
MAJORITY JUDGEMENT

MEASURING, RANKING AND ELECTING

Bruno Neto

Sessão pública do Seminário de Modelação 2012/2013
Mestrado em Engenharia Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Orientador: Alberto Pinto

Em todo o Mundo a escolha de um indivíduo a partir de um conjunto de possíveis candidatos é conseguida através de votações.

Em todo o Mundo a escolha de um indivíduo a partir de um conjunto de possíveis candidatos é conseguida através de **votações**.

Votações são mecanismos que permitem agregar os desejos dos indivíduos numa decisão coletiva da sociedade.

Duas aplicações dos métodos de votações propostos e usados nos últimos séculos:

Duas aplicações dos métodos de votações propostos e usados nos últimos séculos:

Eleições

Escolha de um líder/partido em democracia

Duas aplicações dos métodos de votações propostos e usados nos últimos séculos:

Eleições

Escolha de um líder/partido em democracia



Decisões de júris:

Avaliação de concorrentes e consequente classificação por ordem de excelência
(Ex. Classificação de vinhos, provas olímpicas, desporto, etc.)

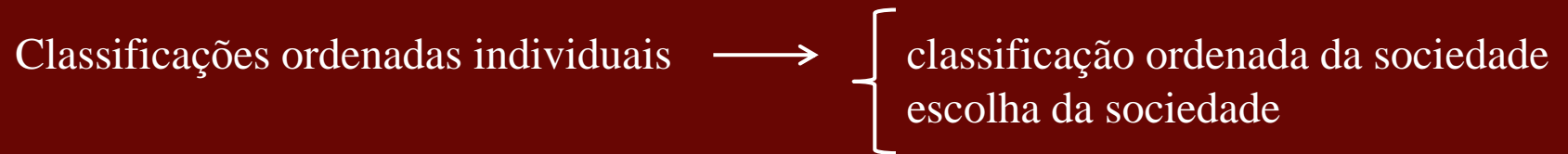
Problema fundamental de eleger e classificar:

Encontrar uma **Função de Decisão Social** que receba como inputs as **mensagens** dos votantes e devolva como outputs as **decisões** finais (classificação ordenada dos candidatos).

Função de Decisão Social:



No modelo tradicional:



No novo modelo:



Tradicionalmente, a mensagem de cada votante é uma lista de candidatos **ordenada** do melhor para o pior.

Tradicionalmente, a mensagem de cada votante é uma lista de candidatos **ordenada** do melhor para o pior.

Juntas, todas as mensagens individuais (inputs), constituem um **perfil de preferências**.

Tradicionalmente, a mensagem de cada votante é uma lista de candidatos **ordenada** do melhor para o pior.

Juntas, todas as mensagens individuais (inputs), constituem um **perfil de preferências**.

A função de decisão social devolve uma **classificação ordenada**, dado qualquer perfil de preferências.

Condorcet foi dos primeiros a perceber a dificuldade essencial de descobrir essa função.

Condorcet foi dos primeiros a perceber a dificuldade essencial de descobrir essa função.

Considere-se um dos seus exemplos com um perfil de preferências de 60 votantes:

23: $A \succ B \succ C$

2: $B \succ A \succ C$

17: $B \succ C \succ A$

10: $C \succ A \succ B$

8: $C \succ B \succ A$

23: A \succ B \succ C

10: C \succ A \succ B

2: B \succ A \succ C

8: C \succ B \succ A

17: B \succ C \succ A

23: $A \succ B \succ C$

10: $C \succ A \succ B$

2: $B \succ A \succ C$

8: $C \succ B \succ A$

17: $B \succ C \succ A$

33 votantes preferem A a B.

10 votantes preferem B a A.



$A \succ_S B$

23: $A \succ B \succ C$

10: $C \succ A \succ B$

2: $B \succ A \succ C$

8: $C \succ B \succ A$

17: $B \succ C \succ A$

33 votantes preferem A a B.

10 votantes preferem B a A.



$A \succ_S B$

40 votantes preferem B a C.

08 votantes preferem C a B.



$B \succ_S C$

23: $A \succ B \succ C$

10: $C \succ A \succ B$

2: $B \succ A \succ C$

8: $C \succ B \succ A$

17: $B \succ C \succ A$

33 votantes preferem A a B.

10 votantes preferem B a A.



$A \succ_S B$

40 votantes preferem B a C.

08 votantes preferem C a B.



$B \succ_S C$

27 votantes preferem C a A.

02 votantes preferem A a C.



$C \succ_S A$

23: $A \succ B \succ C$

10: $C \succ A \succ B$

2: $B \succ A \succ C$

8: $C \succ B \succ A$

17: $B \succ C \succ A$

33 votantes preferem A a B.

10 votantes preferem B a A.



$A \succ_S B$

40 votantes preferem B a C.

08 votantes preferem C a B.



$B \succ_S C$

27 votantes preferem C a A.

02 votantes preferem A a C.



$C \succ_S A$

Isto constitui o **Paradoxo de Condorcet**: nenhum candidato é preferido em relação a todos os outros.

Método de Borda (1780):

| Pontos | 30% | 32% | 38% |
|--------|-----|-----|-----|
| 2 | A | B | C |
| 1 | B | C | A |
| 0 | C | A | B |

Pontuação de Borda:

$$A: 60+38=98$$

$$B: 30+64=94$$

$$C: 32+76=108$$

| | A | B | C | Pontuação de Borda |
|---|-------|-------|-------|--------------------|
| A | ----- | 68% | 30% | 98 |
| B | 32% | ----- | 62% | 94 |
| C | 70% | 38% | ----- | 108 |

Classificação de Borda: $C \succ_S A \succ_S B$.

Outros métodos:

Outros métodos:

First-past-the-post (UK, Legislativas Portuguesas,...): O votante nomeia um candidato. O candidato com mais votos é eleito.

Outros métodos:

First-past-the-post (UK, Legislativas Portuguesas,...): O votante nomeia um candidato. O candidato com mais votos é eleito.

Two-past-the-post (França, Presidenciais Portuguesas,...): O votante nomeia um candidato. Se um candidato é nomeado por no mínimo 50% dos votantes é eleito. Caso contrário, há uma segunda volta entre os dois candidatos mais votados.

O vencedor depende do método utilizado:

| 5% | 33% | 34% | 28% |
|----|-----|-----|-----|
| A | A | B | C |
| B | C | C | B |
| C | B | A | A |

| | A | B | C |
|---|-------|-------|-------|
| A | ----- | 38% | 38% |
| B | 62% | ----- | 39% |
| C | 62% | 61% | ----- |

O vencedor depende do método utilizado:

| 5% | 33% | 34% | 28% |
|----|-----|-----|-----|
| A | A | B | C |
| B | C | C | B |
| C | B | A | A |

| | A | B | C |
|---|-------|-------|-------|
| A | ----- | 38% | 38% |
| B | 62% | ----- | 39% |
| C | 62% | 61% | ----- |

- (1) First-past-the-post: $A \succ B \succ C$
- (2) Two-past-the-post: $B \succ A \succ C$
- (3) Borda: $C \succ B \succ A$ (e Condorcet)

O vencedor depende do método utilizado:

| 5% | 33% | 34% | 28% |
|----|-----|-----|-----|
| A | A | B | C |
| B | C | C | B |
| C | B | A | A |

| | A | B | C |
|---|-------|-------|-------|
| A | ----- | 38% | 38% |
| B | 62% | ----- | 39% |
| C | 62% | 61% | ----- |

- (1) First-past-the-post: $A \succ B \succ C$
- (2) Two-past-the-post: $B \succ A \succ C$
- (3) Borda: $C \succ B \succ A$ (e Condorcet)

Manipulação estratégica pode compensar:

Se com (1), os 28% decidirem votar B: B vence.

Se com (2), os 33% decidirem votar C: C vence.

Se com (3), 34% votarem $B \succ A \succ C$: B vence.

Influência das alternativas irrelevantes:

| 5% | 33% | 34% | 28% |
|----|-----|-----|-----|
| A | A | B | C |
| B | C | C | B |
| C | B | A | A |

| | A | B | C |
|---|-------|-------|-------|
| A | ----- | 38% | 38% |
| B | 62% | ----- | 39% |
| C | 62% | 61% | ----- |

- (1) First-past-the-post: Vence A.
- (2) Two-past-the-post: Vence B.
- (3) Borda: Vence C.

Paradoxo de Arrow:

Se com (1), C (derrotado) desistir, B vence; se B (derrotado) desistir, C vence
Se com (2), A (derrotado) desistir, C vence.

No contexto do modelo tradicional, um método plausível deve garantir no mínimo 3 das seguintes condições:

- 1) **Total domínio:** os votantes podem ordenar a lista de candidatos segundo qualquer ordem que desejem;
- 2) **Unanimidade:** quando um candidato é o primeiro em todas as listas de votantes, então esse candidato vence;
- 3) **Independência de alternativas irrelevantes:** o vencedor não se altera com a desistência ou inclusão de outro candidato “irrelevante”;
- 4) **À prova de estratégia:** é uma estratégia dominante votar honestamente.

Teorema da Impossibilidade de Arrow: Apenas o método ditatorial segue as três primeiras condições.

ELEIÇÕES PRESIDENCIAIS FRANCESAS DE 2002

As eleições presidenciais Francesas de 2002, com os seus 16 candidatos, são um exemplo das “deficiências” do mecanismo *first-past-the-post*.

A extrema direita tinha dois candidatos - **Le Pen** e Bruno Mégret, a direita moderada cinco – **Chirac**, **Bayrou**, Alain Madelin, Christine Boutin e Corinne Lepage, a esquerda e os verdes quatro – **Jospin**, Chévènement, Taubira e Mamère e a extrema esquerda quatro - Laguiller, Besancenot, Hue e Gluckstein. Saint-Josse concorreu pelo partido CPNT.

À partida era expectável uma corrida a dois entre Chirac e Jospin e foi com grande surpresa que a corrida a dois foi entre Le Pen e Chirac.

| | | | |
|-------------|--------------|----------|--------------|
| J. Chirac | J.-M. Le Pen | L.Jospin | F.Bayrou |
| 19.88% | 16.86% | 16.18% | 6.84% |
| Laguiller | Chévènement | N.Namère | O.Besancenot |
| 5.72% | 5.33% | 5.25% | 4.25% |
| Saint-Josse | Madelin | R.Hue | B.Mégret |
| 4.23% | 3.91% | 3.37% | 2.34% |
| C.Taubira | C.Lepage | C.Boutin | D.Gluckstein |
| 2.32% | 1.88% | 1.19% | 0.47% |

Primeira ronda das eleições presidenciais Francesas de 2002

Chirac acabou por vencer a Le Pen com 82.2% dos votos da segunda ronda mas a grande maioria dos votos de Chirac eram votos contra Le Pen e não a favor de Chirac. Toda a esquerda não teve outra alternativa que não votar em Chirac.

Os seus votos incluíram, por isso, diferentes sentimentos e objetivos.

A maior parte das sondagens previa que num confronto direto entre Jospin e Chirac, Jospin conseguiria uma maioria relativa.

Por outro lado, se Pasqua, antigo aliado de Chirac, se tivesse candidatado (como havia anunciado), poderia ter existido uma segunda volta entre Le Pen e Jospin, com vantagem para o segundo.

Estes casos constituem um exemplo prático do Paradoxo de Arrow.

Para além disso mostram que este mecanismo convida à existência de candidaturas estratégicas: candidaturas que não têm qualquer hipótese de vencer mas que influenciam o resultado final.

ELEIÇÕES PRESIDENCIAIS FRANCESAS DE 2007

O comportamento coletivo dos eleitores em 2007 foi em grande escala influenciado pelas eleições de 2002.

A distribuição dos votos pelos candidatos é dada na tabela seguinte.

Sarkozy concorreu pela direita moderada (partido fundado por Chirac), Ségolène Royal pelo Partido Socialista (partido de Jospin).

| | | | |
|---|----------------|--------------|--------------|
| N.Sarkozy | S.Royal | F.Bayrou | J.-M. Le Pen |
| 31.18% | 25.87% | 18.57% | 10.44% |
| O.Besancenot | P. De Villiers | M.-G. Buffet | D.Voynet |
| 4.08% | 2.23% | 1.93% | 1.57% |
| A.Laguiller | J.Bové | F.Nihous | G.Schivardi |
| 1.33% | 1.32% | 1.15% | 0.34% |
| Primeira ronda das eleições presidenciais Francesas de 2007 | | | |

Depois da inesperada segunda volta das eleições de 2002, o número de eleitores registados aumentou de 41.2 milhões em 2002 para 44.5 milhões em 2007 e a percentagem de eleitores que efectivamente exerceram o seu direito de voto nas duas rondas foi de 84%.

Em 2007, era preocupação geral da população, quem sobreviveria à primeira ronda - criou-se a ideia de **Voto Útil**.

Uma sondagem à boca das urnas (primeira ronda) permitiu corroborar a ideia de voto estratégico:

- 22% dos eleitores que votaram Bayrou;
- 10% dos eleitores que votaram Le Pen;
- 31% dos eleitores que votaram Royal;
- 25% dos eleitores que votaram Sarkozy.

Para além disso, e analisando os resultados das primeiras rondas de 2002 e 2007, é possível verificar que os candidatos dos partidos pequenos de esquerda passaram de 26.71% para 10.57%, tendo algo análogo acontecido com os partidos pequenos de direita.

MODELO PROPOSTO

Considere-se:

- uma **linguagem comum** Λ , e um conjunto de notas estritamente ordenadas: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$;
- um conjunto finito de m **candidatos** (alternativas, bens concorrentes, etc.) $C = \{A, B, \dots, I, \dots, Z\}$;
- um conjunto finito de n **jurados** $J = \{1, \dots, j, \dots, n\}$.

Um problema é definido por um perfil $\phi = \phi(C, J)$: uma matriz m por n de notas atribuídas aos candidatos (linhas) pelos jurados (colunas).

Um **método de classificação** é uma relação binária \succsim_S que, para um dado perfil ϕ , compara quaisquer dois candidatos. Deve possuir algumas propriedades:

- Axioma 1 – **neutra**: $A \succsim_S B$ para o perfil ϕ implica $A \succsim_S B$ para o perfil $\sigma\phi$, para qualquer permutação σ entre os candidatos (linhas);
- Axioma 2 – **anónima**: $A \succsim_S B$ para o perfil ϕ implica $A \succsim_S B$ para o perfil $\phi\sigma$, para qualquer permutação σ entre os jurados (colunas);

- Axioma 3 – **transitiva**: $A \succsim_S B$ e $B \succsim_S C$ implica $A \succsim_S C$;
- Axioma 4 – **independência de alternativas irrelevantes**: se $A \succsim_S B$ para o perfil ϕ então $A \succsim_S B$ para qualquer perfil ϕ' obtido de ϕ adicionando ou removendo um candidato (linha).

Uma função de agregação é uma função:

$$f: \Lambda^n \rightarrow \Lambda$$

notas dos jurados acerca de um candidato \rightarrow nota final do candidato

Que satisfaz:

- Anonimato;
- Unanimidade;
- Monotonia:

$$\alpha_j \preceq \beta_j \Rightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) \preceq f(\beta_1, \dots, \beta_j, \dots, \beta_n)$$

e

$$\alpha_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < \beta_n \Rightarrow f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) < f(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

O Jogo de votar...

A utilidade de um votante é uma função $u_j(r^*, r, f, C, \Lambda)$ que pode depender de diversos fatores (a regra de decisão, o conjunto de candidatos, honestidade, etc.).

Dado o mecanismo e alguma informação privada, um votante escolhe a mensagem que **maximiza** a sua função de utilidade.

Prova-se que o método Majority Judgement é à **prova de estratégia** para uma grande classe funções de utilidade.

A função de agregação *middlemost* são (para $r_1 \geq \dots \geq r_n$):

$$f(r_1, \dots, r_n) = \frac{r_{n+1}}{2} \text{ quando } n \text{ é ímpar e}$$
$$\frac{r_n}{2} \geq f(r_1, \dots, r_n) \geq \frac{r_{n+1}}{2} \text{ quando } n \text{ é par.}$$

Mostra-se que as únicas funções de agregação que atribuem uma nota final r quando a maioria dos jurados atribui r são as *middlemost*.

Mostra-se também que as únicas funções de agregação que minimizam a possibilidade de manipulação são as *middlemost*.

A EXPERIÊNCIA MAJORITY-JUDGEMENT

A experiência de campo de colocar em prática o método desenvolvido teve lugar em 2007 e em três locais de voto de uma pequena cidade dos arredores de Paris, Orsay.

Os três locais foram escolhidos de forma a serem representativos de toda a estrutura socioeconómica da cidade.

Todo o estudo foi feito de forma rigorosa, sendo os participantes previamente avisados por carta com a devida antecedência, através de divulgação nos media locais e através de cartazes e sessões públicas de esclarecimento.

O objectivo era descobrir se eleitores não controlados de diferentes opiniões e ideologias poderiam avaliar os candidatos num cenário de eleição, utilizando os boletins do majority judgement.

É importante salientar que estes três locais de voto não são representativos da realidade Francesa, como se pode ver pela tabela seguinte.

| | N.Sarkosy | S.Royal | F.Bayrou | J.-M. Le Pen |
|-----------------|---------------------|----------------------|--------------------|---------------------|
| Nacional | 31.18% | 25.87% | 18.57% | 10.44% |
| Orsay | 28.98% | 29.92% | 25.51% | 5.89% |
| | O.Besancenot | P.De Villiers | M.-G.Buffet | D.Voynet |
| Nacional | 4.08% | 2.23% | 1.93% | 1.57% |
| Orsay | 2.54% | 1.91% | 1.40% | 1.69% |
| | A.Laguiller | J.Bové | F.Nihous | G.Schivardi |
| Nacional | 1.33% | 1.32% | 1.15% | 0.34% |
| Orsay | 0.76% | 0.93% | 0.30% | 0.17% |

Primeira ronda das eleições presidenciais de 2007: comparação Orsay vs voto nacional.

O boletim proposto aos eleitores era diferente do usual:

Ballot: Election of the President of France 2007

*To be president of France,
having taken into account all considerations,
I judge, in conscience, that this candidate would be:*

| | <i>Excellent</i> | <i>Very Good</i> | <i>Good</i> | <i>Acceptable</i> | <i>Poor</i> | <i>to Reject</i> |
|----------------------|------------------|------------------|-------------|-------------------|-------------|------------------|
| Olivier Besancenot | | | | | | |
| Marie-George Buffet | | | | | | |
| Gérard Schivardi | | | | | | |
| François Bayrou | | | | | | |
| José Bov  | | | | | | |
| Dominique Voynet | | | | | | |
| Philippe de Villiers | | | | | | |
| S gol ne Royal | | | | | | |
| Frédéric Nihous | | | | | | |
| Jean-Marie Le Pen | | | | | | |
| Arlette Laguiller | | | | | | |
| Nicolas Sarkozy | | | | | | |

Check one single grade in the line of each candidate.
No grade checked in the line of a candidate means to Reject the candidate.

Algumas considerações sobre o boletim:

- O eleitor foi confrontado com uma pergunta específica à qual lhe foi pedido que respondesse;
- As respostas, ou avaliações, foram dadas numa linguagem familiar: à excepção de “to Reject”, são as notas atribuídas às crianças francesas nos primeiros graus de ensino;
- As respostas não são números ou pesos que um eleitor possa assumir à partida que serão somados de forma a chegar a uma classificação final;
- Permite aos eleitores expressar as suas opiniões acerca dos vários candidatos (ideia bem acolhida por quem participou no estudo).

O sistema em vigor oferecia aos eleitores 13 opções possíveis: votar num dos 12 candidatos ou não votar em nenhum.

O Majority Judgement oferecia mais de 2 bilhões de mensagens possíveis: com 12 candidatos e 6 avaliações haviam 6^{12} mensagens possíveis.

Permitiu também que muitos “descontentes” pudessem expressar as suas opiniões, votando pela primeira vez.

OS RESULTADOS

Os eleitores ficaram particularmente agradados com a opção “to Reject” e usaram-na com maior frequência: uma média de 4.1 “to Reject” por boletim e uma média de 0.5 “não avaliações” (que de acordo com as regras previamente fixadas contou como “to Reject”).

Resultados obtidos:

| | Excellent | Very Good | Good | Acceptable | Poor | to Reject | Sum |
|--|-----------|-----------|------|------------|------|-----------|-----|
| Média/Boletim | 0.69 | 1.25 | 1.50 | 1.74 | 2.27 | 4.55 | 12 |
| Número médio de avaliações por boletim | | | | | | | |

| 1 nota | 2 notas | 3 notas | 4 notas | 5 notas | 6 notas |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1% | 2% | 10% | 31% | 42% | 14% |
| Porcentagem de eleitores que usou k notas (k=1,...,6) | | | | | |

Algumas conclusões imediatas:

- Os eleitores tiveram uma predisposição maior para atribuir avaliações mais baixas;
- 14% utilizaram as 6 avaliações possíveis o que sugere que a utilização das 6 notas é suficiente;
- 3% utilizaram no máximo duas notas, 13% no máximo três notas, o que sugere a necessidade de utilização de mais de três notas;

Outros resultados importantes:

- As notas mais elevadas eram muitas vezes múltiplas: quase 11% dos boletins tinha no mínimo duas classificações “Excelente”, 16% no mínimo duas classificações “Muito Bom” e nenhuma classificação “Excelente”;
- Estes resultados mostram que muitos eleitores não tinham uma clara preferência entre candidatos;
- 17.9% deram a mesma nota a Bayrou e Sarkozy (10.6% a máxima), 23.3% a mesma nota a Bayrou e Royal (11.7% a máxima) e 14.3% a mesma nota a Royal e Sarkozy (4.1% a nota máxima).
- 4.8% atribuíram a mesma nota os 3 (4.1% a máxima).

Resultados:

Majority judgment results, three precincts of Orsay, April 22, 2007

| | <i>Excellent</i> | <i>Very Good</i> | <i>Good</i> | <i>Acceptable</i> | <i>Poor</i> | <i>to Reject</i> |
|------------|------------------|------------------|-------------|-------------------|-------------|------------------|
| Besancenot | 4.1% | 9.9% | 16.3% | 16.0% | 22.6% | 31.1% |
| Buffet | 2.5% | 7.6% | 12.5% | 20.6% | 26.4% | 30.4% |
| Schivardi | 0.5% | 1.0% | 3.9% | 9.5% | 24.9% | 60.4% |
| Bayrou | 13.6% | 30.7% | 25.1% | 14.8% | 8.4% | 7.4% |
| Bové | 1.5% | 6.0% | 11.4% | 16.0% | 25.7% | 39.5% |
| Voynet | 2.9% | 9.3% | 17.5% | 23.7% | 26.1% | 20.5% |
| Villiers | 2.4% | 6.4% | 8.7% | 11.3% | 15.8% | 55.5% |
| Royal | 16.7% | 22.7% | 19.1% | 16.8% | 12.2% | 12.6% |
| Nihous | 0.3% | 1.8% | 5.3% | 11.0% | 26.7% | 55.0% |
| Le Pen | 3.0% | 4.6% | 6.2% | 6.5% | 5.4% | 74.4% |
| Laguiller | 2.1% | 5.3% | 10.2% | 16.6% | 25.9% | 40.1% |
| Sarkozy | 19.1% | 19.8% | 14.3% | 11.5% | 7.1% | 28.2% |

A majority-grade de um candidato é a sua nota média, ou seja, é simultaneamente a nota mais alta aprovada por uma maioria e a nota mais baixa aprovada por uma maioria.

Exemplo:

A nota de Voynet é “Acceptable” pois uma maioria de $2.9\% + 9.3\% + 17.5\% + 23.7\% = 53.4\%$ acredita que ela merece no mínimo essa nota e uma maioria de $23.7\% + 26.1\% + 20.5\% = 70.3\%$ acredita que merece no máximo essa nota.

| | <i>Excellent</i> | <i>Very Good</i> | <i>Good</i> | <i>Acceptable</i> | <i>Poor</i> | <i>to Reject</i> |
|-------|------------------|------------------|-------------|-------------------|-------------|------------------|
| Voyet | 2.9% | 9.3% | 17.5% | 23.7% | 26.1% | 20.5% |

A majority-ranking (classificação dos candidatos) é feita da seguinte forma:

São atribuídos três valores aos candidatos, majority-gauge, e prova-se através dos resultados já enunciados noutras sessões, que são suficientes para definir a ordenação dos candidatos no majority-ranking:

$$(p, \alpha, q) \text{ onde } \begin{cases} p = \% \text{ de notas acima da majority - grade} \\ \alpha = \text{majority - grade} \\ q = \% \text{ de notas abaixo da majority - grade} \end{cases}$$

De forma a criar uma clara distinção na ordenação acrescenta-se um suplemento à majority-grade, +/- dependendo dos valores de p e q , e denomina-se essa nota por majority-grade*:

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha^+ & \text{se } p > q, \\ \alpha^- & \text{se } p \leq q, \end{cases}$$

A título de exemplo, a majority-gauge do candidato Sarkozy é (38.9%, *Good*, 46.9%) e a sua majority-grade* é *Good*⁻. Naturalmente, α^+ é melhor do que α^- .

Considerando dois candidatos A e B com majority-gauges (p_A, α_A, q_A) e (p_B, α_B, q_B) . A é classificado acima de B quando:

- A majority-grade* de A é melhor do que a de B ou
- Ambas as majority-grades são α^+ e $p_A > p_B$ ou
- Ambas as majority-grades são α^- e $q_A < q_B$.

Exemplos:

- Bayrou com $(44.3\%, Good^+, 30.6\%)$ é classificado acima de Royal com $(39.4\%, Good^-, 41.5\%)$;
- Besancenot com $(46.3\%, Poor^+, 31.2\%)$ é classificado acima de Buffet com $(43.2\%, Poor^+, 30.5\%)$.

Majority-Ranking de acordo com as majority-gauges:

| | Majority-ranking | $p =$ Above maj.-grade | $\alpha^* =$ The majority-grade* | $q =$ Below maj.-grade | Natl. rank. | Orsay rank. |
|------|------------------|---------------------------|-------------------------------------|---------------------------|----------------|----------------|
| 1st | Bayrou | 44.3% | <i>Good</i> ⁺ | 30.6% | 3rd | 3rd |
| 2nd | Royal | 39.4% | <i>Good</i> ⁻ | 41.5% | 2nd | 1st |
| 3rd | Sarkozy | 38.9% | <i>Good</i> ⁻ | 46.9% | 1st | 2nd |
| 4th | Voynet | 29.8% | <i>Acceptable</i> ⁻ | 46.6% | 8th | 7th |
| 5th | Besancenot | 46.3% | <i>Poor</i> ⁺ | 31.2% | 5th | 5th |
| 6th | Buffet | 43.2% | <i>Poor</i> ⁺ | 30.5% | 7th | 8th |
| 7th | Bové | 34.9% | <i>Poor</i> ⁻ | 39.4% | 10th | 9th |
| 8th | Laguiller | 34.2% | <i>Poor</i> ⁻ | 40.0% | 9th | 10th |
| 9th | Nihous | 45.0% | <i>to Reject</i> | – | 11th | 11th |
| 10th | Villiers | 44.5% | <i>to Reject</i> | – | 6th | 6th |
| 11th | Schivardi | 39.7% | <i>to Reject</i> | – | 12th | 12th |
| 12th | Le Pen | 25.7% | <i>to Reject</i> | – | 4th | 4th |

REFERÊNCIAS

- Michel Balinski and Rida Laraki (2010). Majority Judgement: Measuring, Ranking and Electing. MIT Press.
- Michel Balinski and Rida Laraki (2007). “A theory of measuring, electing and ranking,” Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A., vol. 104, pp. 8720-8725
- Michel Balinski and Rida Laraki (2010). “Election by majority judgement: experimental evidence,” In Situ and Laboratory Experiments on Electoral Law Reform: French Presidential Elections. Co-edited by B. Dolez, B. Grofman and A. Laurent, Springer
- Michel Balinski and Rida Laraki (2010). Judge : Don't Vote! Cahier du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique