

ENGENHARIA MATEMÁTICA

2º CICLO (MESTRADO)

FC FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



OTIMIZAÇÃO

Exercícios propostos ¹

para serem resolvidos com Excel (solver)

A discussão e resolução de cada um dos problemas seguintes, deve ser apresentada sob a forma de um relatório, explicitando de forma sistemática, entre outros, os elementos seguintes:

- dados do problema,
- variáveis de decisão,
- parâmetros,
- constrangimentos, apresentando-os eventualmente em forma matricial,
- modelação final,
- construção de folha Excel. Resolução com Solver e apresentação dos respectivos relatórios.
- resultados e discussão final.

► 1 Problema - fabrico de aço

Uma empresa recebeu uma encomenda de 5 toneladas de aço destinado à construção naval. Esse aço tem que ter as seguintes características:

Elemento químico	Percentagem mínima	Percentagem máxima
Carbono (C)	2	3
Cobre (Cu)	0.4	0.6
Magnésio (Mn)	1.2	1.65

Para fabricar o aço, a empresa dispõe de 7 matérias primas cujas características, quantidades disponíveis e custo de aquisição são os seguintes:

¹Última actualização - 1 de Março de 2012

Matéria prima	C%	Cu%	Mn%	Stock disponível (Kg)	Custo (Euros/Kg)
Liga de ferro 1	2.5	0	1.3	4 000	1.20
Liga de ferro 2	3	0	0.8	3 000	1.50
Liga de ferro 3	0	0.3	0	6 000	0.90
Liga de cobre 1	0	90	0	5 000	1.30
Liga de cobre 2	0	96	4	2 000	1.45
Liga de alumínio 1	0	0.4	1.2	3 000	1.20
Liga de alumínio 2	0	0.6	0	2 500	1

Calcular a composição do aço a fabricar para que os custos de produção sejam mínimos.

► 2 Problema - Transporte de trigo

Um barco transporta trigo de um lugar A para um mesmo destino B. O seu volume útil é de $1\,500\text{ m}^3$. Existem 7 clientes cujos dados figuram na tabela seguinte:

# cliente i	Qt disponível (em nº de lotes) Q_i	Tamanho de cada lote (em m^3) T_i	Preço de cada lote transportado (euros) P_i	Custo de transporte (euros/ m^3) C_i
cliente 1	12	10	1 000	80
cliente 2	31	8	600	70
cliente 3	20	6	600	85
cliente 4	25	8	700	80
cliente 5	50	15	1 200	73
cliente 6	40	10	800	70
cliente 7	60	12	1 100	80

Cada cliente dispõe de um certo número de lotes para transportar, mas cada um define os tamanhos (em m^3) dos seus lotes. Para cada lote transportado a tabela mostra o preço facturado a cada cliente pelo transporte (euros/lote), enquanto que a última coluna mostra o custo de transporte (euros/ m^3).

O objectivo é maximizar o lucro, transportando o trigo dos clientes em lotes que podem ser fragmentados.

- (i). se cada cliente dispõe de um número ilimitado de lotes, que clientes devem ser escolhidos?
- (ii). que clientes devem ser escolhidos, se os nºs de lotes disponíveis devem ser respeitados?
- (iii). que clientes devem ser escolhidos, se os nºs de lotes devem ser inteiros (lotes não fragmentados)?

► 3 Problema - Corte de placas de madeira

Uma fábrica de placas de madeira (platex) produz placas rectangulares de 48×96 dm (as placas-mãe) e recebe uma encomenda de placas mais pequenas com as características seguintes:

Tipo i	Número de placas	Dimensões de cada placa
i=1	8	36×50 dm
i=2	13	24×36 dm
i=3	5	20×60 dm
i=4	15	18×30 dm

que devem ser obtidas cortando apropriadamente as placas-mãe. Como é que a encomenda deve ser satisfeita usando o menor número possível de placas-mãe?

► 4 Problema - Reservatórios com produtos químicos

Cinco barcos fazem o transporte de produtos químicos líquidos para uma certa empresa de indústria química. Os produtos não podem ser misturados e os carregamentos transportados são os seguintes: 1 200 toneladas de benzol, 700 toneladas de butanol, 1 000 toneladas de propanol, 450 toneladas de estireno e 1 200 toneladas de THF (tetrahidrofureno).

A empresa dispõe de nove reservatórios de capacidades conhecidas, alguns dos quais estão já parcialmente preenchidos com líquido. A tabela seguinte indica as características dos reservatórios (a unidade é 1 tonelada).

Reservatório	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Capacidade	500	400	400	600	600	900	800	800	800
Líquido actual	vazio	Benzol	vazio	vazio	vazio	vazio	THF	vazio	vazio
Quantidade	0	100	0	0	0	0	300	0	0

Em que reservatórios devem ser descarregados os líquidos transportados, para que a capacidade total dos reservatórios que ficam vazios seja máxima? A mesma questão para maximizar o número de reservatórios livres.

► 5 Problema - Postos de cobrança de impostos

A repartição de finanças de uma certa área fiscal pretende reestruturar a rede de postos de cobrança de impostos. O grafo da figura 1 representa as freguesias da área referida (nós do grafo), e as estradas (arestas) que as ligam, com as respectivas distâncias em Km. Os números em cada nó representam a população (em milhares de habitantes).

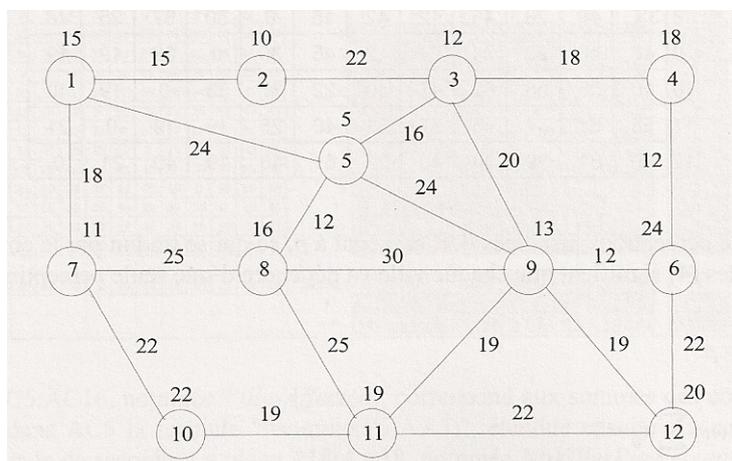


Figura 1: Exercício 5

O orçamento disponível permite instalar apenas 3 postos de cobrança em 3 freguesias para fazer a cobertura total da rede.

Em que freguesias devem ser colocados esses 3 postos de tal forma a que a distância média percorrida por um habitante para ir a um dos postos seja mínima?

► 6 Problema - Rede de abastecimento de água

O grafo da figura 2 representa uma rede de abastecimento de água. Os nós (numerados de 1 a 10) representam localidades, reservatórios e estações de elevação (bombagem) ligadas entre si por canalizações.

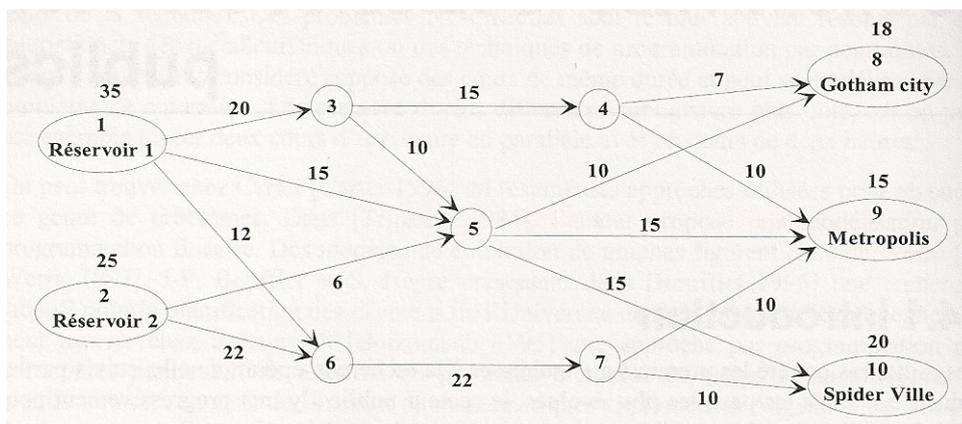


Figura 2: Exercício 6

As três cidades A, B e C são abastecidas pelos dois reservatórios R1 e R2 indicados, cujas débitos são respectivamente de 35 e de 25 milhares de metros cúbicos por hora (m^3/h). As capacidades limite de cada canalização estão indicadas pelos números sobre os arcos do grafo (também em milhares de m^3/h).

Pretende-se fazer um estudo que permita avaliar se a rede indicada poderá satisfazer as necessidades das 3 cidades, a saber 18, 15 e 20 milhares de m^3/h , respectivamente, durante um período de 10 anos.

1. calcular o fluxo máximo da rede
2. será suficiente para satisfazer as necessidades das 3 cidades durante um período de 10 anos?

► 7 Problema - Transporte de produtos

Uma empresa tem que transportar 180 toneladas de produtos químicos perigosos, guardados em 4 depósitos D1 a D4, até 3 estações de tratamento T1, T2 e T3.

Os depósitos contêm respectivamente 50, 40, 35 e 65 toneladas de produtos, num total de 190 toneladas. Existem dois meios de transporte disponíveis - comboio ou camião.

- O depósito D1 pode abastecer as estações T1 e T2, usando apenas camiões, com tarifas de 12 e 11 mil euros/tonelada, respectivamente.
- O depósito D2 apenas abastece a estação T1, podendo usar comboio ou camião, com tarifas de 12 e 14 mil euros/tonelada, respectivamente.
- O depósito D3 abastece a estação T2, usando camiões, com tarifa de 9 mil euros/tonelada, e a estação T3, podendo usar comboio ou camião, com tarifas de 4 e 5 mil euros/tonelada, respectivamente. Finalmente
- O depósito D4 abastece a estação T2, podendo usar ou comboio ou camião, com tarifas de 11 e 14 mil euros/tonelada, respectivamente, e o a estação T3, podendo usar comboio ou camião, com tarifas de 10 e 14 mil euros/tonelada, respectivamente

Estas informações estão codificadas no grafo da figura 3.

A CP impõe certas limitações à empresa - (i). transportar pelo menos 10 toneladas, em cada ligação, para que possa beneficiar das tarifas indicadas e (ii). transportar quando muito 50 toneladas, em cada ligação, por razões de segurança. Não há restrições quanto ao transporte usando camiões.

Calcular um plano de transporte optimal, isto é, determinar como devem ser transportadas as 190 toneladas de produtos de tal forma a que o custo seja mínimo?

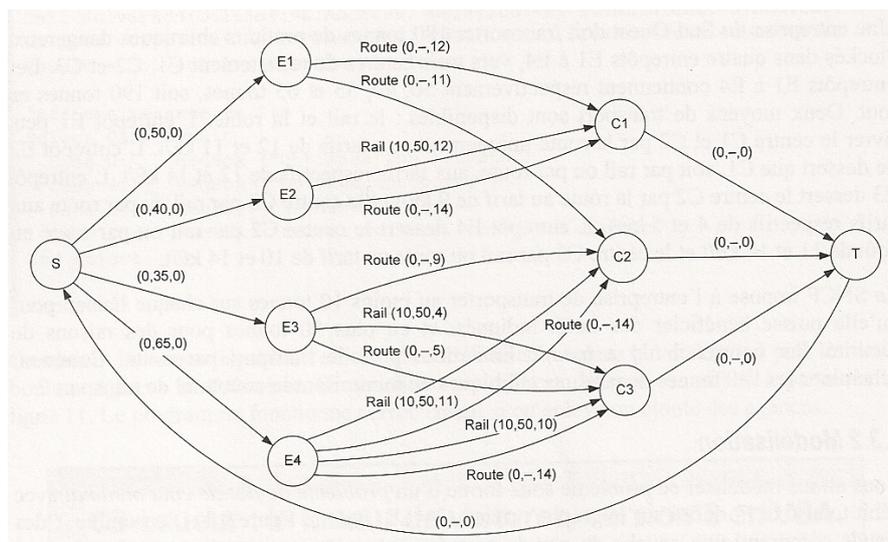


Figura 3: Rede de transportes de produtos químicos

► 8 Problema - Fabrico de papel de parede

Uma empresa recebe uma encomenda de 3 padrões de papel de parede: P1 com fundo azul e motivos amarelos, P2 com fundo verde e motivos amarelos e azuis, e P3 com fundo verde e motivos amarelos.

Cada padrão é fabricado sob a forma de um rolo de papel contínuo que passa por diversas máquinas, cada uma imprimindo um côr diferente. A ordem de passagem nas máquinas varia de modelo para modelo:

- (i). para o padrão P1, imprime-se primeiramente o fundo azul e depois os motivos amarelos;
- (ii). para o padrão P2, imprime-se primeiramente o fundo verde, depois os motivos azuis e finalmente os motivos amarelos;
- (iii). para o padrão P3, imprime-se primeiramente o fundo verde, depois os motivos amarelos.

Os tempos (em minutos) necessários para aplicar cada côr sobre cada padrão estão indicados na tabela seguinte:

Máquina	Côr	P1	P2	P3
1	azul	45	20	0
2	verde	0	10	17
3	amarelo	10	34	28

Sabendo que uma máquina apenas pode tratar um padrão de cada vez e que um padrão não pode passar por mais do que uma máquina ao mesmo tempo, como devem ser ordenadas as passagens dos padrões pelas máquinas de tal forma a que o tempo de execução seja mínimo?

► 9 Problema - Gestão de Portfólio financeiro

Um gestor de conta é solicitado por um cliente para escolher uma carteira de investimento com um certo número de acções. O cliente pretende investir 100 000 Euros em 6 acções diferentes, embora com certas limitações - (i). quer investir pelo menos 5 000, mas quando muito 40 000 euros, em cada acção; (ii). quer ainda investir metade do seu capital em acções francesas e quando muito 30% em valores tecnológicos (tipo T, de acordo com a tabela abaixo).

O gestor indica-lhe a taxa de retorno (lucro) que ele pode esperar para um período de 6 meses. A tabela seguinte indica o nome de cada acção, a sua categoria (T=tecnológica, N=não tecnológica), e a respectiva taxa de retorno esperada.

Nº	Nome	Categoria	Lucro
1	Dash Associates (UK)	T	5.3%
2	Ilog France (F)	T	6.2%
3	Frande Telecom (F)	T	5.1%
4	General Motors (USA)	N	4.9%
5	Elf (F)	N	6.5%
6	BNP (F)	N	3.4%

Calcular um plano de investimento óptimo, isto é, calcular quais as acções que devem ser adquiridas, com as limitações acima referidas, para atingir o máximo retorno esperado?

► 10 Problema - Instalação de antenas emisoras

Um operador de telemóvel dispõe de um capital de 10 milhões de euros (M euros) para fazer a cobertura de rede de uma certa região.

Um estudo prévio indica que só é possível instalar antenas emisoras em 7 locais distintos. Sabe-se ainda que cada antena instalada cobre apenas um número limitado de comunidades. A figura 4 mostra uma mapa esquemático da região, subdividida em 15 comunidades, numeradas de 1 a 15, e uma localização potencial das antenas emisoras, numeradas de 1 a 7 e representadas pelos pontos vermelhos.

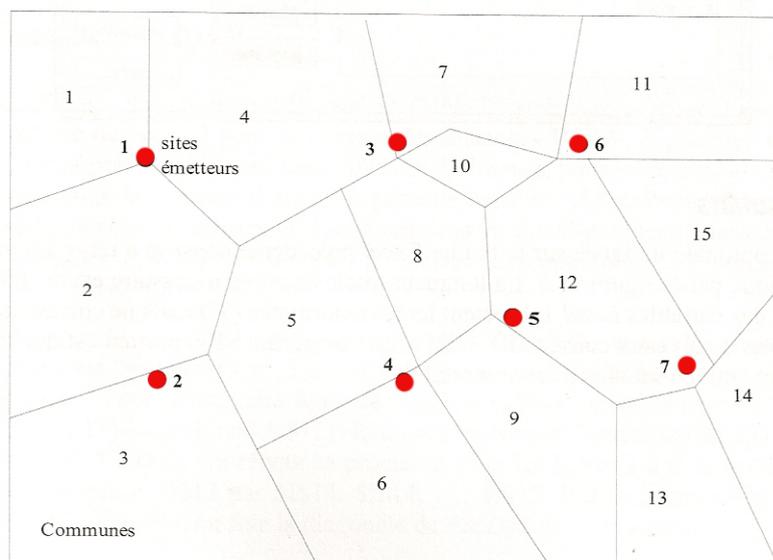


Figura 4: Exercício 10

Certos obstáculos geográficos ou topográficos podem aumentar os custos de instalação ou reduzir o alcance das antenas. A tabela seguinte indica os custos de instalação de cada local e a cobertura de cada antena.

Local	1	2	3	4	5	6	7
Custo (em Meuros)	1.8	1.3	4.0	3.5	3.8	2.6	2.1
Comunidades cobertas	1,2,4	2,3,5	4,7,8,10	5,6,8,9	8,9,12	7,10,11,12,15	12,13,14,15

A tabela seguinte indica a população (em milhares de habitantes) de cada comunidade.

Comunidade	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
População (milhares)	2	4	13	6	9	4	8	12	10	11	6	14	9	3	6

Onde devem ser instaladas as antenas de forma a garantir a máxima cobertura, não ultrapassando o capital disponível?

► 11 Problema - Instalação de terminais em rede

Uma universidade pretende ligar 6 terminais, situados em diferentes edifícios, através de cabos subterrâneos. As distâncias (em metros) entre os terminais estão indicadas na tabela seguinte:

	T1	T2	T3	T4	T5	T6
T1	-	120	92	265	149	194
T2	120	-	141	170	93	164
T3	92	141	-	218	103	116
T4	265	170	218	-	110	126
T5	149	93	103	110	-	72
T6	194	164	116	126	72	-

Supõe-se que o custo de cada ligação entre dois terminais é proporcional à distância que os separa.

Determinar as conexões a estabelecer para que o custo de instalação seja mínimo.

► 12 Problema - Planeamento da produção de bicicletas

Uma empresa fabrica bicicletas para crianças. A previsão de vendas para o próximo ano (em milhares de unidades) está indicada na tabela seguinte:

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Junho	Julho	Agosto	Set	Out	Nov	Dez
30	15	15	25	33	40	45	45	26	14	25	30

A capacidade de produção é de 30 000 bicicletas/mês. No entanto, se necessário, a produção pode ultrapassar esse limite, desde que se recorra a horas extraordinárias. Neste caso o custo unitário de cada bicicleta aumenta para 160 euros, em vez dos 130 da produção normal.

Actualmente existem 2 000 bicicletas em stock. O custo de armazenamento de uma bicicleta é de 20 euros/mês. Não impomos qualquer limite na capacidade de armazenamento.

Suponhamos que estamos no dia 1 de Janeiro. Que quantidades devem ser fabricadas e armazenadas nos 12 meses seguintes, para que a procura prevista seja satisfeita com custo mínimo?

► 13 Problema - Planeamento da produção de copos

Uma fábrica de copos de vidro produz seis tipos de copos, C1 a C6, em lotes de 1 000 unidades, e pretende planificar a sua produção para um horizonte de 12 semanas. Os lotes podem ser incompletos (conter menos de 1 000 uns).

A procura (em nº de lotes de 1 000 unidades), para as próximas 12 semanas, e para cada um dos modelos, é conhecida e está indicada na tabela seguinte:

Copo/Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C1	20	22	18	35	17	19	23	20	29	30	28	32
C2	17	19	23	20	11	19	23	20	29	30	28	32
C3	20	22	18	35	17	19	23	20	29	30	28	32
C4	20	22	18	35	17	19	23	20	29	30	28	32
C5	20	22	18	35	17	19	23	20	29	30	28	32
C6	20	22	18	35	17	19	23	20	29	30	28	32

Para cada modelo C_i , conhecemos o stock inicial e o stock final mínimo desejado, em n° de lotes. Para cada lote de cada modelo conhece-se ainda (i). o custo de produção; (ii). custo de armazenamento (em euros); (iii). tempo de trabalho necessário em horas \times operários; (iv). tempo de utilização das máquinas (em horas) e (v). tamanho da zona de armazenamento necessário (em n° de compartimentos). Estas informações constam da tabela seguinte:

	Custo de produção	Custo de armazenamento	Stock inicial	Stock final mínimo	Tempo de trabalho	Tempo máquina	Compartimentos de armazenamento
C1	100	25	50	10	3	2	4
C2	80	28	20	10	3	1	5
C3	110	25	0	10	3	4	5
C4	90	27	15	10	2	8	6
C5	200	10	0	10	4	11	4
C6	140	20	10	10	4	9	9

O n° de horas \times operários, está limitado a 390 horas/semana, e o tempo de laboração das máquinas a 850 horas/semana. A capacidade de armazenamento é de 1 000 compartimentos.

Quais as quantidades de copos a produzir em cada período, para que o custo total de produção e armazenamento seja mínimo?