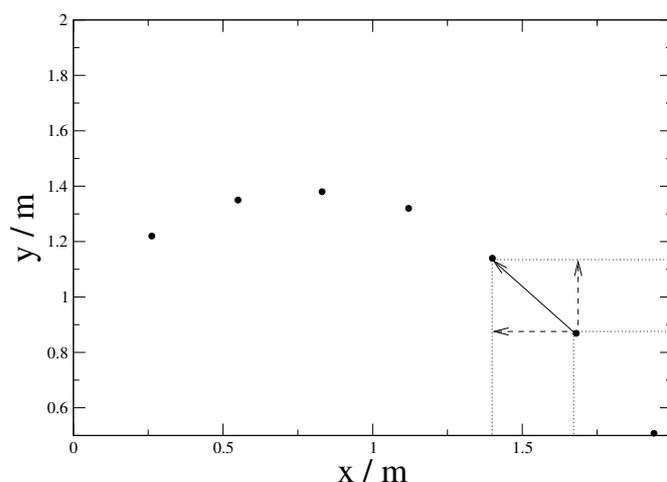


Figura 2.8: Posições de um projétil, lançado da direita, registadas em vídeo. Intervalo de tempo entre posições sucessivas, $\Delta t = 0,1$ s.

As variações de coordenadas entre os pontos inicial e final do deslocamento são¹:

$$\begin{aligned}\Delta x &= 1,40 - 1,68 = -0,28 \text{ m;} \\ \Delta y &= 1,14 - 0,87 = 0,27 \text{ m.}\end{aligned}\quad (2.1)$$

As projecções do deslocamento segundo os eixos coordenados definem dois deslocamentos, um ao longo de Ox e outro ao longo de Oy . Como Δx é negativo, o deslocamento segundo x tem o sentido negativo do eixo Ox e módulo igual a $|\Delta x| = 0,28$ m. O deslocamento segundo y tem o sentido positivo do eixo Oy e módulo dado por $|\Delta y| = 0,27$ m.

Se recordarmos a definição de produto de um escalar por um vector (ver Anexo A), vemos que podemos decompor o deslocamento na forma:

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}$$

em que \hat{i} e \hat{j} são os vectores de norma unitária com as direcções e sentidos dos eixos Ox e Oy , respectivamente. Como Δx é negativo $\Delta x \hat{i}$ tem sentido oposto a \hat{i} .

Usa-se também a seguinte notação, que indica apenas as **coordenadas** do vector $\Delta \vec{r}$, deixando implícita a indicação do sistema de

▷ **implícito**: algo que se entende como fazendo parte de uma frase, expressão ou situação, embora não seja directamente afirmado ou não esteja manifestamente presente.

¹Recordemos uma notação que já usámos no 10º ano. O símbolo ΔA representa sempre a variação de uma grandeza A , isto é, a diferença entre os valores final e inicial numa transformação, $\Delta A = A_f - A_i$.

eixos:

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y).$$

Então, definimos²:

As coordenadas do vector deslocamento num dado sistema de eixos são as diferenças das coordenadas dos pontos inicial e final do deslocamento,

$$\Delta\vec{r} = (\Delta x, \Delta y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

O teorema de Pitágoras permite exprimir a norma do deslocamento em termos das suas coordenadas:

$$\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Dois deslocamentos só são iguais se tiverem as mesmas coordenadas Δx e Δy .

2.3 Velocidade média

2.3.1 Variação por unidade de tempo

Consideremos as seguintes frases:

- Esta impressora imprimiu 8 páginas por minuto.
- O Sr. Joaquim facturou 300 euros por dia.
- Na etapa de hoje, o pelotão fez uma média de $41,2 \text{ km h}^{-1}$.

Em todos estes casos temos uma quantidade, $A(t)$, que varia no tempo: o número de páginas impressas, a quantidade de dinheiro facturada, a distância percorrida pelo pelotão; temos, também, uma referência a unidade de tempo (minuto, dia e hora).

²Em muita literatura de Física, usa-se, neste contexto, a designação **componente** em vez de **coordenadas**. A notação que estamos a usar coincide com a dos textos de matemática do 10º ano.

Estas afirmações não significam que a impressora tenha trabalhado um minuto, que o Sr. Joaquim tenha facturado exactamente 300 euros em cada dia de trabalho, ou que o pelotão tenha pedalado durante uma hora. Os valores referidos são obtidos dividindo a variação da grandeza, $\Delta A = A(t_f) - A(t_i)$, pelo intervalo de tempo em que esta ocorreu, $\Delta t = t_f - t_i$:

$$v_m = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Exemplo: Se em meia hora ($\Delta t = 0,5 \text{ h}$) o pelotão percorreu $20,6 \text{ km h}^{-1}$, a sua velocidade foi

$$\frac{20,6}{0,5} = 41,2 \text{ km h}^{-1}.$$

Ao dividir a variação da grandeza, ΔA , pelas Δt unidades de tempo em que ocorreu, obtemos um número que seria a variação de A na unidade de tempo, *se essa variação fosse a mesma em intervalos de tempo iguais*. Isto é o que chamamos uma velocidade média. É neste sentido que dizemos:

a velocidade média de uma grandeza é sua variação por unidade tempo.

Num gráfico de $A(t)$ em função de t , a velocidade média entre t_i e t_f é dada pelo declive da recta que passa nos pontos do gráfico de abcissas t_i e t_f : quanto maior for este declive maior é a velocidade média (fig 2.9).

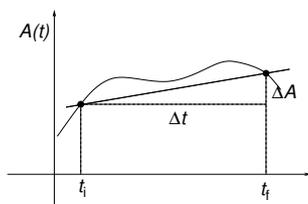


Figura 2.9: O declive da recta é a velocidade média de $A(t)$ entre t_i e t_f .

Em alguns contextos é mais frequente usar a designação “taxa média de variação”, em vez de “velocidade média”. Neste curso estamos particularmente interessados em variações de posição, caso em que esta segunda designação é muito mais frequente. Seja como for, este conceito é muito geral, como se vê.

Exemplo: Um corredor desloca-se 100 m em 10 s . Um ciclista desloca-se 38 km numa hora. Qual é o mais rápido?

Para responder a esta pergunta temos de comparar deslocamentos que se referem ao mesmo intervalo de tempo. Se os seus deslocamentos em cada segundo fossem iguais, o corredor teria um deslocamento por segundo dado por

$$v_m = \frac{100}{10} = 10 \text{ m s}^{-1}$$

e o ciclista,

$$v_m = \frac{38 \times 10^3}{3600} = 10,5 \text{ m s}^{-1}.$$

Ou seja, temos de comparar as velocidades médias dos dois movimentos. O ciclista foi (marginalmente) mais rápido.

2.3.2 Velocidade média de deslocamento

Vamos começar por aplicar este conceito ao movimento de um carro numa calha linear (Actividade 2.1)

A tabela 2.2 regista valores de posição do carro em diferentes instantes, obtidos com um sensor de movimento. O eixo Ox coincide com a direcção da calha: as outras coordenadas não variam e, por isso, podemos ignorá-las. O movimento é de **translação** e a posição do carro pode ser determinada por uma única coordenada.

A grandeza cuja velocidade queremos considerar é a coordenada $x(t)$.

A velocidade média da coordenada $x(t)$ de um corpo, num intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, é dada pela sua variação, $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$, a dividir pelo intervalo de tempo, $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

▷ Actividade 2.1

t/s	x/m
0,00	0,32
0,50	0,47
1,00	0,62
1,50	0,76
2,00	0,89
2,50	1,02
3,00	1,15
3,50	1,25

Tabela 2.2: Tabela de tempos e posições do movimento de um carro sobre uma calha linear.

Exemplo: No exemplo da tabela 2.2, a variação de $x(t)$ entre $t = 0 \text{ s}$ e $t = 3,0 \text{ s}$,

$$\Delta x = 1,15 - 0,32 = 0,83 \text{ m}$$

e a velocidade média

$$v_m = \frac{0,83}{3,0} = 0,277 \text{ m s}^{-1}.$$

(o resultado desta conta foi arredondado para dois algarismos significativos).



Figura 2.10: Se o deslocamento de A para B demorou $\Delta t = 3$ s, o deslocamento por unidade de tempo é o dos segmentos menores, se o deslocamento for igual para intervalos de tempo iguais.

Repare-se que não estamos a afirmar que, neste movimento particular, o deslocamento em cada segundo foi exactamente de 0,277 m. Não foi! no primeiro segundo foi de 0,30 m (ver tabela 2.2). O que estamos a dizer é que, *se os deslocamentos em intervalos iguais fossem iguais, o deslocamento em cada unidade de tempo seria expresso pelo valor da velocidade média no intervalo.*

O sinal de v_m é o mesmo que o de Δx já que a diferença de tempos, $\Delta t = t_f - t_i$, é positiva (o instante inicial é anterior ao final, $t_i < t_f$). Se o movimento for no sentido positivo do eixo, $x(t)$ aumenta e Δx e v_m são positivos; se o movimento for no sentido negativo, $x(t)$ diminui e Δx e v_m são negativos.

Vector velocidade média

O vector deslocamento define a **variação** de posição. A velocidade média associada à variação de posição é também um vector.

Exemplo: No movimento registado na tabela 2.2, a variação de posição entre $t = 0$ s e $t = 3$ s é dada pelo vector deslocamento

$$\Delta \vec{r} = 0,83\hat{i} \text{ (m)}.$$

Para obter o vector velocidade média neste intervalo, temos de dividir a variação de posição, o vector deslocamento, por $\Delta t = 3$ s, ou seja, multiplicá-lo pelo escalar $1/3$:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{3} \times 0,83\hat{i} = 0,28\hat{i} \text{ (m s}^{-1}\text{)}$$

A velocidade média relativa à coordenada $x(t)$, acima definida, é, então, a coordenada de um vector, tal como Δx é a coordenada do vector deslocamento:

$$\vec{v}_m = v_m \hat{i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} \quad (2.3)$$

Movimento no plano

Em movimentos no plano, o vector velocidade média tem duas coordenadas, tal como o deslocamento, que são as velocidades médias das coordenadas $x(t)$ e $y(t)$:

$$\vec{v}_m = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j}$$

Exemplo: No caso de movimento de projectil, considerado na secção 2.2.1, página 41, no exemplo da equação 2.1, o deslocamento, num intervalo de tempo de 0,1 s, tem componentes

$$\vec{\Delta r} = (-0,28; 0,27) \text{ (m)}$$

A velocidade média no mesmo intervalo é

$$\vec{v}_m = \left(\frac{0,28}{0,1}, \frac{0,27}{0,1} \right) = (-2,8; 2,7) = 10\vec{\Delta r}$$

Em resumo:

O vector velocidade média, deslocamento por unidade de tempo, num intervalo de tempo Δt , tem coordenadas,

$$\vec{v}_m = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.4)$$

A sua direcção e sentido são os mesmos que os do vector deslocamento pois $\vec{v}_m = \lambda \vec{\Delta r}$, em que $\lambda = 1/\Delta t$ é um escalar positivo.

O módulo ou norma do vector velocidade média é

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_m\| &= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\Delta t^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2)} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \end{aligned}$$

ou seja, é a norma do deslocamento, $\|\vec{\Delta r}\|$ (distância entre as posições inicial e final), sobre o intervalo de tempo ($\Delta t > 0$):

$$\|\vec{v}_m\| = \frac{\|\vec{\Delta r}\|}{\Delta t} \quad (2.5)$$

2.3.3 Velocidades negativas?

Alguma vez ouvimos alguém dizer:

Do Porto a Lisboa fiz uma velocidade média de 140 km h⁻¹.

*No regresso fiz **menos** 140 km h⁻¹ (-140 km h⁻¹).*

Certamente que não. Só os Físicos falam em velocidades negativas! Porquê?

Quando estamos a lidar com movimentos de automóveis, comboios, *etc.*, raramente estamos preocupados com a respectiva direcção e sentido (excepto quando não são os desejados). Se um carro se desloca na direcção Norte-Sul medimos os deslocamentos com valores de coordenada de posição a crescer de Norte para Sul. O movimento é no sentido positivo do eixo e Δx e v_m são positivos. Quando o carro começa a mover-se de Sul para Norte, invertemos o eixo e começamos a medir posições no sentido inverso. Agora, a coordenada cresce de Sul para Norte. De novo, Δx e v_m são positivos. Na linguagem corrente a “velocidade” é sempre positiva!

Que “velocidade” é esta, então?

No início de uma viagem de automóvel pomos o conta-quilómetros a zero. Em cada instante, a sua indicação é aquilo a que atrás chamámos a **distância percorrida**, ou seja, o comprimento da trajectória descrita pelo automóvel (ver Caixa 2.2 na página 40). Esta distância aumenta com o tempo que decorreu desde o início da viagem, t , e é representada por uma função crescente do tempo, $s(t)$. A “velocidade média” desta grandeza, entre dois instantes t e $t + \Delta t$ é, como sempre,

$$\text{“velocidade média”} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Esta grandeza é sempre positiva, pois $s(t)$ cresce com o tempo: $s(t + \Delta t) > s(t)$ se $\Delta t > 0$ (a distância indicada no conta-quilómetros continua a aumentar, ainda que o carro volte para trás).

Esta “velocidade média” **não é** o módulo do vector velocidade média, tal como foi aqui definido (eq. 2.5):

$$\|\vec{v}_m\| = \frac{\|\vec{\Delta r}\|}{\Delta t},$$

pois, em geral, o módulo do deslocamento, $\|\vec{\Delta r}\|$, é diferente do comprimento da trajectória, Δs : veja-se, por exemplo, qualquer movimento com regresso à posição inicial, em que o módulo do deslocamento é sempre nulo.

Os conceitos de física aplicam-se a uma variedade de situações muito mais vasta do que a da nossa experiência corrente. Têm que ser adequados à descrição de movimentos de carros e comboios, mas também de planetas, sondas espaciais, moléculas, átomos,

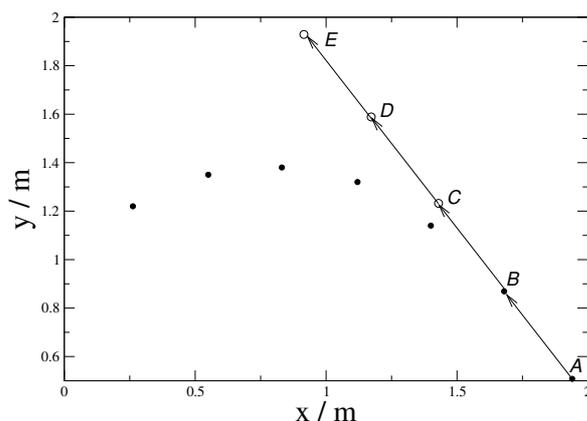


Figura 2.11: Se o vector velocidade média for constante, deslocamentos em intervalos de tempo iguais são iguais e o movimento é retilíneo.

electrões etc. Nem sempre sabemos de antemão a trajectória, para que baste indicar a distância percorrida para sabermos onde está um corpo.

2.3.4 Movimento Uniforme

Que tipo de movimento obtemos se todas as coordenadas do vector velocidade média forem constantes? A trajectória pode ser curva?

Reparemos novamente no movimento registado na tabela 2.1 da página 41.

Na figura 2.11 os pontos a cheio pertencem à trajectória e estão separados por intervalos de tempo de $\Delta t = 0,1$ s. O vector \vec{AB} é o deslocamento entre $t = 0$ s e $t = 0,1$ s. A velocidade média nesse intervalo é

$$\vec{v}_m = \frac{1}{0,1} \vec{AB} = 10\vec{AB}.$$

Se a velocidade média em cada intervalo não variasse, os deslocamentos seguintes seriam idênticos a \vec{AB} : os pontos da trajectória seriam C, D, E, \dots : a trajectória seria retilínea.

No **movimento uniforme retilíneo** o vector velocidade média é o mesmo em qualquer intervalo de tempo. A trajectória é uma linha recta.

Equação do movimento uniforme rectilíneo.

A velocidade média da coordenada $x(t)$, num intervalo entre dois instantes t_1 e t_2 , não é mais do que o declive da recta que une os dois pontos com estas abcissas no gráfico de $x(t)$,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}.$$

Este valor é o mesmo para quaisquer dois valores das abcissas t_i e t_f se, e só se, o gráfico de $x(t)$ for uma linha recta.

Recordemos a equação da recta da geometria cartesiana,

$$y = mx + b.$$

Para um gráfico de x (ordenada) em função de t (abscissa), a equação tem a forma

$$x = mt + b.$$

A constante b é a ordenada na origem, isto é, o valor de x para $t = 0$. Muitas vezes designa-se por x_0 .

Por outro lado, como o declive é a coordenada x da velocidade do movimento em qualquer intervalo de tempo, podemos escrever:

$$\boxed{x(t) = v_x t + x_0} \quad (2.6)$$

Se o movimento for uniforme e rectilíneo, todas as coordenadas terão velocidades médias constantes e, portanto:

$$\boxed{y(t) = v_y t + y_0} \quad (2.7)$$

Estas equações caracterizam um movimento rectilíneo e uniforme de velocidade:

$$\vec{v}_m = (v_x, v_y).$$

▷ Actividade 2.1

A fig. 2.13 mostra um exemplo de um movimento de um carro sobre uma calha horizontal, em que o movimento é quase uniforme: o gráfico de $x(t)$ é próximo de uma recta, o que significa que a velocidade variou pouco neste movimento.

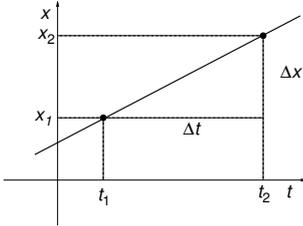


Figura 2.12: Se $x = mt + b$ o declive da recta, é $m = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$.

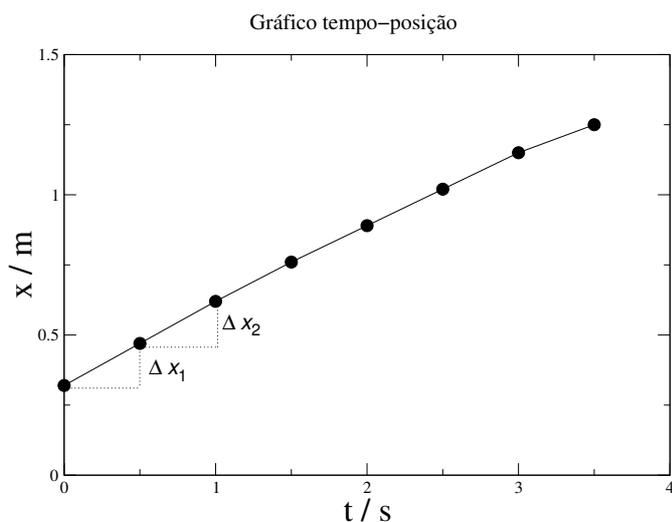


Figura 2.13: Os círculos são os pontos experimentais; a linha tem como finalidade facilitar a visualização do gráfico. A velocidade média nos dois intervalos representados é a mesma, pois $\Delta x_1 = \Delta x_2$ e os dois intervalos de tempo também são iguais. Os três primeiros pontos estão sobre uma recta.

2.4 Velocidade instantânea

Um filósofo grego chamado Zenão (495?-435? A.C.)³ sustentava que o movimento é impossível. Dava o exemplo de um flecha. Em cada instante a flecha ocupa uma dada posição. Nesse instante não se move: não pode ocupar duas posições no mesmo instante. Mas se em nenhum instante se move, nunca se move! O movimento é impossível.

Se pensarmos um pouco, vemos que, até agora, associamos a cada instante uma posição, mas o conceito de velocidade média está apenas definido para um intervalo finito de tempo. Imaginemos que tiramos uma fotografia no preciso momento em que Michael Schumacher ultrapassa um adversário. Olhamos para a fotografia e vemos os dois carros a par. Podemos dizer que um deles, *naquele instante*, tem velocidade superior ao outro? Ou será que Zenão tem razão?

³A obra de Zenão só chegou até nós através de outros autores, como Aristóteles. Zenão pertencia a uma escola de pensamento que defendia que a realidade era uma e imutável. O tempo e a mudança são ilusões. Zenão tornou-se famoso por uma série de paradoxos que pretendiam mostrar a inconsistência lógica do movimento.

2.4.1 Movimento com velocidade variável

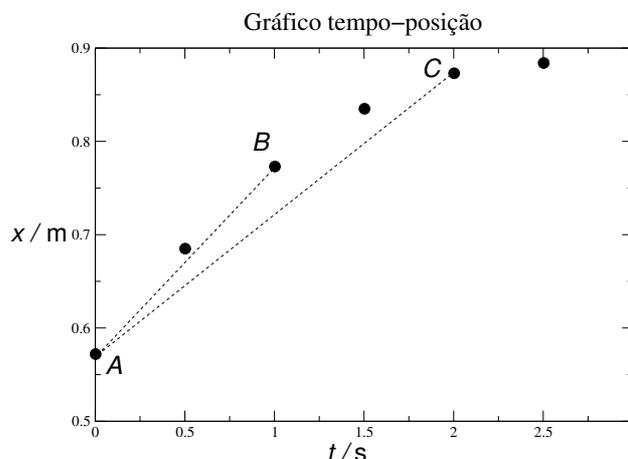


Figura 2.14: Gráfico de tempo-posição para movimento numa calha linear inclinada.

Vamos responder a Zenão, começando por analisar um exemplo concreto. Como de costume, olhamos primeiro para um movimento rectilíneo que envolve apenas uma coordenada.

Na Actividade 2.1, agora com o carro a subir uma calha inclinada, foram obtidos os resultados da tabela 2.3. O gráfico correspondente está na Fig. 2.14.

O gráfico mostra, claramente, que o movimento não é uniforme pois os pontos experimentais (t_i, x_i) não definem uma recta. Se o movimento entre $t = 0\text{ s}$ e $t = 2,0\text{ s}$ (A e C) fosse uniforme, os pontos intermédios ocorreriam sobre a linha a tracejado entre A e C . Ora o deslocamento no primeiro segundo, por exemplo, foi superior ao que seria nesse caso (ordenada de B acima da linha). Conclusão: neste movimento a velocidade da coordenada $x(t)$ variou.

Usando os dados da Tabela 2.3, podemos calcular a velocidade média de $x(t)$ para intervalos de tempo sucessivamente *decrecentes*. Os resultados estão na Tabela 2.4: à medida que o intervalo vai diminuindo, a velocidade média vai aumentando.

Exercício: usando os valores da Tabela 2.3, calcular os valores da Tabela 2.4.

Se imaginássemos continuar este processo para intervalos de tempo

t/s	x/m
0,00	0,58
0,5	0,69
1,00	0,77
1,50	0,84
2,00	0,87
2,50	0,88

Tabela 2.3: Movimento linear numa calha inclinada.

t_i/s	t_f/s	$v_m/\text{m s}^{-1}$
0,0	2,5	0,12
0,0	2,0	0,15
0,0	1,5	0,17
0,0	1,0	0,19
0,0	0,5	0,22
0,0	0,0	?

Tabela 2.4: Velocidades médias para intervalos de tempo sucessivamente decrescentes e com início em $t = 0$.

cada vez menores, o que aconteceria aos valores da coluna das velocidades médias?

Um gráfico dos valores de v_m em função de $\Delta t = t_f - t_i$ (Fig. 2.15) *sugere* a resposta. Parece que, para $\Delta t \rightarrow 0$, $v_m \rightarrow v \approx 0,24 \text{ m s}^{-1}$. Esse valor poderia ser identificado com a velocidade *no instante* $t = 0$. Contudo, sejamos honestos: dos dados da tabela 2.4, nunca poderíamos calcular este valor, pois não temos qualquer informação sobre o que se passa para intervalos de tempo inferiores a $0,5 \text{ s}$.

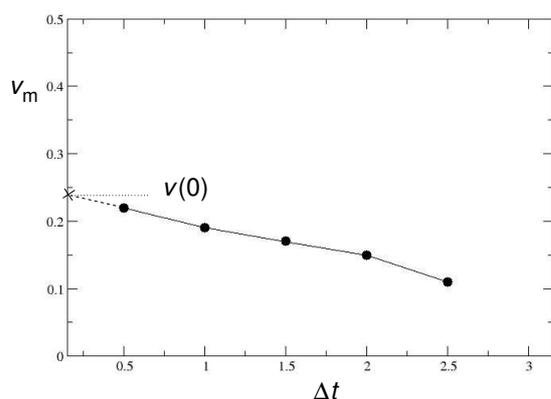


Figura 2.15: À medida que consideramos intervalos de tempo cada vez menores, a velocidade média aumenta. Os valores parecem tender para o valor marcado no gráfico que pode ser identificado com a *velocidade no instante* $t = 0$.

Mas podíamos ter! É possível medir com intervalos de tempo cada vez menores e nada nos impede de supor que conhecemos a posição do carro em cada instante, $x(t)$, e não apenas nos valores indicados na Tabela 2.3.

Imaginemos que $x(t)$ era representado pela curva do gráfico da figura 2.16. A linha recta que une A a C representa um movimento uniforme com uma velocidade igual à velocidade média no intervalo $[t_A, t_C]$. Se considerarmos intervalos menores $[t_A, t_B], \dots$, obtemos rectas com declives crescentes que representam movimentos com velocidades superiores. É claro do gráfico que, se fizermos o intervalo tender para zero (podemos imaginar B a deslizar sobre a curva em direcção a A), estas rectas vão tender para a *tangente*

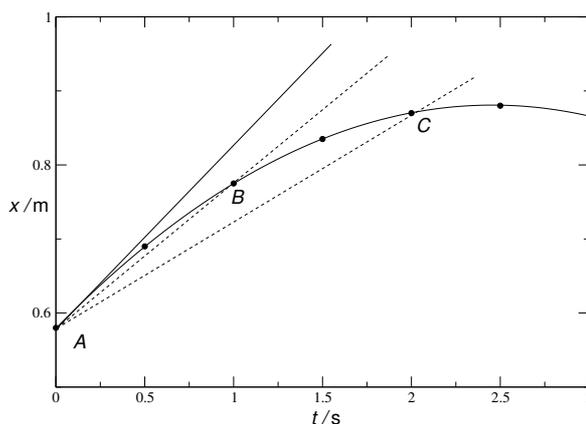


Figura 2.16: Se imaginarmos B a deslizar sobre a curva até A , as secantes têm um limite que é a tangente à curva em A .

ao gráfico no ponto A . Ou seja, se tomarmos o limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_A + \Delta t) - x(t_A)}{\Delta t},$$

obtemos o declive da tangente à curva no ponto A .

Podemos agora responder a Zenão. É verdade que num dado instante t só temos uma posição. Com uma única posição não podemos definir nem deslocamento nem velocidade. Mas, considerando intervalos de tempo $[t, t + \Delta t]$ com Δt a tender para zero, o limite

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (2.8)$$

é a velocidade da coordenada $x(t)$ no instante t . Ao contrário da velocidade média, $v_x(t)$ não está associada a nenhum intervalo de tempo particular. Em cada instante, o movimento na direcção Ox é caracterizado por uma posição, $x(t)$, e por uma velocidade *instantânea*, $v_x(t)$, definida por este processo de limite.

Voltando ao exemplo da fotografia tirada a Schumacher no momento em que ultrapassa o adversário, podemos dizer que a fotografia pode não ter a informação necessária para sabermos quais as velocidades dos dois carros naquele instante (se o tempo de exposição for suficientemente rápido não terá). Mas o movimento de cada carro, naquele instante, é definido por uma posição (visível na foto) e *uma velocidade* (que pode não estar visível na foto).

Neste momento a Eq. 2.8 pode parecer um pouco intimidativa. Como é que se calcula aquele limite?

Em muitos casos estes limites podem-se calcular exactamente e em matemática estudam-se métodos para os determinar. Neste momento, o mais importante é perceber o sentido da definição da eq. 2.8. Com uma calculadora, e alguma paciência, podemos-nos convencer que estes limites existem e calculá-los de modo muito aproximado. A problema 2.8 sugere um cálculo deste tipo. O exemplo seguinte é um cálculo exacto, mas num caso muito simples.

Exemplo: vimos atrás que um movimento rectilíneo uniforme era representado por uma recta, num gráfico de x em função de t . A equação de movimento é :

$$x(t) = v_0 t + x_0, \quad v, x_0, \text{ constantes.}$$

A velocidade instantânea, $v_x(t)$, é

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v_0 \times (t + \Delta t) + x_0) - (v_0 t + x_0)}{\Delta t}$$

ou seja,

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_0 = v_0.$$

Como v é uma constante, o limite é v . Ou seja, num movimento rectilíneo uniforme a velocidade é a mesma em qualquer instante e igual ao declive da recta de x em função de t .

2.4.2 Vector velocidade instantânea

Ao fim e ao cabo, podemos pensar na velocidade instantânea como sendo uma velocidade média num intervalo de tempo muito, muito curto. Podemos, então, definir um vector velocidade instantânea como sendo o vector cujas coordenadas são as velocidades instantâneas de cada coordenada de posição.

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \vec{v}(t) &= (v_x, v_y) = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Esta definição decorre naturalmente da do vector velocidade média. (ver eq. 2.3 da página 47).

Qual é a direcção da velocidade instantânea?

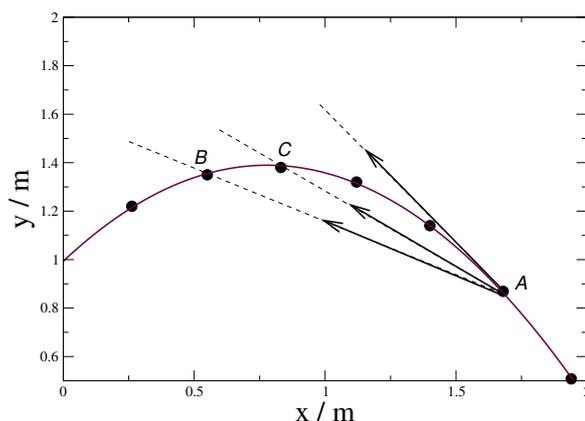


Figura 2.17: A velocidade instantânea tem a direcção da tangente à trajectória.

Atentemos de novo no exemplo que temos vindo a considerar (Fig. 2.17). A linha recta que une o ponto A a B seria a trajectória de um movimento uniforme, com uma velocidade igual à velocidade média no intervalo entre t_A e t_B . Se considerarmos um intervalo menor, obtemos uma direcção diferente. Se imaginarmos o ponto C a aproximar-se de A ($\Delta t = t_C - t_A \rightarrow 0$), vemos que um movimento uniforme com velocidade igual à velocidade instantânea, em $t = t_A$, terá uma direcção tangente à trajectória em A . Assim:

A velocidade instantânea $\vec{v}(t)$ é um vector tangente à trajectória na posição do corpo no instante t .

Norma da velocidade instantânea

Na secção 2.3.3 (página 47) chamamos a atenção para o facto de a norma do vector velocidade média

$$\|\vec{v}_m\| = \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta t}$$

não ser aquilo que em linguagem comum chamamos velocidade média

$$\text{velocidade média} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A norma do vector deslocamento é a distância entre os pontos inicial e final, não a distância percorrida Δs .

Acontece que, quando o intervalo de tempo Δt tende para zero, estas duas grandezas têm o mesmo limite, que é a norma da velocidade instantânea:

$$\|\vec{v}(t)\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A grandeza a que nos referimos na linguagem corrente, velocidade, aquilo que tem limites impostos pelo código da estrada, é então a **norma do vector velocidade instantânea**.

Na língua inglesa usa-se a palavra *speed* para distinguir este conceito do de *velocity*, palavra reservada para a grandeza vectorial. Em português foi proposto usar a palavra **celeridade** para significar o equivalente a *speed*.

No entanto, até hoje, ainda ninguém foi multado por excesso de *celeridade*!

2.5 Aceleração

O conceito de **aceleração** desempenha um papel fundamental nas leis do movimento. Mais uma vez esta palavra é usada em Física com um significado muito preciso.

Na linguagem corrente quando dizemos:

Ela está muito acelerada!

referimo-nos, talvez, a um estado de agitação fora do normal. Nesta frase está implícita a ideia que a pessoa em causa não está sempre assim, a sua agitação aumentou. Neste sentido há alguma relação (ténue) com o significado de **aceleração** em Física. Com efeito, a aceleração está relacionada com a *variação* de velocidade.

Felizmente já vimos atrás como podemos caracterizar variações de grandezas no tempo; só temos que aplicar esses conceitos à grandeza velocidade.

2.5.1 Aceleração média

Se a velocidade, $\vec{v}(t)$, variar, o movimento diz-se..., **variado**. Repare-se que estamos a falar do vector velocidade, não da sua

norma (a celeridade); a variação pode ser de direcção, de sentido, ou de norma.

A maneira de caracterizar a variação da velocidade, $\vec{v}(t)$, é idêntica à que usámos para caracterizar a variação de posição. Assim as seguinte definições são simples de entender.

A **aceleração média** de uma coordenada $x(t)$ num intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$ é a variação da coordenada correspondente da velocidade dividida pelo intervalo Δt :

$$a_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}.$$

A variação do vector velocidade entre dois instantes é, naturalmente, um vector:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1).$$

A variação por unidade de tempo do vector velocidade é o **vector aceleração**:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{j}.$$

Repare-se que não se trata de um conceito novo. Tal como a velocidade média, v_m , é a variação de uma coordenada, $x(t)$, por unidade de tempo,

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

a **aceleração**, a_m , é a variação de *velocidade*, $v_x(t)$, por unidade de tempo:

$$a_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

De um modo simples:

a aceleração média a_m está para a velocidade $v_x(t)$, assim como a velocidade média v_m está para a posição $x(t)$.

Temos pois um dicionário: se numa definição ou expressão envolvendo posição e velocidade, substituímos:

$$\begin{aligned}x(t) &\rightarrow v_x(t) \\v_m &\rightarrow a_m\end{aligned}$$

obtemos uma relação ou expressão válidas para velocidade e aceleração. Eis alguns exemplos:

- Uma aceleração média positiva significa que a velocidade aumenta entre os instantes inicial e final, $\Delta v_x > 0$. Uma aceleração negativa significa que $v_x(t)$ diminui entre o início e o fim do intervalo, $\Delta v_x < 0$.
- Se a velocidade for uma função linear do tempo (gráfico de v_x em função de t uma linha recta),

$$v_x(t) = mt + b \quad b, m \text{ constantes}, \quad (2.9)$$

a aceleração média é independente do intervalo considerado e é o declive da recta que representa $v_x(t)$ em função de t ,

$$a_m = m.$$

A constante b é a velocidade no instante $t = 0$, velocidade inicial (comparar com equação 2.6 da página 50): Ou seja,

$$v_x(t) = a_m t + v_0.$$

Acelerações negativas

Quando um atleta “acelera” para se destacar dos competidores, a coordenada da velocidade no eixo do movimento aumenta: a sua aceleração é positiva.

Mas ninguém “acelera” até parar, a não ser em Física. Nesse caso, a coordenada de velocidade está a diminuir. Na linguagem da Física é um movimento com aceleração... negativa.

Vejamos com mais cuidado os tipos de movimento que nos podem surgir. Para simplificar tomemos um corpo em deslocamento segundo o eixo Ox .

- Deslocamento, Δx , e velocidade, v_x , positivos: o corpo desloca-se no sentido positivo do eixo:

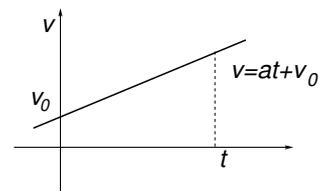


Figura 2.18: Movimento com aceleração constante.

- aceleração positiva: o valor de v_x está a crescer, movimento cada vez mais rápido (acelerado).
 - aceleração negativa: o valor de v_x está a diminuir em direcção a zero: movimento cada vez mais lento (retardado).
- Deslocamento, Δx , e velocidade, v_x , negativos: o corpo desloca-se no sentido negativo do eixo:
 - aceleração positiva: o valor de v_x está a crescer. Como é negativo, está a crescer em direcção a zero. O módulo de v_x está a diminuir: movimento cada vez mais lento (retardado).
 - aceleração negativa: o valor de v_x está a diminuir; como é negativo o seu módulo cresce. Movimento cada vez mais rápido (acelerado).

Se quisermos resumir, vemos que o que distingue um movimento em que o módulo da velocidade cresce (acelerado) ou diminui (retardado) é que no primeiro caso, o sinal das coordenadas de velocidade e aceleração são os mesmos; no segundo caso, são opostos.

2.5.2 Movimento Uniformemente Variado

O movimento de corpos sob acção do peso (em situações em que o atrito do ar não é importante) tem aceleração constante (movimento uniformemente variado) (ver Actividades 2.2 e 2.4). Vimos já que a equação da velocidade é

$$v_x(t) = a_x t + v_0. \quad (2.10)$$

Como é dada a dependência da posição em função do tempo?

Esta questão é respondida na Actividade 2.3 onde se conclui que

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t$$

ou

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t + x_0 \quad (x_0 \equiv x(0)) \quad (2.11)$$

▷ Actividade 2.3

▷ Desafio 2.2

Será possível mostrar directamente que a equação da velocidade, Eq. 2.10, corresponde, de facto, ao movimento expresso na equação 2.11? Nisso consiste o desafio 2.2.

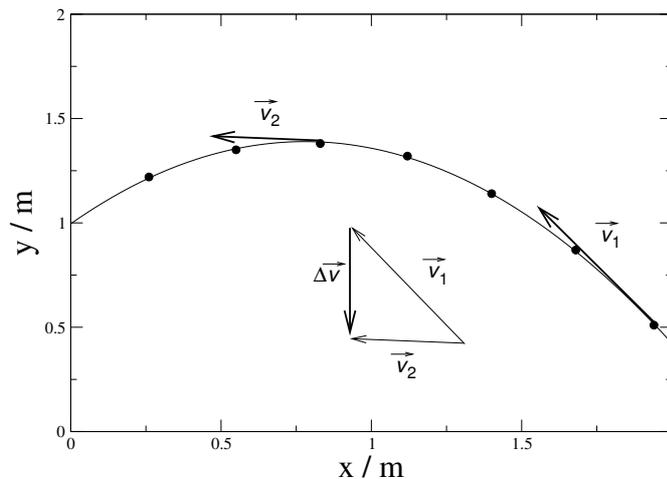


Figura 2.19: O vector velocidade, tangente à trajectória, roda quando a trajectória curva. O vector $\Delta\vec{v}$ aponta sempre para o lado para onde curva a trajectória. O vector aceleração média tem a direcção e sentido de $\Delta\vec{v}$.

Exemplo: Se a equação de movimento da velocidade for

$$v_x(t) = -5t + 3$$

a equação para a coordenada correspondente será

$$x(t) - x_0 = -\frac{5}{2}t^2 + 3t.$$

É evidente que o conhecimento da velocidade só nos permite calcular o *deslocamento*, $x(t) - x_0$. Não permite determinar x_0 , a posição inicial. Um corpo pode ter a velocidade especificada com *qualquer* posição inicial.

2.5.3 Direcção e sentido do vector aceleração

O vector aceleração está sempre dirigido para o interior da curva da trajectória.

O exemplo do projectil ilustra bem este resultado (fig. 2.19). O vector variação de velocidade, $\Delta\vec{v}$,

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

somado ao primeiro valor de velocidade, \vec{v}_1 , dá a velocidade no final do intervalo

$$\vec{v}_1 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_2.$$

A trajectória encurva, a tangente roda da direcção de \vec{v}_1 para a de \vec{v}_2 : O vector $\Delta\vec{v}$ e, consequentemente, o vector aceleração, que é $\Delta\vec{v}$ multiplicado por um escalar positivo, $1/\Delta t$, aponta no sentido da rotação da tangente.

Este exemplo mostra que a aceleração não é determinada apenas pela variação da norma da velocidade. A mudança de direcção numa trajectória curva implica sempre uma aceleração diferente de zero.

2.6 Sumário

Neste capítulo introduzimos os conceitos fundamentais para a descrição de qualquer movimento:

- deslocamento;
- velocidade;
- aceleração.

As afirmações seguintes resumem a nossa discussão, e o estudo deste capítulo deve conduzir a uma compreensão detalhada do seu significado. Não adianta decorá-las. Repetir com todas as vírgulas a definição de um conceito de Física nada tem a ver com a sua compreensão. Para compreender um conceito, como o de velocidade ou aceleração, temos que saber como se aplica, como se calcula, o que quer dizer, etc., em cada situação concreta em que possa ser evocado. Por isso, esta listagem destina-se apenas a recordar os principais momentos do desenvolvimento das ferramentas que introduzimos para descrever movimentos.

1. O movimento de translação de um corpo pode ser especificado por coordenadas, $(x(t), y(t))$ funções do tempo.
2. As variações de posição entre dois instantes definem o **vector deslocamento** nesse intervalo de tempo.
3. Deslocamentos em intervalos sucessivos somam-se para obter o deslocamento total.
4. A razão de um deslocamento pelo intervalo de tempo respectivo é a **velocidade média** nesse intervalo, isto é, o deslocamento por unidade de tempo.

5. Coordenadas de deslocamentos e velocidades podem ser positivas ou negativas conforme o movimento tem o sentido positivo ou negativo do eixo correspondente.
6. Se considerarmos intervalos sucessivamente mais pequenos, a velocidade média tende para um valor limite que é a **velocidade instantânea**.
7. A **aceleração** caracteriza a variação de velocidade com o tempo, do mesmo modo que a velocidade caracteriza a variação de posição. A **aceleração média** é a variação de velocidade por unidade de tempo num dado intervalo.
8. Um movimento em que uma coordenada da velocidade, $v_x(t)$, é constante

$$v_x(t) = v_0, \quad v_0, \text{ constante}$$

diz-se **movimento uniforme segundo esse eixo** e tem a seguinte lei de variação da coordenada correspondente com t

$$x(t) = v_0 t + x_0.$$

9. Um movimento de velocidade constante tem uma trajectória rectilínea e é uniforme segundo todos os eixos coordenados.
10. Um movimento em que uma coordenada da aceleração $a_x(t)$ é constante

$$a_x(t) = a_0, \quad a_0, \text{ constante}$$

diz-se **uniformemente** variado e tem velocidade e posição segundo esse eixo dadas, respectivamente, por

$$v_x(t) = a_0 t + v_0$$

e

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

(x_0 e v_0 são constantes que não dependem do valor da aceleração e correspondem às coordenadas de posição e velocidade, segundo esse eixo, no instante $t = 0$).

2.7 Questões, actividades e problemas

2.7.1 Actividades

2.1. Movimentos numa calha linear

Ver ficha da Actividade A18.

2.2. Movimento de queda livre

Ver ficha de Actividade A19.

2.3. Movimentos de velocidade variável

Ver ficha de Actividade A20.

2.4. Movimento de projectil registado em vídeo

Ver ficha de Actividade A21.

2.7.2 Questões

2.1. A órbita da Terra em torno do Sol é praticamente circular e a Terra descreve arcos iguais em intervalos de tempo iguais. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? (nesta questão tomamos um trimestre como sendo $1/4$ e um semestre $1/2$ de um ano).

- (a) O deslocamento da Terra, no primeiro trimestre, é igual ao do segundo.
- (b) O deslocamento da Terra, no primeiro semestre do ano, é igual ao do segundo semestre.
- (c) O deslocamento da Terra, no primeiro semestre tem a mesma norma e direcção que no segundo.
- (d) O deslocamento da Terra, num ano, vale $2\pi r$, em r é o raio da órbita.
- (e) O deslocamento da Terra, num ano, é nulo.

2.2. Numa prova de atletismo, mede-se uma velocidade média ou instantânea? Justificar.

2.3. Justificar a seguinte afirmação:

Na prova dos 100 metros planos a coordenada do vector velocidade média, na direcção da pista, e a celeridade coincidem. Na prova de 400 m (uma volta à pista) são muito diferentes: uma delas é zero.

2.4. Num movimento rectilíneo:

- (a) A direcção do vector velocidade pode variar? E o sentido? Justificar.
- (b) A aceleração pode ter uma direcção diferente da da trajectória? Justificar.
- 2.5. Um movimento com trajectória curva pode ter uma aceleração nula? Justificar.
- 2.6. Um estudante coloca a mão à frente de um sensor de movimento e realiza o seguinte movimento: aproxima a mão lentamente do sensor e depois, afasta-a, mais rapidamente, até à posição inicial.
- (a) Qual dos gráficos de x em função de t da figura 2.20, aparece no programa de aquisição? Justificar.
- (b) Escrever uma descrição verbal do tipo da indicada acima para os outros três gráficos.
- (c) Representar esquematicamente as velocidades e acelerações destes quatro movimentos, tendo particular atenção à determinação dos intervalos em que estas funções são positivas, negativas, crescentes ou decrescentes.

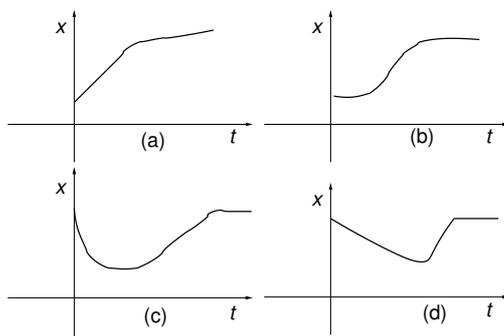


Figura 2.20: Gráficos de x em função de t .

- 2.7. Um corpo move-se ao longo do eixo Ox . Deslocou-se 10 m a uma velocidade média de 5 m s^{-1} e os seguintes 10 m a uma velocidade média de 2 m s^{-1} . Qual foi a sua velocidade média, neste deslocamento de 20 m :
- (a) 7 m s^{-1} ;
- (b) $20/7\text{ m s}^{-1}$;
- (c) $3,5\text{ m s}^{-1}$.

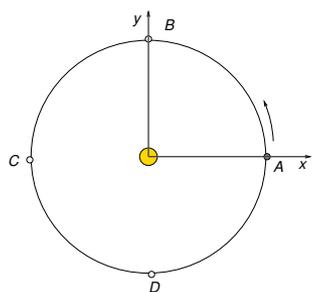


Figura 2.21: Órbita da Terra.

2.8. A fig. 2.21 mostra quatro posições (A a D) na órbita circular da Terra em torno do Sol. A norma da velocidade da Terra pode ser considerada constante em toda a órbita. Para o sistema de eixos indicado, responder, justificando às seguintes perguntas.

- (a) Quais as coordenadas de velocidade positivas, negativas ou nulas nos quatro pontos da órbita, A a D ?
- (b) Quais são as coordenadas da aceleração média que são positivas, negativas, ou nulas nos seguintes intervalos:
 - i. Entre A e B .
 - ii. Entre A e C .
- (c) Qual é a aceleração média no intervalo de um ano (período da órbita)?

2.9. Na Fig. 2.22 estão representados gráficos referentes a quatro movimentos em uma dimensão, dois representando a velocidade, (a) e (d), os outros dois a posição, (b) e (c).

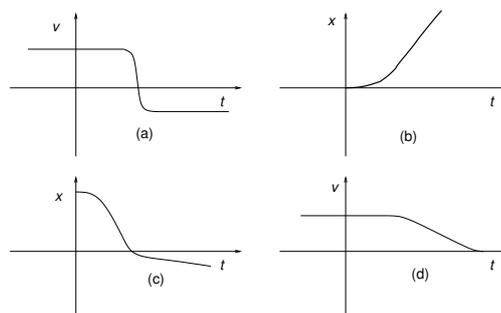


Figura 2.22: Dois gráficos de velocidade (a) e (d) e dois de posição (b) e (c) para quatro movimentos.

- (a) Identificar a qual dos seguintes movimentos corresponde cada gráfico:
 - i. Um automóvel a arrancar quando o semáforo passa a verde
 - ii. uma pedra a cair de uma certa altura, na vertical, para um lago;
 - iii. um comboio que pára ao chegar a uma estação;
 - iv. um carro PASCAR, equipado com magneto, que colide com outro em movimento.

- (b) Representar, esquematicamente, os gráficos de posição correspondentes a (a) e (d) e velocidade correspondentes a (b) e (c).

2.7.3 Problemas

2.1. Um homem persegue um trilho numa floresta. Desloca-se 500 m para Este, 500 m para Norte e 500 m para Sudeste.

- (a) A que distância está do ponto de onde partiu?
- (b) Que deslocamento tem que fazer para voltar ao ponto de partida?

2.2. Considerar a Tabela 2.3, da página 52.

- (a) Qual teria que ser o valor da coordenada x em $t = 1 \text{ s}$ para que a velocidade média no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $1,0 \text{ s}$ fosse a mesma que entre $t = 1,0$ e $2,0 \text{ s}$?
- (b) Qual teria sido, nesse caso, a velocidade média entre $t = 0,5 \text{ s}$ e $t = 1 \text{ s}$?

2.3. Foi considerada inconstitucional uma lei que permitia multar por excesso de velocidade os condutores cujo tempo de viagem entre duas portagens fosse inferior a um certo limite. O limite de velocidade é de 120 km h^{-1} .

- (a) Definir a grandeza velocidade a que se refere o código da estrada.
- (b) Para uma tolerância de 20 km h^{-1} acima do limite, e uma distância entre portagens de 300 km , qual é o tempo mínimo que um condutor poderia demorar sem ser multado?

2.4. Dois automóveis fazem uma viagem de 200 km seguindo o mesmo percurso. O primeiro demora duas horas, fazendo uma “média” de 120 km h^{-1} na primeira hora. O segundo fez a mesma média de 120 km h^{-1} nos primeiros 100 km da viagem.

- (a) Qual foi a velocidade (celeridade) média do primeiro automóvel na segunda hora?
- (b) O segundo automóvel fez a média determinada na alínea anterior nos segundos 100 km da viagem. Qual dos carros fez a viagem mais depressa? Por quanto tempo?

- 2.5. Um esfera move-se num calha linear horizontal e nos instantes $t = 1 \text{ s}$ e $t = 2,5 \text{ s}$ ocupa as posições de coordenadas $x = 0,78 \text{ m}$ e $x = 0,22 \text{ m}$, respectivamente. Supondo que o seu movimento é uniforme,
- determinar a equação do movimento $x(t)$;
 - calcular a coordenada x da esfera em $t = 2 \text{ s}$.
- 2.6. Estou no início de um corredor. Começo a andar ($t = 0$), desloco-me 8 m em 5 s e páro nessa posição.
- Qual é a minha velocidade média no intervalo entre $t = 0$ e $t = 5 \text{ s}$?
 - Qual é a minha velocidade média entre $t = 0$ e $t = 10 \text{ s}$?
 - Explicar os resultados anteriores usando um gráfico de posição em função do tempo. Traçar rectas cujos declives correspondam às respostas das alíneas anteriores.
- 2.7. Um automóvel acelera de 0 a 100 km h^{-1} em 6 s em linha recta.
- Qual é a sua aceleração média neste intervalo de tempo?
 - Se a sua aceleração for constante, qual é o seu deslocamento entre $t = 0$ e $t = 6 \text{ s}$? Qual é a sua velocidade média neste intervalo?
 - Qual é sua velocidade ao fim de 3 s (aceleração constante)?
 - Em que intervalo de tempo foi maior a sua variação de energia cinética, nos primeiros 3 segundos ou nos últimos três (aceleração constante)?
- 2.8. **Cálculo de velocidade instantânea com calculadora.** Suponhamos um movimento com a lei:

$$x(t) = 2t^2.$$

Queremos calcular a velocidade instantânea em $t = 1$. Ou seja:

$$v(1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(1 + \Delta t) - x(1)}{\Delta t}. \quad (2.12)$$

- Usando uma calculadora, calcular a razão que aparece nesta equação para valores cada vez mais pequenos de Δt : $1; 0,1; 0,01, \dots$. Estimar o valor do limite.

- (b) Este movimento tem a forma de um movimento uniformemente variado

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

a que corresponde uma velocidade

$$v(t) = at + v_0$$

Verificar se o valor obtido na alínea anterior é confirmado por esta expressão.

- (c) Representar graficamente $x(t)$. Traçar a recta que passa no ponto de abcissa $t = 1$ e ordenada $x = 2$ e tem o declive calculado na alínea (a).

2.9. Dois veículos iniciam um movimento rectilíneo, partindo do repouso, lado a lado, com uma aceleração de 4 m s^{-2} . O primeiro, ao fim de um segundo, passa a ter aceleração nula. A aceleração do segundo veículo mantém-se constante.

- (a) Qual é a velocidade dos veículos ao fim de 1 s ?
- (b) Escrever as equações que determinam as respectivas velocidades em função do tempo. Representá-las graficamente.
- (c) Determinar a distância entre a posição do primeiro veículo ao fim de dois segundos e a sua posição inicial.
- (d) Calcular a distância entre os dois veículos ao fim de dois segundos de movimento.

2.10. No movimento de um corpo ao longo do eixo dos xx , a coordenada de posição em função do tempo é dada pela equação:

$$x(t) = 5(t - 1)^2$$

(x em metros e t em segundos).

- (a) Determinar:
- i. a velocidade média entre $t = 0$ e $t = 1$.
 - ii. A velocidade média entre $t = 1$ e $t = 2$.
 - iii. O deslocamento entre $t = 1$ e $t = 3$.
- (b) Mostrar que este movimento tem aceleração constante e determiná-la. Calcular a velocidade e posições iniciais ($t = 0$).

- (c) Representar graficamente x em função de t entre $t = -2$ e $t = 2$. Inspecionando o gráfico, determinar os intervalos de tempo em que a velocidade instantânea é negativa e aqueles em que é positiva.

- 2.11. O movimento de um corpo é determinado pelas seguintes equações para as suas coordenadas num sistema de eixos ortogonal:

$$\begin{aligned}x(t) &= 2t^2 + 5t \\y(t) &= -2t^2 + 1.\end{aligned}$$

- (a) Quais são as equações que determinam as respectivas coordenadas de velocidade $v_x(t)$, $v_y(t)$?
- (b) Qual é a direcção da velocidade inicial $\vec{v}(0)$?
- (c) Qual é a direcção e norma da aceleração deste movimento?

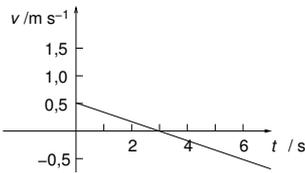


Figura 2.23: Que movimento é este?

- 2.12. O gráfico da figura A.1 ao lado corresponde ao movimento de um carro numa calha.

- (a) Em que instante inverte o carro o sentido de movimento?
- (b) Em que instante volta o carro a estar na sua posição que ocupava no instante $t = 0$? Qual foi o seu deslocamento nesse intervalo?
- (c) Qual é a aceleração deste movimento?
- (d) A calha está horizontal e o carro desloca-se ligado por um fio, que passa numa roldana, a uma massa suspensa. A massa subiu ou desceu, neste movimento?

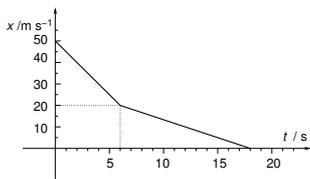


Figura 2.24: Que movimento é este?

- 2.13. O gráfico da figura 2.24 representa a coordenada de posição de um disco que se desloca em linha recta sobre um lago gelado.

- (a) Este movimento é uniforme? Justificar.
- (b) Representar o correspondente gráfico de velocidade.
- (c) Qual foi a aceleração média entre o instante inicial e o instante final ($t = 18$ s) ?
- (d) Se a velocidade do disco não se alterasse quando $t = 6$ s, qual seria a sua posição ao fim dos 18 s? Em que instante passaria na origem?

- 2.14. Um automóvel desloca-se numa recta à velocidade de 80 km h^{-1} . O condutor avista um obstáculo e trava. O tempo de reacção do condutor é de $0,2 \text{ s}$ (tempo que decorre entre o instante em que avista o obstáculo e inicia a travagem) e a aceleração do automóvel em travagem é de -4 m s^{-2} .
- Quanto tempo demora o automóvel a imobilizar-se, desde que o condutor avista o obstáculo?
 - Qual é a sua velocidade ao fim de um segundo de travagem?
 - Que distância percorre o automóvel antes de se imobilizar?
- 2.15. O gráfico da Fig 2.25 representa a variação de velocidade de um corpo que é largado de uma altura h . Ao fim de cinco segundos de queda abre-se um pequeno para-quedas e a sua velocidade diminui bruscamente. Atinge o solo ao fim de 21 segundos de queda.

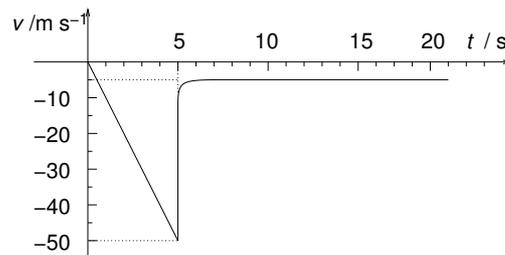


Figura 2.25: Velocidade em função do tempo para um corpo em queda com abertura de para quedas.

- Qual foi a aceleração do corpo nos primeiros 5 s de queda?
 - Determinar a equação que descreve a variação da velocidade com o tempo nos primeiros 5 s de queda.
 - Qual foi a aceleração média nos 21 s de queda?
 - De que altura h caiu o corpo? A que altura estava quando abriu o para quedas?
 - Desenhar o gráfico da posição z do corpo (distância na vertical ao solo) em função do tempo.
- 2.16. A fig. A.2 mostra a trajectória de uma bola de futebol após a marcação de um livre. No plano da trajectória a velocidade

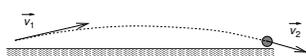


Figura 2.26: Trajectória de uma bola de futebol

inicial da bola tem coordenadas (eixo Ox horizontal e Oy vertical):

$$\vec{v}_1 = (30, 5) \text{ m s}^{-1}$$

- (a) Qual é a norma da velocidade inicial da bola em quilómetros por hora?
- (b) Se a aceleração média do movimento no primeiro segundo de vôo, fosse a aceleração da gravidade,

$$\vec{a} = (0, -10) \text{ m s}^{-2},$$

qual seria o vector velocidade final ($t = 1 \text{ s}$)? Qual seria a respectiva norma?

- (c) A resistência do ar ao movimento da bola deve contribuir para reduzir velocidade da bola. Qual será o sinal da coordenada x da aceleração média? Justificar.

2.7.4 Desafios

2.1. Como usar a definição da caixa 2.2, da página 40, para calcular o perímetro de um círculo? Para evitar trabalhar com um curva fechada consideremos meio círculo.

- (a) Se aproximarmos o perímetro de meio círculo pelo comprimento do segmento entre A e B obtemos

$$S_2 = 2r.$$

Que valor obtemos se usarmos o ponto intermédio C e substituirmos o perímetro pela soma dos comprimentos AC e CB ?

- (b) Mostrar que perímetro de meio círculo pode ser dado pelo limite da seguinte expressão quando n tende para infinito:

$$S_n = 2rn \sin\left(\frac{180^\circ}{2n}\right).$$

Sugestão: ver a figura 2.28

- (c) Usando a máquina de calcular, estimar esta expressão para $n = 100, 1000, 10000$ e 100000 ($r = 1$). Comparar com o valor de π .

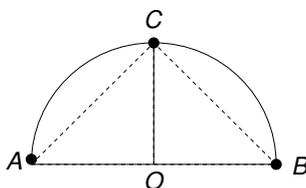


Figura 2.27: Meio círculo.

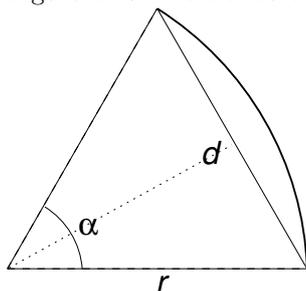


Figura 2.28: Qual é o comprimento, d , da corda?

2.2. A coordenada $x(t)$ de um movimento uniformemente variado é dada pela equação (ver página 60):

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

- (a) Obter a seguinte expressão para a velocidade média desta coordenada $x(t)$ no intervalo $[t, t + \Delta t]$:

$$v_m = v_0 + at + \frac{a}{2}\Delta t$$

- (b) Usando a definição 2.8, obter a velocidade instantânea $v_x(t)$ e comparar com a equação 2.10.
- (c) Mostrar que, para um movimento uniformemente variado, a velocidade média num dado intervalo de tempo é igual à velocidade instantânea no ponto médio desse intervalo.

- 2.3. Numa das actividades do 10º ano (Actividade A5) foi estudada a queda livre de um corpo, tendo-se verificado que a velocidade, ao fim de uma queda de uma distância h , era dada pela expressão

$$v^2 = 2gh.$$

- (a) Mostrar que as equações de $x(t)$ e $v(t)$ para movimento uniformemente acelerado com velocidade inicial nula, dão este resultado, desde que a aceleração seja g (na vertical, sentido descendente).

- 2.4. Considerar um corpo em movimento rectilíneo com aceleração constante $\vec{a} = a\hat{i}$.

- (a) Usando as equações de movimento para $v_x(t)$ e $x(t)$ mostrar que a variação de energia cinética do corpo é dada por

$$\Delta E_c \equiv E_c(t) - E_c(0) = ma \times \Delta x(t)$$

- (b) Qual é o trabalho realizado sobre este corpo neste deslocamento? Qual é o valor da força correspondente?

Capítulo 3

Uma conversa com o meu tio

Tenho que vos falar do meu tio Alberto. É uma personagem...

Lá em casa todos o acham meio estranho e não admira: ele é físico; e da pior espécie. Diz-se físico teórico, o que significa que nem precisa de fazer coisas nos laboratórios. Não inventa nada que sirva para alguma coisa. Como ele próprio diz, pode “fazer Física” em qualquer lado.

É fácil ver quando ele está a “fazer Física”. A gente fala-lhe e só recebe a resposta cinco minutos depois. Já ouvi dizer que se pisarmos uma girafa, ela demora uns segundos a saber, porque tem um pescoço muito comprido. Mas com o meu tio não é bem assim. Acho que é mais como quando os computadores ficam a fazer barulhinhos esquisitos e a gente mexe o rato e só passado meia-hora é que ele se mexe no ecrã: o CPU está muito ocupado. Com o meu tio também deve ser isso: o CPU não tem tempo para atender os “periféricos”.

Um dia, por razões que agora não interessam, vi-me com ele numa viagem de comboio de Porto-Lisboa. Para cúmulo estava sem baterias no “discman” e no telemóvel; e nenhum sítio para os carregar; e ainda lhes chamam comboios de luxo?

Sem nada que fazer, resolvi perguntar-lhe umas coisas sobre a Física que estava a dar na escola. Sabem como é, no Natal pode pingar qualquer coisa do tio, se a gente for simpática.

- Tio, há lá umas coisas que a Prof. de Física disse que me fazem confusão.

(Um minuto de espera. Estava a fazer Física)

- O que foi? diz, P.

- Interrompi-o?

- Não tem importância. O que eu estava a pensar não ia dar em nada. Conta lá.

- Bem, é assim: a Prof. diz que um corpo sem forças continua a mexer-se. Não é preciso forças para haver movimento. Ora, eu acho que é.

- Ai sim? E porque dizes isso?

- É só bom senso, tio. As coisas não se põem a mexer sózinhas. É sempre preciso empurrá-las. E quando a gente deixa de as empurrar elas param.

- Ok, vamos fazer uma experiência?

- Aqui!?

- Por que não? Tenho aqui uma moeda.

E pousou-a na mesa.

- Como vês ela não se mexe.

- É o que eu disse. Se ninguém a empurrar...

- Então dá-lhe um piparote.

Assim fiz. A moeda deslocou-se cerca de 20 cm.

- Está a ver, tio. A moeda pára logo, se eu não continuar a empurrá-la.

- Espera aí P. Não é verdade que a moeda continuou a mover-se depois de o teu dedo ter perdido contacto? Já não estavas a exercer um força. O que fez com que a moeda se deslocasse mais um pouco?

- Bem, acho que a força que lhe dei ainda não se tinha gasto. Não há assim uma quantidade de movimento ou qualquer coisa assim? Deve ser isso.

- Então achas que há qualquer coisa que o teu piparote passou para a moeda, mas que se gasta, e quando acaba ela pára?

- Acho que sim. Parece lógico.

- Vamos fazer uma segunda experiência. Mas agora dá mais jeito fazê-la no chão, aqui na coxia central da carruagem. Tenho aqui outra moeda igual à primeira. Pega nas duas e vais fazer o seguinte. Pousas uma no chão e dás-lhe um piparote. E pões a outra a rolar.

Nesta altura estávamos os dois de cócoras na coxia central e havia várias caras franzidas a olhar para nós. Mas fiz o que o meu tio disse. A moeda que eu empurrei parou logo ali frente. O que é que ele esperava? O outra rolou até ao fundo da carruagem e só parou porque chocou contra um sapato; que, por acaso, não estava vazio. Tinha um pé dentro e o resto que costuma vir agarrado a pés: neste caso o revisor do comboio. Olhou para nós os dois com olhar de poucos amigos, mas o meu tio nem deu por isso. Sentou-se, calmamente, e continuou:

- Viste que uma das moedas só parou no fim da carruagem. Achas que a empurraste mais do que a outra? Deste-lhe mais dessa coisa que chamaste quantidade de movimento?

- Bem, de facto acho que não. Antes pelo contrário. Bastou um toque para a pôr a rolar.

- Então por que é que se deslocou muito mais do que a outra?

- Deve ser por causa do atrito, não é? A outra moeda escorregou sobre o chão. O atrito com o chão é que a fez parar mais cedo.

- Espera aí. Não estás a dizer que o chão está a exercer um força sobre a moeda?

- Acho que sim.

- E quando essa força é mais pequena, como quando a moeda rola, ela demora mais a parar?

- Ah, já estou a ver onde quer chegar. Vai-me dizer que se não existissem essas forças como o atrito a moeda não pararia.

- Exacto. Não foi isso, no fundo, que a tua Prof. te disse? Se não houver forças, o estado de movimento não se altera. O que está parado fica parado. Mas o que estiver em movimento, continua em movimento.

- Realmente, começa a fazer algum sentido. O que o tio está a dizer é que quando as coisas estão em movimento e ninguém está a “empurrá-las”, isso não quer dizer que não haja forças como o atrito que as fazem diminuir de velocidade e parar.

- Exacto. E até te posso dar um exemplo ainda mais convincente. Estende a mão. Segura neste berlinde.

Tirou um berlinde do bolso e pousou-mo na palma da mão.

- Se o largares, o que acontece?

- Ora essa, cai.

- Porquê?

- Por causa do peso. Atracção da Terra, gravidade, blá-blá-blá, essa cena já a dei no 9º ano.

- Então cai porque a Terra atrai o berlinde com uma força, o peso do berlinde, com a direcção do centro de Terra.

- Certo.

- Mas agora não está a cair. Qual é a força total sobre o berlinde?

- Bem, calculo que a minha mão é que exerce uma força que somada com o peso dá zero.

- Então concordas que a força total sobre o berlinde é zero.

- Claro. Ele está aqui paradinho, não está?

- Olha para ali, no fundo da carruagem, para aquele letreiro luminoso. O que diz?

- Levantei os olhos e reparei que de facto havia um letreiro por cima da passagem para a outra carruagem.

- De momento diz 145 km h^{-1} . É a velocidade do comboio.

- E...?

De repente atingiu-me! O meu berlinde, para o pessoal que estava em terra, estava a deslocar-se a 145 km h^{-1} . E eu acabava de dizer que a força total sobre ele era nula!

- Hummm, acho que me comeram a cabeça¹. Será que ao segurar no berlinde e ao estar a andar a 145 km h^{-1} não estou a exercer uma força sobre ele?

- Pensa um pouco. Sentes alguma coisa diferente do que se estivesse a segurar o berlinde no teu quarto, em casa? Se o comboio, em vez de 145 km h^{-1} , estivesse a andar a duzentos sentirias alguma coisa diferente na tua mão?

- Realmente, tem razão. Sinto exactamente o mesmo se estivesse parado em casa.

- É verdade. Enquanto o comboio não mudar de velocidade tudo se passa aqui dentro como se estivesse em tua casa. Se deixares cair o berlinde ele cai aos teus pés, não à frente nem atrás; não precisas de especial cuidado para deitares água num copo; se atirares o berlinde para ar, na vertical, ele cai na tua mão. Repara que para uma pessoa fora do comboio a tua mão muda de sítio enquanto

¹“Acho que fui enganado”. (*nota do tradutor*)

o berlinde está no ar. Mas tu não precisas de te preocupar com isso, pois não? Claro se o comboio entrar numa curva, travar ou acelerar, ou balançar de um lado para o outro, tudo muda. Mas enquanto andar com velocidade constante, se não olhares lá para fora, nem notas que estás a andar.

Por isso, aqui dentro do comboio, um corpo sem forças aplicadas pode estar parado, exactamente como se estivesses na tua sala de estar. Mas, para quem está lá fora, está em movimento. Como vês, parece que a tua Prof. e o Newton, afinal, têm razão. As forças são necessárias para **alterar** o estado de movimento. Mas o movimento com velocidade constante não precisa de forças.

- Estou a ver. Então quando eu disse que se ninguém empurrar um corpo ele pára, estava a imaginar que, se ninguém o empurrava, não havia forças sobre ele. Mas estava errado. Há forças, como o atrito da mesa, só que não tão evidentes como os empurrões que nós damos. E é por causa dessa forças que os corpos páram. De outro modo continuariam em movimento.

- Ora nem mais! Compreendes agora?

- Vou pensar nisso.

E de facto pensei; mas não muito. Estas coisas profundas fazem-me dor de cabeça...

Capítulo 4

Leis de Newton

4.1 Um livro muito importante

Em 1687, Isaac Newton, professor de matemática da Universidade de Cambridge, na cátedra que hoje é ocupada por Stephen Hawking, publicou o que muitos consideram o mais importante livro científico da história da Humanidade: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ou, como é universalmente conhecido, os *Principia*.

Neste livro, escrito em latim (a primeira tradução para inglês data de 1729), Newton apresentou os resultados da sua investigação sobre movimento, na forma de três leis de aplicação universal a qualquer tipo de movimento, quer na Terra quer no Céu.

Quais são, então, as três leis de Newton? Só é precisa meia página para as escrever.

Primeira Lei

Na ausência de forças exteriores, um corpo em repouso mantém-se em repouso, e um corpo em movimento mantém o seu estado de movimento, com velocidade constante em direcção, sentido e módulo.

Segunda Lei

Um corpo actuado por uma força externa, \vec{F} , tem uma aceleração, \vec{a} , na mesma direcção e sentido da força, de

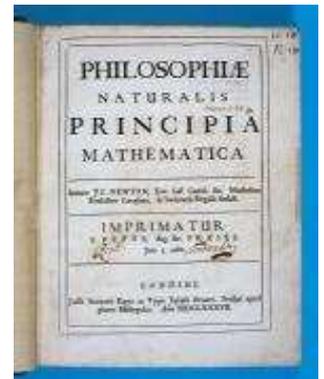


Figura 4.1: Página de título do exemplar 80 dos *Principia* de Newton.[9]

módulo proporcional ao módulo da força. A constante de proporcionalidade é a massa do corpo (uma grandeza sempre positiva). Isto é,

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (4.1)$$

Terceira Lei

Para toda a acção (força) de um corpo A sobre um corpo B , existe uma reacção (força) de B sobre A oposta (mesmo módulo, mesma direcção e sentido contrário).

Galileu já tinha formulado a primeira lei chamando-lhe **lei da inércia**:

▷ Lei da inércia

Um corpo não altera o seu estado de movimento a não ser que seja actuado por causas exteriores.

Galileu chamou inércia a esta resistência de um corpo à alteração do seu estado de movimento. De acordo com a segunda lei, quanto maior é a massa, m , mais difícil é alterar o estado de movimento: maior tem que ser a força para a mesma aceleração. A massa newtoniana quantifica o conceito de inércia de Galileu.

Por que é que estas leis são tão importantes?

Porque, complementadas pelo conhecimento das forças que os corpos exercem uns sobre os outros, permitem o cálculo de **qualquer** tipo de movimento.

Os *Principia* incluem também a formulação da lei que rege uma das forças fundamentais da Natureza, a Gravitação Universal. Newton mostrou como as órbitas dos planetas ou dos cometas se podiam deduzir matematicamente das suas três leis de movimento e da lei da Gravitação; explicou as variações da órbita da Lua devido à atracção do Sol; a precessão (variação de orientação) do eixo de rotação da Terra; a periodicidade e variações das marés.

Um dos sucessos mais espectulares da teoria newtoniana foi a descoberta do planeta Neptuno em 1846. A órbita de Urano mostrava desvios relativamente aos cálculos da teoria newtoniana. John Adams e Urbain Le Verrier, de modo independente e quase simultâneo, propuseram que esses desvios se deviam à existência de um planeta até então desconhecido, cuja atracção gravítica causava os

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

▷ Lei da Gravitação Universal.



Figura 4.2: Urbain Le Verrier (1811-1877) e John C. Adams (1819-1892) previram teoricamente a existência do planeta Neptuno, a partir dos desvios da órbita de Urano relativamente às previsões da teoria newtoniana. O astrónomo George Airy, do Observatório de Greenwich, ignorou as previsões de Adams. Le Galle, em Berlim, seguiu as indicações de Le Verrier e foi o primeiro a observar Neptuno ao telescópio. [10].

desvios da órbita de Urano. Usando a teoria newtoniana, determinaram a órbita desse planeta. Le Verrier passou os seus cálculos ao director do Observatório de Berlim que, em menos de uma hora, observou pela primeira vez o planeta Neptuno ao telescópio.

4.1.1 Como se demonstram as leis de Newton?

No passado, em tempos em que a ciência gozava de maior prestígio entre os jovens, um “facto cientificamente provado” era considerado irrefutável. Invocar esta qualidade para um facto em disputa era um modo garantido de “matar” uma discussão.

Na verdade, não existe nenhuma demonstração ou prova, no sentido matemático, das leis de Newton ou de qualquer outra lei física. Newton não deduziu as suas leis de qualquer observação.

O trabalho científico tem alguma semelhança com o trabalho de um detective. Newton encontrou pistas nas observações astronómicas, nos trabalhos de Galileu e nas suas próprias observações sobre o movimento. Com estas pistas intuiu a forma da leis de movimento e explorou as suas consequências. Por cada previsão confirmada, a sua confiança nas leis que formulou cresceu. Este processo continuou por várias gerações. As leis de Newton são hoje usadas para planificar as viagens das sondas espaciais, para fazer previsões metereológicas, para descrever os movimentos de fluidos, para compreender o comportamento mecânico dos materiais, para prever os movimentos das pontes e outras estruturas, para explicar

■ Isaac Newton ■



Isaac Newton (1643-1727)

Nascido em 1643, em Woolsthorpe, Inglaterra, Isaac Newton é um dos dois mais sérios candidatos ao título de físico mais influente da história da humanidade. O segundo é Albert Einstein.

Na sua obra mais importante, os *Principia*, Newton não se limitou a apresentar um conjunto completo de leis aplicáveis a qualquer tipo de movimento, terrestre ou celeste. Também deu consistência e conteúdo a uma visão de um Universo regido por leis matemáticas, evoluindo de uma maneira determinada, à semelhança de um mecanismo perfeito.

Embora as ideias de Newton tenham sido modificadas pela Teorias da Relatividade e Gravitação de Einstein e, de um modo mais radical, pela Mecânica Quântica, a gama de fenómenos que podem ser abordados nos termos da teoria newtoniana é tão vasta, que ela faz parte permanente do corpo de conhecimentos científicos. Ainda hoje, qualquer estudo sério de Física começa, invariavelmente, pela mecânica de Newton.

Além dos trabalhos publicados nos *Principia*, Newton deu contribuições fundamentais em óptica e matemática, sendo considerado, com Leibniz, inventor do cálculo infinitesimal. Descobriu a composição espectral da luz branca e inventou o telescópio reflector.

A sua vida foi marcada por disputas acrimoniosas sobre prioridade nas suas descobertas, com Hooke, Huygens e Leibniz, nas quais alguns procedimentos de Newton foram altamente criticáveis^a. Faleceu em 1727 e o seu epitáfio dizia:

Aquele, que por vigor de mente quase divina, primeiro demonstrou os movimentos e figuras dos planetas, os caminhos dos cometas e as marés dos oceanos.

^aNa disputa com Leibniz, sobre a invenção do Cálculo Infinitesimal, Newton, como Presidente da Royal Society, nomeou uma comissão independente. O próprio Newton (anonimamente) redigiu o respectivo relatório e um artigo de apreciação crítica sobre o relatório!

a forma e movimentos das galáxias, incluindo colisões entre elas, para calcular o movimento das cargas do vento solar no campo magnético da Terra, *etc., etc., etc.* A lista é interminável: no trabalho em ciência e tecnologia as leis de Newton estão sempre por perto.

Como podemos nós compreender as leis de Newton? Do mesmo modo que o próprio Newton e as várias gerações de físicos que se lhe seguiram: aplicando-as na análise de situações concretas. Esta é a única maneira possível de compreender a mecânica newtoniana. Aprender Física é como aprender a andar de bicicleta. Só se aprende fazendo. Do mesmo modo que ninguém aprende a andar de bicicleta assistindo a aulas sobre a posição correcta a adoptar e a maneira de dar aos pedais, ninguém aprende mecânica newtoniana decorando com muito cuidado as suas leis fundamentais. Compreender as leis é saber aplicá-las em situações concretas.

Assim, voltaremos a considerar alguns dos movimentos estudados no capítulo 2 e duas novas actividades experimentais. No próximo capítulo falaremos da lei da Gravitação Universal e do movimento dos planetas.

▷ Actividades 4.1 e 4.2.

As leis de Newton são também importantes para compreender situações da vida corrente, não apenas as situações controladas de um laboratório. O diálogo do capítulo precedente mostra isso mesmo. Frequentemente, as nossas intuições imediatas sobre forças e movimentos não estão de acordo com as leis da mecânica newtoniana. Não vemos corpos manterem-se em movimento indefinidamente (primeira lei); quem já enfrentou um matulão com o dobro do tamanho tem dificuldade em acreditar que a força que pode exercer sobre nós não é maior que a que podemos exercer sobre ele (terceira lei).

A verdade é que a experiência imediata dos nossos sentidos é muito limitada. Vivemos amarrados pelo peso à superfície da Terra, não sobrevivemos fora de um meio gasoso e os nossos sentidos estão limitados a janelas temporais e espaciais muito estreitas: se olharmos para um relógio, não detectamos o movimento do ponteiro da horas (ou mesmo dos minutos) e qualquer objecto de dimensões inferiores a cerca de 0,1 mm é invisível à vista desarmada. Contudo, mesmo neste contexto limitado, uma observação cuidadosa e uma reflexão crítica sobre o conjunto da nossa experiência quotidiana, só encontra uma explicação consistente e coerente no âmbito da mecânica newtoniana. Neste capítulo, iremos também reflectir um pouco sobre situações correntes em que a descrição da mecânica newtoniana tem aspectos surpreendentes.

4.2 Leis de Newton em acção

4.2.1 O conceito de força

As três leis de movimento de Newton mencionam o conceito de força. A Lei da Gravitação Universal é uma lei de força.

Há dois aspectos fundamentais no conceito de força da teoria newtoniana:

- a) O movimento dos corpos é influenciado pela presença de outros corpos, e esta influência manifesta-se na forma de forças: isto é, uma força é sempre exercida **sobre** um corpo e é sempre devida à existência de outro corpo.

Se, acidentalmente, correremos contra um poste, fazemos uma verificação dolorosa desta afirmação: o poste exerce a força, esta é exercida sobre o nosso corpo e o nosso movimento é claramente afectado.

Na linguagem da Física estas influências mútuas chamam-se **interacções**:

- i) a atracção entre cargas de sinais opostos, ou a repulsão entre cargas do mesmo sinal, é uma **interacção eléctrica**.
- ii) a atracção gravítica entre o Sol e a Terra é uma **interacção gravítica**.

Na teoria newtoniana as interacções são definidas pelas forças a que dão origem.

- b) Forças são vectores, isto é, têm direcção sentido e módulo e somam-se como vectores.

Quando atiramos uma pedra, podemos fazê-lo em qualquer direcção ou sentido; podemos também variar a intensidade com que o fazemos, projectando a pedra a maior ou menor distância. Por outras palavras, podemos variar a direcção, o sentido e a intensidade da força que aplicamos à pedra. Mas ao dizer que as forças são vectores estamos também a afirmar que se somam como vectores.

O seguinte exemplo é útil para esclarecer este ponto. Suponhamos que pegamos numa mola com as mãos e a distendemos. Nas extremidades da mola estão aplicadas duas forças com a mesma direcção e sentidos opostos. Para que a mola não se desloque, nem para a esquerda nem para a direita, as duas forças têm que ter a mesma intensidade. Se as representarmos por vectores, estes terão uma soma vectorial nula: o efeito das duas forças no movimento global (de translação) da mola é o mesmo que o da sua soma vectorial: nenhum. A soma vectorial das várias forças que actuam num corpo, designa-se por **resultante**¹.

Em resumo:

- as forças têm origem nas interacções entre corpos;
- as forças são vectores;
- a soma vectorial das forças que actuam num corpo chama-se **resultante**. A força a que se refere a segunda lei é a resultante das forças que actuam no corpo.

4.2.2 Movimentos estudados no Capítulo 2

Nas actividades do Capítulo 2 analisámos em pormenor movimentos simples em diferentes circunstâncias:

- um carro em movimento numa calha horizontal ou inclinada (actividade A18);
- uma esfera largada de uma certa altura (actividade A19);
- uma esfera lançada obliquamente (actividade A21).

Medimos velocidades e acelerações. Poderemos compreender as nossas observações em termos das leis de Newton?

¹Nem todos os efeitos de um conjunto de forças são equivalentes ao da força resultante. Neste exemplo, a resultante é nula mas a mola deforma-se por acção das forças aplicadas. Se não houver forças aplicadas à mola, ela mantém o seu comprimento de equilíbrio.

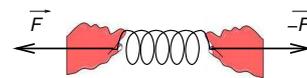


Figura 4.3: As forças somam-se como vectores. Forças de igual intensidade e direcção e sentidos opostos têm resultante nula.
▷ Actividade 4.3

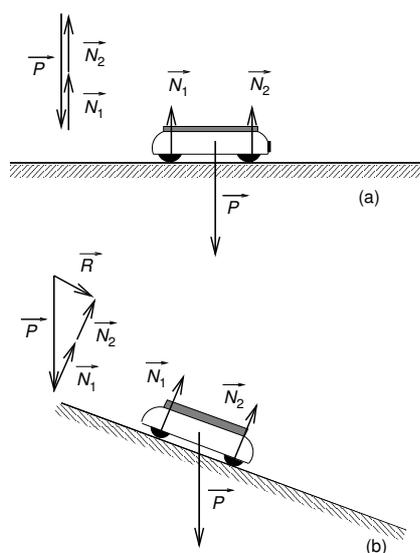


Figura 4.4: Forças sobre um carro em cima de uma superfície sólida. Note-se que só representámos as forças exercidas sobre o carro, não as exercidas sobre a superfície. O facto de o carro não penetrar nem descolar da superfície significa que a resultante, \vec{R} , é nula (a) ou paralela à superfície (b).

Forças num carro em movimento numa calha.

Quais são as forças exercidas sobre um carro pousado numa calha? Já agora, quais são as forças exercidas sobre um objecto pousado numa superfície sólida e plana?

Quer a superfície esteja horizontal quer esteja inclinada, há uma coisa que sabemos: o corpo não descola espontaneamente da superfície nem se afunda nela: quando muito, desloca-se numa direcção paralela à superfície. Isto significa que a resultante das forças exercidas sobre o corpo tem componente nula na direcção perpendicular à superfície.

Por outras palavras: se houver uma força externa sobre o objecto, com uma componente dirigida para dentro da superfície, como por exemplo o peso, haverá uma força da superfície sobre o objecto que cancela essa componente.

Questão: No diálogo do capítulo anterior este argumento é usado pelo tio de P. Em que local e a que propósito?

Qual é a origem desta força?

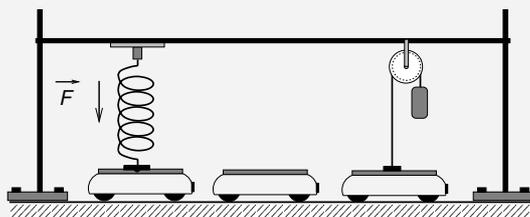
■ Forças de reacção ■

Quando pousamos um objecto sobre uma mesa temos uma acção, o peso do corpo \vec{P} , e a reacção normal da mesa, \vec{N} . Pela terceira lei de Newton estas duas forças são opostas. Certo?

Errado! Este é um erro bastante comum de aplicação da terceira lei.

Primeiro: repare-se que as forças de acção e reacção referidas na terceira lei são forças exercidas em corpos diferentes: o peso, \vec{P} , e a reacção normal da mesa, \vec{N} , são exercidas no mesmo corpo.

Segundo: A reacção normal da mesa nem sempre é igual em módulo ao peso. O exemplo da figura (ver problema 4.1) permite perceber isso mesmo. A superfície suporta cada um dos carros com forças diferentes^a. O que é igual em módulo à reacção normal da mesa sobre cada carro, \vec{N} , é a *força exercida por cada carro sobre a mesa*. Só no caso do meio essa força é igual ao peso. A mesa reage à força que sobre ela é exercida por cada carro, com uma força \vec{N} , exercida sobre o carro, igual, em módulo.



Claro que a força exercida pelo corpo sobre a mesa tem origem na força externa exercida sobre o corpo. A Terra puxa o corpo: este, por sua vez, empurra a mesa (acção); a mesa suporta o corpo com uma força oposta a esta (reacção).

Mencionámos três forças. Peso, acção do corpo sobre a mesa e reacção desta sobre o corpo. Onde está o par acção–reacção do peso do corpo? Sobre que corpo é exercida?

^aNão estamos a considerar as forças entre as bases do suporte e a mesa.

Caixa 4.2: Forças exercidas por superfícies.

■ Deformações de estruturas ■

A maior parte das pessoas fica surpreendida por saber que uma estrutura tem que se deformar para sustentar qualquer carga. Quando entramos numa ponte esta exerce sobre nós uma força vertical que cancela o nosso peso. Essa força não existia antes de entrarmos na ponte. Mas não surge por magia. Surge porque a carga deforma a estrutura e esta responde com forças proporcionais à deformação, à semelhança de uma mola. Os engenheiros civis têm que manter vigilância sobre estas deformações para assegurar a segurança das estruturas.

Recentemente o grupo de investigação da Unidade de Optoelectrónica do INESC-Porto e do Departamento de Física da Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, desenvolveu dispositivos baseados em fibra óptica capazes de medir a deformação causada pela passagem de uma só pessoa numa ponte como a D. Luís, no Douro.

Caixa 4.3: As cargas deformam as estruturas.

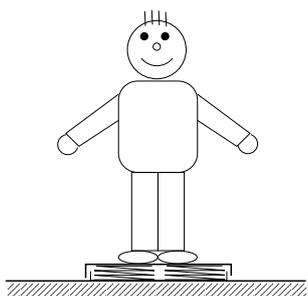


Figura 4.5: As molas deformadas exercem sobre o homem uma força que cancela o efeito do seu peso.

Pensemos no que acontece quando subimos para uma balança. A superfície da balança é suportada por molas deformáveis. Conosco em cima da balança, as molas são comprimidas até que as forças exercidas sobre os nossos pés igualem, em módulo, o nosso peso. A leitura da escala da balança é proporcional à deformação. Do mesmo modo, pousar um corpo sobre uma superfície sólida, ou pressioná-la de qualquer modo, origina uma deformação e dessa deformação resulta a força que sustenta o corpo: quanto maior a carga, maior a deformação e maior a força exercida pela superfície. Em muitas situações correntes essa deformação é tão pequena que pode ser ignorada; mas, se a carga for excessiva, a superfície pode ceder e deixar de suportar o objecto.

Se a superfície não for horizontal, o peso tem uma componente normal e uma componente paralela à superfície (Fig. 4.4). Só a primeira é anulada pela reacção da superfície: a resultante do peso e da reacção normal da mesa terá uma direcção paralela à superfície.

Exercício: Um condutor imprevidente, esqueceu-se de travar o carro numa rampa com inclinação de 3° . Que força necessita exercer para impedir o carro de deslizar? A massa do carro é 1200 kg (ignorar forças de atrito).

Solução: O peso do carro tem uma componente perpen-

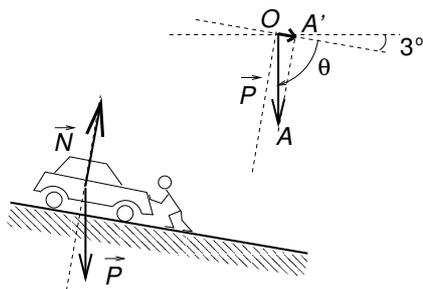


Figura 4.6: Que força é necessária para que o carro não deslize?

dicular à superfície que é anulada pela reacção normal da mesma. Mas a componente do peso paralela ao solo, \vec{OA}' , tem que ser anulada pela força exercida pelo condutor. Como o triângulo OAA' é rectângulo, a razão $\|\vec{OA}'\|$ dividida por $\|\vec{P}\|$, é o cosseno do ângulo $\theta = 90 - 3 = 87^\circ$. Assim,

$$\|\vec{OA}'\| = \|\vec{P}\| \cos(87^\circ) = 1200 \times 9,8 \times 0,052 = 615 \text{ N.}$$

Esta força é o peso de um corpo de massa $m \approx 63 \text{ kg}$.

Se são estas as forças, que movimentos podemos então observar?

Calha horizontal

No caso do carro numa calha horizontal (Actividade A18) há duas forças actuando sobre o carro: o seu peso e a reacção normal da calha. Estas forças cancelam-se e, se o carro estiver em repouso, mantém-se em repouso: primeira lei de Newton.

Para movimentar o carro damos-lhe um pequeno empurrão.

É preciso uma causa externa para alterar o estado de movimento: primeira lei. Mas esta força cessa de ser aplicada quando a nossa mão perde o contacto com o carro: as forças resultam das interacções entre os corpos.

O carro mantém-se em movimento após terminar a interacção (o nosso empurrão).

De novo, a primeira lei a funcionar: o facto de a força externa cessar não implica que o carro páre. Implica apenas que a velocidade deixe de variar.

Contudo, se olharmos com atenção para os resultados de medição de posição, nesta situação (Fig. 4.7), vemos que a velocidade está a diminuir, embora lentamente: O gráfico de $x(t)$ tem uma pequena curvatura negativa: o movimento não é exactamente uniforme.

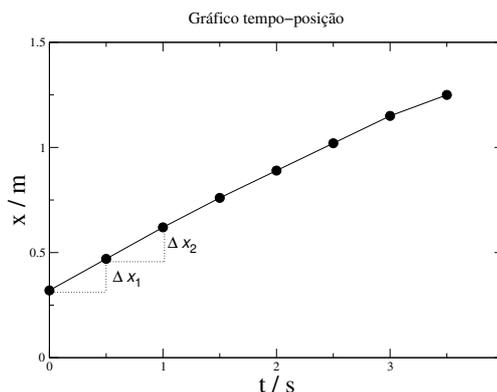


Figura 4.7: Gráfico de $x(t)$ para um carro sobre uma calha horizontal. Para um movimento uniforme, o gráfico seria uma linha recta. Estes resultados mostram uma ligeira curvatura negativa, ou seja, uma diminuição da velocidade devida ao atrito. Os dados são os pontos: a linha é apenas uma ajuda de visualização.

Isso significa que a reacção normal da calha não é a única força, além do peso, a actuar no carro. Deve existir uma força paralela ao plano da calha. Discutiremos este ponto um pouco mais à frente.

Calha inclinada

Neste caso, se largarmos o carro, ele desliza pela calha abaixo.

Bom, isso só pode significar que o peso do carro e a força exercida pela calha não dão resultante nula: dão uma resultante com direcção da calha e sentido descendente. Doutro modo, pela primeira lei, o estado de repouso ou movimento não se alteraria.

Para uma calha inclinada, o peso tem uma componente paralela à superfície da calha, que não é cancelada pela reacção normal da calha (ver figura 4.4 da página 88). Se há um força exercida sobre o carro o movimento deve ser variado. De facto,

este movimento tem uma aceleração constante.

A figura 4.8 mostra, para este movimento, um gráfico de velocidade em função do tempo: a variação linear da velocidade em função do tempo corresponde a uma aceleração constante.

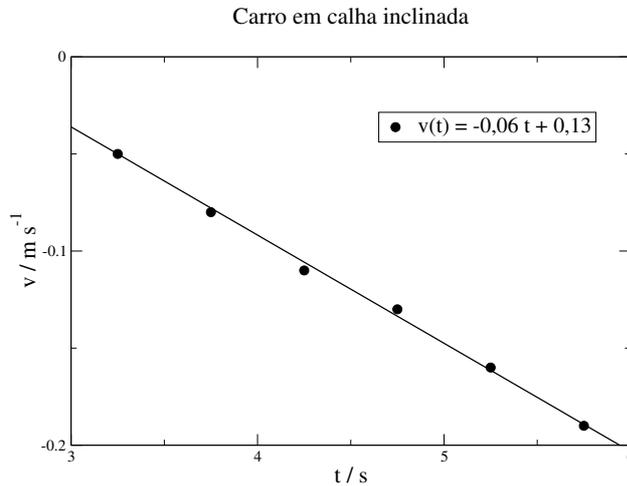


Figura 4.8: Gráfico de tempo-velocidade para movimento numa calha linear inclinada (Actividade A18). Os pontos são os dados experimentais, a linha é um ajuste linear.

Exercício: A aceleração registada no gráfico da figura 4.8 é

$$a = -0,06 \text{ m s}^{-2}.$$

Qual foi a inclinação da calha (ignorando forças de atrito)?

Solução: Sendo θ o ângulo entre a calha e a horizontal, a direcção do peso (vertical) faz também um ângulo θ com a direcção perpendicular à calha, BC . O triângulo ABC é rectângulo e $\|\vec{P}_{\parallel}\|$ é o cateto oposto a θ ; $\|\vec{P}\|$ é a hipotenusa. Logo,

$$\frac{\|\vec{P}_{\parallel}\|}{\|\vec{P}\|} = \text{sen}\theta,$$

ou seja:

$$\|\vec{P}_{\parallel}\| = mgsen\theta.$$

Pela segunda lei de Newton, a aceleração do carro deve ser

$$a = \frac{mgsen\theta}{m} = gsen\theta$$

Usando $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$,

$$\text{sen}\theta = \frac{0,06}{9,8} = 0,006.$$

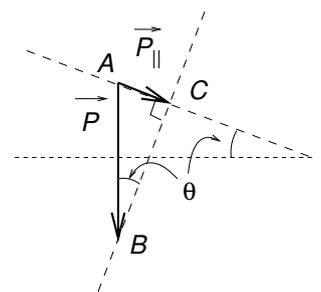


Figura 4.9: A coordenada do peso paralela à calha é $mgsen\theta$.

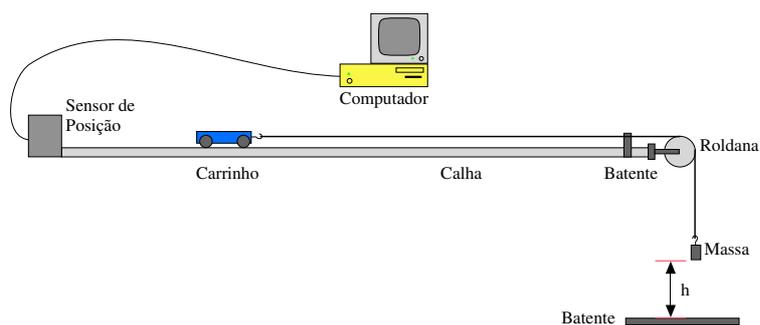


Figura 4.10: O carro é puxado enquanto a massa cai; deixa de ser puxado quando ela atinge o batente. Que tipo de movimento tem o carro?

O ângulo correspondente é inferior a um grau:

$$\theta = 0,35^\circ.$$

Na realidade, a inclinação foi superior a este valor. A aceleração correspondente deveria ser superior. O que poderá explicar um valor tão baixo da aceleração? (ver à frente).

Carro puxado por massa em queda

Na actividade 4.1 propõe-se uma experiência baseada na montagem da figura 4.10.

A calha está colocada na horizontal. Enquanto a massa suspensa cai, o carro é puxado pelo fio que a suspende. Quando a massa suspensa atinge o batente, o carro deixa de ser puxado.

▷ Actividade 4.1

Que tipo de movimento vai ter o carro? Como vai ser o gráfico de velocidade em função do tempo? O que acontece quando se varia a distância de queda até ao batente? Antes de realizar esta actividade é muito importante reflectir sobre o que dizem as leis de Newton sobre o movimento do carro e tentar antecipar os resultados.

4.2.3 Forças de atrito

Há alguns detalhes das experiências do carro sobre a calha que ainda ficaram por explicar:

- O movimento na calha horizontal é **quase** uniforme. Isto é visível nas actividades A18 e na actividade 4.1, referida

Material 1	Material 2	Estático	Dinâmico
Cobre	Cobre	1,21	—
Vidro	Vidro	0,9 ~ 1,0	0,4
Grafite	Grafite	0,1	—
Teflon	Teflon	0,04	—
Borracha	Asfalto(seco)	0,5 ~ 0,8	—
Borracha	Asfalto(molh.)	0,25 ~ 0,075	—
Alumínio	Alumínio	1,05 ~ 1,35	1,4

Tabela 4.1: Coeficientes de atrito entre algumas substâncias (superfícies secas). Estes valores são extremamente sensíveis às condições das superfícies.

na secção anterior. Se apenas existissem o peso e a reacção normal da calha, o movimento deveria ser uniforme (sem “quase”).

- A inclinação que calculámos no exercício da página 93 é inferior à inclinação real da calha (cerca de 1°). A aceleração é menor do que esperávamos.

Esta situação é muito vulgar em Física. Dispomos de uma representação aproximada da situação, mas há pormenores que não são bem representados. Compensa sempre prestar atenção a estes pormenores.

Estas discrepâncias resultam, provavelmente, da existência de forças de atrito.

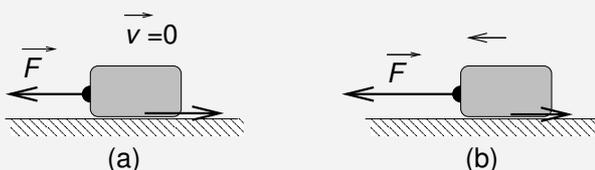
O fenómeno do atrito é extremamente complexo e a explicação em termos microscópicos, a partir das forças entre átomos, ainda hoje é assunto de investigação. A **lei empírica** de Amonton-Coulomb descreve razoavelmente o fenómeno, na situação de duas superfícies sólidas em contacto (ver caixa 4.4 da página 96). Infelizmente, a discussão do atrito em situações em que há rolamento, como no caso dos carros sobre a calha, é muito mais complexa e não podemos fazê-la aqui. Deixamos apenas algumas indicações.

No caso de um carro a rolar livremente sobre uma calha horizontal as forças de atrito das rodas com a calha vão ter o sentido oposto à velocidade do carro. O carro acaba por parar. Daí a ligeira aceleração negativa evidente na figura 4.7 da página 92.

▷ **Lei empírica:** uma lei descoberta a partir de observações experimentais, mas cuja explicação em termos de leis fundamentais da Física pode não ser conhecida.

■ Lei de Amonton-Coulomb ■

Apesar da complexidade do fenómeno de atrito, a lei de Amonton-Coulomb descreve satisfatoriamente a força de atrito entre superfícies sólidas.



Se a intensidade da força exterior, $\|\vec{F}\|$, for inferior a μN , a força de atrito anula a força exterior e o corpo não se desloca. Se $\|\vec{F}\| > \mu N$, o corpo move-se e a força de atrito tem módulo $\mu_d N$.

Consideremos um corpo com uma base plana em contacto com uma superfície também plana. Se tentarmos deslocar o corpo, exercendo uma força paralela à superfície, a superfície exerce sobre o corpo uma força oposta à exercida externamente, de modo a que a resultante seja nula. Mas isto só é possível para forças de intensidade abaixo de um certo limite. Esse limite é dado pela expressão:

$$F_a = \mu N$$

em que N é o módulo da força normal exercida pelo corpo sobre a superfície e μ o coeficiente de atrito estático. É importante notar que μN não é o valor da força de atrito; é o valor **máximo** que a força de atrito pode ter numa situação estática.

Se a força aplicada externamente for superior a μN , o corpo desloca-se sobre a superfície. Havendo movimento entre as superfícies, o valor da força de atrito passa a ser

$$F'_a = \mu_d N$$

em que μ_d , o coeficiente de atrito dinâmico, é diferente, em geral menor, que μ .

Os coeficientes de atrito dependem dos materiais das superfícies em contacto, do seu grau de limpeza e polimento, do estado de oxidação, do grau de contaminação, da existência de líquidos lubrificantes, *etc.* A tabela 4.1 da página 95 indica alguns valores. Em situações em que há rolamento, como no caso dos carros das nossas experiências, o atrito é um fenómeno ainda mais complexo, que não vamos discutir em pormenor.

Caixa 4.4: A força de atrito entre superfícies sólidas.

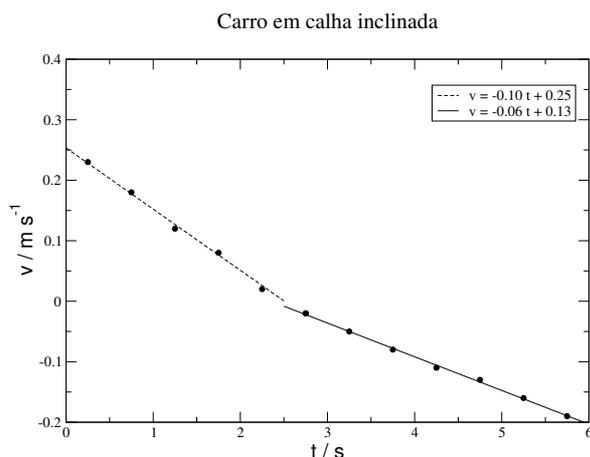


Figura 4.12: A aceleração do carro ao subir a calha ($v > 0$) é superior em módulo à aceleração quando desce ($v < 0$). A componente do peso paralela à calha tem a mesma direcção nos dois casos, mas a força de atrito não.

No caso da calha inclinada é esclarecedor olhar para o resultado completo da experiência (Actividade A18). O carro foi lançado da parte mais baixa da calha, subiu até um certo ponto, parou e começou a descer para a posição inicial. Anteriormente mostrámos apenas a parte descendente do movimento (Fig. 4.8). A figura 4.12 mostra o gráfico completo da velocidade em função do tempo. O módulo da aceleração (declive do gráfico) é quase o dobro na subida (velocidade positiva) do da descida (velocidade negativa). Se a resultante das forças sobre o carro fosse a componente do peso paralela à calha, a aceleração deveria ser a mesma na subida e na descida.

Na subida, a componente do peso paralela à calha, \vec{P}_{\parallel} , retarda o movimento (sentido oposto ao da velocidade); as forças de atrito têm o mesmo sentido que esta componente do peso. Na descida a componente do peso acelera o movimento (mesmo sentido que a velocidade) mas as forças de atrito retardam o movimento: ou seja, têm sentido oposto ao de \vec{P}_{\parallel} . É, pois, a existência das forças de atrito, com sentidos opostos na subida e descida, que explica que a força resultante e, portanto, a aceleração sejam diferentes nos dois casos. Em particular, na descida a aceleração real é menor do que a esperada se ignorássemos o atrito.

No entanto, é importante salientar, de novo, que o atrito em situações em que há rolamento exige uma análise muito cuidada. Mais à frente damos exemplos em que a força de atrito tem o sentido

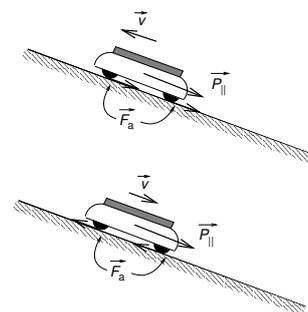


Figura 4.11: As forças de atrito têm sentidos opostos na subida e na descida.

do deslocamento do corpo e faz aumentar a velocidade.

4.2.4 Queda livre

Nas actividades A19 e A21 estudámos a queda de uma esfera em duas situações:

- A esfera largada de uma certa altura (velocidade inicial nula), na actividade A19;
- a esfera lançada obliquamente (velocidade inicial diferente de zero), na actividade A21.

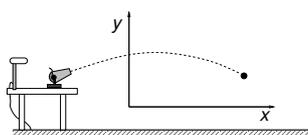


Figura 4.13: Escolha de eixos.

Para discutir estes movimento usamos um sistema de eixos com a orientação habitual: Ox horizontal e Oy vertical.

No primeiro caso só há movimento na direcção vertical (Oy).

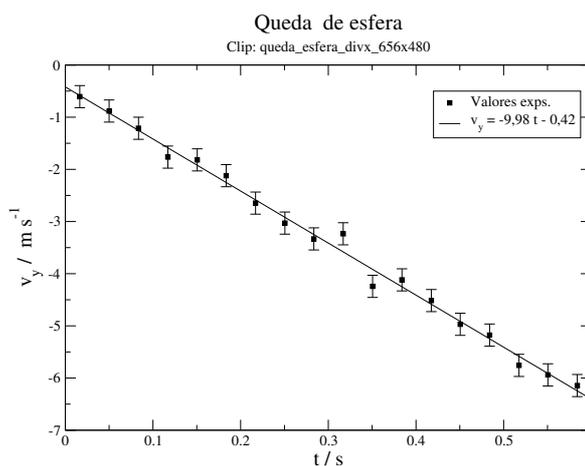


Figura 4.14: Resultados da análise do clip queda_esfera_divx_656x480

O gráfico da figura 4.14 mostra os resultados da análise de um movimento deste tipo. A variação no tempo de coordenada y da velocidade, v_y , é consistente com uma lei da forma

$$v_y(t) = -9,98t - 0,42 \text{ (m s}^{-1}\text{)},$$

ou seja, uma aceleração constante:

$$a_y(t) = -9,98 \text{ m s}^{-2}.$$

Este resultado está de acordo com o esperado da segunda lei de Newton. Este corpo cai sob a acção do seu peso: à superfície da Terra, o peso é dado por

$$\vec{P} = (0, -mg) = -mg\hat{j},$$

que implica uma aceleração

$$\vec{a} = -\frac{\vec{P}}{m} = -g\hat{j}.$$

O valor obtido nesta experiência para g foi de $9,98 \text{ m s}^{-2}$, um valor relativamente próximo do valor conhecido da aceleração da gravidade de $9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Exercício: Qual é a altura a que sobe um corpo lançado verticalmente com velocidade v_0 ? Quanto tempo demora a voltar à altura inicial?

Solução: Este exercício só é simples se ignorarmos a resistência do ar, o que é razoável para velocidades de alguns metros por segundo. Neste caso, o movimento é uniformemente variado, com aceleração $-g$, na direcção Oy (vertical ascendente). Assim,

$$v_y = v_0 - gt.$$

A velocidade diminui até ao valor zero, e depois torna-se negativa: o corpo inicia a descida. O ponto de altura máxima ocorre para $v_y = 0$:

$$v_0 - gt_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g}.$$

A equação de movimento para a coordenada vertical é

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

A altura máxima é atingida para $t = t_1$:

$$y_{max} = v_0 \times \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

O corpo volta à altura inicial quando $y = 0$, ou seja,

$$0 = v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2,$$

o que dá

$$t_2 = 0$$

ou

$$t_2 = \frac{2v_0}{g} = 2t_1.$$

A solução que interessa é, obviamente, a segunda, já que a primeira corresponde ao instante de lançamento. Note-se que o tempo de subida e descida são iguais.

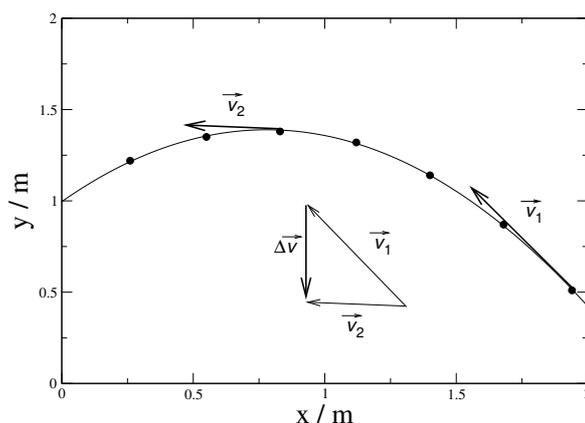


Figura 4.15: No movimento de um projétil a variação do vector velocidade, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ é vertical.

Movimento do projétil

No caso da actividade A21, a esfera tem movimento segundo os dois eixos. Começemos por recordar as conclusões do nosso estudo:

- a) A aceleração tem uma direcção vertical Oy . Entre dois intervalos consecutivos o vector velocidade média tem uma coordenada horizontal constante (movimento uniforme segundo Ox) e uma **variação** da coordenada vertical negativa.
- b) A coordenada de posição $x(t)$ (eixo Ox , horizontal) corresponde a um movimento uniforme de velocidade constante:

$$x(t) = v_{x0}t + x_0;$$

o respectivo gráfico é uma recta (ver Fig. 4.16).

- c) A coordenada vertical da velocidade $v_y(t)$ diminui no tempo, com uma aceleração negativa constante (ver Fig. 4.16):

$$v_y(t) = -at + v_{0y}.$$

O valor que se obtém para a aceleração a é o mesmo, à parte uma variação experimental inevitável, que no caso da queda livre.

De acordo com as leis de Newton, este corpo está sujeito exactamente à mesma força que no movimento de queda livre: uma força vertical descendente igual ao seu peso:

$$\vec{P} = -mg\hat{j}.$$

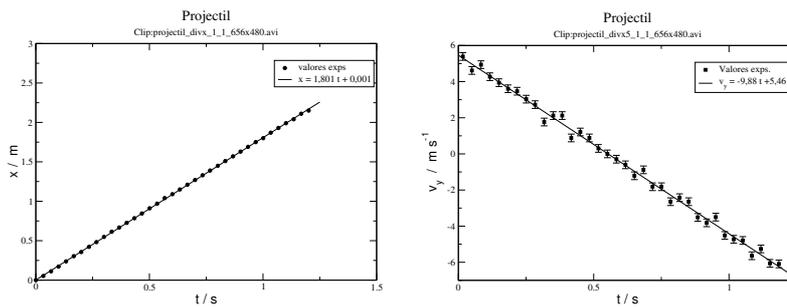


Figura 4.16: Coordenada horizontal, x , e coordenada vertical da velocidade, v_y , do movimento de uma esfera registado no clip `projectil_divx_1_1_656x480.avi`

Por que são tão diferentes os movimentos?

Nos dois casos em estudo a força é vertical, não tem componente horizontal. De acordo com a primeira lei de Newton, isso significa que o movimento da coordenada horizontal deve ser de velocidade **constante**, não necessariamente nula.

No caso da actividade A19, em que largamos a esfera de um estado de repouso, a sua velocidade inicial era nula: ambas as coordenadas, v_x e v_y , eram inicialmente zero. A primeira não variou, continuou nula, porque a força nessa direcção era nula. A segunda, v_y , variou por causa da força aplicada (peso). O movimento desenrola-se apenas na coordenada y , já que a coordenada x mantém o seu valor inicial ($v_x(t) = 0$).

Quando lançamos uma esfera obliquamente, como no caso da da actividade A21, a esfera tem uma velocidade inicial com duas coordenadas, v_x e v_y , não nulas. De acordo com a primeira lei, depois do lançamento, o movimento da coordenada x deve ser uniforme, porque o valor da força nessa direcção é nulo: o gráfico da esquerda na figura 4.16 confirma este resultado. O movimento da coordenada y deve ter a mesma aceleração que no movimento de queda livre. Representando as coordenadas verticais da velocidade, v_y , destes dois movimentos, no mesmo gráfico (Fig. 4.17) confirmamos isso mesmo: os gráficos só diferem no valor inicial da velocidade. No caso da queda o valor inicial é $v_y \approx 0$; no caso da esfera lançada o valor inicial é $v_y \approx 6 \text{ m s}^{-1}$: a velocidade inicial tinha uma componente vertical ascendente.

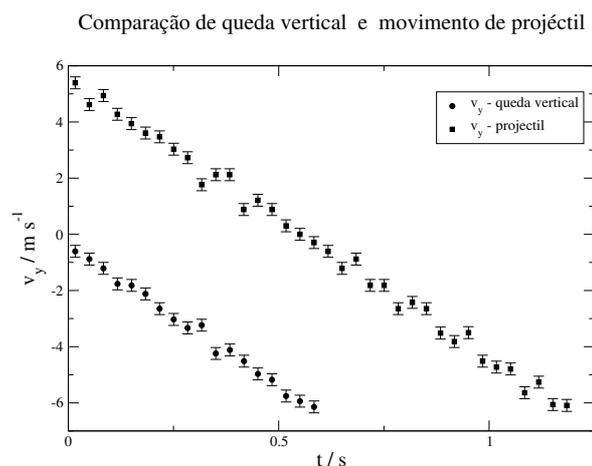


Figura 4.17: Coordenadas verticais da velocidade de uma esfera em queda vertical e em movimento parabólico. Dados obtidos dos clips queda_esfera_divx_650x480 e projectil_divx5_1_1650x480.

4.2.5 Leis de Newton e condições iniciais

Os exemplos precedentes tornam clara uma distinção fundamental:

- a) leis de movimento;
- b) condições iniciais;

As leis de Newton apenas permitem o cálculo das acelerações, a partir do conhecimento das forças (segunda lei). Ou seja, só dizem como **varia** a velocidade no tempo. Para calcular um movimento, determinando a velocidade e a posição em função do tempo, precisamos de saber os valores de velocidade e posição num dado instante: **as condições iniciais**.

O caso da queda vertical e do movimento do projectil discutidos na secção anterior tornam esta distinção muito clara. As forças são as mesmas, as acelerações são as mesmas e a velocidade **varia da mesma maneira**. Os movimentos, contudo, são distintos porque têm condições iniciais diferentes. As leis de movimento **não determinam as condições iniciais**.

4.2.6 Resumo

Nesta secção analisámos vários movimentos estudados no capítulo 2:

- um carro em movimento numa calha horizontal ou inclinada (actividade A18);
- uma esfera largada de uma certa altura (actividade A19);
- uma esfera lançada obliquamente (actividade A21).

Medindo a posição em função do tempo, com sensores de movimento e registos de vídeo, pudémos calcular velocidades e acelerações. Em todos estes casos, interpretámos, com sucesso, as nossas observações em termos das leis de Newton, invocando a existência de algumas forças:

- o peso;
- forças de reacção normal de superfícies sólidas;
- forças de atrito.

Até ao fim deste capítulo vamos continuar a aplicar as leis de Newton, agora em contextos menos controlados do que as situações de laboratório analisadas até ao momento.

4.3 Surpresas

4.3.1 Forças impulsivas

Um anúncio de televisão recente afirmava que uma criança, viajando num automóvel a 60 km h^{-1} , sem cinto de segurança, é projectada sobre os ocupantes da frente, em caso de acidente, exercendo sobre eles uma força da ordem de duas toneladas. Um peso de massa 1 kg , pousado em cima de um pé, é perfeitamente suportável; mas se cair de um metro de altura, provavelmente, partirá alguns ossos.

Estes fenómenos de impacte envolvem forças impulsivas, isto é, forças que actuam durante intervalos de tempo muito curtos. Que nos podem dizer as leis de Newton sobre esta forças? Como podemos estimar o seu valor?

Os fenómenos que ocorrem num evento tão violento como uma colisão de dois automóveis são extremamente complexos e está fora de questão pensar em determinar as forças envolvidas. Para abordar estes efeitos vamos recorrer a **modelos**. Isto é representações simplificadas, aproximadas, que, não obstante, nos permitem obter alguma informação sobre o fenómeno.

Força sobre um bola de golfe.

Um golfista experiente, usando o taco apropriado para lançar a bola o mais longe possível, o *driver*, consegue velocidades da bola à saída do taco de cerca de 240 km h^{-1} . Que força exerce a cabeça do taco sobre a bola?

Quando a cabeça do taco inicia o contacto a força é nula; depois cresce rapidamente, passa por um máximo, e volta a ser zero quando o taco perde contacto com a bola. Tudo isto ocorre num intervalo de tempo muito curto.

O valor exacto da força em função do tempo depende das propriedades elásticas da bola e do taco, da velocidade de impacte, *etc.*. Para estudarmos este fenómeno, vamos usar um modelo em que a força é considerada constante durante o intervalo de tempo de contacto entre o taco e a bola.

Assim, no nosso modelo:

- antes do contacto a força é nula.
- Entre o instante de contacto, $t = 0$, e o instante em que a bola descola do taco, $t = \Delta t$, é exercida sobre a bola uma força de intensidade F . Neste intervalo a cabeça do taco e a bola deslocam-se de uma distância x_c .
- Para $t > \Delta t$ a força volta a ser nula.

De acordo com a segunda lei de Newton, podemos escrever

$$F = ma$$

em que m é a massa da bola de golfe, $m = 45 \text{ g}$, e F e a são as coordenadas da força e aceleração, respectivamente, na direcção do movimento. Como a aceleração é constante, podemos substituí-la pela aceleração média:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

e obtemos

$$F\Delta t = m\Delta v. \quad (4.2)$$

O primeiro membro desta equação designa-se por **impulso da força**. A velocidade da bola antes do impacte é nula; terminado o impacte é $240 \text{ km h}^{-1} = 67 \text{ m s}^{-1}$. O impulso é

$$I = F\Delta t = 0,045 \times 67 = 3,0 \text{ N s}. \quad (4.3)$$

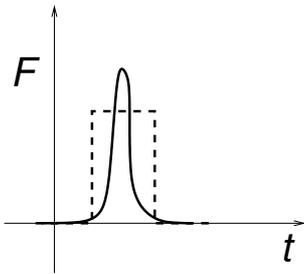


Figura 4.18: Um modelo para um força impulsiva.

Se a força for constante, o movimento da bola durante o contacto é uniformemente acelerado, com velocidade inicial nula. Então, o deslocamento da bola durante o contacto é dado por:

$$x_c = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}\frac{F}{m}(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}\frac{I}{m}\Delta t. \quad (4.4)$$

Fotografias de alta velocidade mostram que a bola de golfe se deforma, significativamente, durante o impacte do taco. É razoável estimar que o deslocamento x_c deve ser da ordem de grandeza do próprio diâmetro da bola, $d = 4,1$ cm. Suponhamos então que

$$x_c \approx \frac{d}{2}.$$

Usando este valor, na equação 4.4, o tempo de contacto vem:

$$\Delta t = \frac{2m}{I}x_c = \frac{2 \times 0,045}{3,0} \times 0,021 = 0,0006 \text{ s}.$$

Substituindo este tempo de contacto, inferior a 1 ms, na equação 4.3, obtemos um força de

$$F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{3,0}{6 \times 10^{-4}} = 5000 \text{ N},$$

que é mais de 10 000 vezes superior ao peso da bola (0,44 N)! Estes valores são semelhante a valores citados na literatura.

Este cálculo mostra a relação entre os valores da força e do intervalo de contacto. Para o mesmo impulso, isto é, para a mesma variação de velocidade (ver eq. 4.2), quanto menor for o intervalo de tempo, maior é a aceleração ($\Delta v/\Delta t$) e maior a força.

Força num colisão a 60 km h^{-1} .

Voltemos agora ao caso do anúncio, referido acima. Como foi calculada a tal força de duas toneladas?

Para começar, o que é uma força de duas toneladas? Um tonelada são 1000 kg, uma unidade de massa. A única interpretação possível é que seja a força correspondente ao peso de uma massa de 2000 kg, ou seja,

$$F = 2000 \times 9,8 = 19\,600 \text{ N}.$$

Será este valor razoável? Que parâmetros entraram no seu cálculo?

Começemos por notar que a projecção da criança para a frente resulta da primeira lei de Newton. Se o automóvel colide, diminuindo de velocidade repentinamente, os seus ocupantes continuarão a mover-se à velocidade que tinham se sobre eles não actuarem forças: primeira lei de Newton. Assim, uma criança sem cadeira de segurança, voará para a frente do carro (que parou devido à colisão) à velocidade a que o carro se deslocava antes da colisão.

O impulso necessário para a parar uma criança de 30 kg que se desloca a uma velocidade de $60 \text{ km h}^{-1} = 16,7 \text{ m s}^{-1}$ é

$$I = m\Delta v = 30 \times 16,7 = 500 \text{ N s}.$$

Para obter uma força de 19 600 N estamos a supor um tempo de paragem dado por:

$$\begin{aligned} F\Delta t &= 500 \text{ N s} \\ \Delta t &= \frac{500}{19600} = 0,02 \text{ s} \end{aligned}$$

Usando o nosso modelo de força constante, podemos estimar a distância de paragem: o movimento originado pela força impulsiva que pára a criança é uniformemente retardado:

$$x_c = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

A velocidade inicial é $v_0 = 16,7 \text{ m s}^{-1}$ e a aceleração é dada pela segunda lei de Newton:

$$x_c = 16,7 \times 0,02 - \frac{1}{2} \times \frac{19600}{30} \times 0,02^2 = 0,20 \text{ m}.$$

Estas escalas de tempo, da ordem do centésimo de segundo, e de distância, 20 cm, parecem razoáveis para uma colisão automóvel. A força de 19 600 N, não é exagerada.

Qual o efeito do cinto ou de um *air-bag*? O impulso requerido para parar os ocupantes do carro é sempre o mesmo, $I = m\Delta v$. Mas quanto mais tempo durar a interacção correspondente, Δt , e maior for a distância de paragem, x_c , menor será o valor da força necessária: menor serão as probabilidades de essa força causar danos pessoais. O cinto e o *air-bag* permitem uma paragem menos brusca, e uma força menor.

4.3.2 O burro e a carroça

Eis um “paradoxo” clássico da terceira lei de Newton:

Um burro pode exercer uma força (\vec{F}) sobre uma carroça. Mas, pela terceira lei, a carroça exerce sobre o burro uma força oposta ($-\vec{F}$). A força total no sistema tem resultante nula. Logo o burro não se pode pôr em movimento com a carroça! Ou a terceira lei é uma fantasia.



Figura 4.19: Se a força do burro na carroça é oposta da força da carroça sobre o burro, como se move o conjunto?

Para entender a falácia deste argumento convém imaginar o burro com um fato de astronauta, a flutuar com a carroça no espaço, longe da atracção gravítica de qualquer corpo celeste. Pode zurrar, galopar desesperadamente, mas o que não consegue, de modo nenhum, é pôr-se em movimento com a carroça. Pode até dar um coice na carroça e enviá-la numa dada direcção; a reacção da carroça fá-lo deslocar-se na direcção oposta até que os arreios que o amarram à carroça lhe recordem que os respectivos destinos estão ligados. Nem é preciso imaginar o burro no espaço: imagine-se o burro em patins e percebem-se as suas dificuldades.

Falta, é claro, um terceiro corpo nesta história: a Terra. Quando o burro põe a carroça em movimento, assenta os cascos no solo e empurra. A reacção do solo empurra o burro e a carroça na direcção oposta. Se estiver sobre patins não consegue exercer a força sobre o solo, e por isso não existe a reacção do solo que o impulsiona para a frente.

Este exemplo ilustra um aspecto muito importante da terceira lei:

**Nenhum corpo se põe em movimento por si só,
por acção de forças internas, apenas.**

A resultante das forças **internas** de um corpo, forças exercidas por partes do corpo noutras partes do mesmo corpo, é sempre zero. Tomemos um corpo com duas partes A e B . Se a parte A exerce uma força \vec{F} sobre a parte B , esta reage com uma força $-\vec{F}$ sobre A . A força resultante sobre o conjunto, $A + B$, é $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$. Para alterar o estado de movimento global de um corpo é necessária uma força externa, exercida por outro corpo.

Se assim não fosse, Newton e Galileu nunca teriam descoberto a primeira lei. Os movimentos que Newton discutiu e observou

referem-se a corpos complexos formados por muitas partes (hoje diríamos muitos átomos). Se as forças internas não se cancelassem, um corpo poderia ficar sujeito a uma resultante nula e acelerar espontaneamente, *sem acção externa nenhuma!*

Quer isto dizer que a força que faz acelerar um carro não é exercida pelo respectivo motor?

Exactamente! O motor faz parte do automóvel, desloca-se com ele, e, portanto, não pode ser uma força exercida pelo motor que acelera o automóvel! Absurdo? Imagine-se o automóvel sobre um lago gelado, ou numa estrada cheia de óleo: o motor consegue pôr os pneus a rodar, mas sem aderência, sem *força de atrito* entre o solo e os pneus, o carro não anda. A força que faz acelerar o automóvel é a força de atrito exercida pelo pavimento sobre os pneus do automóvel. O motor faz, no fundo, o papel do burro: faz rodar os pneus, empurrando o solo. A reacção deste faz acelerar o automóvel.

Eis, portanto, um caso em que a força de atrito, numa situação de rolamento, tem o mesmo sentido do deslocamento do carro. Não só não se opõe ao deslocamento do carro como é essencial para que este possa ocorrer.

Exercício: Um automóvel ($m_a = 900 \text{ kg}$), atrelado a uma caravana ($m_c = 750 \text{ kg}$), acelera de $v = 0$ até $v = 120 \text{ km h}^{-1}$ em 22 s : Determinar:

- i) a força exercida pelo automóvel na caravana;
- ii) a força exercida pela caravana no automóvel;
- iii) a componente da força exercida pelo solo no automóvel, na direcção do movimento.

Solução:

- i) A aceleração do conjunto é

$$a = \frac{120/3,6 - 0}{22} = 1,51 \text{ m s}^{-2}$$

(a divisão por 3,6 reduz o valor da velocidade a metros por segundo).

Pela segunda lei de Newton, a intensidade da força exercida pelo automóvel na caravana é

$$F_1 = m_c a = 750 \times 1,51 = 1,14 \times 10^3 \text{ N.}$$

- ii) Pela terceira lei de Newton, igualdade de acção-reacção, a força sobre o automóvel tem a mesma intensidade,

$$F_2 = 1,14 \times 10^3 \text{ N,}$$

e sentido oposto ao do movimento.

iii) A força resultante sobre o automóvel é (segunda lei)

$$R = m_a \times 1,51 = 1,36 \times 10^3 \text{ N.}$$

Esta força é a soma vectorial da força exercida pelo solo \vec{F}_s , no sentido do movimento, e da força de reacção da caravana, de sentido oposto. Logo a intensidade da resultante é a diferença dos módulos das duas forças:

$$R = F_s - F_2,$$

ou seja,

$$F_s = R + F_2 = 1,36 \times 10^3 + 1,14 \times 10^3 = 2,50 \times 10^3 \text{ N.}$$

Propulsão de um foguetão

Um carro pode empurrar o solo e a reacção do mesmo fá-lo acelerar. Um avião faz o mesmo com a atmosfera: empurra o ar com os seus reactores e a reacção da atmosfera é uma força exercida no avião. E uma nave espacial, como as *Voyager*? Como se propulsiona?

No espaço não há nada para empurrar. Neste caso o único modo de propulsão consiste em ejectar uma parte da nave, com velocidade elevada, na direcção oposta àquela em que se deseja acelerar: a força de reacção da massa ejectada sobre o resto da nave acelera-a na direcção desejada. Um foguetão funciona deste modo. Ejecta o combustível a uma velocidade elevada, numa certa direcção: o resto da nave acelera na direcção oposta. Mais tarde (12º ano) veremos que é possível definir um estado de movimento global de toda a massa do sistema e que este estado se mantém inalterado, pois não há forças exteriores.

4.3.3 Relatividade do movimento

Imaginemo-nos a viajar num comboio perfeito, rápido como uma seta, percorrendo uma longa recta, sem trepidações, sem travagens nem acelerações. Aproveitamos para escrever, que fazemos sem qualquer dificuldade. O nosso vizinho da frente acende um cigarro. Vemos a chama dançar na ponta do isqueiro, o cigarro ficar em brasa e o fumo do cigarro subir em novelos. A desfaçatez do indivíduo faz-nos deixar cair a caneta, que cai aos nossos pés. Deitamos um pouco de água no copo e bebemos para disfarçar o nosso incómodo.

Pergunta: O que é que, nesta cena, nos leva a pensar que viajamos a 200 km h^{-1} ?

Resposta: *nada!*

Com efeito, quer o movimento dos corpos, como a queda da caneta ou o escoar da água da garrafa para o copo, quer o fenómeno da convecção, que transporta o fumo do cigarro, quer as reacções químicas da chama, ou do nosso metabolismo, se desenrolam *exactamente* como na nossa sala de estar.

Os físicos exprimem esta situação, dizendo que as leis da Física são exactamente as mesmas em dois sistemas de referência em movimento relativo uniforme e rectilíneo—neste caso o comboio e a sala de estar. No diálogo do capítulo anterior, o tio Alberto chama a atenção do sobrinho para este facto. Einstein deu tanta importância a esta observação que a tomou como ponto de partida da sua teoria da Relatividade Restrita em 1905:

Princípio da Relatividade: As leis da Física têm exactamente a mesma forma em dois sistemas de referência em movimento relativo uniforme (velocidade constante).

Ora, um objecto em repouso num sistema de referência (por exemplo o nosso assento, relativamente ao comboio) move-se com movimento uniforme e rectilíneo em outros sistemas (o assento do comboio tem uma velocidade de 200 km h^{-1} relativamente à nossa casa). Ou seja, o estado de repouso de um corpo num sistema de referência é um estado de movimento noutra sistema de referência *absolutamente equivalente* do ponto de vista de leis da Física. Não existe um sistema de referência especial no qual o estado natural de um corpo seja o estado de repouso. Repouso e movimento uniforme e rectilíneo são a mesma condição vista de dois sistemas equivalentes. Neste contexto a primeira lei é menos surpreendente.

4.4 Conclusões

O objectivo deste capítulo foi apresentar a leis de Newton através de exemplos, quer do laboratório quer de situações de vida corrente. São inúmeras as situações que poderíamos considerar. Todo o movimento que observamos sem dispositivos especiais (e

muito do que conseguimos observar, seja com que instrumentos for) pode ser descrito e explicado em termos das leis de Newton. Esperamos que os exemplos do texto e dos problemas e questões que se seguem contribuam para modificar um pouco a nossa percepção do movimento e das suas causas.

A próxima vez que observarmos um movimento, pensemos: o que nos dizem as leis de Newton sobre ele?

4.5 Actividades, Questões e Problemas

4.5.1 Actividades

4.1. Força e movimento

Ver ficha de Actividade A22

4.2. Segunda Lei de Newton

Ver ficha de actividade A23.

4.3. Forças como vectores

Para realizar esta actividade precisamos de uma régua, um transferidor e algumas bandas elásticas (elásticos), como as que há em qualquer escritório. O ideal seria que os elásticos fossem exactamente idênticos, em dimensões e propriedades. Mesmo com elásticos do mesmo lote, isso não se verifica: os resultados desta actividade variam um pouco relativamente ao que seria de esperar para elásticos idênticos. Mesmo assim, a actividade é tão simples que merece ser feita.

- (a) Amarremos duas bandas elásticas com um pouco de fio. Colocando a extremidade de um dos elásticos na ponta da régua, puxemos (sobre a régua) a extremidade do outro. Qual é a posição ocupada pelo ponto de união dos elásticos?
- (b) Usando, de novo, um pouco de fio, unir três elásticos. Fixar as extremidades de dois deles sobre um quadro de cortiça com pionés, mantendo-os sob tensão. Puxar a extremidade do terceiro sobre a linha média perpendicular aos outros dois elásticos e ajustar a sua posição de modo a que os três elásticos tenham (aproximadamente) o mesmo comprimento. Quais são os ângulos entre as direcções dos elásticos?



Figura 4.20: Qual a posição ocupada pelo ponto de união dos elásticos?

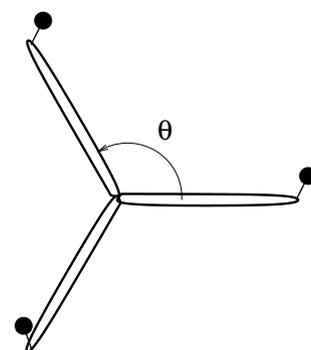


Figura 4.21: Qual é o ângulo entre os elásticos, quando os comprimentos são iguais?

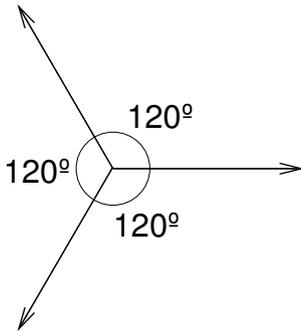


Figura 4.22: A soma destas forças é nula.

Se os elásticos são idênticos, é natural que exerçam forças de igual intensidade quando esticados até ao mesmo comprimento.

- (c) Interpretar os resultados obtidos, mostrando que a soma vectorial das forças exercidas pelos elásticos no fio que os une é nula, em equilíbrio: forças somam-se como vectores.

Nota: Pode-se mostrar, sem qualquer conta, só com alguma geometria, que a soma de três vectores com a mesma intensidade e ângulos de 120° é nula. Como?

4.5.2 Questões

- 4.1. O crédito da descoberta de Neptuno é atribuído a Le Verrier e a John Adams e não a Le Galle, que primeiro observou este planeta ao telescópio. Porquê?
- 4.2. Quais são as unidades do coeficiente de atrito, μ ?
- 4.3. Um avião militar, voando horizontalmente com velocidade constante, deixa cair uma bomba ao sobrevoar o ponto A . A bomba cai sob acção do seu próprio peso e da resistência do ar. Quando a bomba atinge o solo, o avião está a sobrevoar B . Em quais dos seguintes locais cai a bomba:

- (a) em A ;
 (b) em B ;
 (c) entre A e B .

Onde cairia a bomba se não existisse resistência do ar?

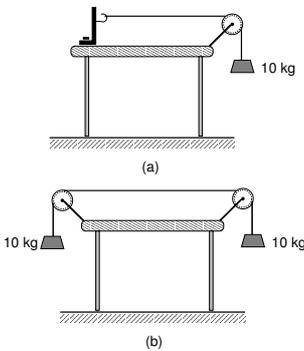


Figura 4.23: Qual das cordas está sujeita a maior esforço?

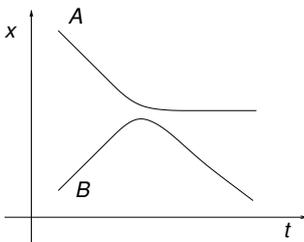


Figura 4.24: Colisão de dois carros

- 4.4. Se a carga na montagem (a) da figura 4.23 for aumentada de 1 kg , a corda parte. A corda aguenta as duas massas de 10 kg na montagem (b)?
- 4.5. O gráfico da figura 4.24 mostra as coordenadas de posição de dois carros que colidem numa calha linear. As suas velocidades iniciais são iguais. Qual dos carros (A ou B) tem maior massa? Justificar.
- 4.6. Num *cartoon* de ilustração da segunda lei, o autor Paul Hewitt, no seu livro *Conceptual Physics*, mostra uma mão a empurrar um tijolo, dando origem a uma aceleração a . Na segunda imagem a mão empurra, com a mesma força, o

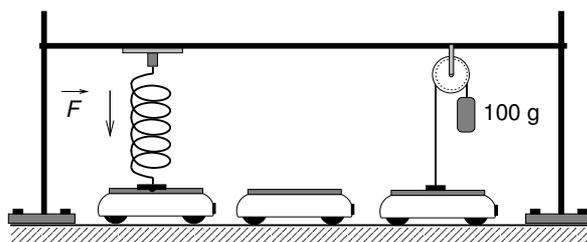


Figura 4.25: Qual é a intensidade da reacção normal da mesa em cada carro?

mesmo tijolo com outro igual em cima e numa terceira imagem com dois tijolos em cima do primeiro. O *cartoon* indica acelerações $a/2$ no segundo caso e $a/3$ no terceiro.

- (a) Como é que Hewitt obteve estas acelerações na segunda e terceira imagens?
 - (b) Se os tijolos deslizarem em cima de uma mesa, os valores da aceleração na segunda e terceira imagem estarão correctos? O que é que Hewitt ignorou?
- 4.7. O Francisco atirou uma bola de ténis ao ar, na vertical, e voltou e apanhá-la. Explicar, por palavras, por que razão sabemos que, quer no lançamento quer na recolha, teve que exercer na bola uma força superior ao peso da mesma.
 - 4.8. Por que é que cair da mesma altura sobre cimento ou sobre um colchão tem consequências tão diferentes? As forças necessárias para parar o corpo em queda não são as mesmas nos dois casos? Porquê?

4.5.3 Problemas

- 4.1. Três carros idênticos, de massa $m = 250 \text{ g}$, estão pousados sobre uma mesa, nas circunstâncias da figura 4.25. A força \vec{F} , exercida pela mola tem uma intensidade de 5 N ; o corpo suspenso na roldana tem um massa $m = 100 \text{ g}$. Determinar a intensidade da reacção normal da superfície sobre cada um os carros.
- 4.2. A balança da figura 4.26 tem duas molas idênticas com uma constante de mola $k = 10^5 \text{ N m}^{-1}$. Qual é o deslocamento do prato da balança quando suporta um homem que “pesa” 80 kg ?

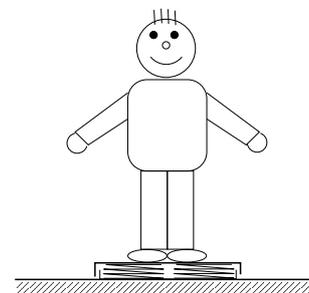


Figura 4.26: Quanto se afunda o prato da balança?

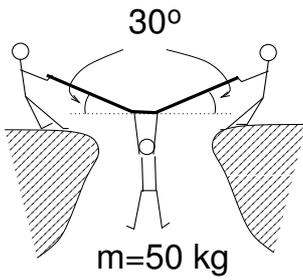


Figura 4.27: Que força exerce cada homem?

- 4.3. Dois homens estão a segurar o cabo da figura ao lado, impedindo o rapaz suspenso de cair. Qual é o valor da intensidade das forças exercidas por cada um dos homens? Serão iguais?
- 4.4. Um comboio com uma locomotiva e cinco carruagens está parado num encosta de inclinação de 5° com a horizontal. Só a locomotiva é que tem travões. Cada carruagem tem uma massa de 20 toneladas.
- Qual é a força exercida pela locomotiva na primeira carruagem?
 - Qual é a força exercida pela primeira carruagem na segunda? E pela segunda na terceira, e assim sucessivamente?
- 4.5. O Airbus A300, um dos maiores aviões comerciais, pode levantar vôo com uma massa de 166 toneladas. Dispõe de dois reactores capazes de gerar, cada um, uma força (*thrust*) de 262 kN.
- Qual é o valor da aceleração que o avião pode atingir na decolagem? Nota: é frequente indicar esta aceleração em unidades de g , a aceleração da gravidade. Por exemplo, uma aceleração de $4,9 \text{ m s}^{-2}$ é *meio-g*.
 - A força que o avião exerce sobre cada passageiro, para lhe comunicar essa aceleração, é a mesma? Ou varia com o peso do passageiro? Quanto vale para um passageiro de 70 kg?
 - Que velocidade pode atingir o avião após acelerar na pista de decolagem durante 30 s?
- 4.6. Um atleta de basquetebol consegue elevar-se 65 cm acima do solo, em salto vertical (ver exercício da página 99).
- Com que velocidade sai do solo?
 - Quanto tempo dura o seu salto?
- [Ignorar a resistência do ar.]
- 4.7. O salto vertical é realizado começando por flectir as pernas para depois as estender rapidamente. Se o tempo de extensão for de 0,2 s, que força exerce no solo uma atleta de 80 kg que se eleva 65 cm?

4.8. Dois amigos resolvem medir a velocidade com que conseguem lançar uma bola de baseball usando um cronómetro. Um deles lança a bola ao ar na vertical e volta a apanhá-la. O outro cronometra o tempo de vôo da bola ($m = 145 \text{ g}$).

- O tempo conseguido por um dos amigos foi de $2,3 \text{ s}$. Qual foi a velocidade de lançamento em quilómetros por hora?
- Se o tempo de extensão do braço for de cerca de $0,1 \text{ s}$, qual foi a força exercida sobre a bola?

[Ignorar a resistência do ar.]

4.9. Os dois amigos do problema anterior acharam que o lançamento vertical não dava muito jeito. Pensaram um pouco e viram que podiam obter a velocidade de lançamento, medindo a que distância na horizontal conseguiam lançar a bola.

- Mostrar que um projectil, lançado com coordenada vertical da velocidade nula, de uma altura h , atinge o solo num tempo:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

- Obter a relação usada pelos dois amigos para calcular a velocidade de lançamento a partir da altura h e da distância percorrida na horizontal durante a queda, L .
- Qual é a velocidade, v_0 , necessária para atingir uma distância $L = 50 \text{ m}$ com uma altura $h = 1,5 \text{ m}$?

[Ignorar a resistência do ar.]

4.10. Uma jovem lança horizontalmente uma pedra, a uma altura de um metro da superfície de um lago, com uma velocidade de módulo 15 m s^{-1} .

- Quanto tempo voa a pedra até bater a primeira vez na água?
- A que distância (na horizontal) se dá o impacto na água?

[Ignorar a resistência do ar.]

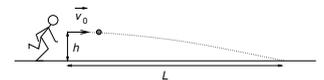


Figura 4.28: Como calcular v_0 , sabendo h e L ?

- 4.11. A força de resistência do ar sobre um corpo, que se move a uma velocidade \vec{v} , tem o sentido oposto a \vec{v} , e intensidade dada pela expressão

$$F = \frac{1}{2} C_D A \rho v^2$$

em que:

- C_D é o coeficiente aerodinâmico, que para uma esfera vale 0,5;
 - A é a área da secção recta do corpo na direcção perpendicular a \vec{v} (πr^2 , para uma esfera de raio r);
 - ρ é a massa volúmica do ar ($\rho \approx 1,3 \text{ kg m}^{-3}$, em condições normais de pressão e temperatura).
- (a) Calcular a intensidade desta força para uma esfera de aço de 2 cm de diâmetro e para uma bola de ténis de 6,35 cm de diâmetro, para uma velocidade equivalente à que teriam ao fim de uma queda de um metro, no vazio.
- (b) Que fracção do peso do corpo é F , em cada um dos casos? ($\rho_{\text{aço}} = 7,9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, $m_{\text{tenis}} = 56,7 \text{ g}$).

- 4.12. Um revólver, como os usados pela polícia norte-americana, dispara projecteis de massa $m = 7,4 \text{ g}$ com uma velocidade de saída da arma de 303 m s^{-1} . O comprimento do cano é cerca de 10 cm. Supondo que, após o disparo e enquanto está no cano da arma, a bala está sujeita a uma força constante:

- (a) durante quanto tempo viaja a bala no cano da pistola?
- (b) Qual é o valor da força exercida sobre a bala?
- (c) Que força é necessário exercer na arma durante o disparo, para que esta não recue?

4.13. O arco e flecha

A relação entre o módulo da força que um arqueiro exerce, F , e a distância, x , que deslocou para trás a corda do arco é quase linear, $F = kx$. Dados de um arco concreto são $F = 171 \text{ N}$ para um deslocamento de 43 cm. A massa de uma flecha é de 20,1 g [8].

- (a) Se a flecha partir com toda a energia elástica armazenada no arco, com que velocidade partirá?
[Nota: energia elástica do arco é $kx^2/2$.]

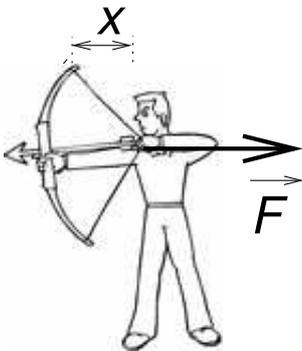


Figura 4.29: O arqueiro puxa a seta de uma distância x .

- (b) Qual foi o impulso comunicado à flecha?
- (c) A força exercida pelo arco no início do disparo é $F_{max} = kx$. No final é zero. Podemos fazer uma estimativa do impulso como sendo

$$I = \frac{F_{max}}{2} \Delta t.$$

Usando esta estimativa, calcular o tempo durante o qual a flecha é impulsionada.

4.5.4 Desafios

- 4.1. Uma das maneiras possíveis de medir o coeficiente de atrito estático, μ_{AB} , entre dois materiais A e B consiste em colocar um corpo do material A sobre uma superfície de material B , inclinada relativamente à horizontal. Verifica-se que o corpo só desliza, se o ângulo da superfície com a horizontal for superior a um valor limite, θ_c . Mostrar que a lei de Amonton-Coulomb implica que:

$$\mu_{AB} = \tan \theta_c.$$

Usando os valores da tabela 4.1 da página 95, qual é o valor de θ_c para um automóvel em asfalto seco?

- 4.2. Uma alpinista ($m = 55 \text{ kg}$) perde o apoio e cai, segura apenas pela corda de segurança. A corda tem um comprimento em repouso de 3 m. Depois de ficar esticada, distende-se cerca de 10 % do seu comprimento para reduzir a velocidade de queda da alpinista a zero. Usando o modelo de forças impulsivas do texto, estimar o valor da força exercida sobre a corda por esta queda de 3 m.

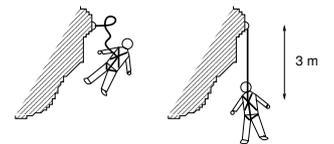


Figura 4.30: Qual é a força sobre a corda?

Capítulo 5

Por que é que a Lua não cai?

5.1 Introdução

Todas as crianças (ou pelo menos aquelas que têm oportunidade de se desenvolverem em circunstâncias normais) passam por uma fase de intensa curiosidade sobre o mundo natural. Querem saber a razão de tudo, questionando sem parar os adultos do porquê das coisas. Ou seja, todos fomos cientistas numa altura das nossas vidas. Uma pergunta frequente nessa fase da vida é a seguinte:

Por que é que a Lua não cai para a Terra?

Esta pergunta volta a surgir, com alguma frequência, mais tarde, ao estudar a Lei da Gravitação Universal: se a Terra atrai a Lua, se o Sol atrai os planetas, por que é que a Lua não cai para a Terra e os planetas para o Sol?

A evolução para uma visão científica do mundo exige quase sempre uma nova maneira de ver aquilo que já nos é familiar. A resposta de Newton a este respeito foi clara: a Lua cai para a Terra e os planetas para o Sol. A maneira como Newton viu está ilustrada na Fig. 5.1, que surge nos *Principia* em 1687.

Nela se mostram várias trajectórias de projecteis, lançados do alto de uma montanha, com velocidades horizontais sucessivamente maiores. Os projecteis atingem a superfície da Terra a distâncias crescentes do ponto de lançamento (D, E, F, C, B, A). A figura sugere que, com velocidade suficiente, o projectil poderá passar

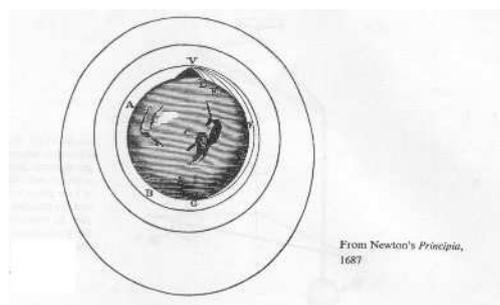


Figura 5.1: Uma ilustração dos *Principia* de Newton.

a orbitar a Terra, apesar de a sua trajectória se encurvar de um modo semelhante à dos projecteis que "acabam por cair".

Com esta maneira de ver Newton estava a raciocinar sobre o movimento dos astros (a Lua) e dos corpos na Terra, usando os mesmos conceitos. Hoje isso parece-nos inteiramente natural. No século XVII era ainda muito controverso. Na altura já era conhecido o modelo heliocêntrico de Copérnico. Kepler tinha mostrado que, num sistema de referência em que o Sol está em repouso, os movimentos dos planetas são elipses, ocupando o Sol um foco. Os movimentos dos planetas em relação à Terra (num sistema em que a Terra está em repouso) são muito mais complexos por causa do próprio movimento da Terra em relação ao Sol.

▷ **heliocêntrico:** com o Sol (Hélios em grego) no centro.

▷ Actividade 5.1

▷ **geocêntrico:** Terra no centro.

Contudo, o modelo heliocêntrico não era de modo nenhum consensual. As autoridades religiosas, em particular, resistiram a abandonar as concepções geocêntricas de Ptolomeu e Aristóteles, que julgavam mais de acordo com algumas passagens da Bíblia. Os trabalhos de Newton contribuíram decisivamente para a ideia de que as **mesmas** leis governam o movimento na Terra e nos céus, um aspecto fundamental da visão do mundo que hoje partilhamos.

O movimento dos planetas no Sistema Solar foi muito importante na descoberta da Lei da Gravitação Universal e será o primeiro tópico deste capítulo. Depois, discutiremos os vários tipos de órbitas possíveis em torno de um astro, relacionando-as com o conceito de energia potencial gravítica. Finalmente, faremos uma breve introdução ao conceito de movimento assistido por gravitação, referido no capítulo 1 a propósito da viagem das *Voyager*.

■ Copérnico e Kepler ■



Nicolaus Copernicus (1473-1543)

Johannes Kepler(1571-1630)

Nicolaus Copernicus (ou Mikolaj Kopernik na forma original do seu nome) nascido em Frauenburg, na actual Polónia, publicou em 1543, no ano da sua morte, a obra *De revolutionibus orbium coelestium* (Sobre as revoluções dos corpos celestes) em que defendia que o movimento de rotação da Terra explicava o movimento diário aparente das estrelas (incluindo o Sol); que o ciclo anual de movimentos do Sol, se devia à revolução da Terra em torno dele; e que a aparente inversão dos movimentos dos planetas no céu (movimento retrógrado), se devia igualmente ao movimento da Terra de onde eram observados.

Johannes Kepler, matemático e astrónomo, nascido em 1571, em Wurttemberg, na actual Alemanha, usando dados observacionais do astrónomo Tycho Brahe, mostrou que o modelo heliocêntrico de Copérnico implicava órbitas planetárias elípticas com foco no Sol. Quando observadas relativamente à Terra essas órbitas parecem curvas muito mais complexas.

Outro ardente defensor da hipótese de Copérnico, como representação do real e não apenas hipótese de cálculo, foi Galileu. Por essa razão entrou em conflito com a Igreja, que defendia que a visão ptolomaica e aristotélica (Terra no centro do Universo) era a única compatível com certas passagens bíblicas. Galileu foi julgado e condenado pelo tribunal da Inquisição, tendo sido obrigado a renunciar publicamente às suas ideias, e proibido de as ensinar.

Caixa 5.1: Nicolau Copérnico e Johannes Kepler.

5.2 Movimentos planetários e gravitação

Para simplificar a nossa discussão, vamos supor que as órbitas dos planetas são circulares. Na realidade, trata-se de uma excelente aproximação para quase todos os planetas do Sistema Solar, pois os semi-eixos maiores e menores das elipses são quase iguais. No caso da órbita da Terra, por exemplo, a razão entre os semi-eixos menor e maior da órbita é

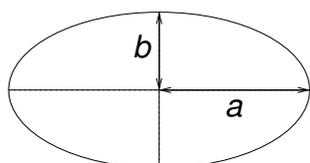


Figura 5.2: Se os semi-eixos menor, b , e maior, a , da elipse forem iguais esta é uma circunferência.

$$\frac{b}{a} = 0,99986,$$

ou seja $b \approx a$.

Uma outra simplificação importante resulta do facto de a massa do Sol, M_{\odot} , ser muitas vezes superior à massa combinada de todos os planetas do Sistema Solar. Embora a força que o Sol exerce num planeta e a que este exerce sobre o Sol tenham a mesma intensidade, pela terceira lei de Newton, a aceleração do Sol é muito menor que a dos planetas, devido à sua grande massa. É, pois, uma boa aproximação supor que o Sol não se move por efeito das forças exercidas pelos planetas. Uma situação semelhante ocorre para órbitas de satélites, ou mesmo da Lua, em torno da Terra.

5.2.1 Aceleração dos planetas

Afinal, por que andam os planetas à volta do Sol? Naturalmente, por que ele está lá! Que outra razão, que não a presença do Sol, pode explicar que todos os planetas se movimentem em órbitas (quase) circulares, centradas, precisamente, no centro do Sol? A presença de uma estrela no centro do sistema solar determina esta *dança* dos planetas.

E se o Sol não existisse? Se desaparecesse de repente, isto é, se desligássemos a sua interacção com os planetas? O que aconteceria aos seus movimentos? Parariam? Manter-se-iam inalterados?

O que Newton respondeu, com base na primeira lei de movimento, foi que os planetas passariam a deslocar-se em linha recta, segundo a tangente à sua órbita. A sua velocidade seria a que tinham no momento de desaparecimento da interacção gravítica.

A Fig. 5.3 ilustra o pensamento de Newton. Imaginemos um sistema de eixos Oxy com origem num ponto qualquer da órbita. A direcção Ox é tangente à trajectória em O e Oy é a direcção radial. Se o Sol desaparecesse quando o planeta está em O , ao fim de

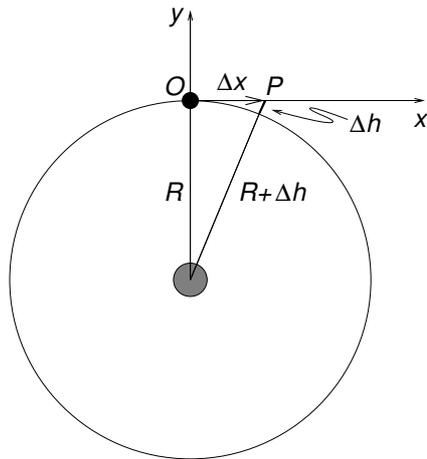


Figura 5.3: Se o Sol desaparecesse quando o planeta está em O , este passaria a deslocar-se ao longo de uma recta; ao fim de 1 segundo teria andado uma distância igual à que estava a percorrer na órbita em cada segundo.

algum tempo, ele estaria em P e não sobre a órbita. A distância ao Sol seria $R + \Delta h$. A atracção do Sol fez com que a distância seja R (órbita circular). Logo, a queda foi de Δh .

Ao passar em O , a velocidade do Planeta tem a direcção do eixo Ox , tangente à trajectória. A sua componente v_y é nula. Um pouco mais à frente, no ponto Q , a velocidade rodou ligeiramente e já tem uma componente negativa segundo Oy . Se v_y é nula em O e negativa em Q , então há uma aceleração na direcção negativa do eixo Oy no ponto O da órbita.

Esta ideia, apesar de muito simples, é uma maneira totalmente nova de pensar sobre o movimento circular dos planetas. O movimento livre, natural, seria em linha recta com velocidade uniforme. Mas o Sol atrai os planetas e estes, sob a acção dessa atracção, encurvam o movimento em direcção ao Sol. O movimento circular implica uma “queda” em direcção ao Sol.

Na próxima secção vamos apresentar um argumento baseado em geometria elementar que permite mostrar que o módulo desta aceleração, dita **centrípetas**, vale

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{5.1}$$

em que v é o módulo da velocidade do planeta e R o raio da trajec-

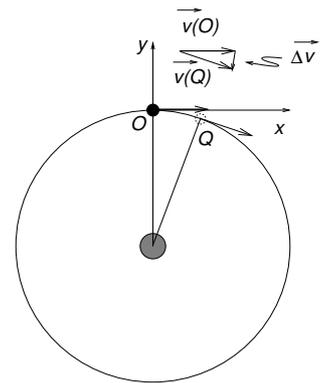


Figura 5.4: A velocidade do planeta rodou entre O e Q . v_y é nula em O e negativa em Q , logo há uma aceleração na direcção do centro da órbita.

tória circular¹. O argumento ilustra o modo como se desenvolvem raciocínios teóricos em física, mas pode ser omitido sem prejuízo do material que se segue. Na actividade 5.2 explora-se o conceito de aceleração centrípeta com um método gráfico.

▷ Actividade 5.2

Aceleração centrípeta

Um pouco de geometria elementar permite-nos saber quanto cai a Terra num intervalo de tempo Δt em direcção ao Sol. Atentemos na Fig. 5.3 da página 123. Pelo teorema de Pitágoras:

$$(R + \Delta h)^2 = R^2 + (\Delta x)^2,$$

o que dá, desenvolvendo o quadrado do primeiro membro,

$$(\Delta h)^2 + 2R\Delta h + R^2 = R^2 + (\Delta x)^2$$

ou seja,

$$(\Delta h)^2 + 2R\Delta h = (\Delta x)^2. \quad (5.2)$$

O raio da órbita da Terra é conhecido e pode ser lido numa tabela de dados astronómicos, $R = 1,5 \times 10^{11} \text{ m} \equiv 1 \text{ UA}$. Por outro lado, uma vez que Δx é o deslocamento que a Terra teria se a sua velocidade passasse a ser uniforme ao passar em O , temos

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t$$

em que v é o módulo da velocidade orbital da Terra (ver Caixa 5.2).

Conhecidos Δx e R , poderíamos calcular Δh resolvendo a Eq. 5.2, uma equação de segundo grau para Δh . Mas nem isso é necessário. Para intervalos de tempo, Δt , muito menores que um ano, a Terra percorre distâncias muito menores que o raio da sua órbita. Num segundo, por exemplo, percorre menos de 30 km, uma fracção pequeníssima do raio da órbita da Terra, $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ (150 milhões de quilómetros). A distância de queda, Δh , é ainda menor que Δx , logo muito menor que R , o raio da órbita da Terra:

$$\Delta h \ll R.$$

Multiplicando ambos os membros por Δh , obtemos

$$(\Delta h)^2 \ll \Delta h R$$

¹Esta fórmula vale, também, para outros tipos de trajectória, se R for interpretado como o *raio de curvatura da trajectória*. Contudo, este conceito não será discutido nestas notas.

■ Velocidade orbital da Terra ■

O módulo da velocidade orbital da Terra pode determinar-se a partir do período da sua órbita e da sua distância média ao Sol. Neste cálculo estamos a considerar que a órbita é circular, que como vimos acima, é uma excelente aproximação. O período da órbita é de um ano:

$$T = 1 \text{ ano} = 365,3 \times 24 \times 60 \times 60 = 3,16 \times 10^7 \text{ s.}$$

A distância percorrida nesse intervalo de tempo é o perímetro da órbita. Como o raio da órbita é $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$:

$$\Delta s = 2\pi R = 9,42 \times 10^{11} \text{ m}$$

O módulo da velocidade é então

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{9,42 \times 10^{11}}{3,16 \times 10^7} = 2,98 \times 10^4 \text{ m s}^{-1}.$$

Em cada segundo a Terra percorre quase 30 km ao longo da sua órbita.

Caixa 5.2: Cálculo da velocidade orbital da Terra

Portanto, podemos desprezar na Eq. 5.2 o termo em $(\Delta h)^2$ comparado com $2\Delta h R$, e resolver em ordem a Δh :

$$\Delta h = \frac{(\Delta x)^2}{2R}. \quad (5.3)$$

Mas por que razão estamos a considerar valores pequenos de Δx ou Δt ? A verdade é que velocidades ou acelerações instantâneas envolvem sempre o limite $\Delta t \rightarrow 0$. Como o nosso objectivo é calcular a aceleração instantânea do corpo no ponto O podemos considerar valores pequenos de Δt e, conseqüentemente, de Δx .

Usando $\Delta x = v\Delta t$,

$$\Delta h = \frac{v^2}{2R}(\Delta t)^2.$$

Para Δt pequeno ($\Delta t \rightarrow 0$), a direcção do deslocamento Δh confunde-se com a direcção do eixo Oy e podemos escrever

$$\Delta y = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{R}(\Delta t)^2. \quad (5.4)$$

Voltemos agora à comparação com o movimento de um projectil lançado na horizontal à superfície da Terra, conforme ilustrado na figura 5.1 dos *Principia* (página 120).

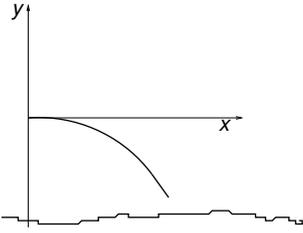


Figura 5.5: Movimento de um projétil à superfície da Terra.

Com a escolha de eixos representada na figura 5.5 o movimento do projétil pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}\Delta x &= v\Delta t \\ \Delta y &= -\frac{1}{2}a(\Delta t)^2\end{aligned}\quad (5.5)$$

em que v é a velocidade do projétil na direcção horizontal e $-a$ a aceleração na direcção vertical.

Reparemos, como Newton, na semelhança entre as equações 5.5 e 5.4. Newton concluiu que um movimento circular de raio R com módulo da velocidade v , tem uma aceleração, dita aceleração centrípeta, dirigida para o centro da trajectória, de módulo

$$a_c = \frac{v^2}{R}.$$

Em resumo, o movimento circular uniforme é acelerado porque a **direcção** da velocidade varia. A aceleração é dirigida para o centro da trajectória.

Pela segunda lei e Newton, uma aceleração implica um força: os planetas têm que ser atraídos em direcção ao Sol para se manterem nas suas órbitas. A correcta análise do movimento circular foi um passo decisivo na descoberta da Lei da Gravitação Universal

Exercício: Calcular Δh para um intervalo de tempo $\Delta t = 1 \text{ s}$ e verificar que, tal como previmos, $(\Delta h)^2 \ll 2hR$.

A velocidade orbital da Terra é aproximadamente

$$v = 30 \text{ km s}^{-1}$$

e o raio da órbita, $R = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$; a aceleração é

$$a_c = \frac{(30 \times 10^3)^2}{1,5 \times 10^{11}} = 6 \times 10^{-3} = 6 \text{ mm s}^{-2}$$

A “queda” da Terra em direcção ao Sol em cada segundo é

$$\Delta h = \frac{a_c}{2} \times 1^2 = 3 \text{ mm}.$$

5.2.2 Aceleração dos Planetas e distância ao Sol

Recorrendo a uma tabela de dados astronómicos, podemos calcular as acelerações centrípeta de todos os planetas do Sistema Solar, conforme se sugere na Actividade 5.3. Esse estudo permite tirar a seguinte conclusão:

▷ Actividade 5.3.

- os planetas do Sistema Solar têm uma aceleração, em direção ao Sol, que não depende da massa de cada planeta, mas apenas da respectiva distância ao Sol;
- A aceleração de cada planeta é inversamente proporcional ao quadrado da respectiva distância ao Sol:

$$a_c = \frac{1,33 \times 10^{20}}{R^2} \text{ m s}^{-2}$$

O produto $a_c \times R^2$ vale o mesmo para todos os planetas do Sistema Solar.

Este estudo sugere uma observação e uma questão:

- **Observação:** A aceleração da gravidade à superfície da Terra, é a mesma para todos os corpos. Acabamos de ver que este resultado vale, também, para o movimento dos planetas em relação ao Sol. A respectiva aceleração depende da distância ao Sol, não da massa dos planetas.
- **Questão:** um corpo à superfície da Terra e a Lua (ou um satélite) estão ambos sujeitos à atracção da Terra. Será que $a_c \times R^2$ é o mesmo para a queda dos graves na Terra e para a Lua na sua órbita? Será que a atracção da Terra segue a mesma lei que a do Sol?

5.2.3 A queda da Lua e de um corpo

Um corpo sujeito apenas ao seu peso, à superfície da Terra, cai com um aceleração constante. O seu deslocamento na vertical é dado pela lei do movimento uniformemente acelerado. Usando um eixo vertical, sentido ascendente podemos escrever, para uma velocidade inicial nula:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

A aceleração, g , vale:

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}.$$

O raio da Terra é de vários milhares de quilómetros:

$$R_T = 6,38 \times 10^3 \text{ km.}$$

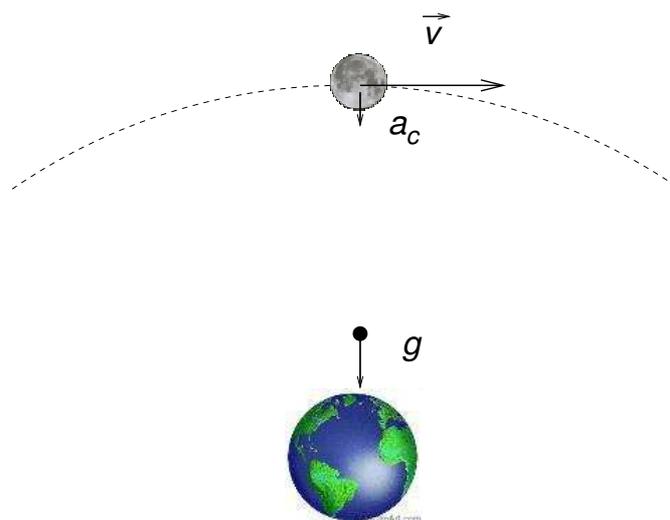


Figura 5.6: haverá alguma relação entre a aceleração da gravidade à superfície da Terra e a aceleração centrípeta da Lua na sua órbita?

Por isso, mais metro menos metro, podemos considerar que, para um corpo próximo da superfície da Terra, a distância ao centro da Terra é R_T e

$$g \times R_T^2 = 3,99 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}. \quad (5.6)$$

De acordo com o raciocínio que fizemos acima, a Lua também acelera em direcção ao centro da Terra. A velocidade orbital da Lua é

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 1,02 \times 10^3 \text{ m s}^{-1},$$

sendo $R = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$ e T o período da órbita da Lua em torno da Terra (27,3 dias). Assim sendo,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = 2,71 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2},$$

e

$$a_c \times R^2 = 4,00 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \quad (5.7)$$

Foi a igualdade dos valores das equações 5.6 e 5.7 (a menos de inevitáveis erros de aproximação) que convenceu Newton da justeza das suas ideias:

Os movimentos da Lua e dos corpos à superfície da Terra são regidos pelas mesmas leis.

Curiosamente, a publicação da Lei da Gravitação Universal foi atrasada de vários anos porque, no primeiro cálculo que fez, Newton usou um valor errado da distância Terra-Lua. Este resultado tem uma importância que não pode ser exagerada. Trata-se de grandezas relativas a movimento na Terra (Eq. 5.6) e no céu (Eq. 5.7). A sua igualdade simboliza a unificação entre o movimentos celestes e terrestres, que alterou para sempre a nossa maneira de ver e de nos situar no Universo.

5.2.4 Lei da Gravitação Universal

Podemos, então, concluir da análise dos movimentos nos campos gravíticos do Sol e da Terra os seguintes factos:

- a) Os planetas, no seu movimento circular, têm uma aceleração na direcção do centro do Sol que é inversamente proporcional a R^2 ,

$$a_c = \frac{1,33 \times 10^{20}}{R^2} \text{ m s}^{-2} \quad (\text{campo gravítico do Sol}) \quad (5.8)$$

- b) A Lua e qualquer corpo sujeito predominantemente à atracção da Terra, têm uma aceleração dirigida para o centro da Terra dada por

$$a_c = \frac{4,00 \times 10^{14}}{R^2} \text{ m s}^{-2} \quad (\text{campo gravítico da Terra}). \quad (5.9)$$

em que R é a distância ao centro da Terra.

Por que razão os numeradores destas duas leis têm valores diferentes? Segundo Newton, estas acelerações são diferentes porque a massa do Sol é superior à da Terra.

A lei da Gravitação Universal afirma que a força exercida pelo Sol num corpo de massa m , à distância R , tem a direcção do centro do Sol e módulo

$$F = \frac{GmM_\odot}{R^2}.$$

Esta força origina uma aceleração (segunda lei):

$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{GM_\odot}{R^2} \quad (\text{campo gravítico do Sol}).$$

No caso do campo gravítico da Terra

$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{GM_T}{R^2} \quad (\text{campo gravítico da Terra}).$$

Estas expressões correspondem exactamente às leis que obtivemos da análise dos movimentos em torno do Sol (Eq. 5.8) e da Terra (Eq. 5.9). Devemos, então ter:

$$GM_{\odot} = 1,33 \times 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

e

$$GM_T = 4,00 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

De facto, a razão entre a Massa do Sol e da Terra é

$$\frac{M_{\odot}}{M_T} = \frac{1,99 \times 10^{30}}{5,97 \times 10^{24}} = 3,33 \times 10^5$$

que é, muito aproximadamente, o valor da razão das constantes encontradas nas Eqs. 5.8 e 5.9:

$$\frac{1,33 \times 10^{20}}{4,00 \times 10^{14}} = 3,33 \times 10^5$$

A constante G , tanto quanto sabemos, descreve o movimento no campo gravítico do Sol, da Terra, ou de qualquer corpo e vale

$$G = \frac{1,33 \times 10^{20}}{M_{\odot}} = \frac{4,01 \times 10^{14}}{M_T} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}.$$

É conhecida como a **Constante de Gravitação Universal**.

O percurso que fizemos para chegar aqui foi, no essencial o do próprio Newton no século XVII.

5.2.5 Terceira Lei de Kepler

Um das consequências que Newton imediatamente retirou da sua análise do movimento circular e da Lei da Gravitação Universal foi a relação entre o período e o raio das órbitas planetárias expressa pela terceira Lei de Kepler:

▷ **Terceira Lei de Kepler**

O cubo do raio da órbita de um planeta, R^3 , é proporcional ao quadrado do respectivo período, T^2 :

$$R^3 = KT^2 \quad (5.10)$$

A constante K (constante de Kepler) é a mesma para todos os planetas do sistema solar.

Newton sabia que um planeta numa órbita de raio R com velocidade v , tem uma aceleração em direcção ao Sol,

$$a_c = \frac{v^2}{R}.$$

A segunda lei de movimento implica que o Sol exerça uma força sobre o planeta dada por

$$F = ma_c.$$

Esta força é dada pela lei de Gravitação Universal, pelo que

$$G \frac{mM_\odot}{R^2} = m \frac{v^2}{R}. \quad (5.11)$$

A massa do planeta cancela nos dois lados da equação e obtemos

$$v^2 R = GM_\odot \quad (5.12)$$

Para relacionar com o período da órbita recordemos que

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2},$$

que, substituído na equação anterior, dá:

$$\frac{4\pi^2 R^3}{T^2} = GM_\odot.$$

Resolvendo em ordem a R^3 , obtemos a terceira lei de Kepler na forma:

$$R^3 = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} T^2. \quad (5.13)$$

Kepler chegou à sua leis de movimento planetário através da procura de regularidades matemáticas nas observações astronómicas de Tycho Brahe. A análise de Newton levou-o muito mais longe:

- A constante de Kepler ficou determinada em termos de G e da massa do Sol:

$$K = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \quad (5.14)$$

No século XVIII, Cavendish, usando uma balança muito precisa, conseguiu medir directamente a atracção gravitacional entre duas esferas de massas conhecidas e determinar o valor de G . Usando a relação deduzida por Newton, Eq. 5.14, ficou a conhecer a massa do Sol.

- O raciocínio de Newton é universal: vale para órbitas em torno de qualquer corpo. Assim para órbitas em torno da Terra:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}. \quad (5.15)$$

Em particular, esta relação permite-nos relacionar os períodos e raios das órbitas dos satélites da Terra.

Exercício: um satélite em órbita no plano do Equador, com um período orbital igual ao período de rotação da Terra, mantém uma posição fixa em relação a qualquer ponto da Terra. Estes satélites dizem-se geo-estacionários e são muito importante nas redes de comunicações por satélite. A que altura deve orbitar um satélite geo-estacionário?

Uma vez que $T = 24 h$,

$$T^2 = (24 \times 60 \times 60)^2 = 7,5 \times 10^9 \text{ s}^2$$

Usando a eq. 5.15

$$R^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2} T^2$$

obtemos

$$\begin{aligned} R^3 &= \frac{6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24} \times 7,5 \times 10^9}{4\pi^2} \\ &= 7,6 \times 10^{22} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

extraíndo a raiz cúbica

$$R = 4,2 \times 10^7 \text{ m} = 4,2 \times 10^4 \text{ km}$$

Esta é a distância ao centro da Terra. Subtraindo o raio da Terra, $R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$ obtemos uma altura relativamente à superfície da Terra:

$$h = 3,6 \times 10^4 \text{ km}$$

ou seja, cerca de 36 000 quilómetros (quase seis vezes o raio da Terra).

5.2.6 Resumo

Quais foram as ideias principais introduzidas nesta secção? Por que não escrevê-las num papel, antes de ler para a frente, para depois comparar com o que se segue?

- O movimento circular uniforme tem uma aceleração dirigida para o centro da trajectória, de módulo:

$$a_c = \frac{v^2}{R}.$$

- Pela segunda lei de Newton, esta aceleração implica a existência de uma força atractiva exercida pelo Sol nos planetas do Sistema Solar e pela Terra na Lua e em todos os corpos na sua proximidade.
- O estudo das acelerações dos planetas do Sistema Solar mostra que a respectiva aceleração é inversamente proporcional ao quadrado da respectiva distância ao Sol; de modo semelhante, a razão entre a aceleração da Lua e de um corpo à superfície da Terra é igual ao inverso da razão dos quadrados das respectivas distâncias ao centro da Terra:

$$\frac{a_{\text{lua}}}{g} = \frac{R_T^2}{R^2}.$$

- Estes resultados encontram a sua explicação natural na Lei da Gravitação Universal;
 - como a força gravitacional sobre um corpo, \vec{F} , tem um módulo proporcional à respectiva massa, a sua aceleração devida a essa força, \vec{F}/m , não depende dessa massa; é a mesma para qualquer corpo nessa posição.
 - A força gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos em interacção: logo, as respectivas acelerações também são.

5.3 Energia e órbitas

5.3.1 Órbitas fechadas e abertas

Por que razão são quase circulares as órbitas dos planetas do Sistema Solar? Será que as leis de Newton só permitem este tipo de órbitas?

De modo nenhum. É fácil de ver que as leis de Newton permitem órbitas muito diferentes das circulares. Consideremos órbitas em torno da Terra como exemplo.

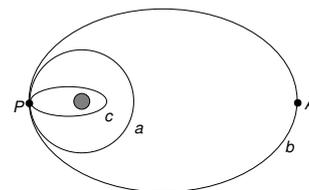


Figura 5.7: Órbitas possíveis em torno da Terra.

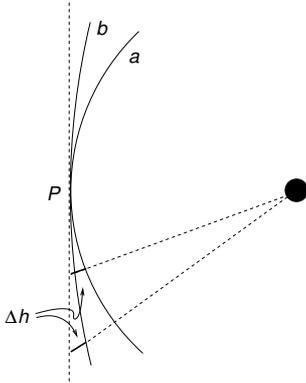


Figura 5.8: No mesmo intervalo de tempo, a "queda", Δh , é a mesma, mas a velocidade é maior na órbita b ; a órbita tem menor curvatura.

Imaginemos uma sonda na órbita circular a da figura 5.7; seja v a sua velocidade. Suponhamos que, ao passar em P , a sonda liga propulsores durante um curto intervalo de tempo e aumenta a sua velocidade, sem alterar a direcção. Que acontece à sua órbita?

A atracção da Terra não foi alterada, logo, a distância de "queda" em direcção à Terra, em cada segundo, é a mesma que na órbita a . Contudo, a distância percorrida no mesmo intervalo de tempo é maior, porque a velocidade é maior: o resultado é uma trajectória com menor curvatura; na linguagem do automobilismo, uma "curva menos apertada" em P . A órbita resultante será do tipo da órbita b : uma órbita elíptica. Por outro lado, se a sonda diminuir a sua velocidade em P , a trajectória terá maior "curvatura" e será do tipo da órbita c . Se a velocidade em P for suficientemente pequena, pode até acontecer que a órbita resultante intersecte a superfície da Terra. A sonda "cai"!

Questão: Por que é que um automobilista que entre numa curva com velocidade excessiva se pode despistar?

Imaginemos que a curva é um arco de círculo de raio R . Para se manter na estrada, o carro terá que estar sujeito a uma força dirigida para o centro do círculo, de módulo

$$F_c = m \frac{v^2}{R}.$$

Essa força resulta do atrito entre os pneus do automóvel e o piso da estrada. Mas a força de atrito é limitada. Se v for demasiado grande, o valor de F_c excede o máximo valor possível da força de atrito. Se a força aplicada ao carro for inferior a F_c , o carro realiza uma trajectória mais aberta (raio de curvatura maior que o da estrada) e despista-se.

▷ **Perigeu e apogeu:** pontos de uma órbita em torno da Terra com distâncias à Terra mínima e máxima, respectivamente.

Quanto maior for o aumento de velocidade em P , maior será a distância máxima à Terra que a sonda atinge (ponto A , apogeu da órbita), antes de "voltar para trás" devido à atracção da Terra. Se a velocidade for suficiente, a sonda pode mesmo escapar à vizinhança da Terra e continuar a afastar-se. Na figura 5.9 mostra-se uma órbita deste tipo (d). Representa um corpo que, vindo de grande distância, é desviado pela atracção gravítica da Terra e que volta a afastar-se para sempre. Se o aumento de velocidade em P for suficiente, a sonda pode passar da órbita circular, a , para uma órbita aberta, deste tipo, d .

Escusado será dizer que as mesmas considerações valem para órbitas no campo gravítico de qualquer outro planeta ou estrela. A

força gravitacional e as leis de movimento apenas determinam a aceleração, isto é, a maneira como *varia* a velocidade. A posição e a velocidade de um corpo podem ser especificadas arbitrariamente num dado instante. As órbitas consideradas nesta secção têm em comum o ponto P , a direcção da velocidade (tangente à circunferência em P), mas diferem no módulo da velocidade no mesmo ponto P .

Voltando agora à questão no início desta secção, a razão das órbitas planetárias serem quase circulares não está nas leis de Newton, mas nas condições iniciais de formação do Sistema Solar. Será nos modelos de formação do Sistema Solar que, eventualmente, encontraremos resposta a essa pergunta. Saber se um determinado corpo está numa órbita aberta ou fechada é uma questão mais simples, que vamos abordar a seguir.

5.3.2 Energia no campo gravítico

No início da novela *Rendez-vous with Rama*, de Arthur C. Clark, astrónomos na Terra detectam um enorme objecto (*Rama*, um fantástico cilindro construído por outra civilização) em movimento em direcção ao Sol. Facilmente determinam a sua posição e velocidade com alguns dias de observação. Com base nesses dados, poderiam determinar se a sua órbita, no campo gravítico do Sol, era fechada ou aberta? A nave estava de passagem ou ia ficar a orbitar o Sol?

A resposta a esta pergunta depende de um cálculo simples de energia. Para percebermos porquê temos que recordar alguns conceitos de 10º ano.

No ano passado discutimos a energia potencial de um corpo à superfície da Terra. Para elevarmos um corpo de massa m de uma altura h , sem o acelerar, temos que exercer uma força externa, \vec{F}_e , de módulo igual ao do peso, mg . O trabalho realizado por \vec{F}_e é a variação de energia do corpo no campo gravítico da Terra:

$$W_e = \text{força} \times \text{deslocamento} = mg\Delta h.$$

Como o corpo não é acelerado, só há variação de energia potencial,

$$\Delta E_P = mg \Delta h. \quad (5.16)$$

Depois de viajarmos com a *Voyager*, de discutirmos órbitas de planetas e satélites, sejamos atrevidos e continuemos a elevar o corpo até alturas comparáveis ou maiores que o raio da Terra.

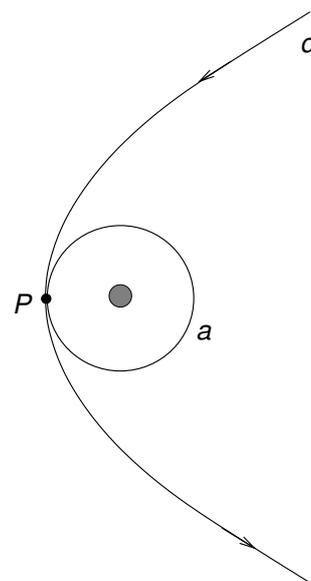


Figura 5.9: Uma órbita aberta.

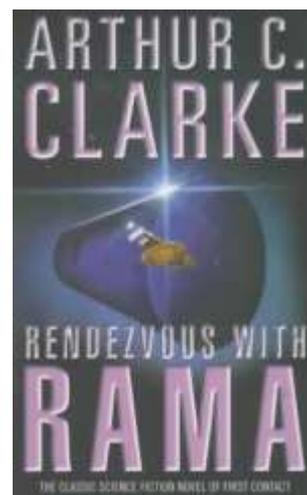


Figura 5.10: Capa da novela, *Rendez-Vous with Rama* uma novela de Arthur C. Clark.

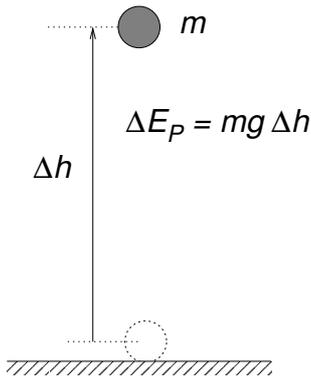


Figura 5.11: Para variações de altitude muito menores que o raio da Terra, o peso pode ser considerado constante.

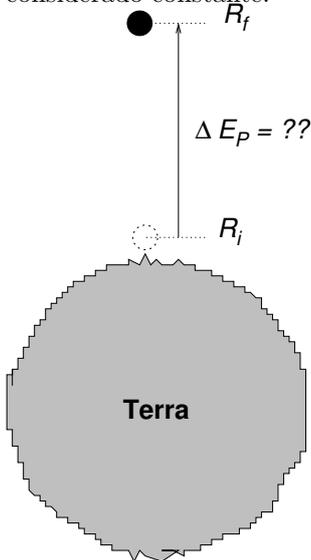


Figura 5.12: Para variações de altitude da ordem, ou superiores, ao raio da Terra, o peso não pode ser considerado uma força constante.

Nesse caso, a expressão da equação 5.16 deixa de estar correcta, pois o peso do corpo varia com a distância ao centro da Terra.

Com efeito, para um corpo à distância R do centro da Terra, o peso, a força com que a Terra o atrai, vale em módulo,

$$P = \frac{GmM_T}{R^2}.$$

Como o raio da Terra é de $R_T = 6380$ km, em variações de altura até alguns quilómetros, a distância R quase não varia e

$$P \approx \frac{GmM_T}{R^2} = mg,$$

com

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

Nestas situações a expressão da equação 5.16 está correcta.

Já um corpo a uma distância $2R_T$ (a uma altura de 6380 km acima da superfície) tem um peso, P'

$$P' = \frac{GmM_T}{(2R_T)^2} = \frac{GmM_T}{4R_T^2} = \frac{1}{4}mg,$$

apenas um quarto do seu peso à superfície da Terra. Sendo assim, o trabalho necessário para elevar um corpo de R_T para $2R_T$ não pode ser dado pela expressão da equação 5.15, pois a força externa necessária diminui com o aumento de R .

A expressão correcta da variação de energia potencial gravítica quando um corpo passa de uma distância $R_i \rightarrow R_f$ é:

$$\Delta E_P = m \left(\frac{GmM_T}{R_i} - \frac{GmM_T}{R_f} \right).$$

Se levarmos o corpo de R até uma distância infinita da Terra, $R_f \rightarrow \infty$, temos

$$E_P(\infty) - E_P(R) = m \frac{GM_T}{R}.$$

É habitual tomar como estado de referência o de afastamento infinito, isto é, considerar energia potencial nula quando o corpo está infinitamente afastado da Terra (peso nulo),

$$E_P(\infty) = 0.$$

■ Energia Potencial Gravítica ■

No texto afirma-se, sem demonstração, que a variação de energia potencial gravítica de um corpo que passa de uma distância R_i para R_f do centro da Terra é

$$\Delta E_p = m \left(\frac{GM_T}{R_i} - \frac{GM_T}{R_f} \right).$$

Esta expressão pode escrever-se na forma

$$\Delta E_p = mGM_T \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f} \right).$$

Reduzindo ao mesmo denominador as duas fracções,

$$\Delta E_p = mGM_T \left(\frac{R_f - R_i}{R_i R_f} \right) = m \frac{GM_T}{R_i R_f} (R_f - R_i).$$

O termo entre parêntesis é a variação de altura $\Delta h = R_f - R_i$. Se $\Delta h \ll R_i$

$$R_i R_f = R_i (R_i + \Delta h) \approx R_i^2$$

e obtemos uma expressão semelhante à usada no 10º ano:

$$\Delta E_p = mg\Delta h$$

$$g = \frac{GM_T}{R_i^2}.$$

Em resumo, a expressão usada no 10º ano é uma aproximação válida quando a variação de altura é muito menor que a distância ao centro da Terra.

Caixa 5.3: Energia potencial no campo gravítico da Terra.

Sendo assim,

$$E_P(R) = -m \frac{GM_T}{R}.$$

O facto da energia potencial gravítica ser negativa significa apenas que é menor que o seu valor no infinito, $E_P(\infty) = 0$. De facto, é necessário realizar trabalho externo (aumentar a energia) para afastar dois corpos que se atraem.

5.3.3 Órbitas abertas e energia

A energia total de um corpo que se move num campo gravítico de outro é a soma da sua energia cinética com a energia potencial gravítica,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM}{R}; \quad (5.17)$$

m é a massa do corpo e M a massa do planeta ou estrela em cujo campo gravítico ele se move (estamos a supor, como sempre, que $M \gg m$). Por conservação de energia, a energia total é constante em todos os pontos da órbita; R e v variam de tal maneira ao longo da órbita que a expressão da equação 5.17 se mantém constante.

É fácil concluir daqui que a energia de uma órbita aberta é positiva. Quando os dois corpos estão infinitamente afastados a energia potencial gravítica é nula:

$$m\frac{GM}{R} \rightarrow 0; \quad \text{se } R \rightarrow \infty$$

Em pontos da órbita de grande afastamento ($R \rightarrow \infty$) a energia total fica igual à energia cinética, que é sempre positiva. Como a energia não varia na órbita, ela é positiva em todos os pontos da órbita.

Numa órbita com energia negativa, por outro lado, a distância entre os dois corpos terá um valor máximo; se a distância pudesse aumentar indefinidamente, a energia potencial gravítica tenderia para zero e a sua soma com a energia cinética não poderia manter-se negativa: estas órbitas são fechadas.

Assim, os astrónomos que observaram Rama teriam apenas que calcular o segundo membro da equação

$$\frac{E}{m_{\text{rama}}} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_{\odot}}{R}$$

para o que precisavam apenas de saber a velocidade, v , e distância ao Sol, R , de Rama: se esta grandeza fosse positiva, a órbita seria aberta e Rama voltaria para o espaço interestelar; se fosse negativa, Rama estaria numa órbita fechada em torno do Sol². Não daremos a resposta: diremos apenas que esta é uma questão importante na novela, uma das melhores obras de sempre de ficção científica.

²Supondo, é claro, que a órbita de Rama não a levaria a um encontro próximo com um planeta.

Exercício: Podemos lançar um projectil que nunca mais volte à Terra, que continue a afastar-se para sempre?

A energia total de um projectil lançado com velocidade v de um ponto da superfície da Terra é:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM_T}{R_T}.$$

Se esta energia for positiva, a órbita será aberta e o corpo afastar-se-á para sempre da Terra. Para isso, a sua velocidade terá que ser tal que

$$\frac{1}{2}v^2 > \frac{GM_T}{R_T}$$

ou

$$v > v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

A velocidade v_e é a **velocidade de escape** da Terra. O projectil não tem que ser lançado na vertical. Desde que não colida com a superfície da Terra pode ser lançado para o espaço em qualquer direcção.

5.4 Movimento assistido por gravitação

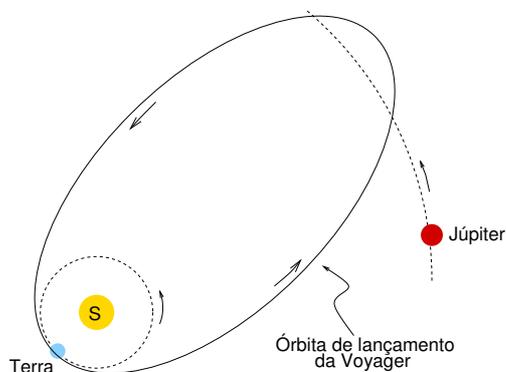


Figura 5.13: Com a velocidade imprimida pelo foguetão de lançamento, e sujeitas à atracção do Sol, as sondas *Voyager* teriam ficado num órbita elíptica, com um afastamento máximo do Sol da ordem da distância Sol-Júpiter.

Na figura 5.13, reproduzida do Capítulo I, mostra-se a órbita de lançamento das *Voyager*. A velocidade com que são lançadas da Terra pelos foguetões Titan-Centaur soma-se à velocidade orbital

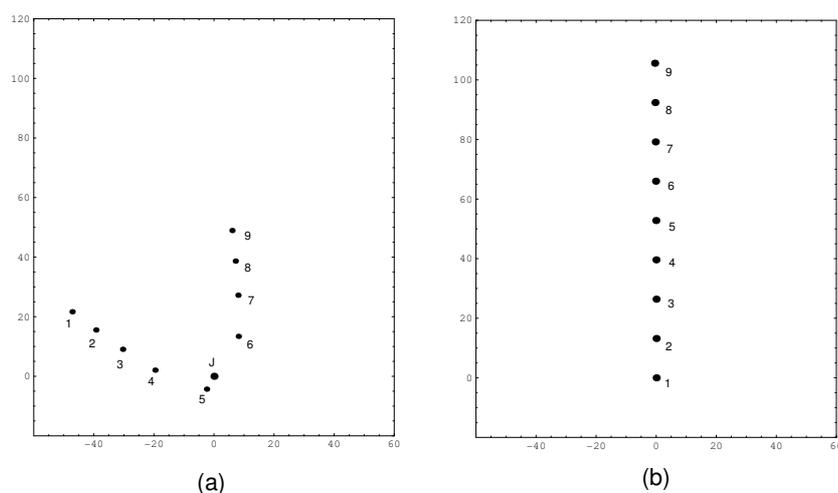


Figura 5.14: (a) Posições da *Voyager* relativamente a Júpiter espaçadas de 20 horas; (b) Posições de Júpiter em relação ao Sol nos mesmos instantes.

da Terra, e as naves entram numa órbita elíptica à volta do Sol, com afastamento máximo do Sol da ordem do raio da órbita de Júpiter. Como dissemos na altura, a passagem junto a Júpiter permite aumentar a velocidade das naves relativamente ao Sol, lançando-as numa órbita aberta.

Como funciona este mecanismo? Como é possível aumentar a energia das naves no campo gravítico de Júpiter?

Na figura 5.14a representam-se posições sucessivas da sonda *Voyager I*, separadas de 20 horas, durante o seu encontro com o planeta [2, 7]. Júpiter ocupa a origem do referencial, sem se movimentar, o que significa que esta órbita está representada tal como seria vista por um observador em Júpiter (referencial de Júpiter). A unidade de distância usada, unidade joviana (UJ), é o raio do planeta Júpiter:

$$1 \text{ UJ} = 7,14 \times 10^7 \text{ m} = 7,14 \times 10^4 \text{ km}.$$

O Sol encontra-se muito distante, no eixo Ox , com uma coordenada $x = -10700 \text{ UJ}$. O efeito da atracção gravítica do Sol no movimento da sonda é muito menor que o de Júpiter no intervalo de tempo representado nas duas figuras.

A órbita da *Voyager* em relação a Júpiter é aberta. A sonda aumenta de velocidade ao aproximar-se do planeta, devido à sua atracção gravitacional, e reduz a velocidade ao afastar-se, pois continua a ser atraída por Júpiter. Neste referencial, o encontro com

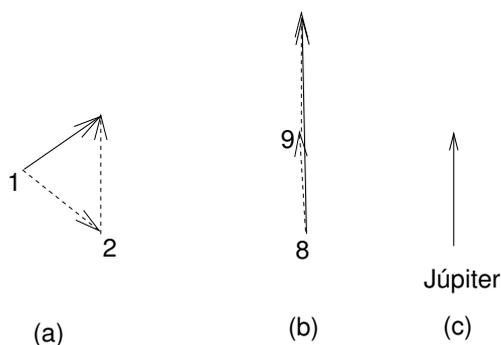


Figura 5.15: Para obter o deslocamento da sonda em relação ao Sol temos que somar ao deslocamento em relação a Júpiter, $(1 \rightarrow 2)$ e $(8 \rightarrow 9)$, o deslocamento de Júpiter em relação ao Sol, (c). O deslocamento em 20 horas é maior após o encontro, (b), do que antes, (a).

o planeta apenas altera a direcção da velocidade da sonda, não altera o respectivo módulo. Se representarmos os deslocamentos entre as posições 1 e 2 e entre 8 e 9, vemos que têm sensivelmente o mesmo módulo. Sabemos que este resultado é uma consequência da conservação de energia no campo gravitacional de Júpiter: dois pontos à mesma distância de Júpiter têm a mesma energia potencial gravítica: como a energia total é conservada, têm também a mesma energia cinética, ou seja, a mesma velocidade.

Mas, durante as 20 horas que decorrem entre posições sucessivas, Júpiter desloca-se relativamente ao Sol na direcção do eixo Oy (fig. 5.14b). O deslocamento da sonda relativamente ao Sol é obtido somando o seu deslocamento relativamente a Júpiter ao deslocamento deste relativamente ao Sol. Ora, depois do encontro, a velocidade da sonda em relação a Júpiter e deste em relação ao Sol têm praticamente a mesma direcção e sentido. Como se vê na figura 5.15, nas 20 horas entre 8 e 9, o deslocamento da sonda relativamente ao Sol é muito superior em módulo ao que ocorre entre 1 e 2. A velocidade da *Voyager* em relação ao Sol aumentou consideravelmente neste encontro. Na actividade 5.4 constrói-se a órbita da *Voyager* relativamente ao Sol, durante este intervalo de 180 horas, a partir das figuras 5.14.

5.5 Conclusões

Neste capítulo explorámos uma parte muito pequena das consequências da Lei da Gravitação Universal. Não falámos de marés,

dos anéis planetários, da formação de galáxias e estrelas por contracção gravitacional. Até a dinâmica da expansão do Universo tem aspectos que se podem compreender usando mecânica newtoniana, embora a Relatividade Geral de Einstein seja essencial para uma compreensão detalhada da estrutura do Universo.

Alguns destes problemas são bastante mais complexos do que os que discutimos neste capítulo. Mas é importante perceber que são as consequências das mesmas leis que o génio de Isaac Newton desvendou para toda a Humanidade.

5.6 Actividades, Questões e Problemas

5.6.1 Actividades

5.1. **Visualização da órbita de um planeta relativamente a outro.**

Ver ficha de Actividade A24.

5.2. **Aceleração centrípeta.**

Ver ficha de Actividade A25.

5.3. **Queda de planetas em direcção ao Sol.**

Ver ficha de actividade A26.

5.4. **Assistência gravitacional.**

Ver ficha de actividade A27.

5.5. **Força centrípeta e velocidade angular.**

Ver ficha de actividade A28.

5.6.2 Questões

5.1. Aristóteles considerava que o movimento “natural” dos corpos celestes ocorria em órbitas circulares. Se interpretarmos “natural” como livre de influências externas, de que modo é que Newton contestou esta concepção?

- (a) Qual era para Newton o movimento “natural”?
- (b) Segundo Newton, os planetas do Sistema Solar tinham um movimento natural?
- (c) Segundo Newton, o movimento circular carecia de uma explicação? Qual?

- 5.2. A órbita de um satélite geo-estacionário tem energia negativa, positiva, ou nula? (No campo gravítico da Terra).
- 5.3. Um automóvel começa a descrever a curva da figura C.1, mas encontra gelo no ponto O , perdendo completamente a aderência dos pneus ao piso da estrada. Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se? Justificar.
- 5.4. Um asteróide está em órbita em torno do Sol a uma distância de duas UA, duas vezes o raio da órbita da Terra. Qual é o período da sua órbita em anos?

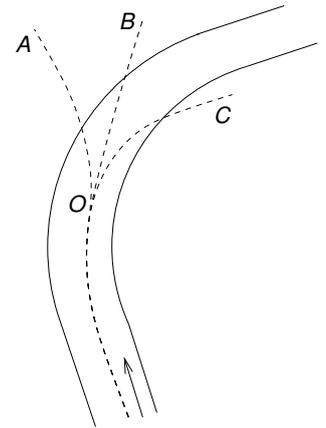
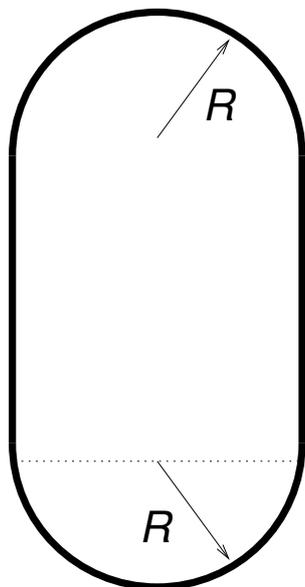


Figura 5.16: Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se?

5.6.3 Problemas

- 5.1. A Lei da Gravitação Universal permite-nos calcular o peso de um corpo à superfície da Terra, em termos da massa e do raio da Terra.
- (a) Obter a seguinte expressão para a aceleração da gravidade à superfície da Terra:
- $$g = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$
- (b) Usando uma tabela de dados astronómicos, calcular as acelerações da gravidade nas superfícies da Lua, de Marte e de Júpiter.
- 5.2. Um corpo à superfície da Terra também é atraído pelo Sol.
- (a) Calcular a força exercida pelo Sol sobre um corpo de massa $m = 1 \text{ kg}$ à superfície da Terra e comparar com o respectivo peso (terrestre).
- 5.3. Num planeta como a Lua, sem atmosfera, não se faz sentir a resistência do ar, como na Terra. É possível ter um corpo em órbita “rasante” à superfície, conforme indica a figura 5.1, na página 120.
- (a) Calcular a velocidade de um projectil em órbita em torno da Lua, a uma distância do seu centro igual ao raio da Lua.
- (b) Repetir o cálculo da alínea (a) para uma órbita em torno de um planeta de massa e dimensões da Terra.

- (c) Calcular a energia gravitacional de um corpo de massa 1 kg, nas órbitas das alíneas anteriores.
- 5.4. Quantos Joule por kg são necessários para acelerar um corpo até à velocidade de escape da Terra?
- 5.5. Qual é altura máxima atingida por um projectil lançado na vertical com metade da velocidade de escape da Terra? (ignorar o efeito da atmosfera).
- 5.6. Os satélites da rede GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) têm períodos orbitais de cerca de 12 horas.
- (a) A que altura acima da superfície terrestre orbitam a Terra?
- (b) Qual é a respectiva velocidade orbital?
- 5.7. Calcular a velocidade de escape de um corpo à superfície da Lua.
- 5.8. Calcular a energia de movimento orbital do planeta Terra (cinética mais potencial gravítica, no campo do Sol).
- 5.9. O Sol tem um movimento orbital, de órbita aproximadamente circular, em torno do centro da nossa galáxia. A distância ao centro é de cerca da 28 000 anos-luz. A velocidade orbital do Sol é cerca de 280 km s^{-1} .



- (a) Qual será o valor da massa da galáxia, interior à órbita do Sol, responsável pela atracção que mantém este movimento orbital do Sol?
- (b) A quantas estrelas de massa média igual à do Sol corresponde essa massa?
- 5.10. A figura representa um circuito automóvel em planta. O raio das curvas é $R = 150 \text{ m}$.
- (a) Se um automóvel descrever a curva a uma velocidade de 140 km h^{-1} , qual é a força, no plano horizontal, em módulo, direcção e sentido, que tem que exercer num ocupante de massa 80 kg para o manter na trajectória circular?

Figura 5.17: Um circuito automóvel.

- 5.11. Os astronautas são sujeitos a acelerações muito elevadas, quer no lançamento das naves quer na reentrada na atmosfera. Nos treinos são colocados numa “centrifugadora”: uma cápsula montada na extremidade de um braço que pode girar a alta velocidade em torno de um eixo na extremidade oposta.
- (a) Se o braço tiver 5 m de comprimento (distância da cápsula ao eixo de rotação), a quantas rotações por minuto terá que rodar para que a aceleração centrípeta dos astronautas na cápsula seja $a_c = 10g$? (g , a aceleração da gravidade).

Parte II

Comunicações

Capítulo 6

Comunicações

6.1 Descoberta dos Pulsars



Figura 6.1: S. Jocelyn Bell com o telescópio que ajudou a construir e com o qual descobriu os pulsars.

Em Julho de 1967, Jocelyn Bell, uma estudante de doutoramento da Universidade de Cambridge, começou a operar um novo “telescópio” que tinha ajudado a construir nos dois anos anteriores. O telescópio era, na realidade, constituído por mais de 1000 postes, com quase 200 km de fios a ligá-los. Mais propriamente, era um enorme complexo de antenas, ocupando uma área de quase dois campos de futebol e destinado a captar sinais de rádio vindos das estrelas (a uma frequência de 81,5 MHz).

No Outono de 1967, ao analisar os registos em papel (eram produzidos cerca de 120 metros de papel por cada varrimento do céu, que demorava quatro dias), Jocelyn Bell notou uns aumentos de

intensidade do sinal, bruscos e de muito curta duração (picos), que se repetiam regularmente, separados de cerca de 1,3 s. O que seria? Um sinal humano, vindo de outro ponto da Terra?

Jocelyn Bell e o seu supervisor, Anthony Hewish, puseram essa hipótese de lado quando verificaram que o sinal se repetia, não à mesma hora todos os dias, mas à mesma hora sideral. Isto é, quando a Terra tinha feito uma rotação completa em relação às estrelas distantes, não em relação ao Sol. O sinal só poderia vir das estrelas (ou de outros astrónomos terrestres, que se guiassem pelo tempo sideral). Desconhecendo qualquer fenómeno estelar que pudesse dar origem a um período da ordem de um segundo, Anthony Hewish e Jocelyn Bell, puseram a hipótese que pudesse ser um sinal vindo de outra civilização e baptizaram-no LGM1 (**L**ittle **G**reen **M**an 1). Contudo, pouco depois, Jocelyn Bell detectou mais duas fontes do mesmo tipo (com períodos mais curtos, noutras regiões do céu). Não era crível que se pudessem encontrar mais civilizações extra-terrestres com tanta facilidade. Os resultados destas observações foram publicados da revista *Nature* e constituíram a primeira observação de pulsars.

Um pulsar é uma estrela constituída por neutrões. Na matéria habitual existem protões e neutrões, que formam o núcleo, e electrões. Em estrelas suficientemente massivas, a atracção gravítica, pode “esmagar” os átomos, empurrando os electrões para núcleo. Os protões capturam os electrões e transformam-se em neutrões. A estrela de neutrões é, pois, semelhante a um enorme núcleo. Apesar de poder ter um raio de apenas $10 \sim 15$ km, a sua massa é superior à do Sol. Um pulsar é uma estrela de neutrões em rotação. Emite radiação na direcção dos seus pólos magnéticos. Ao rodar, o seu feixe de radiação roda no espaço, um pouco como o sinal de um farol. Os sinais detectados em Cambridge correspondiam à passagem do feixe pela Terra.

Exercício: O núcleo do átomo de hidrogénio (protão) tem um raio de cerca de 10^{-15} m. Contudo, tem quase toda a massa do átomo. Um estrela de raio 15 km e com uma massa volúmica igual à do núcleo do hidrogénio, que massa terá?

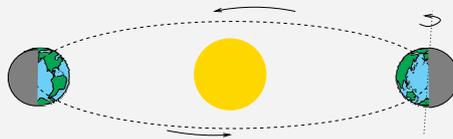
A massa volúmica do protão é

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m_p}{V} = \frac{m_p}{4\pi R^3/3} \\ &= \frac{1,7 \times 10^{-27}}{4,2 \times 10^{-45}} = 0,4 \times 10^{18} \text{ kg m}^{-3}.\end{aligned}$$

Para um raio $R = 15 \times 10^3$ m e a mesma massa volúmica, a

■ Tempo sideral ■

Suponhamos, por um momento, que a Terra não girava em volta do seu eixo. Pelo facto de orbitar em torno do Sol, o hemisfério iluminado numa certa altura do ano estaria escuro passados seis meses. Isto é, mesmo que a Terra não rodasse em torno do seu eixo relativamente às estrelas, haveria um nascer e um pôr do Sol por ano, em qualquer ponto da Terra, por causa da sua órbita. Contudo, o movimento aparente do Sol seria do Oeste para Leste.



Mesmo sem rotação da Terra em torno do seu eixo, haveria um nascer e um pôr-do-sol todos os anos. Mas o movimento aparente do Sol seria o oposto ao que resulta do movimento de rotação da Terra.

De facto, a Terra roda em torno do seu eixo com o mesmo sentido com que orbita em torno do Sol. O resultado é que num período orbital, um ano, há menos um nascer e pôr do sol do que rotações em torno do seu eixo. Ou seja, relativamente às estrelas há mais um dia por ano do que relativamente ao Sol. Cada ano sideral (relativamente às estrelas) tem 366,3 dias e não 365,3 como o ano solar; cada dia sideral tem menos de 24 horas, mais precisamente:

$$\frac{24 \times 365,3}{366,3} = 23,93 \text{ h.}$$

O dia sideral é mais curto que o dia solar em cerca de 4 minutos. Jocelyn Bell e Anthony Hewish repararam que os sinais dos pulsares se repetiam, não à mesma hora terrestre, mas quatro minutos mais cedo em cada dia (quando a Terra repetia a sua orientação relativamente às estrelas).

Caixa 6.1: Diferença entre tempo solar e sideral.

massa será:

$$M = \rho \frac{4\pi (1,5 \times 10^4)^3}{3} = 5,7 \times 10^{30} \text{ kg.}$$

A massa do Sol é 2×10^{30} kg.

6.1.1 Sinais, mensagens e comunicações

A história da descoberta dos pulsars permite-nos levantar um sem número de questões.

O “telescópio” de Cambridge era uma antena que tanto podia captar sinais de rádio de uma estação terrestre, como detectar um objecto remoto situado noutra ponta da nossa galáxia. Ou seja, os fenómenos físicos envolvidos na detecção são, em ambos os casos, semelhantes. Tão semelhantes que, num primeiro momento, houve dúvidas sobre qual tinha sido detectado.

Que fenómeno físico constitui o “sinal”? Que significado tem a respectiva frequência?

O que distingue um “sinal” de uma “mensagem”?

O sistema de telemóveis usa também radiação electromagnética, tal como a que foi detectada no telescópio de Cambridge, com frequências entre os 890 e 960 Mhz. No entanto, usamo-los para transmitir mensagens escritas, voz, ou mesmo imagens. Como transmitimos informação de natureza tão diversa através dos mesmos dispositivos?

Como é que estes “sinais” se transmitem? O que é que realmente é transmitido?

Os sinais captados pelos telemóveis têm origem nas antenas de retransmissão do sistema de comunicações móveis. O sinal detectado pelo telescópio de Cambridge teve origem numa estrela de neutrões a milhares de anos-luz. O *Deep Space Probe* da NASA detecta as transmissões da *Voyager*, cujo emissor de rádio tem a potência de uma lâmpada, a 13 500 milhões de quilómetros.

Por outro lado, estamos equipados com sistemas de detecção e produção de som (audição e sistema vocal) que nos permitem comunicar a curtas distâncias, sem qualquer mediação tecnológica. O que é o som? Como se transmite? Tem alguma relação com a radiação electromagnética, de que temos vindo a falar?

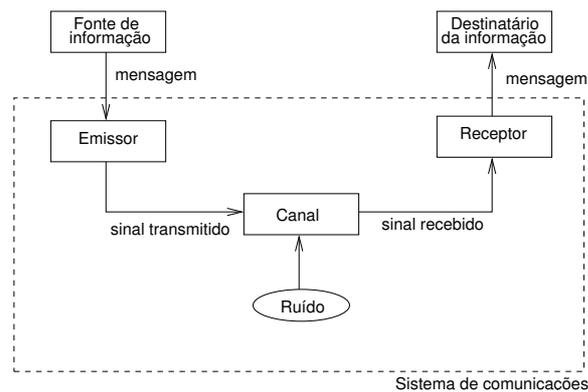


Figura 6.2: Um sistema típico de comunicações.

Sistema de comunicações

Suponhamos que há um grupo de alunos *realmente* interessados no que o professor está a dizer durante uma aula. À sua volta, alguns colegas, menos interessados, conversam entre si.

O professor tenta transmitir uma **mensagem**. O seu sistema vocal é o **emissor** do **sinal**. O sistemas auditivos dos alunos interessados são os **receptores**. As conversas dos colegas, introduzem **ruído** no canal. O som em si, seja sinal ou ruído, consiste em variações de pressão do ar, que conseguimos induzir com o nosso aparelho vocal e detectar com o nosso aparelho auditivo. Essas variações de pressão propagam-se através do ar da sala, que constitui o **canal de comunicação**. Para que haja uma **mensagem**, os sons produzidos no emissor, são escolhidos de um conjunto restrito que os destinatários da mensagem conhecem antecipadamente (sons da língua portuguesa); podemos mesmo falar de um conjunto (potencialmente infinito) de mensagens possíveis, pré-existente, de que o professor escolhe uma, transmitindo por esse facto **informação**. Por exemplo, de todos os objectivos possíveis para o próximo teste, quais foram os escolhidos pelo professor?

Para transmitir informação, o professor **codifica** a mensagem em sons (variações de pressão do ar), usando a sua voz. O sinal detectado pelo sistema auditivo de cada aluno, é decodificado nos seus cérebros, e a mensagem é recuperada (se o ruído não for excessivo).

O que acabamos de descrever é o esquema típico de um sistema de comunicação. Como vemos, a Natureza já nos dotou com um sistema de comunicação muito eficaz, sem o qual a humanidade não teria podido criar uma cultura, isto é, construir sobre o conheci-

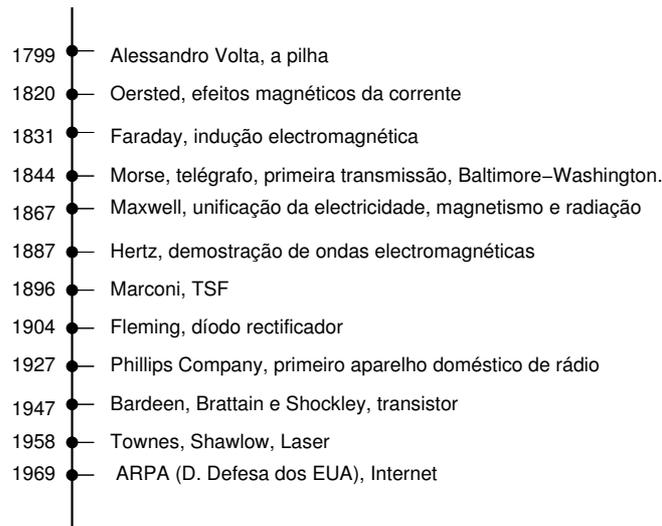


Figura 6.3: Descobertas fundamentais de Física e desenvolvimentos em telecomunicações acompanharam-se ao longo dos anos.

mento de gerações anteriores, sem ser por herança genética. Os sistemas tecnológicos que hoje usamos contêm os mesmos elementos fundamentais (Fig. 6.2):

- fonte de informação;
- emissor;
- canal de transmissão (normalmente com ruído);
- receptor;
- destinatário da informação.

A Física e as comunicações

Os sistemas de comunicação biológicos, baseados no sistema auditivo ou visual, só são utilizáveis a curtas distâncias (às vezes não tanto como desejaríamos, como quando ouvimos a conversa de vizinhos através de paredes sem isolamento sonoro). O desenvolvimento de sistemas eficazes de longo alcance esteve estreitamente ligado a desenvolvimentos importantes da Física.

- A capacidade de gerar e medir **corrente eléctrica**, possibilitou o **telégrafo**. Usando o que é no essencial um interruptor (**a chave do telégrafo**), um operador de telégrafo gera

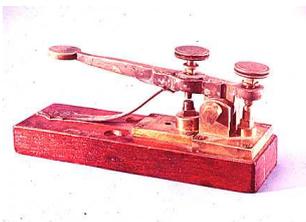


Figura 6.4: Chave de transmissão telegráfica de S. Morse, 1845, National Museum of American History.

correntes de maior ou menor duração num circuito eléctrico. Essas correntes são detectadas noutra ponta do circuito.

Samuel Morse criou um sistema de codificação do alfabeto em seqüências de sinais curtos (pontos) e sinais longos (linhas), usado para codificar mensagens como sinais de corrente eléctrica.

- A capacidade de gerar e detectar **ondas electromagnéticas**, conduziu à telegrafia sem fios (TSF), aumentando as distâncias a que era possível transmitir e permitindo a comunicação com alvos móveis como os navios.
- A invenção do **díodo**, tornou possível uma codificação e decodificação de sinais eléctricos muito mais rica, permitindo, por exemplo, a codificação e decodificação de sons e conduzindo à vulgarização do rádio.
- Os desenvolvimentos posteriores na área dos **semi-condutores** permitiram tornar os sistemas cada vez mais eficientes e portáteis, de tal modo que hoje é quase possível perder um telefone no bolso.
- As **fibras ópticas** e os **lasers**, permitiram aumentar enormemente a capacidade de transmissão dos sistemas de comunicação. Em breve, os sistemas de televisão poderão transmitir conteúdos diversificados à medida do gosto e capricho de cada um dos utentes.

Em suma, a informação não existe, nem se transmite, senão como um fenómeno físico (som, luz, ondas de rádio, corrente eléctrica). Por isso, os desenvolvimentos dos sistemas de comunicação estão fortemente dependentes da nossa compreensão do modo como são produzidos, detectados, transmitidos e transformados, fenómenos como o som, a radiação electromagnética, a corrente eléctrica, etc.

6.2 Actividades, Questões e Problemas

6.2.1 Actividades

- 6.1. Pesquisar na *web*, ou numa boa enciclopédia, a história das telecomunicações. Identificar três desenvolvimentos ou descobertas da Física que tenham sido importantes nas telecomunicações e escrever um texto de duas páginas relacionando-as com progressos em telecomunicações.



Figura 6.5: Primeiro rádio da Phillips, 1927.



Figura 6.6: Primeiro transistor de estado sólido. A sua descoberta, em 1947, marca o início da revolução da electrónica.



Figura 6.7: A internet foi desenvolvida pelo projecto ARPA do Departamento de Defesa dos estados Unidos. A primeira rede de computadores funcionou em 1969.

- 6.2. Pesquisar o alfabeto do código Morse e escrever o nome **Morse** em código Morse, usando traços e pontos marcados numa folha (a primeira transmissão foi, precisamente, registada por sulcos em papel). Usando uma lanterna, transmitir uma mensagem curta em Morse ao resto da turma. Verificar se foi entendida com sucesso.
- 6.3. Ao carregar um telemóvel numa caixa multibanco, chegamos a receber a mensagem de carregamento antes de finalizar a transacção. Tentar listar os dispositivos e máquinas por que passa a mensagem até chegar ao nosso telemóvel.
- 6.4. Descrever as partes principais de um sistema de comunicações.

Capítulo 7

O Som

O som é uma onda de pressão que se propaga na atmosfera a 340 m s^{-1} .

Que quer isto dizer? O que é uma onda? O que é a velocidade de uma onda? O que é que viaja quando o som se propaga? Por que é que se propaga?

Comecemos por explorar o conceito de onda com um exemplo muito simples.

7.1 O que é uma onda

7.1.1 Onda no semáforo

Para compreender alguns conceitos relacionados com ondas vamos imaginar uma experiência simples. Suponhamos que observamos de longe uma longa fila de carros, parados num semáforo. Cai o verde e os carros põem-se em movimento, parando umas dezenas de metros à frente noutro sinal vermelho.

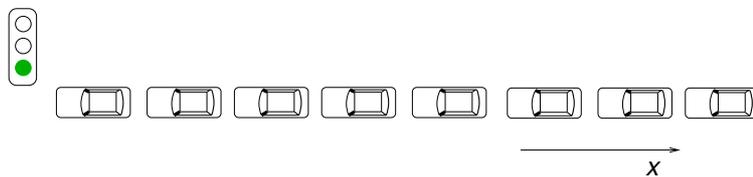


Figura 7.1: Uma onda num semáforo. Quando o sinal passa a verde, o “movimento dos carros” propaga-se para trás na fila.

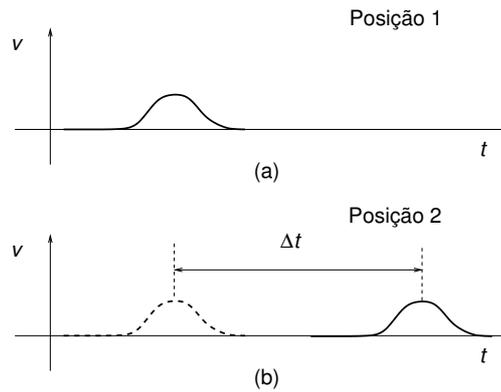


Figura 7.2: Uma onda num semáforo. $v(t)$ é a velocidade dos carros de uma fila que arranca e volta a parar em sinais de trânsito. Os gráficos (a) e (b) correspondem a posições diferentes na fila.

Sabemos bem que os carros não se movem todos aos mesmo tempo. Todos temos a experiência de esperar impacientemente que o “movimento dos carros” chegue até nós, depois de vermos o sinal mudar. Embora os carros viajem para a frente, este “movimento” propaga-se no sentido oposto, da frente da fila para trás. Quanto mais longa for a fila, mais terão que esperar os carros de trás antes de iniciarem o movimento.

Se olharmos de longe para **uma posição da fila**, podemos caracterizar o movimento dos carros nessa posição. Podemos até pensar que estamos a observar uma pequena secção da fila com uns binóculos fixos: não vemos os carros nem atrás nem à frente dessa secção.

Inicialmente, a velocidade na posição observada é nula: os carros estão parados. Quando os carros imediatamente à frente se começam a mover, a velocidade na posição observada aumenta também. Durante um certo tempo vemos carros a passar com uma dada velocidade. Entretanto, verifica-se a paragem da fila; a paragem propaga-se também para trás e acabamos por ter velocidade nula na posição observada. Em resumo, um gráfico de velocidade em função do tempo, numa posição fixa, teria o aspecto do da figura 7.2a.

Se estivéssemos a olhar para um outro ponto mais atrás na fila, veríamos algo semelhante, mas um pouco mais tarde. O gráfico teria o aspecto do da figura 7.2b.

Chamemos $v_1(t)$ à função representada no gráfico da figura 7.2a: é a velocidade em função do tempo na posição **1**. Suponhamos

que o atraso era $\Delta t = 20 \text{ s}$. No instante $t = 20 \text{ s}$, a velocidade na segunda posição, v_2 , é o valor de v_1 em $t = 0 \text{ s}$; em $t = 21 \text{ s}$ é o valor de v_1 em $t = 1 \text{ s}$, etc. Isto é, a velocidade v_2 em t é igual à velocidade v_1 em $t - 20$:

$$v_2(t) = v_1(t - \Delta t),$$

em que $\Delta t = 20 \text{ s}$ é o tempo que demora o movimento a propagar-se da posição 1 à posição 2. Se distância da posição **1** para **2** for d , a **velocidade de propagação da onda** é

$$c = \frac{d}{\Delta t}. \quad (7.1)$$

Se tomarmos a posição **1** como origem do sistema de eixos de coordenadas, com o sentido da figura 7.1, a distância entre as duas posições é $d = \Delta x = x - 0 = x$ e obtemos

$$v_2(t) = v_1\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Ou seja, a velocidade de um ponto da fila de coordenada x depende do tempo, t , e de x e é dada por uma expressão com a forma

$$v(x, t) = v_1\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

em que c é a velocidade da onda.

Este exemplo do nosso dia-a-dia encerra várias lições sobre fenômenos ondulatórios.

- *O que se propaga é uma perturbação num sistema que estava em equilíbrio.*

O cair do sinal verde origina o movimento do primeiro carro: este altera o seu estado, acelerando. *É esta alteração de estado que se propaga para trás na fila.*

- *A onda propaga-se porque partes vizinhas do sistema interagem.*

Com efeito, quando o segundo condutor vê o primeiro carro a mover-se, começa também o movimento, o que por sua vez causa o movimento do terceiro carro e assim sucessivamente. O estado de cada parte do sistema depende das partes vizinhas.

- *As interações são locais: cada parte só interage com as partes vizinhas.*

Cada condutor só vê o carro à sua frente. O condutor do fim da fila não vê o início da mesma e só pode responder quando o sinal se tiver propagado por todos os condutores que estão à sua frente.

- *A velocidade da onda não é a velocidade das “partículas” cujo movimento a constitui.*

Neste caso trata-se de uma onda de movimento de automóveis. Mas os automóveis e a onda deslocam-se em sentidos opostos. Com efeito, a velocidade da onda é totalmente independente da velocidade dos automóveis. É mesmo muito fácil calcular a velocidade da onda, como mostra o seguinte exercício.

Exercício: Suponhamos que entre cada condutor há uma distância fixa de 5 m, que estão todos muito atentos e têm um tempo de reacção de 0,5 s. Qual é a velocidade da onda?

Cada condutor repete o movimento do que está à sua frente com um atraso de 0,5 s, cinco metros mais atrás. Isso significa que a perturbação se propaga 5 m em meio segundo. Logo, a velocidade da onda é

$$c = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ m s}^{-1}.$$

O exemplo dado acima ($\Delta t = 20 \text{ s}$) corresponde a uma distância de $\Delta x = 200 \text{ m}$. Repare-se que não dissemos nada sobre velocidade dos automóveis. Sejam Ferraris ou carros de bois, se o tempo de reacção e a distância entre veículos forem os mesmos, a onda propaga-se à mesma velocidade.

- *Uma função da coordenada x e do tempo t , com a forma*

$$v(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

representa uma onda que se propaga sem alteração de forma no sentido positivo do eixo Ox com velocidade c .

Exercício: Como podemos descrever uma onda que se propaga no sentido negativo do eixo Ox ?

Podemos repetir o raciocínio que fizemos atrás a propósito da fila de carros, usando o eixo Ox no sentido oposto, de

trás para a frente da fila. Nesse caso a distância entre a posição 1 e 2 seria

$$d = |\Delta x| = |x - 0| = -x$$

pois $x < 0$ (x , é a coordenda da posição 2, atrás da posição 1). Então

$$c = \frac{d}{\Delta t} = -\frac{x}{\Delta t}$$

e

$$v(x, t) = v_1 \left(t + \frac{x}{c} \right).$$

Note-se que a velocidade de propagação da onda, tal como foi definida, é sempre positiva.

7.1.2 Geração e propagação do som

Terá o exemplo anterior alguma coisa a ver com o fenómeno do som? Como é gerado o som?

Quando batemos palmas ou batemos com duas placas de madeira, o ar que está entre as mãos ou entre as placas é expelido para o exterior, deslocando-se para a zona à volta. Resultado: a pressão na região próxima aumenta bruscamente. Criamos uma **perturbação** local de pressão. O ar que estava em equilíbrio deixou de estar.

Atentando na figura 7.3, podemos ver que a expulsão do ar entre as placas aumenta a pressão na região **a** onde passa a ser superior à da região **b**, mais exterior. A pressão é uma força por unidade de área. Como a pressão é maior em **a** do que em **b**, a camada de ar entre elas (sombreada) fica sujeita a uma força e acelera para o exterior: a região **a** expande-se e a região **b** é comprimida. A pressão diminui em **a** com esta expansão, mas aumenta em **b**. As forças de pressão entre camadas de ar adjacentes são **interacções entre camadas vizinhas** e dão origem, então, à propagação da perturbação de pressão para distâncias sucessivamente crescentes das placas: temos uma onda sonora a propagar-se a partir destas.

Como vemos, são movimentos rápidos de corpos que provocam estas perturbações de pressão no ar; as diferenças de pressão de ponto para ponto originam forças e deslocamentos no ar, que propaga, deste modo, a perturbação inicial. Por sua vez, outros corpos pode ser postos em vibração e detectar o som. Por exemplo, no nosso sistema auditivo variações de pressão de ar põem em movimento o tímpano e alguns ossos minúsculos que o transmitem às

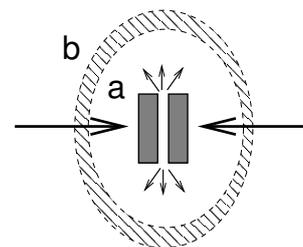
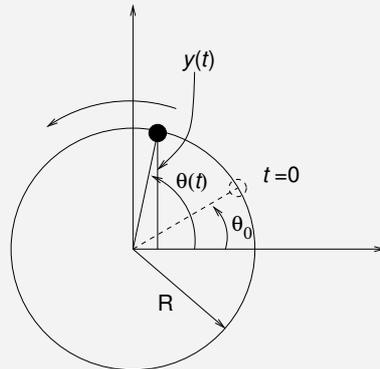


Figura 7.3: Quando batemos duas placas uma contra a outra, a pressão aumenta na região à volta.

■ Movimento circular e a função seno. ■

Estamos habituados a associar o seno a um ângulo. Que tem isso a ver com a função sinusoidal?



Existe, com efeito, uma relação entre um sinal harmónico e o movimento circular. Se imaginarmos uma partícula em movimento circular uniforme, de raio R , o ângulo descrito num período é 2π radianos. Então num intervalo de tempo $[0, t]$ temos:

$$\Delta\theta = \theta(t) - \theta(0) = \frac{2\pi}{T}t.$$

Em termos da frequência $f = 1/T$,

$$\theta(t) = \theta_0 + 2\pi ft.$$

A projecção deste movimento segundo o eixo Oy dá

$$y(t) = R\text{sen}(\theta(t)) = R\text{sen}(\theta_0 + 2\pi ft)$$

que tem precisamente a forma de um sinal harmónico. No portal do projecto Faraday encontra-se um gif animado que ilustra esta relação.

Caixa 7.1: Relação entre movimento circular e função seno.

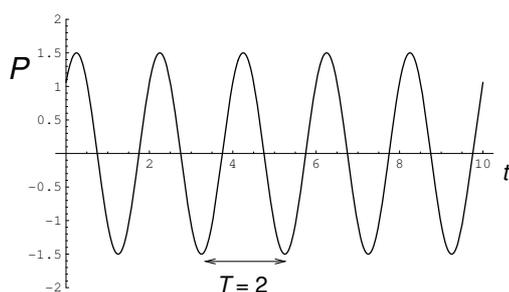


Figura 7.5: Um sinal harmônico, ou sinusoidal, de período $T = 2$ e amplitude $A = 1,5$, representado entre $t = 0$ e $t = 10$.

7.2.1 Sinais sinusoidais

Os **sinais sinusoidais**, também designados como **sinais harmônicos**, como o representado na figura 7.5, têm uma importância central quer em física quer em telecomunicações. Por duas razões¹:

▷ Actividade 7.2

- é extremamente fácil dispor de sistemas que geram sinais sinusoidais. Por exemplo, se pendurarmos uma massa numa mola e usarmos um sensor de movimento para medir a sua posição em função do tempo, obtemos um gráfico semelhante ao da figura 7.5. Qualquer sistema que vibre próximo de uma posição de equilíbrio, pode fazê-lo com variações sinusoidais das grandezas que o caracterizam (deslocamento, velocidade, pressão, etc.).
- Muitos sistemas de comunicações utilizam modificações (**modulação**) de sinais sinusoidais para codificar a informação que se deseja transmitir.

O sinal representado na figura 7.5 é caracterizado pelos seguintes parâmetros:

- o **período**: o valor da função repete-se ao fim de intervalo de tempo $T = 2$. Isto é,

$$P(t) = P(t + T) \quad (T = 2),$$

para qualquer valor de t .

¹Na realidade, por três razões. A terceira será discutida na secção 7.2.2.

- a **frequência** é um parâmetro relacionado com o período. Define-se como o número de oscilações completas por segundo, ou seja, o número de períodos por segundo. Se o período for $T = 0,5 \text{ s}$, teremos $f = 2 \text{ Hz}$; no caso da figura 7.5 $T = 2 \text{ s}$, o que significa que há meia oscilação por segundo, $f = 0,5 \text{ Hz}$ (meio período em cada segundo). De um modo geral:

$$f = \frac{1}{T}.$$

(Se um período dura T segundos, o número de períodos por segundo é $1/T$).

- A **amplitude**, A ; O sinal tem valores que oscilam entre $-1,5$ e $1,5$. A amplitude é $A = 1,5$.
- a **fase inicial**, θ : determina o valor da função no instante $t = 0$.

Matematicamente, um sinal sinusoidal pode ser representado pela função **seno**:

$$P(t) = A \text{sen}(2\pi ft + \theta)$$

Na actividade 7.2 explora-se o efeito de variação destes três parâmetros, f , A e θ no gráfico de um sinal sinusoidal.

7.2.2 Espectro de um sinal

Na actividade 7.2, verificámos que era possível compor uma grande variedade de sinais periódicos somando sinais sinusoidais com amplitudes e fases variáveis. O exemplo da figura 7.6 corresponde à função:

$$P(t) = a_0 \text{sen}(2\pi f_0 t + \theta_0) + a_3 \text{sen}(6\pi f_0 t + \theta_3) + a_5 \text{sen}(10\pi f_0 t + \theta_5) \quad (7.2)$$

com

$$\begin{aligned} a_0 &= 3,17; \\ a_3 &= 0,33; \\ a_5 &= 0,17; \\ \theta_0 = \theta_3 = \theta_5 &= \pi/2. \end{aligned}$$

Este sinal é composto apenas por sinusóides com as frequências f_0 , $3f_0$ e $5f_0$. No CD *Sons*, na pasta `sinais_sintese` existe um ficheiro de som `triang_3harm.wav`, que contém um sinal de

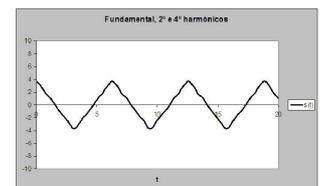


Figura 7.6: Um sinal construído com três sinusóides de frequências f_0 , $3f_0$ e $5f_0$ (ver actividade 7.2).

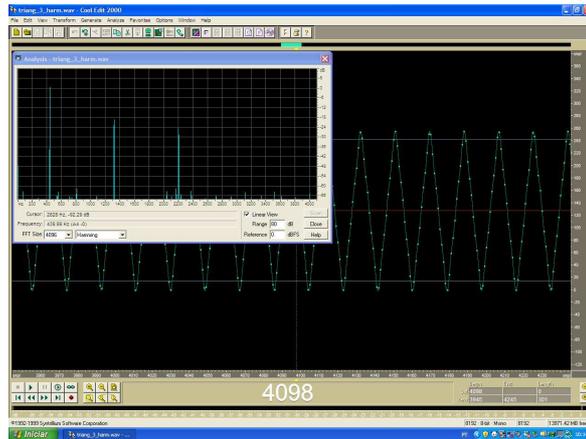


Figura 7.7: Espectro do som do ficheiro `triang_3harm.wav`. Note-se que só existe intensidade significativa às frequências de 440 Hz, $3 \times 440 = 1330$ Hz e $5 \times 440 = 2200$ Hz, precisamente as frequências das sinusóides cuja soma gerou o sinal sonoro em análise.

som gerado de acordo com a equação 7.2, usando $f_0 = 440$ Hz. Na mesma actividade inspeccionou-se o espectro de frequências desse som (fig. 7.7).

Vimos que no **espectro** do sinal aparecem picos de intensidade nas frequências das sinusóides cuja soma deu origem ao som em análise. Mais ainda, verificámos que a intensidade era mais elevada na frequência fundamental, f_0 , diminuindo para $3f_0$ e, ainda mais, para $5f_0$, *exactamente como as amplitudes* a_0 , a_3 e a_5 .

Começamos a ver que há duas maneiras de caracterizar um sinal sonoro:

- a) Podemos representar a pressão em função do tempo, $P(t)$;
- b) Em alternativa, podemos caracterizar o sinal sonoro através da sobreposição (soma) de sinais sinusoidais, identificando as frequências que o compõem e as respectivas amplitudes. O espectro de frequências dá-nos, precisamente, a distribuição de intensidade do sinal por cada frequência.

É um resultado notável, atribuído ao físico francês Joseph Fourier, que **qualquer som, $P(t)$, pode ser representado como soma de sinais sinusoidais**.

Esta representação é possível mesmo para sons como um pancada, ou uma explosão, que não são periódicos, e que podem ter uma duração curta. Um espectro de frequências de um bater de palmas

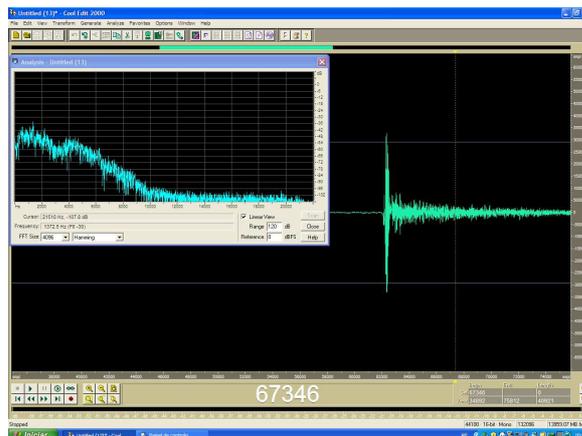


Figura 7.8: Espectro de frequências de um bater de palmas. Neste caso, o espectro apresenta intensidade significativa a todas as frequências entre 0 e 10 kHz; é um espectro contínuo.

está representado na figura 7.8. Ao contrário do que se verifica para um sinal periódico, há uma intensidade distribuída por todas as frequências desde 0 Hz a cerca de 10 kHz: é um espectro contínuo.

Espectros de riscas e espectros contínuos

Já encontrámos no 10^o ano o conceito de espectro de frequências, quando discutimos a radiação. Nessa altura introduzimos a ideia que a energia da radiação electromagnética se podia distribuir por uma gama contínua de frequências. No caso da radiação solar, por exemplo, tínhamos uma distribuição com um máximo a uma frequência dada pela lei de Wien. No caso de um átomo o espectro só tem intensidade significativa a certas frequências: espectro de riscas.

É exactamente este conceito que reencontramos agora a propósito do som. Um sinal periódico tem intensidade apenas em certas frequências: espectro de riscas. Mas um som como uma pancada ou um bater de palmas tem um espectro com intensidade numa gama contínua de frequências: espectro contínuo. Esta distribuição de intensidade em frequência traduz o facto de o sinal (sonoro ou de radiação) se poder exprimir como soma de sinusóides.

Na actividade 7.3 explora-se o interesse do espectro de frequências no reconhecimento de voz.

▷ Actividade 7.3.

7.3 Modulação

7.3.1 Amplitude e Frequência modulada

Quando sintonizamos uma estação de rádio, precisamos de saber se é AM ou FM. Depois temos que sintonizar a respectiva frequência. No caso de AM, estas variam entre 500 kHz e 1 600 kHz = 1,6 MHz; para FM, são mais altas, entre 88 MHz e 108 MHz.

▷ O quilo-hertz, kHz, são 10^3 Hz; o mega-hertz, MHz, são 10^6 Hz (um milhão de ciclos por segundo).

Que quer isto dizer? Quando estamos a ouvir uma estação nos 92,5 MHz, estamos a receber um sinal sinusoidal com esta frequência? E que querem dizer as siglas AM e FM?

Não é complicado perceber que um sinal periódico não pode conter informação. Se o sinal tem uma frequência de 100 MHz, por exemplo, repete-se, exactamente, cada 10^{-8} segundos. Nada de novo chega ao fim de um centésimo de milionésimo de segundo! Claramente, um tal sinal não pode transmitir a informação contida numa canção ou numa conversa. Na actividade 7.2 pudemos confirmar isso mesmo, ouvindo o som produzido por sinais periódicos.

▷ Actividade 7.4

Os processos de modulação de amplitude, AM (**A**mplitude **M**odulation) e modulação de frequência, FM (**F**requency **M**odulation) consistem em variar no tempo, lentamente, os parâmetros de um sinal sinusoidal: a amplitude, A , no caso de AM e a frequência f , no caso de FM. A informação que se deseja transmitir está codificada na variação temporal de A (AM) ou de f (FM). Por exemplo, se queremos transmitir som, variamos a amplitude, A , ou a frequência, f , de acordo com o sinal de pressão $P(t)$ que queremos transmitir. A frequência que sintonizamos no rádio diz respeito ao sinal sinusoidal que é modulado, e chama-se **frequência transportadora**. Estes processos são considerados em mais detalhe na Actividade 7.4.

Mas por que se torna necessário usar a modulação? Por que razão não transmitimos simplesmente o sinal modulador?

Uma das razões tem a ver com o espectro do sinal. Consideremos o caso dos sinais auditivos (voz, música, etc.). Só conseguimos ouvir sinais com frequências entre 10 Hz e os 20 kHz. Mostra-se que, usando um sinal com esta banda de frequências para modular em amplitude um sinal de 1 MHz, o sinal modulado tem toda a sua potência na banda compreendida entre os 980 MHz aos 1 020 kHz. Variando a frequência portadora desde os 500 kHz aos 1500 kHz da Amplitude Modulada, podemos dispor de 25 bandas que não se

sobrepoem². A sintonização do rádio consiste na escolha da banda de frequências vai ser amplificada pelos seus circuitos internos. Deste modo é possível ter sinais de várias estações a serem emitidos em simultâneo, sem qualquer interferência mútua. No caso da frequência modulada, verifica-se algo semelhante: o espectro do sinal modulado só tem componentes significativas numa banda de frequências à volta da frequência transportadora.

▷Actividade 7.5

7.3.2 Sistemas Digitais

Os sistemas de modulação AM ou FM são exemplos de sistemas **analógicos**: a variação contínua no tempo de um grandeza física é produzida no emissor e reproduzida no sistema receptor. Os sistemas **digitais** são cada vez mais frequentes.

O modo como representamos o gráfico de uma função num computador ou numa calculadora dá uma boa imagem do que é um sistema digital.

Nenhum computador pode ter gravados os todos os valores de uma função do tempo, $f(t)$; nem sequer num intervalo finito. Basta pensar que existe uma infinidade de números reais em qualquer intervalo, por exemplo $[0, 10]$. Na realidade, o computador apenas calcula valores de f num conjunto de instantes finitos, por exemplo, de segundo a segundo: $t = 0, 1, 2 \dots$. No intervalo de tempo $[0, 10[$ teríamos apenas 10 valores registados, $t = 0, 1, 2 \dots$, até $t = 9$. Chama-se a este processo a **amostragem** da função $f(t)$ (Fig. 7.9(a)).

Por outro lado, o valor de f em cada instante não pode ser especificado com precisão infinita, já que isso pode requerer uma parte decimal infinita. Suponhamos, por exemplo, que a função toma valores no intervalo $[0, 10[$. Se especificarmos uma precisão de uma casa decimal, a representação de um valor de f está limitada a 100 valores possíveis (de 0,0 a 9,9). Por exemplo, se $f(5) = 3,14$, temos $3,1 < f(5) < 3,2$ e podemos aproximar a função por 3,1. A este processo chama-se **quantificação** (Fig. 7.9(b)).

O resultado destes dois processos é que a representação da função fica completamente especificada por um conjunto de números tirados de um conjunto finito. No caso da figura 7.9, em que amostramos a função em 10 instantes e temos 11 valores de quantificação, só existem 110 funções possíveis. É muito mais fiável

²Na realidade, com tratamento apropriado do sinal, é possível reduzir a banda do sinal modulado a cerca de metade. O número de bandas distintas em AM é pois o dobro do que dissemos.

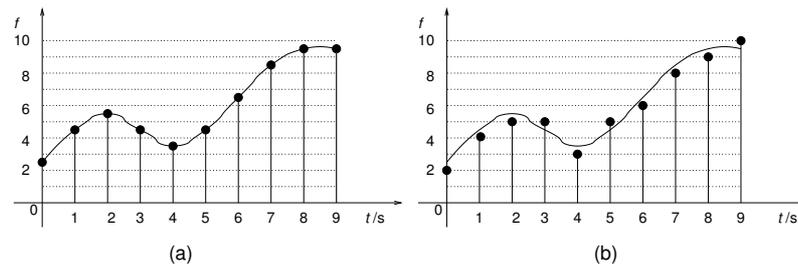


Figura 7.9: Pelo processo de amostragem (a) e quantificação (b), esta função fica representada dez números f_i que são os valores de $f(t)$ em $t = 0, 1, 2, \dots, 9$ aproximados à unidade. Se os valores de f estão no intervalo $[0, 10]$ teremos apenas um total de 110 funções possíveis.

transmitir uma mensagem que tem um número de valores possíveis finito. Para compreender isto, imaginemos alguém que nos grita uma palavra de longe. Se soubermos que nos está a dizer ou “**Sim**” ou “**Não**”, será muito mais fácil perceber o que disse e dificilmente nos enganaremos a interpretar a sua mensagem.

Podemos aplicar este processo a um sinal físico. Chama-se a esta operação **digitalização**. Naturalmente, uma amostragem em 10 pontos com 11 níveis de quantificação não é, em geral, suficiente. Mas, se os intervalos de tempo entre amostras e os intervalos de quantificação forem suficientemente pequenos, o sinal digital é suficiente para permitir a reconstrução do sinal original, para todos os efeitos práticos. O programa CoolEdit®, por exemplo, digitaliza sinais sonoros com uma taxa de 44100 amostras por segundo. Na transmissão de um sinal digital transmitimos um conjunto símbolos discreto e é mais fácil garantir uma transmissão sem erros.

Seja como for, nos sistemas de comunicação nunca passam números, caracteres ou imagens: passa radiação electromagnética, variações de pressão, de corrente eléctrica, etc. Passa Física!

7.4 Actividades, Questões e Problemas

7.4.1 Actividades

7.1. Medição da velocidade do som

Ver ficha de actividade A29.

7.2. Sinais harmónicos e a sua composição

Ver ficha de actividade A30.

7.3. Análise de voz

Ver ficha de actividade A31.

7.4. Modulação AM e FM.

Para realizar esta actividade é necessário dispor de um computador com a aplicação Microsoft Excel[®]. Abrir o ficheiro `modulacao.xls` (CD Sons, pasta `fich_excel`) e seguir as instruções nele contidas.

7.5. Espectro de modulação AM e FM.

Usando o CoolEdit[®], abrir os ficheiros da pasta `modulacao_am_fm` e visualizar os respectivos espectros. Estes ficheiros correspondem aos seguintes parâmetros:

Nome ficheiro	Frequência Portadora	Frequência moduladora	Amplitude modulação
<code>amf440mf60amp05.wav</code>	440 Hz	60 Hz	0,5
<code>fmf440mf60amp20.wav</code>	440 Hz	60 Hz	20 Hz
<code>fmf440mf60amp60.wav</code>	440 Hz	60 Hz	60 Hz
<code>fmf440mf60amp110.wav</code>	440 Hz	60 Hz	110 Hz

Parte III

Anexos

Apêndice A

Soluções do Capítulo 2

A.1 Soluções

A.1.1 Actividades

—

A.1.2 Questões

A.1.

- (a) Falso.
- (b) Falso.
- (c) Verdadeiro.
- (d) Falso.
- (e) Verdadeiro.

A.2. Velocidade média

A.3. —

A.4.

- (a) A direcção não, o sentido sim.
- (b) Não.

A.5. Não.

A.6.

- (a) (d).
- (b) —
- (c) —

A.7.

- (b) $20/7 \text{ m s}^{-1}$;

A.8.

- (a) $A; v_x = 0, v_y > 0.$
 $B; v_x < 0, v_y = 0.$
 $C; v_x = 0, v_y < 0.$
 $D; v_x > 0, v_y = 0.$
- (b)
 - i. Entre A e B : $(a_m)_x < 0, (a_m)_y < 0.$
 - ii. Entre A e C : $(a_m)_x = 0, (a_m)_y < 0.$
- (c) Nula.

A.9.

- (a)
 - i. (b).
 - ii. (c).
 - iii. (d).
 - iv. (a).
- (b) —

A.1.3 Problemas

A.1.

- (a) $500\sqrt{3} \text{ m}.$
- (b) $-500 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \hat{\mathbf{i}} - 500 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \hat{\mathbf{j}}.$

A.2.

- (a) $x = 0,725 \text{ m}.$
- (b) $v_m = 0,07 \text{ m s}^{-1}.$

A.3.

- (a) Celeridade: módulo do vector velocidade instantânea.
 (b) $2,14 \text{ h} = 129 \text{ min.}$

A.4.

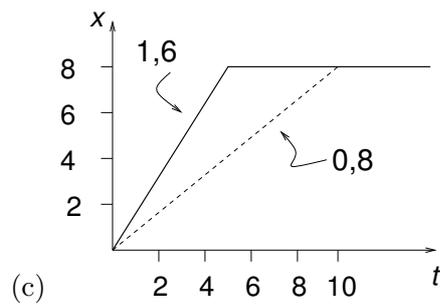
- (a) 80 km h^{-1} .
 (b) O primeiro. O segundo automóvel demorou $2,08 \text{ h}$, ou seja 2 horas e 5 minutos, mais 5 minutos que o primeiro.

A.5.

- (a) $x(t) = -0,373t + 1,15 \text{ (m)}$;
 (b) $x(2) = 0,40 \text{ m.}$

A.6.

- (a) $1,6 \text{ m s}^{-1}$.
 (b) $0,8 \text{ m s}^{-1}$.



A.7. Um automóvel acelera de 0 a 100 km h^{-1} em 6 s em linha recta.

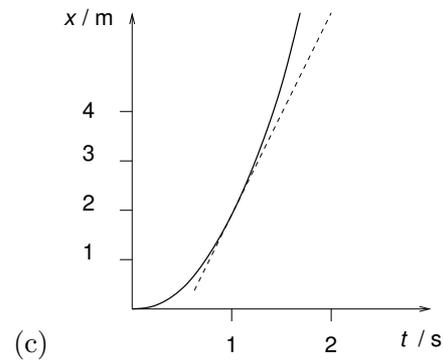
- (a) $4,63 \text{ m s}^{-2}$
 (b) $\Delta x = 83,3 \text{ m}$; $v_m = 13,9 \text{ m s}^{-1}$.
 (c) $v_x(3) = 13,9 \text{ m s}^{-1}$.
 (d) Nos últimos três.

A.8.

$\Delta t/\text{s}$	$v_m/\text{m s}^{-1}$
1	6
0,1	4,2
0,01	4,02
0,001	4,0002

$v_m \rightarrow 4 \text{ m s}^{-1}$

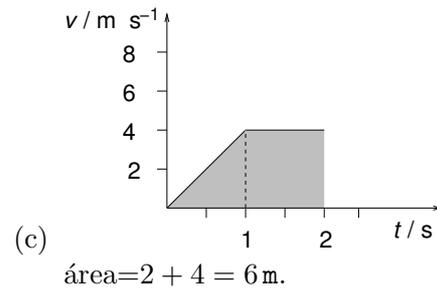
(b) $a = 4 \text{ m s}^{-2}$, $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$, $x_0 = 0 \text{ m}$; $v(1) = 4 \text{ m s}^{-1}$.



A.9.

(a) $v_x = 4 \text{ m s}^{-1}$.

(b) veículo 1: $v_x(t) = \begin{cases} 4t & \text{se } 0 \leq t \leq 1; \\ 4 & \text{se } t > 1; \end{cases}$;
veículo 2: $v_x(t) = 4t$ se $t \geq 0$.



(d) 2 m .

A.10.

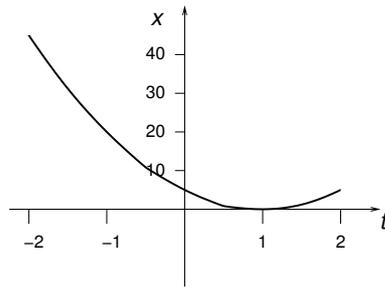
(a)

i. $v_m = -5 \text{ m s}^{-1}$; $\vec{v}_m = -5\hat{i} \text{ m s}^{-1}$.

ii. $v_m = 5 \text{ m s}^{-1}$; $\vec{v}_m = 5\hat{i} \text{ m s}^{-1}$.

iii. $\Delta x = 20 \text{ m}$; $\vec{\Delta x} = 20\hat{i} \text{ m}$.

(b) $x(t) = 5(t-1)^2 = 5(t^2 - 2t + 1) = 5t^2 - 10t + 5$;
 $a_x = 10 \text{ m s}^{-2}$; $v_0 = -10 \text{ m s}^{-1}$; $x_0 = 5 \text{ m}$.



- (c) $-2 < t < 1, v_x(t) < 0;$
 $t > 1, v_x(t) > 0;$
 $v_x(1) = 0.$

A.11.

(a)

$$v_x(t) = 4t + 5$$

$$v_y(t) = -4t$$

(b) Direcção e sentido de \hat{i} .

(c) Direcção e sentido de $\hat{i} - \hat{j}$; norma = $4\sqrt{2} \text{ m s}^{-2}$.

A.12. (a) $t = 3 \text{ s}.$

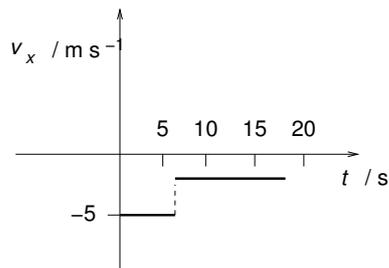
(b) $t = 6 \text{ s}.$ Nulo.

(c) $a_x = \frac{1}{6} \text{ m s}^{-2}.$

(d) A massa sobe até $t = 3 \text{ s}$ e depois desce.

A.13.

(a) Não. A velocidade varia.



(b)

(c) $a_x = 0,19 \text{ m s}^{-2}.$

(d) $x = -40 \text{ m}; t = 10 \text{ s}.$

A.14.

(a) 5,76 s.

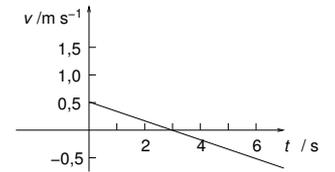
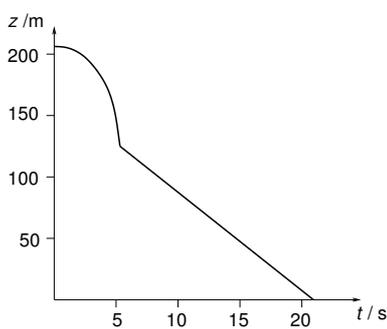


Figura A.1: Que movimento é este?

- (b) $v_x = 18,2 \text{ m s}^{-1} = 65,6 \text{ km h}^{-1}$ 1 s após iniciar a travagem efectiva; $v_x = 19,0 \text{ m s}^{-1} = 68,5 \text{ km h}^{-1}$ após avistar obstáculo.
- (c) $\Delta x = 66 \text{ m}$.

A.15.

- (a) -10 m s^{-2} .
- (b) $v = -10t$ (v em m s^{-1} e t em s).
- (c) $a = -5/21 = -0,24 \text{ m s}^{-2}$.
- (d) $h = (5 \times 50)/2 + (21 - 5) \times 5 = 205 \text{ m}$



(e)

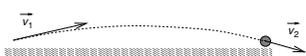


Figura A.2: Trajectória de uma bola de futebol

- A.16. (a) $\|\vec{v}_0\| = 109 \text{ km h}^{-1}$.
- (b) $\vec{v}_f = 30\hat{i} - 5\hat{j} \text{ m s}^{-1}$. $\|\vec{v}_f\| = 109 \text{ km h}^{-1}$.
- (c) Negativo. A força de resistência do ar deve ser oposta em sentido à velocidade. Logo, tem uma componente horizontal com sentido e direcção de $-\hat{i}$.

A.1.4 Desafios

—

Apêndice B

Soluções do Capítulo 4

B.1 Soluções

B.1.1 Actividades

—

B.1.2 Questões

B.1. Le Galle orientou o telescópio segundo as indicações de Le Verrier.

B.2. Adimensional. É uma razão entre duas forças.

B.3. —

(c).

Em B .

B.4. Sim.

B.5. A . As forças exercidas em cada carro são iguais (terceira lei); a aceleração de A foi menor em módulo, pois a variação de velocidade foi menor: logo, a sua massa é maior.

B.6.

(a) Supondo a mesma força e massas $2m$ e $3m$.

(b) Não. A variação da força de atrito da mesa.

- B.7. Porque a bola teve aceleração não nula de sentido oposto ao do peso.
- B.8. O tempo que a velocidade demora a reduzir a zero é tanto menor quanto mais dura for a superfície. As forças têm intensidades tanto maiores quanto menor for o tempo de paragem, pois $F\Delta t$ tem sempre o mesmo valor, $F\Delta t = m(0 - v_i)$ em que v_i é a velocidade quando se inicia o contacto.

B.1.3 Problemas

- B.1. Carro com mola, $N = 7,45 \text{ N}$; carro pousado, $N = 2,45 \text{ N}$; carro com massa, $N = 1,47 \text{ N}$; ($g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$).
- B.2. $3,9 \times 10^{-3} \text{ m} = 3,9 \text{ mm}$.
- B.3. 490 N. São iguais.
- B.4.
- (a) $8,54 \times 10^4 \text{ N}$.
- (b) $6,83 \times 10^4 \text{ N}$; $5,12 \times 10^4 \text{ N}$; $3,42 \times 10^4 \text{ N}$; $1,70 \times 10^4 \text{ N}$; ($g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$).
- B.5.
- (a) $0,32 g = 2 \text{ m s}^{-2}$.
- (b) É directamente proporcional à massa do passageiro. 219 N.
- (c) $95 \text{ m s}^{-1} = 340 \text{ km h}^{-1}$.
- B.6.
- (a) $3,57 \text{ m s}^{-1}$.
- (b) 0,73 s.
- B.7. $2,2 \times 10^3 \text{ N}$.
- B.8.
- (a) $40,6 \text{ km h}^{-1}$.
- (b) 17,8 N.
- B.9.

- (a) —
- (b) $v_0 = L\sqrt{g/2h}$.
- (c) $90,4 \text{ m s}^{-1} = 325 \text{ km h}^{-1}$.

B.10.

- (a) 0,45 s.
- (b) 6,78 m.

B.11.

- (a) Esfera: $F = 2 \times 10^{-3} \text{ N}$. Bola: $2 \times 10^{-2} \text{ N}$.
- (b) Esfera: $F/P = 6 \times 10^{-3}$. Bola; $F/P = 3,6 \times 10^{-2} \text{ N}$.

B.12.

- (a) $6,6 \times 10^{-4} \text{ s}$.
- (b) $3,4 \times 10^3 \text{ N}$.
- (c) Uma força de módulo $3,4 \times 10^3 \text{ N}$.

B.13.

- (a) $60,5 \text{ m s}^{-1}$.
- (b) $I = 1,2 \text{ N s}$.
- (c) $\Delta t = 14,2 \times 10^{-3} \text{ s} = 14,3 \text{ ms}$.

B.1.4 Desafios

—

Apêndice C

Soluções do Capítulo 5

C.1 Soluções

C.1.1 Actividades

—

C.1.2 Questões

C.1.

- (a) O movimento rectilíneo e uniforme.
- (b) Não. Em órbitas circulares o movimento é acelerado.
- (c) Sim. Para haver aceleração tem que existir uma força externa. As órbitas observadas exigiam que existissem forças exercidas sobre os planetas.

C.2. Negativa. Para transferir um satélite para uma distância infinita da Terra com velocidade nula (energia total nula) é necessário realizar trabalho externo sobre ele. Logo a energia numa órbita geoestacionária é negativa.

C.3. **B.** Ao perder a aderência, o automóvel deixa de estar sujeito à força de atrito com o solo e passa a deslocar-se em trajectória rectilínea na direcção tangente à trajectória anterior, no ponto onde a força passou a ser nula.

C.4. $\sqrt{8} \approx 2,83$ anos.

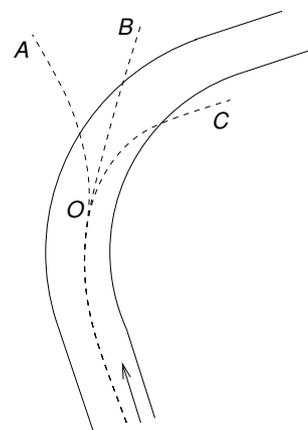


Figura C.1: Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se?

C.1.3 Problemas

C.1. A Lei da Gravitação Universal permite-nos calcular o peso de um corpo à superfície da Terra, em termos da massa e do raio da Terra.

(a) —

(b)

$$\begin{aligned} g_{\text{Lua}} &= 1,62 \text{ m s}^{-2} \\ g_{\text{Marte}} &= 3,80 \text{ m s}^{-2} \\ g_{\text{jupiter}} &= 24,9 \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

C.2.

(a) Força exercida pelo Sol. $F_s = 5,9 \times 10^{-3} \text{ N}$; Força exercida pela Terra: $P = 9,8 \text{ N}$; $F_s/P = 0,6 \times 10^{-3}$.

C.3.

(a) $1,68 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 1,68 \text{ Km s}^{-1}$.

(b) $7,91 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 7,91 \text{ Km s}^{-1}$.

(c) Lua: $E_p = -2,82 \times 10^6 \text{ J}$; $E_{\text{total}} = -1,41 \times 10^6 \text{ J}$;
Terra: $E_p = -6,25 \times 10^7 \text{ J}$; $E_{\text{total}} = -3,12 \times 10^7 \text{ J}$.

C.4. $6,25 \times 10^7 \text{ J}$.

C.5. $R_f = 4R_T/3$, ou $h = R_T/3 \approx 19\,110 \text{ km}$.

C.6.

(a) $20,2 \times 10^3 \text{ Km}$.

(b) $3,87 \text{ Km s}^{-1}$.

C.7. $2,38 \text{ Km s}^{-1}$.

C.8. $-2,65 \times 10^{33} \text{ J}$.

C.9.

(a) $3,11 \times 10^{41} \text{ kg}$.

(b) $1,6 \times 10^{11} M_{\odot}$.

C.10.

- (a) Horizontal dirigida para o centro de trajectória, de módulo 807 N.

C.11.

- (a) 42,3 rpm (rotações por minuto).

Apêndice D

Anexo Matemático: vectores

Neste anexo vamos recordar algumas propriedades importantes do conceito de **vector**, que foi introduzido na disciplina de Matemática no 10º ano. Estas notas só pretendem ser um breve resumo de algumas propriedades mais importantes. O livro de texto de Matemática do 10º ano poderá ser um recurso útil para quem estiver mais esquecido.

Os objectivos deste capítulo são:

- recordar e compreender a noção de vector;
- saber determinar as componentes de um vector; saber calcular o respectivo módulo.
- saber realizar operações de soma e produto por escalar, em termos geométricos e em termos de componentes; compreender a relação entre as duas representações.
- saber escrever um vector usando os versores dos eixos coordenados;

D.1 Definição de Vector

Tomemos como exemplo dois pontos no plano, com um referencial cartesiano, $A \mapsto (2, 1)$ e $B \mapsto (6, 3)$ (Fig. D.1). Desenhemos o segmento de recta que une A e B . Ordenando os dois pontos

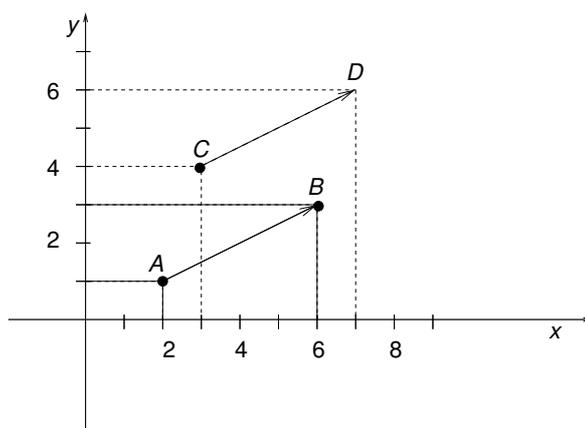


Figura D.1: Os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo **vector**

(primeiro A e segundo B , AB) podemos *orientar* o segmento juntando uma seta em B . O segmento orientado corresponde ao par ordenado de pontos AB , a seta apontando do primeiro ponto, A , para o segundo, B . O segmento orientado BA difere de AB apenas pela orientação da seta.

Consideremos um terceiro ponto $C \mapsto (3, 4)$ e a seguinte questão:

Se representarmos um segmento orientado CD , paralelo a AB , com o mesmo sentido e comprimento, isto é, um segmento *equipolente* a AB , quais serão as coordenadas do ponto final D ?

Notemos que, se projectarmos perpendicularmente o segmento AB no eixo dos xx , as coordenadas dos extremos da projecção são as coordenadas x de A e de B , $x_A = 2$ e $x_B = 6$. Por isso o comprimento da projecção é

$$\Delta x = x_B - x_A = 6 - 2 = 4.$$

De igual modo, no eixo dos yy ,

$$\Delta y = y_B - y_C = 3 - 1 = 2.$$

Para conseguirmos que o segmento CD seja paralelo a AB e tenha o mesmo comprimento e sentido, basta garantir que tenha as mesmas projecções nos dois eixos. Se marcarmos as coordenadas

de D de modo a que

$$\begin{aligned}x_D - x_C &= x_B - x_A = \Delta x = 4 \\y_D - y_C &= y_B - y_C = \Delta y = 2\end{aligned}\quad (\text{D.1})$$

obtemos, claramente, o que nos propusemos: um segmento orientado CD paralelo a AB (mesma direcção) com o mesmo comprimento e sentido. Assim, as coordenadas de D são:

$$\begin{aligned}x_D &= x_C + \Delta x = 3 + 4 = 7 \\y_D &= y_C + \Delta y = 4 + 2 = 6.\end{aligned}$$

Recordemos então as seguintes definições:

Vector Os dois segmentos AB e CD dizem-se *equipolentes* e são representações do mesmo **vector**. Por outras palavras, para identificar um vector não nos interessa saber qual é o ponto inicial. Qualquer um dos segmentos equipolentes a AB representa o mesmo vector. Podemos até identificar o vector com o *conjunto* dos segmentos equipolentes a AB . A notação convencional para vector é usar uma seta por cima de um símbolo que o represente, por exemplo \vec{a} . Por vezes usa-se a designação **vector livre** para salientar que quaisquer segmentos equipolentes representam o mesmo vector. Em Matemática só há vectores livres e podemos usar, sem confusões, a designação simples, **vector**, sem o adjectivo.

Componentes As *componentes* do vector \vec{a} , representado pelo segmento AB , neste sistema de coordenadas, são $(4, 2)$, ou seja, as diferenças das coordenadas dos pontos B e A ,

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4, 2) \quad (\text{D.2})$$

Podíamos, igualmente, usar os pontos D e C , ou de qualquer outro par de pontos que defina um segmento orientado equipolente a AB , porque *segmentos orientados equipolentes têm as mesmas projecções nos eixos coordenados* (ver Eq. D.1). Já que as *componentes* de \vec{a} são iguais às diferenças de *coordenadas* dos pontos B e A podemos também definir este vector como sendo a *diferença entre os dois pontos*, $B - A$ (igual a $D - C$).

$$\vec{a} = B - A = D - C \quad (\text{D.3})$$

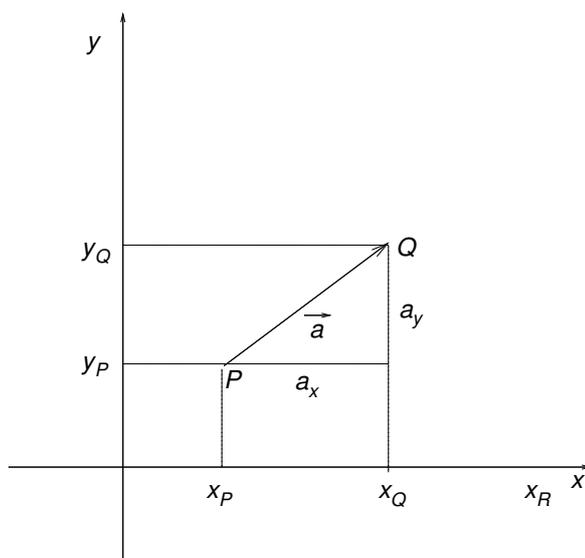


Figura D.2: O módulo de \vec{a} é dado pelo Teorema de Pitágoras, $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.

Módulo ou norma O comprimento de qualquer segmento orientado que represente o vector é o **módulo** ou **norma** do vector, designado por $\|\vec{a}\|$. Pode ser calculado a partir das suas componentes usando o teorema de Pitágoras.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (\text{D.4})$$

Quando representamos geometricamente um vector, estamos sempre a escolher, de uma infinidade possível (todos os pontos iniciais), um segmento orientado que o representa. É frequente abusarmos da linguagem e chamarmos vector a um destes segmentos. Daí não vem mal ao mundo, se nos lembrarmos que qualquer outro segmento equipolente, isto é, com o mesmo comprimento, direcção e sentido, representa o mesmo **vector**.

D.2 Operações sobre vectores

D.2.1 Soma de vectores

Recordemos como se *somam* dois vectores quaisquer \vec{a} e \vec{b} .

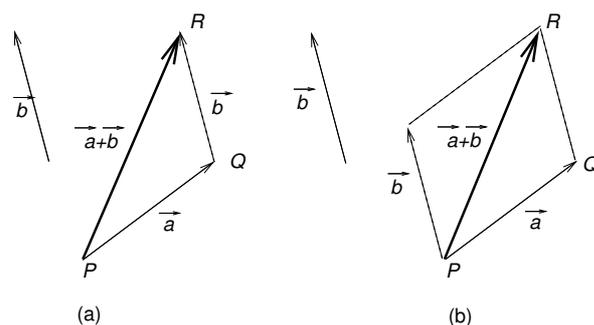


Figura D.3: Para somar o vector \vec{b} ao vector \vec{a} podemos usar o método de (a): representar \vec{b} por um segmento colocado na extremidade de \vec{a} ; ou (b): a regra do paralelogramo.

Representemos \vec{a} por um segmento orientado com início num ponto qualquer P (ver Fig. D.3a). Sendo Q o ponto final do segmento, e recordando a definição de vector como diferença de dois pontos (Eq. D.3) temos,

$$\vec{a} = Q - P. \quad (\text{D.5})$$

Se representarmos o segundo vector, \vec{b} , por um segmento com início em Q , e extremidade em R temos:

$$\vec{b} = R - Q. \quad (\text{D.6})$$

Parece óbvio que o vector soma de \vec{a} com \vec{b} deve ser

$$\vec{a} + \vec{b} = Q - P + R - Q = R - P. \quad (\text{D.7})$$

Ou seja, $\vec{a} + \vec{b}$ é representado pelo segmento orientado que une o primeiro ponto de \vec{a} , P , com a extremidade de \vec{b} , R .¹

A chamada **regra do paralelogramo** corresponde a representar os dois vectores por segmentos com início no mesmo ponto (Fig. D.3b). O vector soma corresponde à diagonal do paralelogramo definido por \vec{a} e \vec{b} . É fácil ver que estas duas maneiras de somar vectores são equipolentes: o lado do paralelogramo oposto a \vec{b} , QR , é um segmento orientado que também representa \vec{b} .

Componentes da soma de vectores

Para calcularmos as componentes do vector soma temos que projectar os vectores num sistema de eixos (Fig D.4). As componentes

¹Mais correcto seria dizer: “... que une o primeiro ponto do *segmento orientado* que representa \vec{a} à extremidade do *segmento orientado* que representa \vec{b} ”.

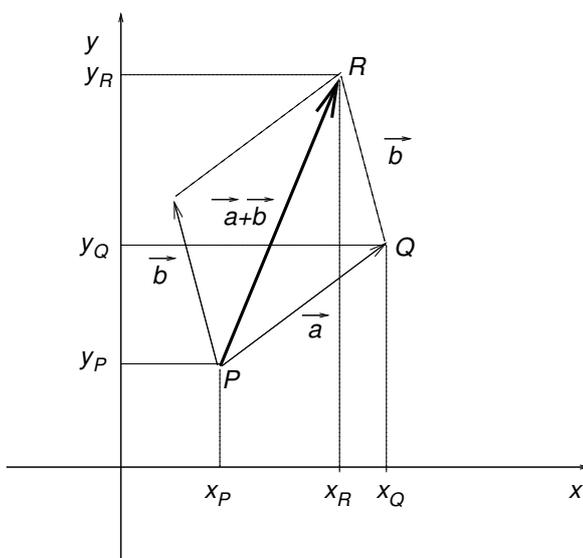


Figura D.4: As componentes do vector soma $\vec{a} + \vec{b}$ são as somas das componentes respectivas de \vec{a} e \vec{b} .

de \vec{a} , (a_x, a_y) , são

$$\begin{aligned} a_x &= x_Q - x_P \\ a_y &= y_Q - y_P \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

e as de \vec{b}

$$\begin{aligned} b_x &= x_R - x_Q \\ b_y &= y_R - y_Q \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

(note-se que $b_x < 0$ pois $x_R < x_Q$).

As componentes do vector soma, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, são

$$\begin{aligned} c_x &= x_R - x_P = (x_Q - x_P) + (x_R - x_Q) = a_x + b_x \\ c_y &= y_R - y_P = (y_Q - y_P) + (y_R - y_Q) = a_y + b_y \end{aligned}$$

Em resumo:

As componentes (c_x, c_y) de um vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ são as somas das componentes respectivas de \vec{a} e \vec{b} ,

$$\begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

D.2.2 Produto por um escalar

Se somarmos um vector \vec{a} com ele próprio obtemos, naturalmente,

$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}.$$

A definição de soma implica que o vector $2\vec{a}$ tem a mesma direcção e sentido que \vec{a} e o dobro do comprimento, como se vê na Fig. D.5. As componentes de $2\vec{a}$ são $(a_x + a_x, a_y + a_y) = (2a_x, 2a_y)$.

Somos então levados a definir o produto de um vector por um número real (designado neste contexto por *escalar*, para os distinguir dos vectores e suas componentes) da seguinte maneira:

Produto por um escalar O produto de um número real r (escalar) por um vector \vec{a}

$$\vec{c} = r\vec{a}$$

é um vector com as seguintes características:

- tem a mesma direcção que \vec{a} ;
- tem um módulo $\|\vec{c}\| = |r| \times \|\vec{a}\|$; se $r = 0$, o vector \vec{c} tem módulo nulo;
- tem o mesmo sentido de \vec{a} se $r > 0$ e o sentido oposto ao de \vec{a} se $r < 0$; (ver Caixa D.1).

Estas definições são equivalentes a dizer:

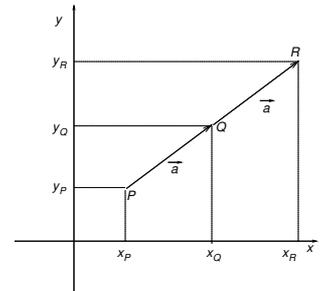


Figura D.5: O vector $2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$ tem a direcção e sentido de \vec{a} e o dobro do módulo.

■ Produto de um vector por um escalar negativo ■

Esta definição de produto por um escalar fará sentido, para um número real negativo?

Recordemos que um vector é uma diferença de dois pontos

$$\vec{a} = Q - P.$$

Faz sentido chamar $-\vec{a}$ à diferença simétrica

$$-\vec{a} = P - Q = -(Q - P)$$

Os segmentos orientados que representam $-\vec{a}$ tem a mesma direcção e comprimento que os de \vec{a} e sentido oposto. Se um segmento correspondente a \vec{a} vai de P para Q , o de $-\vec{a}$ vai de Q para P . A soma $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = 0$, vector de módulo nulo.

De acordo com a nossa definição de produto por um escalar, temos então:

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

pois $(-1)\vec{a}$ é, por definição, um vector com o mesmo módulo e direcção de \vec{a} e sentido oposto. Tal como o simétrico de um número é o produto de -1 por esse número ($-5 = (-1)5$), o simétrico de um vector, \vec{a} (o vector que somado com ele dá vector nulo) é também $(-1)\vec{a}$.

Caixa D.1: O produto de um vector por um escalar negativo fará sentido?

O produto de um escalar r por um vector \vec{a} é um vector \vec{c} ,

$$\vec{c} = r\vec{a}$$

que tem as componentes (ra_x, ra_y) , em que (a_x, a_y) são as componentes de \vec{a} .

Propriedades

O produto de um vector por um escalar não é o produto de dois números reais. De igual modo, a soma de dois vectores não é a adição de dois números. Mas as definições dadas acima garantem que certas propriedades do produto e da soma de números reais

se mantêm para estas novas operações. Duas muito importantes, são as propriedades distributivas:

Para quaisquer vectores \vec{a} e \vec{b} e qualquer par de escalares r e s tem-se

$$\begin{aligned} r(\vec{a} + \vec{b}) &= r\vec{a} + r\vec{b} \\ (r + s)\vec{a} &= r\vec{a} + s\vec{a} \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

D.3 Decomposição de um vector segundo os eixos coordenados

Um vector de módulo unitário é designado por **versor**. É habitual representar um versor como $\hat{\mathbf{a}}$. Podemos associar a cada um dos eixos coordenados um versor, com a direcção e sentido do eixo correspondente:

- versor do eixo do xx , $\hat{\mathbf{i}}$;
- versor do eixo yy , $\hat{\mathbf{j}}$.

As componentes destes versores são muito simples de determinar. Como $\hat{\mathbf{i}}$ tem a direcção xx a sua componente y é nula. Como o módulo é 1 e o sentido do semi-eixo positivo dos xx a sua componente x é 1. Isto é, $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0)$. De modo idêntico, $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1)$. Um vector qualquer, por exemplo, $\vec{a} = (2, 3)$ pode então escrever-se na forma:

$$\vec{a} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}.$$

Com efeito

$$\begin{aligned} 2\hat{\mathbf{i}} &= (2 \times 1, 2 \times 0) = (2, 0) \\ 3\hat{\mathbf{j}} &= (3 \times 0, 3 \times 1) = (0, 3) \end{aligned}$$

e portanto o vector $2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ tem as componentes $(2+0, 0+3) = (2, 3)$ ou seja é o vector \vec{a} .

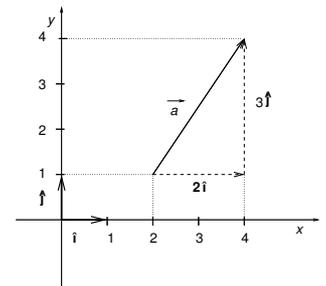


Figura D.6: Decomposição de um vector segundo os eixos coordenados.

Dado um vector \vec{a} de componentes (a_x, a_y) e os versores \hat{i} e \hat{j} dos eixos coordenados, tem-se

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

D.4 Exercícios

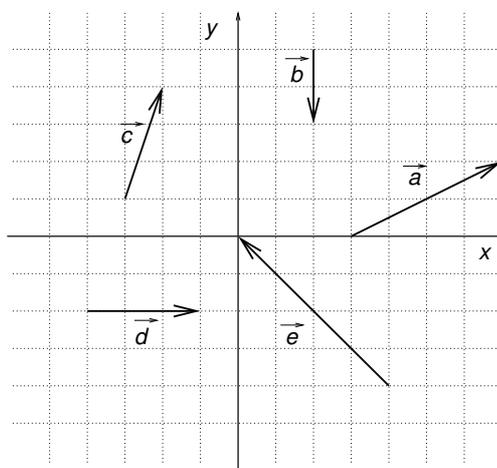


Figura D.7: Se o quadriculado tiver lado unitário, quais são as componentes destes vectores?

D.1. Considere os vectores representados na Fig. D.7. Suponha que o quadriculado tem um lado com comprimento 1. Para resolver estes exercícios é conveniente reproduzir a figura no seu caderno.

- Determine as componentes dos vectores da figura.
- Represente na figura o vector soma $\vec{a} + \vec{b}$. Determine as respectivas componentes.
- Represente, à sua escolha, dois vectores que somados com o vector \vec{a} dêem vectores com a direcção do eixo xx .
- Qual dos vectores da figura é igual a $\hat{i} + 3\hat{j}$?

- (e) Represente na figura o vector $\vec{a} + 0,5\vec{e}$.
- (f) Calcule o módulo do vector \vec{e} .
- (g) Determine o escalar r que faz com que

$$\vec{a} + \vec{e} + r\vec{b} = 0$$

Apêndice E

Anexo sobre gráficos

(adaptado de *Guia de Trabalhos Práticos de Laboratório de Física I*, Departamento de Física da Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto 2002 [5]).

E.1 Para que serve um gráfico

O gráfico dos pares de valores experimentais de duas grandezas físicas permite visualizar de um modo muito directo e intuitivo alguns aspectos da relação entre essas grandezas.

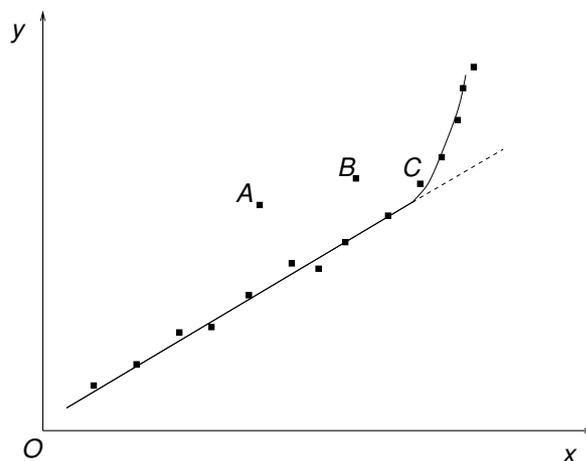


Figura E.1: Para que serve um gráfico?

E.1.1 Vantagens

Algumas das vantagens da representação gráfica dos resultados experimentais são (observe-se a Fig. E.1):

a) Análise simples (visual) da dispersão dos resultados.

Se esperamos que as duas grandezas físicas medidas, x e y , tenham uma relação do tipo

$$y = f(x)$$

poderíamos pensar que os pontos experimentais medidos (x_i, y_i) cairiam sobre uma curva contínua, correspondente ao gráfico da função $f(x)$. No entanto, nenhuma medição é isenta de erros, diferenças entre o valor real da grandeza e o valor expresso pela medição. Por isso os resultados experimentais apresentam sempre alguma variação relativamente aos valores de uma função que possa, com alguma credibilidade, representar a relação entre as suas grandezas. Um gráfico permite ter uma ideia da dispersão de resultados relativamente a uma tal curva.

b) Apreciação dos limites da validade de uma determinada relação.

A relação entre as duas grandezas representadas no gráfico da Fig. E.1 parece ser linear (o gráfico é uma linha recta) até valores de abcissas um pouco abaixo da de C . Parece deixar de o ser para valores superiores.

c) Avaliação de pontos duvidosos.

Na Fig. E.1, a observação do gráfico indica que os pontos A e B são pontos que se afastam da linearidade numa zona onde esta parece existir. Se não tivermos razão para esperar um comportamento especial para os valores das abcissas de A e B, podemos questionar se não terá havido um erro de operação ou de registo nas medições de A e B: são pontos duvidosos. Devem repetir-se as medições junto desses pontos, para verificar se não terá havido erro na operação de medida ou no registo desses valores ou se se confirmam os valores previamente encontrados.

d) Interpolação.

É uma operação que permite obter um par de valores (x, y) dentro da gama dos pares de valores (x_i, y_i) obtidos experimentalmente, através do traçado de uma linha que julgamos

possa representar a relação entre x e y e que seja consistente com os resultados experimentais.

e) Extrapolação.

Operação semelhante à interpolação com a diferença de que o ponto a determinar tem abcissas fora da gama dos pontos experimentalmente determinados. Toda a extrapolação deve ser indicada a tracejado. A extrapolação é uma operação de resultados menos seguros do que a interpolação pois que se admite que a relação entre as grandezas físicas permanece válida mesmo fora da gama dos valores determinados experimentalmente. Contudo, podem existir razões físicas que fundamentem a extrapolação.

E.2 Escolha de escalas

A escolha de escalas num gráfico permite estabelecer uma proporcionalidade entre comprimentos medidos no papel do gráfico (em mm) e os valores das grandezas representadas.

Por exemplo, se escolhermos uma distância de 5 cm no papel milimétrico (distâncias entre os traços mais grossos) para representar uma diferença de tempos de 1 s, cada centímetro corresponderá a 0,2 s e cada milímetro (menor divisão do papel) a 0,02 s.

Podemos designar por f_x o valor da grandeza representada em abcissas (eixo dos xx) que corresponde a 1 mm do papel e por f_y o valor correspondente para a grandeza representada em ordenadas (eixo dos yy). No exemplo acima teríamos

$$f_x = 0,02 \text{ s mm}^{-1}.$$

Os factores de escala f_x e f_y são escolhidos independentemente.

A escolha mais conveniente tem que ser considerada caso a caso. Podemos enunciar alguns dos critérios gerais a seguir:

- E.1. Os pontos que representam as grandezas devem ocupar, em princípio, mais do que 1/4 da folha;
- E.2. Os valores representados nas escalas de ordenadas e abcissas devem incluir toda a gama de valores medidos. Mas o mínimo e máximo da escala não têm que coincidir com os valores extremos medidos. Por exemplo, para valores medidos entre 1,1 e 2,7 a escala poderia variar entre 1 e 3. A

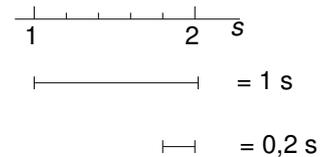


Figura E.2: Escalas num gráfico.

origem $(0, 0)$ não tem que ser incluída no gráfico a não ser que esteja incluída dentro da gama de valores medidos.

- E.3. Os factores de conversão das escalas do papel para as grandezas a representar devem ser números que facilitem a leitura directa das escalas sem necessidade de cálculos complicados: por exemplo, 10, 5, 2, 1, 0,5, 0,2, 0,1 etc.
- E.4. As escalas escolhidas para os eixos das abcissas (eixo "horizontal") e das ordenadas (eixo "vertical") devem assegurar a distribuição dos pontos de forma regular no espaço escolhido no papel para a representação do gráfico. As escalas podem obrigar à escolha de uma origem de abcissa e/ou ordenada não nulas (falsa origem). As marcações numéricas nas escalas deverão ser efectuadas com clareza; nunca devem ser inscritos nos eixos os valores das medidas realizadas.
- E.5. As grandezas representadas, em cada eixo, devem ser claramente indicadas, com as unidades respectivas.
- E.6. Os pontos (x, y) correspondentes às medidas realizadas devem ser marcados de forma não ambígua (usar por exemplo símbolos como +, \diamond , \triangle , \times , \bullet ... etc.)

T/s	L/m
0,3	1,1
0,5	1,42
0,7	1,68
0,9	1,90
1,1	2,11
1,3	2,29
1,5	2,46
1,7	2,62

Tabela E.1: Tabela de valores de tempo e comprimento.

Exemplo 1

Consideremos os valores de tempo e comprimento da Tabela E.1.

O gráfico poderá conter uma escala de tempo entre os limites $T = 0 \text{ s}$ e $T = 2 \text{ s}$ e uma escala de comprimentos entre $L = 1$ e $L = 3 \text{ m}$.

A folha de papel milimétrico tem uma área útil de $30 \times 20 \text{ cm}^2$. A escala de ordenadas pode corresponder a representar a gama experimental de 2 m em 10 cm do papel. Com esta escolha temos as seguintes correspondências, que facilitam a leitura de valores no gráfico:

$$\begin{aligned} 5 \text{ cm} &\leftrightarrow 1 \text{ m} \\ 1 \text{ cm} &\leftrightarrow 0,2 \text{ m} \\ 5 \text{ mm} &\leftrightarrow 0,1 \text{ m} \\ 1 \text{ mm} &\leftrightarrow 0,02 \text{ m} \end{aligned}$$

O factor de escala é $f_y = 0,02 \text{ m mm}^{-1}$;

E.2.

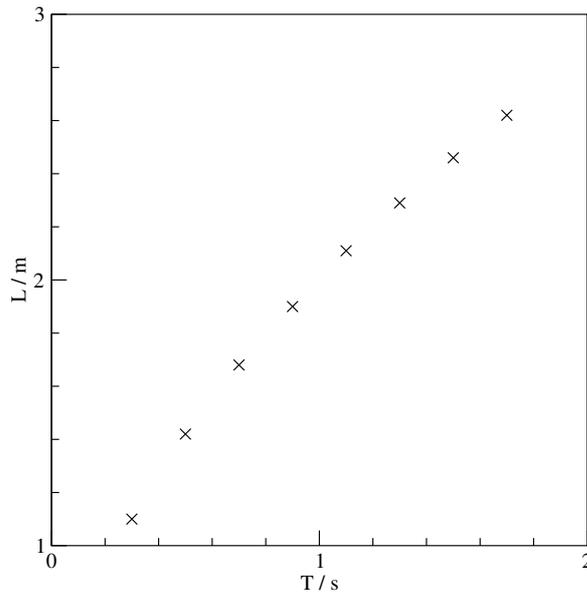


Figura E.3: Gráfico dos resultados da Tabela E.1. Num papel milimétrico cada uma das menores divisões aqui indicadas corresponderia a 1 cm, equivalente a 0,2 s no eixo das abcissas e a 0,2 m no eixo das ordenadas.

Para a escala das abcissas podemos fazer corresponder 10 cm do papel aos 2 s de variação total de T ; teremos então

$$\begin{aligned}
 5 \text{ cm} &\leftrightarrow 1 \text{ s} \\
 1 \text{ cm} &\leftrightarrow 0,2 \text{ s} \\
 5 \text{ mm} &\leftrightarrow 0,1 \text{ s} \\
 1 \text{ mm} &\leftrightarrow 0,02 \text{ s}
 \end{aligned}$$

e um factor de escala $f_x = 0,02 \text{ s mm}^{-1}$.

O gráfico terá o aspecto da figura E.3. Cada uma das marcas menores nos eixos corresponde a 1 cm do papel milimétrico.

Exemplo 2

Na determinação da variação da resistência de um material em função da temperatura obtiveram-se os seguintes valores da Tabela E.2.

Como representá-los graficamente? Notemos que os valores de R apresentam uma variação relativamente pequena em torno de 5,70

$T/^\circ\text{C}$	R/Ω
20	5,10
25	5,15
30	5,25
35	5,35
40	5,42
45	5,50
50	5,60
60	5,75
65	5,85
70	5,92
80	6,08
90	6,25

Tabela E.2: Tabela de valores de temperatura e resistência

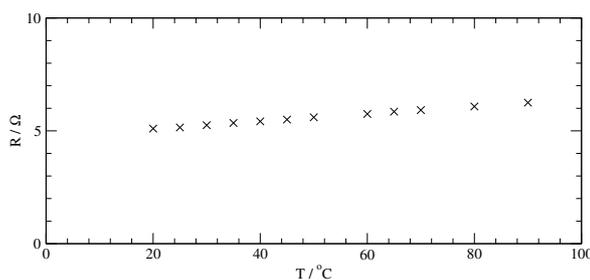


Figura E.4: Este gráfico tem uma escala de ordenadas mal escolhida.

($\Delta R = 6,25 - 5,10 = 1,15 \Omega$). Isto significa que, se escolhermos para o eixo das ordenadas (onde vamos marcar os valores de R) uma correspondência como

$$10 \text{ cm} \leftrightarrow 5 \Omega,$$

($f_x = 0,05 \Omega \text{ mm}^{-1}$) todas as ordenadas vão ficar distribuídas por pouco mais de 2 cm. Se escolhermos para o eixo das abcissas uma correspondência

$$5 \text{ cm} \leftrightarrow 20^\circ \text{C}$$

($f_x = 0,4^\circ \text{C}$) o gráfico ficará aproximadamente com o aspecto do gráfico 1. Será aceitável?

Os valores apresentados parecem indicar a capacidade de medir até à centésima de Ωm . Com esta escolha de escala temos

$$0,01 \Omega \leftrightarrow 0,2 \text{ mm}$$

Dois décimos de milímetro é uma distância menor do que conseguimos ler.

O que está indicado neste caso é escolher para o eixo em que se marca R uma falsa origem, isto é, o ponto de encontro dos eixos não corresponde aos valores $R = 0 \Omega$ e $T = 0^\circ \text{C}$. As escalas seriam:

- abcissas - origem no valor 0°C com 5 cm no papel correspondendo a a 20°C ($f_x = 0,4^\circ \text{C mm}^{-1}$)
- ordenadas - origem no valor 5Ω com 5 cm no papel correspondendo a a $0,5 \Omega$ ($f_y = 0,01 \Omega \text{ mm}^{-1}$)

O gráfico viria, então conforme a Fig. E.5

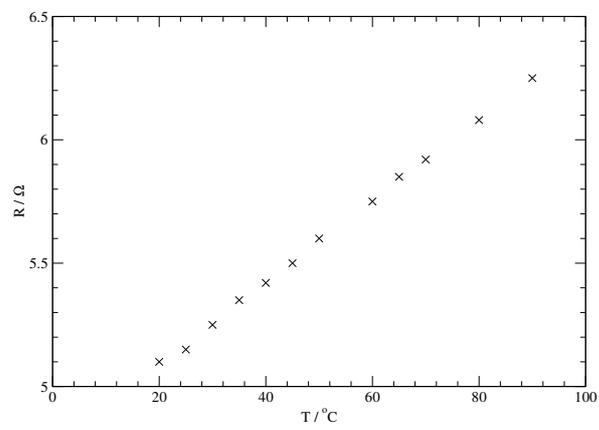


Figura E.5: Escolha aceitável de escalas não tem que incluir a origem dos eixos coordenados.

Bibliografia

- [1] Greenwich 2000. The Prime Meridian of the World. URL:<http://greenwichmeridian.com/>, Junho 2004.
- [2] Aires Francisco. Trabalho de Física Computacional, FCUP, 2003-2004. Projecto da disciplina de Física Computacional, 2002/2003, 2003.
- [3] Jet Propulsion Laboratory. Voyager, the Interstellar Mission. URL: <http://voyager.jpl.nasa.gov/>, Julho 2003.
- [4] Michael Lahanas. Aristotle Physics. URL:<http://www.mlahanas.de/Greeks/AristotlePhysics.htm>, Outubro 2004.
- [5] António Pereira Leite, Manuel Joaquim Marques, Maria Alegria Feio, and Manuela Lopes dos Santos. Laboratório de Física I - Guia de Trabalhos Práticos. Departamento de Física da Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2002.
- [6] NASA and Space Telescope Science Institute. Bowshock around LL Orionis. URL: <http://heritage.stsci.edu/2002/05/index.html>, 2002.
- [7] Nuno Peres. O encontro do milénio. *Gazeta de Física*, 25(4):4, 2002.
- [8] C. Tuijn and B. W. Kooi. The measurement of arrow velocities in the student's laboratory. *Eur. J. Phys.*, 13:127, 1992.
- [9] Cambridge University Library. Footprints of the lion. Isaac Newton at work. URL: http://www.lib.cam.ac.uk/Exhibitions/Footprints_of_the_Lion/, 2002.
- [10] Eric Weisstein. World of Scientific Biography. URL: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/>, January 2004.