Formalismos e técnicas de implementação de gramáticas lógicas com restrições

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Doutor em Ciência de Computadores

por

Nelma Resende Araújo Moreira

Departamento de Ciência de Computadores

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Janeiro 1997

Índice

Resumo

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

Objectivos Enquadramento Plano de Trabalho

1.1 Gramáticas de Unificação e Restrições. Estruturas de atributos.

1.1.1 Lógica de Kasper-Rounds

1.1.2 Lógica de Atributos-Valores

Mark Johnson

1.1.3 Lógica de Estruturas de Atributos

Smolka

1.2 Gramáticas Lógicas com Restrições, $\mathcal{CLG}$

1.2.1 Metodologia

O formalismo a seguir descrito considera qualquer gramática como uma teoria da lógica de primeira ordem com igualdade.
Os requisitos dos formalismos linguísticos computacionais.

- declarativo
- expressividade

- complexidade computacional

Esta abordagem não só é compatível com as Gramáticas de Unificação mas, permite estender duma forma simples a noção de unificação à resolução de restrições complexas. Permite ainda, uma clara separação entre objectos linguísticos e descrições parciais desses objectos.

Teorias de lógica de primeira ordem

Programação em Lógica

O paradigma da programação em lógica baseia-se no uso de *lógica* para representar o conhecimento e num mecanismo de *inferência* para controlar e manipular o conhecimento. Esta associação foi expressa por Kowalski [Kow79]:

$$programa = lógica + control$$

Teve como origem as investigações em demonstração automática de teoremas, realizadas durante os anos 60 e 70 e baseadas essencialmente nos resultados de Jacques Herbrand [Her30] em teoria da lógica em forma clausal. Especialmente relevante foi a introdução da regra da resolução de Robinson [Rob65]. Para um subconjunto da lógica de primeira ordem - as cláusulas de Horn - demostrou-se a existência dum sistema de inferência completo, no sentido em que o conjunto de cláusulas que se deduzem a partir dum dado conjunto P, são exactamente as que são válidas em todos os modelos de P, e que pode ser eficientemente implementado em computador. Este resultado está na base de linguagens como o Prolog

Uma cláusula é uma fórmula da forma

$$\forall x_1 \ldots \forall x_s (L_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ L_m)$$

onde L_i é um literal e $x_1 \ldots x_s$ são todas as variáveis que ocorrem em $L_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ L_m$.

Os programas em lógica são conjuntos finitos de cláusulas definidas.

Prolog

Termos

SLD-derivação semântica declarativa semântica operacional

Programação em Lógica com Restrições

Capítulo 2

Linguagens de Restrições

2.1 Linguagem $\mathcal{L}$

Introduzem-se nesta secção as linguagens de lógica 1ª ordem que iremos considerar nesta tese e alguns conceitos e resultados fundamentais da lógica de 1ª ordem. Serão também apresentados alguns resultados gerais sobre sistemas de reescrita e a sua aplicação em problemas de satisfazibilidade. Para essas linguagens, as interpretações escolhidas serão as álgebras de árvores, apresentadas na secção 2.1.4.

2.1.1 Sintaxe

As linguagens da lógica de 1ª ordem que com a igualdade como único símbolo de predicado. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1ª ordem construída a partir de um conjunto numerável infinito de variáveis $X = \{x, y, z, x_1, y_1, \ldots\}$, uma assinatura $\Sigma = \{f^n, g^n, h^n, \ldots\}$ constituída, para cada $n \geq 0$, por um conjunto numerável de símbolos de função de aridade n, o símbolo de predicado '=', as conectivas $\neg$, $\vee$ e $\wedge$, o quantificador $\forall$, os parêntesis '(' e ')' e o símbolo $\top$ (valor lógico verdade). Os símbolos de função de aridade zero serão denotados por $a, b, \ldots$ e designados por *constantes* e os de aridades superiores serão designados *functores* (ou funcionais). Utilizaremos também as conectivas $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ sendo as expressões $\phi \Rightarrow \psi$ e $\phi \Leftrightarrow \psi$ abreviaturas de $(\neg\phi \vee \psi)$ e $((\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi))$, respectivamente. Analogamente, $\exists x\phi$ é uma abreviatura de $\neg\forall x\neg\phi$, $t_1 \neq t_2$ é uma abreviatura de $\neg(t_1 = t_2)$ e $\perp$ de $\neg\top$. Se omitirmos parêntesis numa fórmula, as prioridades das conectivas serão as usuais, isto é, consideramos por ordem crescente de âmbito as conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ e

$\Leftrightarrow$.

A linguagem $\mathcal{L}$ fica completamente caracterizada por X e Σ. Uma sequência finita de elementos de $\mathcal{L}$ diz-se uma *expressão*. A identidade de símbolos ou expressões de $\mathcal{L}$ é denotada por $\equiv$ e a sua distinção por $\not\equiv$.

Definição 2.1 *O conjunto de termos* $T = \{t, r, s, u, t_1, t_2, \ldots\}$ *sobre* Σ *e* X *é o menor conjunto tal que:*

(i) qualquer variável é um termo;

(ii) qualquer constante é um termo;

(iii) se f^n *é um símbolo de função de aridade* n *e* $t_1, \ldots, t_n$ *são termos então* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *é um termo.*

Um *termo complexo* é um termo que não é uma variável nem uma constante. Um *termo fechado* é um termo que não contém variáveis.
O facto de u ser um sub-termo de t, denota-se por $t[u]$. A $t[\,]$ chama-se um contexto.

Definição 2.2 *O tamanho* $|t|$ *um termo* t*, é definido inductivamente na estrutura de* t*:*

(i) $|x| = 1$ *se* x *é uma variável;*

(ii) $|a| = 1$*, se* a *é uma constante;*

(iii) $|f(t_1, \ldots, t_n)| = 1 + \sum_{i=1}^{n} |t_i|$.

Definição 2.3 *Uma fórmula atómica é* $\top$ *ou uma expressão da forma* $t_1 = t_2$ *onde* t_1 *e* t_2 *são termos; uma expressão desta forma designa-se também por equação. O conjunto das fórmulas de* $\mathcal{L}$ *é o menor conjunto tal que:*

(i) uma fórmula atómica é uma fórmula;

(ii) se ϕ *é uma fórmula* $\neg\phi$ *é uma fórmula;*

(iii) se ϕ *e* ψ *são fórmulas,* $\phi \wedge \psi$ *e* $\phi \vee \psi$ *são fórmulas;*

(iv) se ϕ *é uma fórmula e* x *é uma variável, então* $\forall x\phi$ *é uma fórmula;*

Se $\phi = Qx_1Qx_2 \ldots Qx_n\psi$, onde Q representa um mesmo quantificador ($\exists$ ou $\forall$) e x_i são variáveis, escreve-se $\phi = Qx_1 \ldots x_n\psi$ ou apenas $\phi = Q\bar{x}.\psi$. Uma fórmula ϕ está em *forma prenex normal* se não contiver quantificadores ou se for da forma $Q_1 \ldots Q_n.\bar{x}.\psi$, onda cada Q_i é $\exists$ ou $\forall$ e ψ é uma fórmula sem quantificadores, denominada *matriz* de ϕ. Uma fórmula sem quantificadores está em *forma normal disjuntiva*(forma normal conjuntiva) se for uma disjunção (conjunção) de conjunções (disjunções) de fórmulas atómicas ou das suas negações. O facto de ϕ ser uma sub-fórmula de ψ, denota-se por $\psi[\phi]$. O *tamanho* duma fórmula ϕ define-se como o número de símbolos de ϕ.

Definição 2.4 *Uma variável x ocorre livre numa fórmula ϕ se:*

(i) ϕ é uma fórmula atómica e x ocorre em ϕ;

(ii) ϕ é $\neg\psi$ e x ocorre livre em ψ;

(iii) ϕ é $\psi \wedge \gamma$ ou $\psi \vee \gamma$ e x ocorre livre em ψ ou γ;

(iv) ϕ é $\forall y\psi$ e $x \not\equiv y$ e x ocorre livre em ψ.

Denotamos por $Vars(\phi)$ o conjunto de todas as variáveis que ocorrem livres numa fórmula ϕ. Uma *fórmula fechada* é uma fórmula em que nenhuma variável ocorre livre. Se ϕ é uma fórmula, então $\forall\phi$ denota o *fecho universal* de ϕ, que é a fórmula fechada que se obtém de ϕ adicionando um quantificador universal para cada variável que ocorre livre em ϕ. Analogamente, define-se $\exists\phi$, o *fecho existencial* de ϕ.

Definição 2.5 *Uma substituição é uma função $\theta : X \longrightarrow T$, tal que o conjunto $\mathcal{D}(\theta) = \{x \in X \mid \theta(x) \not\equiv x\}$ é finito e denomina-se* domínio *de θ. Se $\mathcal{D}(\theta) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e para todo o i, $x_i\theta = t_i$, identifica-se θ com o conjunto $\{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$. Uma* instância *duma expressão E por θ é a expressão $E\theta$ que se obtém substituindo simultaneamente cada ocorrência livre de x_i em E por t_i, $i = 1 \ldots n$.*

Se $\theta = \emptyset$, θ designa-se a substituição *identidade* e denota-se por ϵ. A composição de duas substituições $\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$ e $\sigma = \{s_1/y_1, \ldots, s_m/y_m\}$ escreve-se $\theta\sigma$ e define-se por:

$$\begin{aligned} \theta\sigma \quad = \quad & \{t_i\sigma/x_i : 1 \leq i \leq n \text{ e } x_i \not\equiv t_i\sigma\} \quad \cup \\ & \{s_j/y_j : 1 \leq j \leq m \text{ e } y_j \not\equiv x_i \text{ para todo } i,\ 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

Sendo θ, σ e γ substituições e E uma expressão é fácil verificar que:

(i) $\theta\epsilon = \epsilon\theta = \theta$

(ii) $E(\theta\sigma) = (E\theta)\sigma$

(iii) $(\theta\sigma)\gamma = \theta(\sigma\gamma)$

Uma substituição θ é *idempotente* se $\theta\theta = \theta$. Dada uma expressão E, uma substituição $\theta = \{y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n\}$ é uma *renomeação de variáveis* se o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ está contido em $Vars(E)$, todos y_i são distintos e $(Vars(E) \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \cap \{y_1, \ldots, y_n\} = \emptyset$.

No conjunto das substituições define-se a seguinte relação (pré-ordem):

$$\theta \preceq \sigma \quad \text{se e só se} \quad \exists\gamma\ \sigma = \theta\gamma$$

Se $\theta \preceq \sigma$ diz-se que θ é *mais geral* que σ, ou, equivalentemente, que σ é *mais específica* que θ.

A noção de substituição estende-se naturalmente a todo o conjunto de termos, isto é, cada substituição θ tem uma única extensão homomórfica $\hat{\theta} : T \longrightarrow T$, que denotaremos também por θ.

A teoria de demonstração dum sistema axiomático de $\mathcal{L}$ (no estilo de Hilbert) é dada como habitualmente por um conjunto de axiomas lógicos, entre eles os axiomas da igualdade, e por um conjunto de regras de inferência (p.e. *Modus Ponens* e Generalização). A *demonstração* dum fórmula ϕ é uma sequência de fórmulas de $\mathcal{L}$, em que cada uma é um axioma ou pode ser inferida das fórmulas precedentes, por uma das regras de inferência, e ϕ é a última fórmula da sequência. Uma fórmula ϕ é um teorema num sistema axiomático se tiver uma demonstração, e denota-se esse facto por $\vdash \phi$. Neste trabalho, vamos apenas utilizar alguns teoremas bem conhecidos da lógica de 1ª ordem. Em particular, aqueles referentes às propriedades booleanas das conectivas lógicas.

2.1.2 Semântica

A teoria de modelos tem como objectivo associar uma interpretação às expressões de $\mathcal{L}$.

Definição 2.6 *Uma álgebra (ou estrutura) $\mathcal{A}$ de uma linguagem $\mathcal{L}$ é definida por:*

(i) um conjunto não vazio $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$, que se diz o universo de $\mathcal{A}$;

(ii) *uma função de aridade n,* $f^{\mathcal{A}} : \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^n \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ *para cada símbolo de função* f^n *de* $\mathcal{L}$*;*

(iii) *o símbolo de predicado* $=$ *é interpretado como a identidade* $=_{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}}$ *em* $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$*.*

Dado que $\mathcal{L}$ é caracterizada por Σ, designam-se estas álgebras por Σ-álgebras. Vamos apenas considerar Σ-álgebras em que Σ é não singular, isto é, com pelo menos dois elementos.

Definição 2.7 *Dada uma álgebra* $\mathcal{A}$*, uma atribuição de variáveis* ρ *é uma função que a cada variável de* $\mathcal{L}$ *faz corresponder um elemento de* $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$*. Dada uma atribuição de variáveis* ρ*, uma variável* $x \in X$ *e um elemento* $\alpha \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ *define-se* $\rho[\alpha/x]$ *como uma função que coincide com* ρ *em todas as variáveis diferentes de* x *e tal que* $\rho[\alpha/x](x) = \alpha$*. Dado* $V \subset X$ *e uma atribuição de variáveis* ρ*, denotamos por* $\rho|_V$ *a restrição de* ρ *a* V*.*

Definição 2.8 *Dada uma álgebra* $\mathcal{A}$ *e uma atribuição de variáveis* ρ*, estendemos* ρ *ao conjunto dos termos de* $\mathcal{L}$*, definindo, recursivamente a função* $\hat{\rho}$*:*

(i) $\hat{\rho}(x) = \rho(x)$ *para toda a variável* x*;*

(ii) $\hat{\rho}(a) = a^{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}}$ *para toda a constante* a*;*

(iii) $\hat{\rho}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{U}_{\mathcal{A}}}(\hat{\rho}(t_1), \ldots, \hat{\rho}(t_n))$*, se* $t_1, \ldots, t_n$ *são termos e* f^n *um símbolo de função de aridade* n*.*

Habitualmente, identificaremos a função $\hat{\rho}$ com ρ.

O valor lógico (ou significado) das fórmulas de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{A}$ é dado pela relação de satisfação a seguir definida. Por uma questão de comodidade apresentamos a definição desta relação para algumas das abreviaturas de fórmulas de $\mathcal{L}$, atrás referidas.

Definição 2.9 *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de* $\mathcal{L}$ *e seja* ρ *uma atribuição de variáveis. O facto de* $\mathcal{A}$ satisfazer uma fórmula ϕ para a atribuição de variáveis ρ, *denota-se por* $\mathcal{A} \models_\rho \phi$ *e define-se por indução na estrutura de* ϕ *do seguinte modo:*

(i) $\mathcal{A} \models_\rho \top$*;*

(ii) $\mathcal{A} \not\models_\rho \bot$*, isto é,* $\mathcal{A} \models_\rho \bot$ *não se verifica;*

(iii) $\mathcal{A} \models_\rho t_1 = t_2$ *se* $\hat{\rho}(t_1) = \hat{\rho}(t_2)$*;*

(iv) $\mathcal{A} \models_\rho \phi \wedge \psi$ *se* $\mathcal{A} \models_\rho \phi$ *e* $\mathcal{A} \models_\rho \psi$*;*

(v) $\mathcal{A} \models_\rho \phi \vee \psi$ *se* $\mathcal{A} \models_\rho \phi$ *ou* $\mathcal{A} \models_\rho \psi$*;*

(vi) $\mathcal{A} \models_\rho \neg\phi$ *se* $\mathcal{A} \not\models_\rho \phi$*, isto é, se* $\mathcal{A} \models_\rho \phi$ *não se verifica;*

(vii) $\mathcal{A} \models_\rho \phi \Rightarrow \psi$ *se* $\mathcal{A} \not\models_\rho \phi$ *ou* $\mathcal{A} \models_\rho \psi$*;*

(viii) $\mathcal{A} \models_\rho \forall x\phi$ *se para todo o* $\alpha \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ *se tem* $\mathcal{A} \models_{\rho[\alpha/x]} \phi$*;*

(ix) $\mathcal{A} \models_\rho \exists x\phi$ *se existe um* $\alpha \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$ *tal que* $\mathcal{A} \models_{\rho[\alpha/x]} \phi$*.*

Uma fórmula ϕ é *satisfazível em* $\mathcal{A}$ se existe uma atribuição de variáveis ρ, tal que $\mathcal{A} \models_\rho \phi$. Ao conjunto de todas essas atribuições de variáveis designamos por conjunto de $\mathcal{A}$-soluções de ϕ, e denotamos por $\mathcal{S}(\phi, \mathcal{A})$. Uma fórmula ϕ é *satisfazível* se existe uma álgebra $\mathcal{A}$ em que ϕ é satisfazível. Uma fórmula ϕ é *válida em* $\mathcal{A}$ se para toda a atribuição de variáveis ρ se tem $\mathcal{A} \models_\rho \phi$. Neste caso, diz-se que $\mathcal{A}$ é um *modelo* de ϕ, e escreve-se $\mathcal{A} \models \phi$. Uma fórmula ϕ é *válida* se for válida em todas as álgebras, e escreve-se $\models \phi$. Uma fórmula ϕ é uma *contradição* se não existe nenhuma álgebra $\mathcal{A}$ e nenhuma atribuição de variáveis ρ tal que $\mathcal{A} \models_\rho \phi$. Neste caso, escrevemos $\not\models \phi$.

Proposição 2.10 *Seja* ϕ *uma fórmula e* $\mathcal{A}$ *uma álgebra.*

(i) ϕ *é válida (em* $\mathcal{A}$*) se e só se* $\neg\phi$ *é não satisfazível (em* $\mathcal{A}$*).*

(ii) ϕ *é satisfazível (em* $\mathcal{A}$*) se e só se* $\neg\phi$ *é não válida (em* $\mathcal{A}$*).*

(iii) ϕ *é válida (em* $\mathcal{A}$*) se e só se* $\forall\phi$ *é válida (em* $\mathcal{A}$*).*

(iv) ϕ *é satisfazível (em* $\mathcal{A}$*) se e só se* $\exists\phi$ *é satisfazível (em* $\mathcal{A}$*).*

Definição 2.11 *Dada uma álgebra* $\mathcal{A}$*, duas fórmulas* ϕ *e* ψ *são* independentes para a satisfazibilidade em $\mathcal{A}$*, se a satisfazibilidade em* $\mathcal{A}$ *de* ϕ *e* ψ *implica a satisfazibilidade em* $\mathcal{A}$ *de* $\phi \wedge \psi$*.*

Definição 2.12 *Sendo* θ *uma substituição e* ρ *uma atribuição de variáveis, numa álgebra* $\mathcal{A}$*, define-se* $\rho\theta$ *a atribuição de variáveis tal que* $\rho\theta(x) = \rho(x\theta)$ *para todo* $x \in X$*. Esta noção estende-se naturalmente a todo o conjunto dos termos.*

Proposição 2.13 *Se θ é uma substituição e ϕ uma fórmula tal que para cada variável livre x de ϕ, o termo $x\theta$ não contém nenhuma variável que fique ligada a um quantificador de ϕ (diz-se que θ é livre para x em ϕ), então para toda a atribuição de variáveis ρ,*

$$\mathcal{A} \models_\rho \phi \text{ se e só se } \mathcal{A} \models_{\rho\theta} \phi$$

É óbvio que o facto de uma fórmula fechada ϕ ser satisfazível numa álgebra $\mathcal{A}$ não depende das atribuições de variáveis. Dado um conjunto de fórmulas fechadas S e uma álgebra $\mathcal{A}$, diz-se que $\mathcal{A}$ é *um modelo para* S, e escreve-se $\mathcal{A} \models S$, se $\mathcal{A}$ for um modelo para cada fórmula de S. Se todo o modelo de S for um modelo duma fórmula fechada ϕ, diz-se que ϕ é uma *consequência (lógica)* de S, e escreve-se $S \models \phi$. Este conceito generaliza-se para qualquer fórmula ϕ considerando o seu fecho universal, $\forall\phi$.

Definição 2.14 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e ϕ e ψ duas fórmulas de $\mathcal{L}$. A fórmula ϕ* víncula *ψ em $\mathcal{A}$, e escreve-se $\phi \models_\mathcal{A} \psi$, se $\forall(\phi \Rightarrow \psi)$ é válida em $\mathcal{A}$, ou em termos de conjuntos de soluções, se $\mathcal{S}(\phi, \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}(\psi, \mathcal{A})$. As fórmulas ϕ e ψ dizem-se* (logicamente) equivalentes *em $\mathcal{A}$, e escreve-se $\phi \approx_\mathcal{A} \psi$, se $\forall(\phi \Leftrightarrow \psi)$ é válida em $\mathcal{A}$, ou em termos de conjuntos de soluções se $\mathcal{S}(\phi, \mathcal{A}) = \mathcal{S}(\psi, \mathcal{A})$. Dado um conjunto fechado de fórmulas S, se $S \models \phi \Rightarrow \psi$ então diz-se que ϕ* víncula *(ou* implica*) ψ em S e escreve-se $\phi \models_S \psi$. Analogamente, diz-se que duas fórmulas ϕ, ψ são equivalentes em S, $\phi \approx_S \psi$.*

Proposição 2.15 *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ e as fórmulas ϕ, ψ e ψ' de $\mathcal{L}$, tem-se que:*

(i) se ϕ é satisfazível em $\mathcal{A}$ então não se pode ter simultaneamente $\phi \models_\mathcal{A} \psi$ e $\phi \models_\mathcal{A} \neg\psi$;

(ii) $\mathcal{A} \models \phi \wedge \psi \Leftrightarrow \phi \wedge \psi'$ se e só se $\phi \models_\mathcal{A} \psi \Leftrightarrow \psi'$;

(iii) $\mathcal{A} \models \phi \wedge \psi \Leftrightarrow \phi$ se e só se $\phi \models_\mathcal{A} \psi$;

(iv) $\mathcal{A} \not\models \phi \wedge \psi$ se e só se $\phi \models_\mathcal{A} \neg\psi$.

Se ϕ for satisfazível em $\mathcal{A}$ e $\phi \models_\mathcal{A} \neg\psi$ ou $\phi \models_\mathcal{A} \psi$ diz-se que ϕ *determina* ψ em $\mathcal{A}$ ([AKPS92, AKP93b, JM94]).

2.1.3 Teorias e regras de reescrita

As definições e resultados a seguir apresentados são baseados em [Sho67]. A *teoria* (de $1^{\underline{a}}$ *ordem*) dum conjunto de fórmulas fechadas S é o conjunto $\mathrm{Th}(S)$ de todas as fórmulas fechadas ϕ tal que $S \models \phi$. O conjunto $\mathrm{Th}(S)$ é *decidível* (recursivo) se existe um algoritmo que dada uma fórmula ϕ permite decidir se $\phi \in \mathrm{Th}(S)$. O conjunto S diz-se *completo* se para toda a fórmula fechada ϕ ou $S \models \phi$ ou $S \models \neg\phi$. Se S é recursivamente enumerável então $\mathrm{Th}(S)$ é recursivamente enumerável. Se S é recursivamente enumerável e completo então $\mathrm{Th}(S)$ é decidível. A teoria $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ duma álgebra $\mathcal{A}$ é o conjunto de todas as fórmulas fechadas ϕ, tal que $\mathcal{A} \models \phi$. Uma *axiomatização* duma álgebra $\mathcal{A}$ é um conjunto recursivo de fórmulas fechadas S, usualmente designadas por *axiomas*, tal que $\mathrm{Th}(S)$=$\mathrm{Th}(\mathcal{A})$. Então, se uma álgebra é *completamente axiomatizável* a sua teoria é decidível.
Duas álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são *elementarmente equivalentes* se para cada fórmula ϕ fechada, $\mathcal{A} \models \phi$ se e só se $\mathcal{B} \models \phi$.

Lema 2.16 *Seja S um conjunto fechado de fórmulas, que admite pelo menos um modelo, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) S é completa.

(ii) Quaisquer dois modelos de S são elementarmente equivalentes.

(iii) Para qualquer modelo $\mathcal{A}$ de S, tem-se que $Th(S)$=$Th(\mathcal{A})$.

Por abuso de linguagem, em vez de $\mathrm{Th}(S)$ designamos um conjnto de axiomas S por *teoria*. Associados a uma teoria será possível deduzir conjuntos de *regras de reescrita* que serão usados para demonstrar resultados sobre essa teoria.

Sistemas de reescrita sobre termos são usados extensivamente para resolver problemas que envolvem igualdades entre termos. Para um estudo detalhado, ver [DJ90].
De modo análogo, definem-se sistemas de reescrita em $\mathcal{L}$. Em particular, as fórmulas de $\mathcal{L}$ podem ser vistas como termos numa álgebra.

Definição 2.17 *Uma regra de reescrita em $\mathcal{L}$ é um par ordenado de fórmulas, denotado por $\phi_1 \mapsto \phi_2$. Uma fórmula ϕ* reescreve-se *numa fórmula ψ por uma regra de reescrita R, e diz-se que R aplica-se a ϕ, se uma das seguintes condições se verifica:*

(i) $\phi \mapsto \psi$ *é uma instância de* R

(ii) existe uma sub-fórmula ϕ' *de* ϕ, $\phi[\phi']$, *tal que* $\phi' \mapsto \psi'$ *é uma instância de* R *e* $\psi \equiv \phi[\psi']$

Uma fórmula ϕ reescreve-se *numa fórmula* ψ, *se* ϕ *se reescreve em* ψ *pela aplicação finita de regras de reescrita, isto é, se* $\phi \mapsto^\star \psi$ *onde* $\mapsto^\star$ *é o fecho reflexivo e transitivo da relação binária* $\mapsto$. *Um sistema de reescrita* $\mathcal{R}$ *é um conjunto de regras de reescrita sobre* $\mathcal{L}$. *Uma derivação em* $\mathcal{R}$ *é uma sequência* $\phi_1 \mapsto \phi_2 \mapsto \ldots$ *de aplicações de regras de reescrita de* $\mathcal{R}$. *Uma regra* R *é* correcta *em relação a uma álgebra* $\mathcal{A}$ *se* $\phi_1 \mapsto \phi_2$ *implica que* $\phi_1 \approx_{\mathcal{A}} \phi_2$. *Um sistema de reescrita* $\mathcal{R}$ *é* correcto *em relação a* $\mathcal{A}$ *se cada regra de* $\mathcal{R}$ *o for. Um sistema de reescrita* $\mathcal{R}$ termina *se não existir nenhuma derivação infinita* $\phi_1 \mapsto \phi_2 \mapsto \ldots$. *Uma fórmula* ϕ *é* irredutível *por* $\mathcal{R}$ *ou* fechada *para* $\mathcal{R}$, *se nenhuma regra* $R \in \mathcal{R}$ *se aplica a* ϕ. *Dado um conjunto de fórmulas* $\mathcal{C}$, *um conjunto de fórmulas* $\mathcal{FR}$, *e uma álgebra* $\mathcal{A}$, *um conjunto de regras* $\mathcal{R}$ *é* completo *em relação a* $\mathcal{FR}$ *(e* $\mathcal{C}$*) se* $\mathcal{R}$ *é correcto (em relação a* $\mathcal{A}$*) e para toda a fórmula* $\phi \in \mathcal{C}$ *existe* $\psi \in \mathcal{FR}$ *tal que* $\phi \mapsto^\star \psi$ *e* ψ *é fechada para* $\mathcal{R}$.[1]

A demonstração da correcção duma regra de reescrita R é simplificada notando-se que se $\mathcal{S}(\phi_1, \mathcal{A}) = \mathcal{S}(\phi_2, \mathcal{A})$ então, para qualquer $\psi \in \mathcal{L}$ e variáveis $\bar{z}$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\phi_1 \ \wedge \ \psi, \mathcal{A}) &= \mathcal{S}(\phi_2 \ \wedge \ \psi, \mathcal{A}) \\
\mathcal{S}(\phi_1 \ \vee \ \psi, \mathcal{A}) &= \mathcal{S}(\phi_2 \ \vee \ \psi, \mathcal{A}) \\
\mathcal{S}(\exists \bar{z}.\, \phi_1, \mathcal{A}) &= \mathcal{S}(\exists \bar{z}.\, \phi_2, \mathcal{A}) \\
\mathcal{S}(\neg \phi_1, \mathcal{A}) &= \mathcal{S}(\neg \phi_2, \mathcal{A})
\end{aligned}$$

Para a demonstração da terminação dos sistemas de reescrita serão necessárias as seguintes noções sobre relações de ordem e multiconjuntos ([DM79], [DJ90]).

Definição 2.18 *Dado um conjunto parcialmente ordenado* $(\mathcal{S}, \succeq)$, *um* multiconjunto *sobre* $\mathcal{S}$ *é uma aplicação* $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que o conjunto* $\{x \in \mathcal{S} : \mu(x) \neq 0\}$ *é finito. O multiconjunto* μ *é denotado normalmente, por um conjunto em que o elemento* x *ocorre* n *vezes, se* $\mu(x) = n$. *As operações sobre conjuntos estendem-se a multiconjuntos. A ordem parcial* $\succeq$ *em* $\mathcal{S}$ *pode-se estender ao conjunto de multiconjuntos de* $\mathcal{S}$, *e escreve-se* $X \ggcurly Y$, *se uma das seguintes condições se verifica:*

(i) $X = Y$;

[1] *Estas noções são usadas em [Com91] e [Com88] para obter algoritmos de decidibilidade de teorias.*

(ii) existem multiconjuntos Z e W de $\mathcal{S}$ com $\emptyset \neq Z \subseteq X$ tal que:

(a) $Y = (X - Z) \cup W$;

(b) $\forall w \in W, \exists z \in Z, z \succ w$;

Por exemplo, $\{3, 3, 4, 5\} \gg \{3, 4\}$ e $\{3, 3, 4, 5\} \gg \{2, 3, 3, 3, 3, 0\}$.

Dado um conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{S}, \succeq)$, pode-se estender $\succeq$ ao conjunto $\mathcal{S}^n$ de n-uplos de elementos de $\mathcal{S}$, considerando a ordem *lexicográfica*, $\succeq_n$ que se define por: $(s_1, \ldots, s_n) \succeq_n (s'_1, \ldots, s'_n)$ se

$$\forall\, 1 \leq k \leq n,\ s_k = s'_k \quad \text{ou} \quad \exists\, 1 \leq i \leq n,\ \forall\, 1 \leq k \leq i-1,\ s_k = s'_k \text{ e } s_i \succ s'_i$$

Um conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{S}, \succeq)$ é *bem-fundado* se não existe nenhuma sequência estritamente decrescente $s_1 \succ s_2 \succ \ldots$ de elementos de $\mathcal{S}$. Por exemplo, conjunto $(\mathbb{N}, >)$ é bem-fundado. O conjunto $(\mathcal{S}, \succeq)$ é bem-fundado se e só se a extensão $\gg$ a multiconjuntos de $\mathcal{S}$ é bem-fundado [DM79]. Analogamente, se o conjunto $(\mathcal{S}, \succeq)$ é bem-fundado, o conjunto $(\mathcal{S}^n, \succeq_n)$, também é bem-fundado. O seguinte teorema é habitualmente usado para provar a terminação de sistemas de reescrita [MN70]:

Teorema 2.19 *Um sistema de reescrita $\mathcal{R}$ sobre um conjunto de expressões $\mathcal{E}$ termina se e só se existe um conjunto bem-fundado $(\mathcal{W}, \succeq)$ e uma função $\tau : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{W}$ tal que:*

$$\forall e, e' \in \mathcal{E},\ e \mapsto e' \quad \textit{implica que} \quad \tau(e) \succ \tau(e')$$

Métodos para provar a terminação de sistemas de reescrita e propriedades das relações de ordem envolvidas, são estudados exaustivamente em [Der82] e [DJ90].

2.1.4 Árvores finitas, racionais e infinitas

Introduzimos nesta secção as álgebras que iremos considerar para a linguagem $\mathcal{L}$.

Seja $\mathbb{N}^\star$ o conjunto das sequências finitas de inteiros positivos munido com a operação concatenação e tendo, como elemento neutro a sequência vazia, denotada por ϵ. Um conjunto $D \subseteq \mathbb{N}^\star$ é *fechado para prefixos* se $\alpha\beta \in D$ implica que $\alpha \in D$; os seus elementos designam-se por *posições* ou *nós*. Se α é uma posição então $|\alpha|$ denota o seu comprimento. Seja F um conjunto dos símbolos de função e D um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}^\star$, fechado para prefixos.

Uma árvore sobre F é uma função $t : D \longrightarrow F$ tal que se f tem aridade n, então $t(\alpha) = f$ implica $\alpha i \in D$ se e só se $1 \leq i \leq n$. O domínio duma árvore t denota-se por $Dom(t)$. A posição ϵ é a *raiz* duma árvore. Uma sub-árvore duma árvore t na posição $\alpha \in D$ é a árvore $t\,|_\alpha: D' \longrightarrow F$ tal que $D' = \{\beta : \alpha\beta \in D\}$ e $t\,|_\alpha\,(\beta) = t(\alpha\beta)$. Se u é uma árvore $t[u]_\alpha$ é a árvore que se obtém substituindo $t\,|_\alpha$ por u em t. Uma árvore racional é uma árvore com um número finito de sub-árvores. Uma árvore finita é uma árvore cujo domínio é finito. O *tamanho* duma árvore t, $|t|$, define-se como o cardinal do domínio de t. Na Figura 2.1 são apresentados alguns exemplos de árvores.

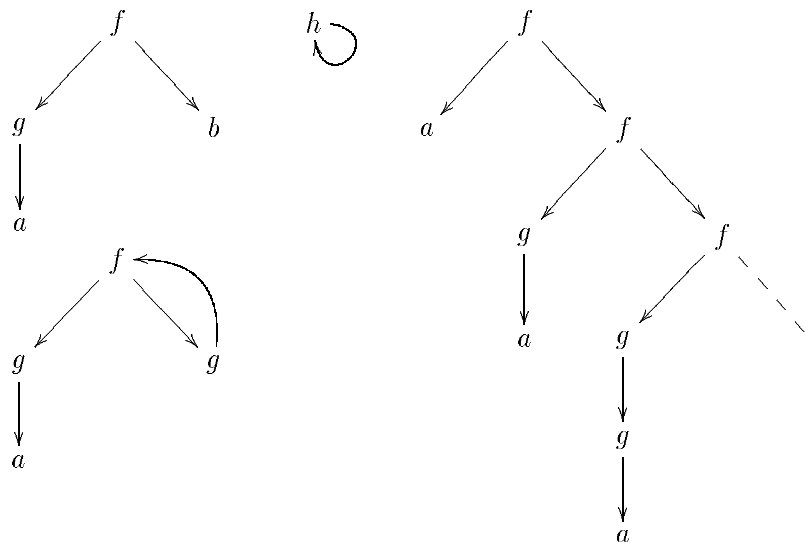


Figura 2.1: Exemplos de árvores sobre $\{f^2, g^1, a, b\}$.

Os termos podem ser considerados árvores finitas sobre $F = \Sigma \cup X$, onde os elementos de X são considerados símbolos de aridade 0. Uma árvore racional sobre $F = \Sigma \cup X$, denomina-se *termo racional*. Para as árvores finitas e racionais da Figura 2.1 temos respectivamente, da esquerda para a direita e de cima para baixo, os termos $f(g(a), b)$, $f(g(a), g(f(g(a), \ldots)))$ e $h(h(\ldots))$. A árvore da direita não é racional, uma vez que não tem um número finito de sub-árvores.

As *álgebras de árvores sobre* Σ são definidas por:

(i) o universo é conjunto das árvores sobre Σ;

(ii) para cada $f^n \in \Sigma$, define-se a função de aridade n, f que associa a n árvores $t_1, \ldots, t_n$

uma árvore $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ tal que $t(\epsilon) = f$ e $t(k\beta) = t_k(\beta)$ para $1 \leq k \leq n$

Note-se, que o os conjuntos das árvores infinitas, racionais e finitas são fechados para todo o $f^n \in \Sigma$. As álgebras correspondentes denotam-se por $\mathcal{IT}(F)$, $\mathcal{RT}(F)$ e $\mathcal{T}(F)$, respectivamente, e F será omitida sempre que coincidir com Σ. A $\mathcal{T}$ chama-se habitualmente o *Universo de Herbrand*.

Maher [Mah88] mostrou que as álgebras $\mathcal{T}$, $\mathcal{IT}$, e $\mathcal{RT}$ são completamente axiomatizáveis, e portanto, que as suas teorias são decidíveis.
Para cada uma das álgebras o problema é sub-dividido em dois casos consoante Σ é finito ou infinito. Mal'cev [Mal71] ao estudar axiomatizações completas para classes de álgebras localmente livres, tinha já proposto uma axiomatização do Universo de Herbrand que coincide com o que é hoje conhecido, na comunidade de programação em lógica, por teoria equacional de Clark [Cla78] e provado a sua decidibilidade. Kunen [Kun87] prova que a teoria equacional de Clark é completa para o caso de Σ ser infinito. Comon [CL89, Com88] obtém os mesmos resultados para o caso de Σ ser finito. Com base nos sistemas de reescrita que iremos apresentar (ver capítulo 5 e [DMV91]) e na eliminação de quantificadores, foi descrito em [DM91] um algoritmo para a satisfazibilidade de fórmulas do Universo de Herbrand com Σ infinito. Este algoritmo pode ser estendido para os restantes casos.

O esquema básico das demonstrações de decidibilidade da teoria duma álgebra $\mathcal{A}$ é o seguinte:

- estabelecer um conjunto (recursivo) de axiomas T tal que $\mathrm{Th}(T)$=$\mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

- definir uma classe de fórmulas $\mathcal{FR}$ para as quais é trivial decidir se pertencem a $\mathrm{Th}(T)$; as fórmulas de $\mathcal{FR}$ denominam-se *formas resolvidas*.

- determinar um conjunto de regras de reescrita, definidas a partir dos axiomas, que permitem transformar qualquer fórmula ϕ numa disjunção ψ de fórmulas $\phi' \in \mathcal{FR}$, e tal que $T \models \phi \Leftrightarrow \psi$, $(\phi \approx_T \psi)$. Procede-se por eliminação de quantificadores. Seja ϕ uma fórmula de $\mathcal{L}$. Qualquer que seja a álgebra $\mathcal{A}$, ϕ é equivalente a uma fórmula em forma prenex normal, $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n.\gamma$, onde γ não contém quantificadores. A fórmula γ pode ser transformada em forma normal disjuntiva onde as fórmulas de $\mathcal{FR}$ são consideradas fórmulas atómicas, isto é, $\gamma \approx_T \gamma_1 \lor \ldots \lor \gamma_m$. Se $Q_n \equiv \exists$ então $\exists x_n.\gamma \approx_T \exists x_n.\gamma_1 \lor \ldots \lor \exists x_n.\gamma_m$ e mostra-se que para cada i, $\exists x_n.\gamma_i \approx_T \phi_i$ onde ϕ_i

é uma fórmula de $\mathcal{FR}$. Se $Q_n \equiv \forall$ basta considerar $\exists x_n.\neg\gamma$ e no fim negar a fórmula obtida.

Na Tabela 2.1 apresentamos o conjunto de axiomas E_T que constituem uma axiomatização completa de $\mathcal{T}$ (Universo de Herbrand) para Σ infinito.

A1. Para todo o termo t, $t = t$

A2. Para todos os termos t e s, $t = s \;\Rightarrow\; s = t$

A3. Para todos os termos t, s e u, $(t = s \;\wedge\; s = u) \;\Rightarrow\; t = u$

A4. Para todo $f^n \in \Sigma$, $\forall\bar{x}\forall\bar{y}.\ f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \;\Leftrightarrow\; x_1 = y_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; x_n = y_n$

A5. Para todo $f^n, g^k \in \Sigma$, $f^n \not\equiv g^k$, $\forall\bar{x}\forall\bar{y}.\ f(\bar{x}) \neq g(\bar{y})$

A6. Para todo o termo t, $\forall x\ x \neq t[x]$, se $t[x]$ não coincide com x

---

Tabela 2.1: Axiomas das árvores finitas, E_T

Os axiomas da igualdade podiam ser omitidos porque estamos a considerar álgebras $\mathcal{A}$ onde o símbolo '=' é interpretado como a identidade em $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$. No entanto, estes axiomas são apresentados porque serão usados em regras de reescrita.

No caso de Σ ser finito, E_T não é completo. Por exemplo, se $\Sigma = \{a, b\}$, a fórmula $x \neq a \;\wedge\; x \neq b$ não é satisfazível em $\mathcal{T}(\Sigma)$ mas não se tem $E_T \models \forall x.\, x = a \;\vee\; x = b$. Para obter uma axiomatização completa é necessário mais um axioma, denominado *Axioma do Domínio Fechado* ($\mathcal{DCA}$):

$$\forall x \bigvee_{f^n \in \Sigma} \exists z_1, \ldots, z_n.\ x = f(z_1, \ldots, z_n)$$

onde se $n = 0$, f denota uma constante.

O conjunto $E_T \cup \{\mathcal{DCA}\}$ axiomatiza completamente o Universo de Herbrand para Σ finito, com pelo menos dois elementos[2].

Na Tabela 2.2 apresentamos o conjunto de axiomas E_{RT} que constituem uma axiomatização completa de $\mathcal{RT}$ para Σ infinito.

No Axioma A6 da Tabela 2.2, a expressão $\exists! x\ \phi$ é uma abreviatura de

$$\exists x\phi \;\wedge\; \forall x\forall y(\phi \;\wedge\; \phi[y/x] \;\Rightarrow\; x = y)$$

[2] Se Σ contém apenas uma constante ou um functor unário o resultado também é válido, mas o problema está em aberto para os restantes casos, [Mah88].

O quantificador $\exists!$ satisfaz a seguinte propriedade para quaisquer fórmulas ϕ e ψ de $\mathcal{L}$ e álgebra $\mathcal{A}$

$$(1) \qquad \forall\exists!\bar{x}\phi \,\wedge\, \forall\exists\bar{x}(\phi \,\wedge\, \psi) \models_{\mathcal{A}} \forall(\phi \,\Rightarrow\, \psi)$$

que será o usada nas próximas secções.

O Axioma A6 traduz a unicidade de solução das formas resolvidas racionais, como será exposto na secção seguinte.

No caso de Σ ser finito, com pelo menos um functor e outro símbolo, $E_{RT} \cup \{\mathcal{DCA}\}$ é uma axiomatização completa de $\mathcal{RT}$.

O facto de $\mathcal{IT}$ ser também um modelo de E_{RT} (ou, respectivamente, de $E_{RT} \cup \{\mathcal{DCA}\}$ quando $2 \leq |\Sigma| < \infty$) e as axiomatizações serem completas permitem concluir que $\mathcal{RT}$ e $\mathcal{IT}$ são elementarmente equivalentes.

A1. Para todo o termo t, $t = t$

A2. Para todos os termos t e s, $t = s \;\Rightarrow\; s = t$

A3. Para todos os termos t, s e u, $(t = s \,\wedge\, s = u) \;\Rightarrow\; t = u$

A4. Para todo $f^n \in \Sigma$, $\forall\bar{x}\forall\bar{y}.\ f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \;\Leftrightarrow\; x_1 = y_1 \,\wedge\, \ldots \,\wedge\, x_n = y_n$

A5. Para todo $f^n, g^k \in \Sigma$, $f^n \not\equiv g^k$, $\forall\bar{x}\forall\bar{y}.\ f(\bar{x}) \neq g(\bar{y})$

A6. Para toda a forma resolvida racional $\bar{x} = \bar{t}[\bar{x}]$, $\forall\exists!\bar{x}.\bar{x} = \bar{t}[\bar{x}]$

Tabela 2.2: Axiomas das árvores racionais, E_{RT}

2.1.5 Fórmulas Resolvidas para a Unificação

Vamos recordar um subconjunto de $\mathcal{L}$, vastamente estudado na literatura, e para esse sbconjunto apresentámos classes de fórmulas para o qual o problema da satisfazibilidadepara $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$ é trivialmente decidido.

Um *problema de unificação* numa álgebra $\mathcal{A}$ consiste em resolver uma conjunção e de equações $s_1 = t_1 \,\wedge\, \ldots \,\wedge\, s_n = t_n$, isto é, determinar se $\mathcal{A} \models \exists e$. No caso de $\mathcal{A} = \mathcal{T}$, uma fórmula em *forma resolvida* (ou, simplesmente, uma forma resolvida) é ou $\top$ ou uma conjunção de equações

$$x_1 = u_1 \,\wedge\, \ldots \,\wedge\, x_n = u_n$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis distintas e não ocorrem em nenhum u_j, para $1 \leq j \leq n$. É óbvio que uma forma resolvida é satisfazível. Para quaisquer que sejam os valores atribuídos por ρ às variáveis que ocorrem em u_i fazendo $\rho(x_i) = \rho(u_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$, obtém-se uma $\mathcal{T}$-solução. E vice-versa. Uma forma resolvida define uma substituição idempotente, chamada *unificador mais geral* (de e):

$$\theta = \{u_1/x_1, \ldots, u_n/x_n\}$$

tal que $s_i\theta \equiv t_i\theta$ e, para toda a substituição σ, se $s_i\sigma \equiv t_i\sigma$ (unificador) então θ é mais geral que σ. Se σ atribui valores em $\mathcal{T}$ (termos fechados), então todas as soluções de e podem ser obtidas a partir duma forma resolvida. Qualquer conjunto de equações e pode ser transformado numa forma resolvida ϕ, tal que $e \approx_{\mathcal{T}} \phi$, se for satisfazível, ou em $\perp$, caso contrário [Her30, LMM87]. A fórmula ϕ é única a menos duma relação de equivalência definida entre variáveis $x_i, y_i \in Vars(e)$ tais que $x_i = y_i$ pertence a ϕ. Um estudo exaustivo sobre a unificação no Universo de Herbrand é apresentado em [LMM87]. No caso de $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, dado que uma equação do tipo $x = t[x]$ tem soluções, uma *forma resolvida racional* é ou $\top$ ou uma conjunção de equações

$$x_1 = t_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ x_n = t_n$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são variáveis distintas e se para qualquer i, t_i é variável então x_i ocorre uma só vez na fórmula [Com91, Mah88]. A última condição garante a não existência de ciclos de variáveis da forma

$$x_1 = x_2 \ \wedge \ x_2 = x_3 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ x_{m-1} = x_m \ \wedge \ x_m = x_1$$

Cada forma resolvida define um único unificador mais geral

$$\theta = \{r_1/x_1, \ldots, r_n/x_n\}$$

onde $(r_1, \ldots, r_n)$ é um n-tuplo de árvores racionais sobre $\mathcal{RT}(\Sigma \cup V)$ onde $V = Vars(e) \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, e cada $\mathcal{RT}$-solução ρ satisfaz $\rho(x_i) = \rho(r_i)$[3], isto é, existe uma atribuição de variáveis ρ' tal que $\rho = \rho'\theta$. Em particular, se $t_i \in \mathcal{T}(\Sigma \cup \{x_1, \ldots, x_n\})$ e $x_i \not\equiv t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, então $x_1 = t_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ x_n = t_n$, ou abreviando, $\bar{x} = \bar{t}$ tem uma única solução em

[3] Onde $\rho(r_i)$ corresponde à árvore que se obtém aplicando ρ às variáveis de r_i.

$\mathcal{RT}(\Sigma)$. E, inversamente, toda a árvore racional pode ser solução dum sistema de equações dessa forma, [Cou83].

Como no caso das árvores finitas, existe um algoritmo que transforma qualquer conjunção de equações e numa forma resolvida ϕ, tal que $e \approx_{\mathcal{RT}} \phi$, se e for satisfazível, ou em $\perp$, caso contrário [Hue76].

Em implementações da programação em lógica a unificação de termos é feita sem a regra de verificação de ocorrências (Axioma A6 de E_T) o que levou a considerar árvores racionais, cuja semântica foi estudada por Colmerauer [Col94] para sistemas de equações e desigualdades, isto é, negações de equações.

Quando se introduzem desigualdades e no caso do universo da álgebra $\mathcal{A}$ ser infinito, é especialmente relevante a propriedade da *Independência das Desigualdades*, que é caracterizada pelo seguinte lema:

Lema 2.20 *Seja* $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ *ou* $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$ *e* $|\mathcal{U}_{\mathcal{A}}| = \infty$. *Sendo* e *uma conjunção de equações e* $\mathrm{d_i}$ *desigualdades,* $1 \leq \mathrm{i} \leq n$,

$$\mathrm{e} \wedge \mathrm{d_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d_n}$$

tem solução em $\mathcal{A}$ *se e só se para cada* i, *a conjunção* $\mathrm{e} \wedge \mathrm{d_i}$ *é satisfazível em* $\mathcal{A}$.

Esta propriedade permite testar duma maneira simples a satisfazibilidade dum sistema de equações e desigualdades. O lema foi estudado e generalizado por vários autores ([LMM87], [Com88] e [LM90]) e em especial por Maher, como um lema preparatório para a demonstração axiomatização completa de $\mathcal{T}$ e $\mathcal{RT}$ [Mah88]. No contexto da Programação em Lógica com Restrições, em [LM90] esta propriedade é generalizada e investigada para restrições negativas.

A noção de forma resolvida é ainda usada noutras classes de álgebras para estudar o problema da satisfazibilidade. Um exemplo são as álgebras quociente $\mathcal{T}/_{=_E}$, onde E um conjunto finito de equações [Com91].

Formas Resolvidas para E_T e E_{RT}

Considerando as formas resolvidas para a unificação podemos obter as classes de fórmulas $\mathcal{FR}$ usadas para estabelecer a decidibilidade de E_T e E_{RT}. Vamos apenas referir as usadas por Maher em [Mah88]. Dada uma forma resolvida para a unificação seja uma *forma básica* a fórmula obtida quantificando existêncialmente as variáveis que ocorrem no lado direito das equações. Uma forma resolvida é uma conjunção booleana de formas básicas.

2.2 Linguagens $\mathcal{L}_{C_0}$, $\mathcal{L}_C$ e $\mathcal{L}_U$

Nesta secção definiremos três linguagens apropriadas para o estudo do problema da satisfazibilidade em $\mathcal{L}$. As linguagens são $\mathcal{L}_{C_0}$, $\mathcal{L}_C$ e $\mathcal{L}_U$. As fórmulas destas linguagens serão denominadas *restrições*. Para $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, as linguagens $\mathcal{L}_{C_0}$ e $\mathcal{L}_C$ são equivalentes e equivalentes a $\mathcal{L}$ no sentido em que para qualquer fórmula duma das linguagens existe uma fórmula nas outras duas que é equivalente em $\mathcal{A}$. A linguagem $\mathcal{L}_U$ é um subconjunto da linguagem $\mathcal{L}_C$ que é suficiente para o estudo satisfazibilidade em $\mathcal{L}$, para $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$. Esta linguagem apresenta também muitas similitudes com as linguagens usadas nas teorias de árvores de atributos, como será estudado no Capítulo 3.

2.2.1 Linguagens $\mathcal{L}_{C_0}$ e $\mathcal{L}_C$

As linguagens $\mathcal{L}_{C_0}$ e $\mathcal{L}_C$, a seguir apresentadas, diferem da linguagem $\mathcal{L}$ pela introdução de *caminhos* que permitirão trabalhar com fórmulas sem quantificadores, mais apropriadas para manipulação computacional. Informalmente, os *caminhos* permitem a referência a um qualquer sub-termo dum termo sem a necessidade de introduzir expressamente variáveis adicionais quantificadas existencialmente. A introdução de caminhos conduz a uma representação compacta e à manipulação de termos com "informação parcial" sobre os seus sub-termos. Uma representação análoga foi usada por Kunen em [Kun87].

Associamos a Σ o conjunto $\Pi(\Sigma) = \{f_i^n \mid f^n \in \Sigma \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$. Os caminhos são sequências finitas de elementos de $\Pi(\Sigma)$. A cada árvore podemos associar um subconjunto de sequências, eventualmente infinitas, de elementos de $\Pi(\Sigma)$. Uma árvore finita t pode ser descrita pelo conjunto dos seus *ramos* (caminhos maximais)[4] do seguinte modo:

$$\begin{aligned}\Pi(t) \quad = \quad & \{\tau^1_{i_1} \ldots \tau^n_{i_n}\tau \mid \text{ onde } \tau \text{ é uma constante, } i_1 i_2 \ldots i_n \text{ pertence ao domínio} \\ & \text{de } t \text{ e } t(i_1 i_2 \ldots i_{j-1}) = \tau^j \in \Sigma \text{ para todo o } 1 \leq j \leq n\}\end{aligned}$$

[4]Um caminho p é maximal numa árvore t, se é um caminho em t e não existe $q \in \Pi(\Sigma)$ tal que $q \neq \epsilon$ e pq seja um caminho em t. A designação de *ramos* corresponde à de *branches* em inglês, usada por exemplo em [Cou83].

Analogamente, podemos caracterizar as árvores racionais e infinitas, considerando a linguagem $\Pi_\omega(t)$ de caminhos infinitos, ou a linguagem $\Pi_p(t)$ de todos os prefixos finitos de elementos de $\Pi_\omega(t) \cup \Pi(t)$ [Cou83]. Em particular, uma árvore t é racional se e só se $\Pi_p(t)$ é regular. A noção de *ramo* pode ser estendida ao conjunto dos termos, considerando os árvores finitas sobre $\Sigma \cup X$.

Seja X o conjunto de variáveis , Σ o conjunto de símbolos de função e $\Pi(\Sigma)$ como acima. Definimos os *termos* $t, t', t_0, \ldots$, os *caminhos* $p, p', q, p_0, \ldots$, os *valores* $v, v', v_0, \ldots$ e as *restrições* $c, c', c_0, \ldots$ da linguagem $\mathcal{L}_{C_0}$ pela seguinte gramática em notação (semelhante à) de Backus-Naur (*BNF*):

$$
\begin{array}{rcll}
t & ::= & x & x \in X \\
  & | & f(t_1, \ldots, t_n) & f^n \in \Sigma \\
p & ::= & \epsilon & \\
  & | & pf_i^n & n > 0,\ 1 \leq i \leq n \\
v & ::= & t & \\
  & | & t.p & \\
c & ::= & v.f^n & n > 0 \\
  & | & v \doteq v & \\
  & | & \top & \\
  & | & \bot & \\
  & | & \neg c & \\
  & | & c \wedge c & \\
  & | & c \vee c &
\end{array}
$$

As restrições da forma $v.f^n$, $v \doteq v$, $\top$ e $\bot$ são designadas *restrições atómicas* (positivas) e a negações $\neg v.f^n$ e $\neg v \doteq v$, *restrições atómicas negativas.*

Intuitivamente, e considerando a correspondência entre caminhos e posições (e entre termos e árvores), um valor da forma $t.p$ é o sub-termo de t na "posição" p e uma restrição da forma $t.p.f^n$ indica que o termo t tem na "posição" p um sub-termo com functor f^n. Por exemplo, sendo t o termo $f(a, g(b, c))$ as seguintes restrições são satisfeitas $t.f^2$, $t.f_2^2.g^2$ ou $t.f_1^2 \doteq a$.

Em vez de introduzir uma axiomatização ou uma álgebra para a linguagem $\mathcal{L}_{C_0}$, consideramos cada restrição c como uma abreviatura de fórmulas em $\mathcal{L}$. Por exemplo, temos as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned}
f(x,a).f_1^2.g^1 &\longrightarrow \exists z_1 z_2.\, f(x,a) = f(g(z_1), z_2) \\
x.f_2^2 g_1^2 \doteq y &\longrightarrow \exists z_1 z_2.\, x = f(z_1, g(y, z_2)) \\
x.f_1^2 \doteq y.g_1^2 h_1^1 &\longrightarrow \exists z_1 z_2 z_3.\, x = f(z_1, z_2) \ \wedge\ y = g(h(z_1), z_3)
\end{aligned}$$

Para definir estas abreviaturas são necessárias as duas noções a seguir introduzidas.

Definição 2.21 *O* comprimento $|p|$ *dum caminho* p*, é definido inductivamente na estrutura de* p*:*

(i) $|\epsilon| = 0$

(ii) $|pf_i^n| = 1 + |p|$

Definição 2.22 *Sendo* p *um caminho e* t *um termo, o termo* $\pi(p,t)$*, expansão de* p *em* t*, é definido, a menos de renomeação de variáveis, por indução na estrutura de* p*:*

(i) $\pi(\epsilon, t) = t$*;*

(ii) $\pi(f_i^n p, t) = f(z_1, \ldots, z_{i-1}, \pi(p,t), z_{i+1}, \ldots, z_n)$ *onde* $z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n$ *são variáveis que não ocorrem em* $\pi(p,t)$*.*

É fácil ver, por indução no comprimento de p, que se t for um termo então $\pi(p,t)$ é um termo.

Definição 2.23 *As restrições de* $\mathcal{L}_{C_0}$ *da forma* $v.f^n$ *e* $v \doteq v$ *são definidas como abreviaturas* *de fórmulas em $\mathcal{L}$, por indução na estrutura de v:*

$$
\begin{array}{rcl}
t.f^n & \equiv & \exists z_1, \ldots, z_n.\ t = f(z_1, \ldots, z_n); \\
t.p.f^n & \equiv & \exists z_1, \ldots, z_m.\ t = \pi(p, f(z_1, \ldots, z_n)) \\
 & & \textit{onde } m \geq n \textit{ e os } z_i \textit{ para } i > n \textit{ correspondem às variáveis} \\
 & & \textit{introduzidas por } \pi; \\
t_1 \doteq t_2 & \equiv & t_1 = t_2 \textit{ para todos os termos } t_1 \textit{ e } t_2; \\
t_1.p \doteq t_2 & \equiv & \exists z, z_1, \ldots, z_m.\ t_1 = \pi(p, z) \ \wedge \ z = t_2 \\
 & & \textit{onde } z_1, \ldots, z_m \textit{ são as variáveis introduzidas por } \pi; \\
t_2 \doteq t_1.p & \equiv & t_1.p \doteq t_2; \\
t_1.p \doteq t_2.q & \equiv & \exists z_1, \ldots, z_m.\ t_1 = \pi(p, z_1) \ \wedge \ t_2 = \pi(q, z_1) \\
 & & \textit{sendo } z_2, \ldots, z_m \textit{ as variáveis introduzidas pelas expansões de } p \textit{ e } q.
\end{array}
$$

Com estas definições é evidente que a cada restrição de $\mathcal{L}_{C_0}$ corresponde uma fórmula de $\mathcal{L}$. Sempre que v e v' sejam termos escrevemos $v = v'$ em vez de $v \doteq v'$.

Nestas definições, e no que se segue, usamos o seguinte teorema da lógica de 1ª ordem com igualdade:

Teorema 2.24 *Seja $\phi[t/z]$ a fórmula que resulta de ϕ substituindo todas as ocorrências de z por t. Se z não ocorre em t, então*

$$\vdash \phi[t/z] \Leftrightarrow \exists z.\ \phi \ \wedge \ z = t$$

As noções de ocorrência livre de variáveis, conjunto de variáveis $Vars(c)$ e substituição de $\mathcal{L}$ são definidas analogamente em $\mathcal{L}_{C_0}$.

O principal resultado que iremos apresentar será que qualquer fórmula de $\mathcal{L}$ é equivalente a uma restrição de $\mathcal{L}_{C_0}$, quando se consideram as álgebras das árvores finitas, racionais ou infinitas. Sempre que necessário será feita a distinção entre os casos de Σ ser infinito ou finito.

Lema 2.25 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, para toda a variável x, functor f^n, termos t_i, para*

$1 \leq i \leq n$, e caminho p, tem-se:

$$(1) \qquad \mathcal{A} \models x = f(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} x.f_i^n \doteq t_i \qquad n > 0$$

$$(2) \qquad \mathcal{A} \models x.p \doteq f(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} x.pf_i^n \doteq t_i \qquad n > 0$$

Dem. 1 Basta provar as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models x = f(t_1, \ldots, t_n) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists z_1, \ldots, z_n.\ x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{n} z_i = t_i \\ & \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{i=1}^{n} (\exists z_1, \ldots, z_n.\ x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ z_i = t_i) \\ & \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{i=1}^{n} x.f_i^n \doteq t_i \end{aligned}$$

onde $z_1, \ldots, z_n \notin \bigcup_{i=1}^{n} Vars(t_i) \cup \{x\}$. A primeira equivalência resulta do facto da igualdade ser interpretada como a identidade em $\mathcal{A}$. A terceira resulta da definição das restrições com caminhos. Na segunda,

($\Rightarrow$)
É evidente.

($\Leftarrow$)
Seja ρ uma atribuição de variáveis tal que

$$\mathcal{A} \models_\rho \bigwedge_{i=1}^{n} (\exists z_1, \ldots, z_n.\ x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ z_i = t_i)$$

Para cada i existe uma atribuição de variáveis ρ_i que difere de ρ nos valores atribuídos às variáveis de $\bar{z}$ e tal que $\mathcal{A} \models_{\rho_i} x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ z_i = t_i$. Basta ver que ρ_i é a mesma (única) para todos os i. Seja $\rho(x) = t_x$. Por construção sabemos que $t_x[k] = \rho(t_k)$, donde $\rho_i(z_k) = \rho(t_k)$ para todo $1 \leq k \leq n$, o que prova que existe uma única extensão ρ' de ρ a $\bar{z}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{\rho'} x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{n} z_i = t_i$$

Equivalentemente, os Axiomas A4 e A5 das árvores (finitas ou racionais) garantem a unicidade de ρ'.

2 Se $p = \epsilon$ resulta da alínea anterior. Caso contrário, seja

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A} \models x.p \doteq f(t_1, \ldots, t_n) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \exists z_1, \ldots, z_m.\ x = \pi(p, f(z_1, \ldots, z_n)) \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{n} z_i = t_i,\ m \geq n \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{i=1}^{n} (\exists z_1, \ldots, z_m.\ x = \pi(p, f(z_1, \ldots, z_n)) \ \wedge \ z_i = t_i) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{i=1}^{n} (\exists z_1, \ldots, z_m.\ x = \pi(p, f(z_1, \ldots, t_i, \ldots, z_n)) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \exists z_1, \ldots, z_m.\ x = \pi(pf_i^n, t_i) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \bigwedge_{i=1}^{n} x.pf_i^n \doteq t_i
\end{aligned}$$

Falta apenas ver que com a apropriada renomeação de variáveis:

$$\pi(pf_i^n, t_i) = \pi(p, f(z_1, \ldots, t_i, \ldots, z_n))$$

Por indução na estrutura de p, ou equivalentemente no comprimento de p, $|p|$:

$$\pi(\epsilon f_i^n, t_i) = \pi(f_i^n, t_i) = f(z_1, \ldots, t_i, \ldots, z_n) = \pi(\epsilon, f(z_1, \ldots, t_i, \ldots, z_n))$$

Supondo $p = g_j^k q$ com $|q| \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\pi(pf_i^n, t_i) &= \pi(g_j^k q f_i^n, t_i) = g(z_{i_1}, \ldots, \pi(qf_i^n, t_i), \ldots, z_{i_k}) \\
&= g(z_{i_1}, \ldots, \pi(q, f(z_1, \ldots, t_i, \ldots, z_n)), \ldots, z_{i_k}) \\
&= \pi(g_j^k q, f(z_1, \ldots, t_i, \ldots, z_n)) \\
&= \pi(p, f(z_1, \ldots, t_i, \ldots, z_n))
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.26 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$ e dado um termo t, uma variável x e um caminho q, tem-se que $\mathcal{A} \models x.q \doteq t \ \Leftrightarrow \ c'$ onde c' é uma conjunção de restrições da forma $x.p \doteq v$ onde v é uma constante ou uma variável que ocorre em t. O número de restrições atómicas é igual ao número de ramos de t e o comprimento de cada caminho é igual ao comprimento de q mais o comprimento de cada ramo de t menos um.*

Dem. Provamos por indução no tamanho $|t|$ de t.

Base. Se $|t| = 1$ então t é uma variável ou uma constante; em ambos os casos v é t e c' é $x.q \doteq v$. O número de ramos de t é 1, o número de restrições atómicas é 1 e $|q| = |q| - (1 - 1)$.

Indução. Suponhamos que o lema válido para todo o termo cujo tamanho é menor que k e seja $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ tal que $|t| = k$. Pelo Lema 2.25,

$$\mathcal{A} \models x.q \doteq f(t_1, \ldots, t_n) \;\Leftrightarrow\; \bigwedge_{i=1}^{n} x.qf_i^n \doteq t_i$$

Por hipótese de indução cada restrição $x.qf_i^n \doteq t_i$ é equivalente a uma conjunção de restrições da forma $x.p \doteq v$, com v uma variável ou uma constante. Se r_i for o número de ramos para cada t_i, então t tem $\sum_{i=1}^{n} r_i$ ramos e, usando a hipótese de indução, esse é o número de restrições atómicas resultantes. Como cada ramo de t é obtido de um ramo de t_i concatenando f_i^n, usando a hipótese de indução, obtém-se que o comprimento de cada caminho é igual ao comprimento de q mais o comprimento de cada ramo de t menos um.

$\square$

Utilizando a Proposição 2.26 e o Lema 2.25, podemos restringir-nos a um subconjunto de restrições de $\mathcal{L}_{C_0}$, onde não ocorrem termos complexos. Seja $\mathcal{L}_C$ esse subconjunto e X e Σ como habitualmente. Definimos os *caminhos*, os *valores* e as *restrições* de $\mathcal{L}_C$ pela seguinte gramática em *BNF*:

$$\begin{array}{rcll}
p & ::= & \epsilon & \\
 & | & pf_i^n & n > 0,\ 1 \leq i \leq n \\
v & ::= & x.p & \\
 & | & a & \\
c & ::= & v.f^n & n > 0 \\
 & | & v \doteq v & \\
 & | & \perp & \\
 & | & \top & \\
 & | & \neg c & \\
 & | & c \,\wedge\, c & \\
 & | & c \,\vee\, c &
\end{array}$$

Lema 2.27 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$. Para todo o valor v de $\mathcal{L}_C$, functores $f^n, g^k \in \Sigma$, caminho p e termos t_i, para $1 \leq i \leq n$, tem-se que:*

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{A} & \models & f(t_1,\ldots,t_n).f_i^n p \doteq v \;\Leftrightarrow\; t_i.p \doteq v \\
\mathcal{A} & \models & f(t_1,\ldots,t_n).g_i^k p \doteq v \;\Leftrightarrow\; \perp \qquad \textit{se } f^n \not\equiv g^k \\
\mathcal{A} & \models & f(t_1,\ldots,t_n).f_i^n p.f^n \;\Leftrightarrow\; t_i.p.f^n \\
\mathcal{A} & \models & f(t_1,\ldots,t_n).g_i^k p.f^n \;\Leftrightarrow\; \perp \qquad \textit{se } f^n \not\equiv g^k
\end{array}
$$

Dem. As equivalências resultam directamente das definições das restrições e dos Axiomas A4 e A5 para $E_{\mathcal{A}}$. Vamos supor que v é um termo t. O caso de v ser da forma $t.p$ prova-se de maneira análoga atendendo à definição das restrições.

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \models f(t_1,\ldots,t_n).f_i^n p \doteq t} \\
\Leftrightarrow & \exists z_1,\ldots,z_m.\ f(t_1,\ldots,t_n) = f(z_1,\ldots,\pi(p,z_i),\ldots,z_n) \ \wedge\ z_i = t \\
\Leftrightarrow & \exists z_1,\ldots,z_m.\ t_1 = z_1 \ \wedge\ \ldots \ \wedge\ t_i = \pi(p,z_i) \ \wedge\ \ldots \ \wedge\ t_n = z_n \ \wedge\ z_i = t \\
\Leftrightarrow & \exists z_i, z_{n+1},\ldots,z_m.\ (t_i = \pi(p,z_i) \ \wedge\ z_i = t) \ \wedge \\
 & \exists z_1,\ldots,z_{i-1},z_{i+1},\ldots,z_n.\ (z_1 = t_1 \ \wedge\ \ldots \ \wedge\ z_n = t_n) \\
\Leftrightarrow & t_i.p \doteq t
\end{array}
$$

A segunda equivalência resulta do Axioma A4 de $E_{\mathcal{A}}$; a quarta resulta do facto de que $\exists z_1,\ldots,z_{i-1},z_{i+1},\ldots,z_n.\ z_1 = t_1 \ \wedge\ \ldots \ \wedge\ z_n = t_n$, com $z_i \notin \cup_{i=1}^{n} Vars(t_i)$ e distintos, ser uma tautologia em $\mathcal{A}$.

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\mathcal{A} \models f(t_1,\ldots,t_n).g_i^k p \doteq t} \\
\Leftrightarrow & \exists z_1,\ldots,z_m.\ f(t_1,\ldots,t_n) = g(z_1,\ldots,\pi(p,z_i),\ldots,z_k) \ \wedge\ z_i = t \\
\Leftrightarrow & \perp
\end{array}
$$

pelo Axioma A5 de $E_{\mathcal{A}}$.

Analogamente se provam as outras duas equivalências. $\square$

O Lema 2.27 garante que as seguintes regras de reescrita para valores, são correctas para $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$:

$$
\begin{array}{lll}
f(t_1,\ldots,t_n).f_i^n p & \mapsto & t_i.p \\
f(t_1,\ldots,t_n).g_i^k p & \mapsto & \omega, \text{ se } f^n \not\equiv g^k
\end{array}
$$

onde ω é uma constante especial que, indica que a restrição onde ocorre é equivalente a $\perp$. Temos, então o seguinte teorema:

Teorema 2.28 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, é possível transformar qualquer restrição $c \in \mathcal{L}_{C_0}$ numa restrição $c' \in \mathcal{L}_C$, tal que $\mathcal{A} \models c \Leftrightarrow c'$.*

Dem. É evidente que $\mathcal{L}_C \subset \mathcal{L}_{C_0}$. Qualquer restrição $c \in \mathcal{L}_{C_0}$ reduz-se a uma restrição $c' \in \mathcal{L}_C$ usando as seguintes regras de reescrita:

L1. $f(t_1, \ldots, t_n) = f(u_1, \ldots, u_n) \mapsto t_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge t_n = u_n$

L2. $f(t_1, \ldots, t_n) = g(u_1, \ldots, u_k) \mapsto \perp$, se $f^n \not\equiv g^k$

L3. $x.p \doteq f(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \bigwedge_{i=1}^{n} x.pf_i^n \doteq t_i$ se $n > 0$

L4. $f(t_1, \ldots, t_n).f_i^n p \mapsto t_i.p$

L5. $f(t_1, \ldots, t_n).g_i^k p \mapsto \omega$, se $f^n \not\equiv g^k$

L6. $f(t_1, \ldots, t_n).f^n \mapsto \top$

L7. $f(t_1, \ldots, t_n).g^k \mapsto \perp$, se $f^n \not\equiv g^k$

L8. $\omega.f^n \mapsto \perp$

L9. $v \doteq v' \mapsto \perp$, se v ou v' é ω

As regras L1 e L2 correspondem a axiomas de $E_{\mathcal{A}}$ e portanto são correctas em $\mathcal{A}$. A regra L3 é correcta pelo Lema 2.25 e as regras L4 a L9 pelo Lema 2.27. Para todas as regras o número de termos complexos que ocorrem na restrição do lado direito é menor do que o número de termos complexos que ocorrem na restrição do lado esquerdo e cada regra só pode ser aplicada um número finito de vezes. Se nenhuma regra se aplicar a restrição pertence a $\mathcal{L}_C$. $\square$

Lema 2.29 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$ e v, v' e v'' valores de $\mathcal{L}_C$,*

$$\mathcal{A} \models v' \doteq v \wedge v'' \doteq v \Leftrightarrow v' \doteq v \wedge v' \doteq v''$$

Dem. Se v, v', v'' são termos o lema resulta da simetria e transitividade da igualdade. Os restantes casos são todos semelhantes e, portanto, apenas analisaremos um:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models x.p \doteq a \ \wedge \ y.q \doteq a \quad & \Leftrightarrow \quad \exists \bar{z}.\ (x = \pi(p, a)) \ \wedge \ \exists \bar{w}.\ (y = \pi(q, a)) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists z_0 \bar{z} \bar{w}.\ x = \pi(p, z_0) \ \wedge \ y = \pi(q, z_0) \ \wedge \ z_0 = a \\
& \Leftrightarrow \quad \exists z_0 \bar{z} \bar{w}.\ (x = \pi(p, z_0) \ \wedge \ y = \pi(q, z_0)) \ \wedge \\
& \qquad\ \ \exists z_0 \bar{z}.\ (x = \pi(p, z_0) \ \wedge \ z_0 = a) \\
& \Leftrightarrow \quad x.p \doteq y.q \ \wedge \ x.p \doteq a
\end{aligned}$$

onde a terceira equivalência resulta, como na demonstração do Lema 2.25, do facto de que se $\mathcal{A} \models_\rho \exists z_0 \bar{z} \bar{w}.\ x = \pi(p, z_0) \ \wedge \ y = \pi(q, z_0) \ \wedge \ z_0 = a$ e $z_0, \bar{z}, \bar{w}$ são distintas de x e y, então existe um única extensão de ρ a $z_0 \ \cup \ \{\bar{z}\} \ \cup \ \{\bar{w}\}$, ρ', tal que $\mathcal{A} \models_{\rho'} x = \pi(p, z_0) \ \wedge \ y = \pi(q, z_0) \ \wedge \ z_0 = a$. $\square$

Teorema 2.30 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, para cada fórmula de $E_\mathcal{A}$ existe uma restrição de $\mathcal{L}_C$ equivalente.*

Dem. Maher [Mah88] provou que qualquer fórmula em $E_\mathcal{A}$ é equivalente a uma combinação booleana de fórmulas básicas e uma fórmula básica é satisfazível a menos que seja equivalente a $\bot$. Em particular, se uma fórmula de $E_\mathcal{A}$ é fechada, ela é equivalente a $\top$ ou $\bot$. Então, basta ver que cada fórmula básica é equivalente a uma fórmula em $\mathcal{L}_C$. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$. Neste caso, as fórmulas básicas são da forma:

$$\exists u_1, \ldots, u_m.\ x_1 = t_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ x_n = t_n \ \wedge \ u_1 = r_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ u_p = r_p$$

onde $\bar{u}$ e $\bar{x}$ são conjuntos disjuntos de variáveis, a conjunção de equações está em forma resolvida racional e $p \leq m$. Sem falta de generalidade, pode-se considerar que as únicas variáveis que ocorrem em t_i, $1 \leq i \leq n$, e em r_j, $1 \leq j \leq, p$, são os u_k, $1 \leq k \leq m$. Pelo Lema 2.25, cada equação pode ser substituída por uma conjunção de restrições da forma $x_i.p_{i_l} \doteq v_l$ ou $u_j.p_{j_m} \doteq v_m$, onde cada v_i é uma constante ou uma variável u_k. Seja c_x a conjunção das restrições da primeira forma e c_u a conjunção das restrições da segunda forma. Em c_x aplique-se, enquanto possível, a seguinte regra de reescrita:

LC1. $x.p \doteq u_k \ \wedge \ y.q \doteq u_k \ \mapsto \ x.p \doteq y.q \ \wedge \ x.p \doteq u_k$

O número de aplicações desta regra é finito, porque de cada vez diminui a ocorrência de restrições da forma $x.p \doteq u_k$. Seja c a restrição resultante, pelo Lema 2.29 tem-se que $\mathcal{RT} \models c_x \Leftrightarrow c$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathcal{RT} &\models \exists u_1, \ldots, u_m.\ x_1 = t_1 \ \wedge\ \ldots\ \wedge\ x_n = t_n \ \wedge\ u_1 = r_1 \ \wedge\ \ldots\ \wedge\ u_p = r_p \\
&\Leftrightarrow \exists u_1, \ldots, u_m.\ c \ \wedge\ c_u \\
&\Leftrightarrow \exists u_1, \ldots, u_m.\ c \ \wedge\ \exists u_1, \ldots, u_m.\ c_u \\
&\Leftrightarrow \exists u_1, \ldots, u_m.\ c \\
&\Leftrightarrow c'
\end{aligned}$$

A segunda equivalência é válida uma vez que $\exists u_1, \ldots, u_m.\ c_u$, é equivalente a $\top$, porque é equivalente a uma fórmula básica fechada. Para eliminar os quantificadores em $\exists u_1, \ldots, u_m.\ c$, e dado que cada u_k ocorre no máximo uma vez em c, basta aplicar para cada um, uma das seguintes regras de reescrita:

LC2. $\exists u\ x.pf_i^n \doteq u \ \mapsto\ x.p.f^n$

LC3. $\exists u\ x = u \ \mapsto\ \top$

LC4. $\exists u\ c \ \mapsto\ c$ se u não ocorre em c

Estas regras são correctas e aplicam-se um número finito de vezes. Seja c' a restrição resultante e, por construção, $c' \in \mathcal{L}_C$.

No caso de $\mathcal{A} = \mathcal{T}$, as formas básicas são da forma:

$$\exists u_1, \ldots, u_m.\ x_1 = t_1 \ \wedge\ \ldots\ \wedge\ x_n = t_n$$

onde o conjunto de equações está em forma resolvida e os u_i, $1 \leq i \leq m$, são as variáveis que ocorrem nos t_j, $1 \leq j \leq n$. Basta, então, substituir cada equação por uma conjunção de restrições da forma $x_i.p_{i_l} \doteq v_l$, onde v_l é uma constante ou uma variável u_k, $1 \leq k \leq m$. Usando-se primeiro a regra (LC1) e depois as regras (LC2)-(LC4) obtém-se uma restrição $c' \in \mathcal{L}_C$ equivalente à forma básica dada. $\square$

Em aplicações práticas, pode interessar transformar uma fórmula $\phi \in \mathcal{L}$ numa restrição $c \in \mathcal{L}_C$ sem a prévia obtenção da combinação booleana de formas básicas equivalente a ϕ. Usando a linguagem $\mathcal{L}_U$, a seguir introduzida, e resultados do Capítulo 4 é possível obter essa transformação. Para o caso de $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, uma nova demonstração do Teorema 2.30 é apresentada no Apêndice A.

2.2.2 Linguagem $\mathcal{L}_U$

Embora as linguagens das secções anteriores pudessem ser usadas directamente para o estudo das propriedades relacionadas com o problema da satisfazibilidade das restrições, em $\mathcal{T}$ ou $\mathcal{RT}$, é suficiente considerar um seu subconjunto, que designaremos por linguagem de restrições unitária, $\mathcal{L}_U$. Em particular, esta linguagem terá muitas semelhanças com as linguagens de árvores de atributos, (ver Capítulo 3). Esta semelhança permitirá que o *Calculus* de restrições aqui apresentado para $\mathcal{L}_U$ possa ser directamente aplicado para essa lógica [DV92].

Sendo X o conjunto das variáveis, Σ o conjunto de símbolos de função, os *valores* $v, v', v_0, \ldots$ e as *restrições* $c, c', c_0, \ldots$ da linguagem $\mathcal{L}_U$ são definidos pela seguinte gramática em *BNF*:

$$
\begin{array}{lcll}
v & ::= & x & \\
 & | & a & \\
c & ::= & v.f^n & n > 0 \\
 & | & v = v & \\
 & | & v.f_i^n \doteq v & 1 \leq i \leq n \\
 & | & v \neq v & \\
 & | & \neg v.f^n & \\
 & | & \top & \\
 & | & \bot & \\
 & | & c \wedge c & \\
 & | & c \vee c &
\end{array}
$$

Mais uma vez, a cada restrição $c \in \mathcal{L}_U$ corresponde uma fórmula de $\mathcal{L}$, considerando as seguintes abreviaturas:

$$
\begin{array}{rcl}
v.f^n & \equiv & \exists z_1 \ldots z_n.\ v = f(z_1, \ldots, z_n) \\
v.f_i^n \doteq v' & \equiv & \exists z_1 \ldots z_n.\ v = f(z_1, \ldots, z_n) \wedge z_i = v'
\end{array}
$$

Para qualquer restrição c de $\mathcal{L}_C$ é possível construir uma restrição c' de $\mathcal{L}_U$ tal que c é satisfazível se e só se c' for satisfazível. Introduzindo variáveis quantificadas existencialmente podemos transformar cada restrição atómica positiva de $\mathcal{L}_C$ numa conjunção de restrições de $\mathcal{L}_U$. Para transformar as restrições atómicas negativas é necessário o seguinte lema:

Lema 2.31 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, para toda a variável x, functor $f^n \in \Sigma$ e variável ou constante v tem-se que:*

$$\mathcal{A} \models \neg x.f_i^n \doteq v \;\Leftrightarrow\; \neg x.f^n \;\vee\; \exists z.\, x.f_i^n \doteq z \;\wedge\; z \neq v$$

Dem. Sem falta de generalidade, podemos supor que v é uma constante a. Denotando $f(z_1, \ldots, z_n)$ por $f(\bar{z})$ para qualquer símbolo de função f^n e variáveis $\bar{z}$, temos,

(1) $$\mathcal{A} \models \neg x.f_i^n \doteq a \;\Leftrightarrow\; \neg\exists\bar{z}.\, x = f(\bar{z}) \;\wedge\; z_i = a$$
$$\Leftrightarrow\; \forall\bar{z}.x \neq f(\bar{z}) \;\vee\; (x = f(\bar{z}) \;\wedge\; z_i \neq a)$$

e

(2) $$\mathcal{A} \models \neg x.f^n \;\vee\; \exists z.\, x.f_i^n \doteq z \;\wedge\; z \neq a$$
$$\Leftrightarrow\; \forall\bar{z}.\, (x \neq f(\bar{z})) \;\vee\; \exists z, \bar{z}.\, x = f(\bar{z}) \;\wedge\; z_i = z \;\wedge\; z \neq a$$
$$\Leftrightarrow\; \forall\bar{z}.\, (x \neq f(\bar{z})) \;\vee\; \exists\bar{z}.\, x = f(\bar{z}) \;\wedge\; z_i \neq a$$

(2) $\Rightarrow$ (2)

Para todo a atribuição de variávies ρ, vamos ver que se $\mathcal{A} \models_\rho$ (2) então $\mathcal{A} \models_\rho$ (2). Se $\mathcal{A} \models_\rho \forall\bar{z}.\, (x \neq f(\bar{z}))$ é evidente. Senão, suponhamos que existe uma atribuição de variáveis ρ tal que $\mathcal{A} \models_\rho \exists\bar{z}.\, x = f(\bar{z}) \;\wedge\; z_i \neq a$ e $\mathcal{A} \not\models_\rho \forall\bar{z}.x \neq f(\bar{z}) \;\vee\; (x = f(\bar{z}) \;\wedge\; z_i \neq a)$. Sabemos que ρ admite uma única extensão às variáveis z que satisfaz $x = f(\bar{z}) \;\wedge\; z_i \neq a$, logo seja $\rho(x) = t_x \in \mathcal{U}_\mathcal{A}$. Por outro lado, existe uma extensão ρ_0 de ρ, tal que $t_x = \rho(x) = \rho_0(x) = \rho_0(f(\bar{z}))$ e $\rho_0(z_i) = a$ o que é um absurdo, porque $t_x \mid i \neq a$.

(2) $\Rightarrow$ (2)

Se $\mathcal{A} \models_\rho$ (2) então $\forall\bar{d} \in \mathcal{U}_\mathcal{A}^n$, $\mathcal{A} \models_{\rho[\bar{d}/\bar{z}]} x \neq f(\bar{z}) \;\vee\; z_i \neq a$. Se $\mathcal{A} \models_{\rho[\bar{d}_0/\bar{z}]} x = f(\bar{z})$ para algum $\bar{d}_0$, então $\mathcal{A} \models_{\rho[\bar{d}_0/\bar{z}]} z_i \neq a$ e portanto $\mathcal{A} \models_\rho \exists\bar{z}.\, x = f(\bar{z}) \wedge z_i \neq a$. Se tal $\bar{d}_0$ não existir, o resultado é evidente.

□

Este lema permite-nos transformar, por exemplo

$$\neg x.f_1^2 g_1^1 \doteq y$$

em

$$\neg x.f^2 \ \vee \ (x.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ (\neg z_1.g^1 \ \vee \ (z_1.g_1^1 = z_2 \ \wedge \ z_2 \neq y)))$$

tal que a primeira restrição é satisfazível se e só se a segunda o for.

Teorema 2.32 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, para toda a restrição $c \in \mathcal{L}_C$ existe uma restrição $c' \in \mathcal{L}_U$ tal que:*

$$\mathcal{A} \models c \ \Leftrightarrow \ \exists \bar{z}.\ c', \quad \textit{onde } \bar{z} \notin Vars(c) \textit{ e } (Vars(c') \setminus \{\bar{z}\}) \subseteq Vars(c)$$

Dem. Seja $c \in \mathcal{L}_C$. Começamos por transformar c de tal modo que só ocorram negações aplicadas a restrições atómicas (i.e. as únicas negações sejam restrições atómicas negativas). Para tal usam-se as seguintes regras de reescrita correspondentes a teoremas da lógica de 1ª ordem:

U1. $\neg(c_0 \ \wedge \ c_1) \ \mapsto \ \neg c_0 \ \vee \ \neg c_1$

U2. $\neg(c_0 \ \vee \ c_1) \ \mapsto \ \neg c_0 \ \wedge \ \neg c_1$

A restrição resultante é logicamente equivalente a c. A seguir, nas restrições atómicas positivas, são eliminados os caminhos de comprimento superior a um. Sendo $|p| \geq 1$, $|q| \geq 1$ e v uma variável ou uma constante, aplicam-se enquanto possível as seguintes regras de reescrita:

U3. $x.p \doteq y.q \ \mapsto \ \exists z.\ x.p \doteq z \ \wedge \ y.q \doteq z$ onde z é uma variável nova

U4. $v \doteq x.p \ \mapsto \ x.p \doteq v$

U5. $x.f_i^n p \doteq v \ \mapsto \ \exists z.\ x.f_i^n \doteq z \ \wedge \ z.p \doteq v$ onde z é uma variável nova e v uma variável ou constante

U6. $x.p.f^n \ \mapsto \ \exists z.\ x.p \doteq z \ \wedge \ z.f^n$ onde z é uma variável nova

A correcção destas regras resulta directamente das definições das restrições atómicas. Em nenhuma das regras aumenta o comprimento dos caminhos que ocorrem nas restrições do lado direito. Nas duas últimas regras o comprimento dos caminhos nas restrições resultantes diminui. Pela primeira regra diminui o número de restrições atómicas envolvendo dois caminhos complexos. Destes factos resulta a terminação do sistema de reescrita, e que as restrições atómicas positivas irredutíveis pertencem a $\mathcal{L}_U$.

Para as restrições atómicas negativas as regras a aplicar são:

U7. $\neg x.f_i^n p \doteq y.g_j^m q \;\mapsto\; \neg x.f^n \vee \neg y.g^m \vee (\exists z_1, z_2.\ x.f_i^n \doteq z_1 \wedge y.g_j^m \doteq z_2 \wedge \neg z_1.p \doteq z_2.q)$
onde z_1 e z_2 são variáveis novas

U8. $\neg x.f_i^n p \doteq v \;\mapsto\; \neg x.f^n \vee (\exists z.\ x.f_i^n \doteq z \wedge \neg z.p \doteq v)$
onde z é uma variável nova e v variável ou constante

U9. $\neg x.g_j^m p.f^n \;\mapsto\; \neg x.g^m \vee (\exists z.\ x.g_j^m \doteq z \wedge \neg z.p.f^n)$
onde z é uma variável nova

A equivalência é garantida pelo Lema 2.31 e a terminação por argumentos idênticos aos usados no caso anterior.

Finalmente os quantificadores existenciais são "empurrados" para fora, usando teoremas da lógica de 1ª ordem, obtendo-se uma *forma prenex normal*:

U10. $\exists z.\ c \;\mapsto\; \exists z_1.\ c[z_1/z]$ se z_1 não ocorre em c

U11. $\exists z.\ (c) \vee c' \;\mapsto\; \exists z.\ (c \vee c')$ se z não ocorre em c'

U12. $\exists z.\ (c) \wedge c' \;\mapsto\; \exists z.\ (c \wedge c')$ se z não ocorre em c'

Estas regras não alteram as restrições atómicas, a menos de renomeação de variáveis, e portanto as restrições irredutíveis são da forma $\exists \bar{z}.\ c'$, onde $c' \in \mathcal{L}_U$. $\square$

Limitando-nos ao problema da satisfazibilidade podíamos ter considerado directamente esta linguagem em vez de fazer referência a $\mathcal{L}_C$ e a $\mathcal{L}_{C_0}$. Para tal bastaria na demonstração do Teorema 2.30 considerar as seguintes equivalências:

$$(1) \qquad \mathcal{T}, \mathcal{RT} \models x = f(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \exists z_i.\ x.f_i^n \doteq z_i \wedge z_i = t_i$$

$$(2) \qquad \mathcal{T}, \mathcal{RT} \models x \neq f(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \neg x.f^n \vee \bigvee_{i=1}^{n} \exists z_i.\ x.f_i^n \doteq z_i \wedge z_i \neq t_i$$

No entanto, a utilização de linguagens mais gerais que $\mathcal{L}_U$ é conveniente tanto em aplicações práticas (ver capítulo **??**) como para a obtenção de certos resultados teóricos (p.e. [DM91]). O lema seguinte será utilizado no Capítulo 4 na obtenção de restrições em formas normalizadas.

Lema 2.33 *Seja $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$. Para todas as variáveis x, $y \in X$, para todo o functor $f^n \in \Sigma$ e valores v_i, v_i', $1 \leq i \leq n$, tem-se que*

(1)
$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models & \bigwedge_{i=1}^{n} (x.f_i^n \doteq v_i \ \wedge \ y.f_i^n \doteq v_i') \ \wedge \ x \neq y \\ \Leftrightarrow & \bigwedge_{i=1}^{n} (x.f_i^n \doteq v_i \ \wedge \ y.f_i^n \doteq v_i') \ \wedge \ \bigvee_{i=1}^{n} v_i \neq v_i' \end{aligned}$$

Dem. Provamos um resultado mais geral. Para todo x, $y \in X$ e $f^n \in \Sigma$ tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \ & x.f^n \ \wedge \ y.f^n \ \wedge \ x \neq y \\ \Leftrightarrow \ & \exists \bar{z}.\ x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ \exists \bar{w}.\ y = f(w_1, \ldots, w_n) \ \wedge \ x \neq y \\ \Leftrightarrow \ & \exists \bar{z}\bar{w}.\ x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ y = f(w_1, \ldots, w_n) \ \wedge \\ & f(z_1, \ldots, z_n) \neq f(w_1, \ldots, w_n) \\ \Leftrightarrow \ & \exists \bar{z}\bar{w}.\ x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ y = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ \bigvee_{j=1}^{n} z_j \neq w_j \\ \Leftrightarrow \ & \exists \bar{z}\bar{w}.\ \bigwedge_{j=1}^{n} (x.f_j^n \doteq z_j \ \wedge \ y.f_j^n \doteq w_j) \ \wedge \ \bigvee_{j=1}^{n} z_j \neq w_j \end{aligned}$$

Então, dados v, v' valores e algum $1 \leq i \leq n$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \ & x.f^n \ \wedge \ y.f^n \ \wedge \ x.f_i^n \doteq v \ \wedge \ y.f_i^n \doteq v' \ \wedge \ x \neq y \\ \Leftrightarrow \ & \exists \bar{z}\bar{w}.\ x = f(z_1, \ldots, z_n) \ \wedge \ y = f(w_1, \ldots, w_n) \ \wedge \\ & z_i = v \ \wedge \ w_i = v' \ \wedge \ \bigvee_{j=1}^{n} z_j \neq w_j \\ \Leftrightarrow \ & x.f^n \ \wedge \ y.f^n \ \wedge \ x.f_i^n \doteq v \ \wedge \ y.f_i^n \doteq v' \ \wedge \\ & (v \neq v' \ \vee \ \exists \bar{z}\bar{w}. \bigwedge_{j=1, j \neq i}^{n} (x.f_j^n \doteq z_j \ \wedge \ y.f_j^n \doteq w_j) \ \wedge \bigvee_{j=1, j \neq i}^{n} z_j \neq w_j) \end{aligned}$$

Se x e y forem definidos, repetindo-se o processo para cada $1 \leq i \leq n$, obtém-se (1).
$\square$

2.3 Linguagens de Programação com Restrições

Nesta secção enquadramos as linguagens $\mathcal{L}_{C_0}$, $\mathcal{L}_C$ e $\mathcal{L}_U$, no conjunto das linguagens de *restrições*, em particular nas que estão directamente relacionadas com a programação em lógica *com restrições*. A descrição geral das linguagens de restrições baseia-se em [JM94].

Em programação em lógica com restrições, $\mathcal{CLP}(\mathcal{D})$[5], incorporam-se métodos de resolução de restrições num dado domínio $\mathcal{D}$, com métodos lógicos de computação. No esquema $\mathcal{CLP}$ [JL87], uma linguagem de programação em lógica, a sua semântica operacional e a sua semântica declarativa, podem ser parametrizadas por um 4-tuplo $(\Sigma, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{S})$, onde Σ é uma assinatura que pode conter outros símbolos de predicado além do símbolo '=', $\mathcal{A}$ é uma Σ-álgebra, $\mathcal{C}$ é uma classe de fórmulas da linguagem de 1ª ordem caracterizada por Σ e $\mathcal{S}$ é uma teoria (conjunto de axiomas).

A classe $\mathcal{C}$ e a álgebra $\mathcal{A}$, definem um domínio $\mathcal{D}$ – domínio de restrições – e as fórmulas de $\mathcal{C}$ são chamadas *restrições*. As linguagens $\mathcal{C}$ de restrições contêm as fórmulas atómicas e são habitualmente fechadas para a conjunção e quantificação existencial. Quando se considera a negação ou outras conectivas lógicas denominam-se por restrições complexas.

Claramente, os pares $(\mathcal{L}, \mathcal{T})$ e $(\mathcal{L}, \mathcal{RT})$ são domínios de restrições complexas. Na literatura, aparecem domínios associados a $\mathcal{T}$ e $\mathcal{RT}$, mas normalmente é só considerado um subconjunto de $\mathcal{L}$. Em particular, a linguagem Prolog pode ser vista como $\mathcal{CLP}(\mathcal{T})$[6], onde $\mathcal{C}$ é o subconjunto de $\mathcal{L}$ que contém as igualdades entre termos e é fechada para a conjunção e quantificação existencial. Relacionados com os domínios das árvores finitas e racionais são usados os domínios de estruturas de atributos (por exemplo, [AK86, AKP93a]), que serão analisados no capítulo 3.

Podemos ainda citar outros domínios, usados, integralmente ou em parte, em várias implementações de $\mathcal{CLP}$ são:

Números reais: $\Re = (\mathcal{C}, \mathcal{R})$, onde $\Sigma = \{0, 1, +^2, \times^2, =, <, \leq\}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{R}} = \mathbb{R}$ é o conjunto de números reais e $\mathcal{R}$ é uma Σ-álgebra que interpreta as operações aritméticas e as relações de ordem como habitualmente (usado em $\mathcal{CLP}(\mathcal{R})$ [JMSY90], Prolog-III [Col90] e CHIP [DvS+88], entre outros).

[5] do inglês, *Constraint Logic Programming*

[6] ou melhor, $\mathcal{CLP}(\mathcal{RT})$ dado que nas implementações se omite a verificação do Axioma A6 de E_T, chamado habitualmente "occur check".

Sequências de caracteres: $\mathcal{WE} = (\mathcal{C}, \mathcal{W})$, onde Σ contém a função binária '$\cdot$' e a constante λ, entre outras; $\mathcal{U}_{\mathcal{W}}$ é o conjunto de sequências finitas de constantes; o operador '$\cdot$' é interpretado como a concatenação de sequências e λ como a sequência vazia ([Col90]).

Valores booleanos: $\mathcal{BOOL} = (\mathcal{C}, \mathcal{B})$, onde $\Sigma = \{0, 1, \neg, \wedge^2, \vee^2, \Rightarrow^2, \oplus^2, =\}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{true, false\}$ e $\mathcal{B}$ interpreta os símbolos de função de Σ como funções booleanas ([Col90, DvS+88, ASS+88]).

Domínios finitos: $\mathcal{FD} = (\mathcal{C}, \mathcal{F})$, podem ser associados a domínios finitos de números inteiros, isto é, $\mathcal{U}_{\mathcal{F}} = \mathbb{Z}$, Σ contém $+^2$ e os símbolos de predicado $=$, $\neq$, $\leq$, e expressões que denotam que $m \leq x \leq n$, para m e n inteiros. Se $c \in \mathcal{C}$ então para cada $x \in Vars(c)$ existe uma restrição da forma $m \leq x \leq n$, que indica a que intervalo de inteiros x pertence ([DvS+88]).

Em resumo, uma linguagem de restrições é um linguagem lógica de 1ª ordem que é associada a uma álgebra e para a qual é decidível o problema da satisfazibilidade. Exige-se, ainda, que as linguagens de restrições, definidas por um 4-tuplo $(\Sigma, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{S})$ possuiam as seguintes propriedades:

***Compacidade de soluções*:** Sendo I um conjunto de índices, possivelmente infinito:

$$\forall c \in \mathcal{C} \ \ \exists \{c_i\}_{i \in I} \in \mathcal{C} \quad \mathcal{A} \models \forall \neg c \ \Leftrightarrow \ \bigvee_{i \in I} c_i$$

***Completitude para a satisfazibilidade*:** Definem-se noções mais fracas de axiomatização e de completitude. Diz-se que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{S}$ *correspondem* em $\mathcal{C}$ se:

(i) $\mathcal{A} \models \mathcal{S}$;

(ii) $\forall c \in \mathcal{C} \ \ \mathcal{A} \models \exists c$ se e só se $\mathcal{S} \models \exists c$.

Diz-se que $\mathcal{S}$ é *completo para a satisfação em relação a* $\mathcal{C}$ se

$$\forall c \in \mathcal{CS} \models \exists c \text{ ou } \mathcal{S} \models \neg \exists c$$

***Independência das Restrições Negativas*:** $\forall\ c,\ c_1,\ \ldots, c_n \ \in \mathcal{C}$ é verdade que

$$\mathcal{A} \models \exists c \ \wedge \ \neg c_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \neg c_n \text{ se e só se } \mathcal{A} \models \exists c \ \wedge \ \neg c_i \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

As duas primeiras garantem a completitude e a integridade do esquema $\mathcal{CLP}$ [JL87]. A terceira permite simplificações nos testes de satisfazibilidade para restrições negativas e garante diversas propriedades nos modelos computacionais de $\mathcal{CLP}$ e que eram válidas em programação em lógica [Mah93].
Estas três propriedades são verificadas por $(\mathcal{L}, \mathcal{T})$ e por $(\mathcal{L}, \mathcal{RT})$. A segunda propriedade resulta das axiomatização completas que foram apresentadas para estas álgebras. A primeira e a terceira foram demonstradas por Maher em [Mah88], e serão estudadas para $\mathcal{L}_U$ no capítulo 5.

O problema fundamental a resolver num domínio de restrições é o da existência de soluções e a determinação de algoritmos completos eficientes para as calcular, que denominamos *resolutores* de restrições. Contudo em implementações de $\mathcal{CLP}$, surgem outros problemas relacionados com a satisfação, que permitem determinar relações entre restrições, simplificar restrições ou obter soluções parciais. Alguns dos problemas a resolver são:

Satisfazibilidade : Dada uma restrição c, determinar se $\mathcal{A} \models \exists c$

Vínculo: Dadas duas restrições c e c_1 determinar se $c \models_{\mathcal{A}} c_1$

Projecção: Dada uma restrição c e um conjunto de variáveis $X' \subseteq Vars(c)$ determinar se existe uma restrição c', o mais simples possível, tal que $\mathcal{A} \models c' \Leftrightarrow \exists \bar{z}\, c$ e $\bar{z} \notin X'$

Determinação: Dada uma restrição c verificar se c *determina* uma variável $x \in Vars(c)$, ou que x é *determinada* em c, isto é, se $\mathcal{A} \models \exists z \forall c \Rightarrow x = z$.

Equivalência: $c \approx_{\mathcal{A}} c'$

O último problema permite, por exemplo, simplificar restrições antes de aplicar um algoritmo de satisfazibilidade.

Suponhamos que $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$ e a linguagem é $\mathcal{L}$ ou um dos seus subconjuntos $\mathcal{L}_C$, $\mathcal{L}_{C_0}$ ou $\mathcal{L}_U$. Recorde-se que $\mathcal{L}_U \subset \mathcal{L}_C \subset \mathcal{L}_{C_0} \subset \mathcal{L}$.
Pelo Teorema 2.32, para resolver o problema a satisfazibilidade em $\mathcal{L}_C$ transforma-se esse problema num problema de $\mathcal{L}_U$ e depois *projectam-se* as soluções nas variáveis de $\mathcal{L}_C$.
Um problema relacionado com o da satisfazibilidade é o determinar se uma restrição *c víncula* c_1, $c_1 \models_{\mathcal{A}} c$. De acordo com a Proposição 2.15, se c_1 for satisfazível, não se pode ter

simultaneamente $c_1 \models_{\mathcal{A}} c$ e $c_1 \models_{\mathcal{A}} \neg c$ e ainda, $c_1 \wedge c$ é não satisfazível se e só se $c_1 \models_{\mathcal{RT}} \neg c$. Portanto, determinar se c víncula c', pode reduzir-se a um problema de satisfazibilidade.

A *equivalência* entre restrições pode ser obtida mais facilmente se cada restrição tiver um forma normal equivalente e essa forma for única.

2.4 Sumário

Capítulo 3

$\mathcal{RT}$ e Linguagens de Árvores de Atributos

Neste capítulo estabelecemos uma relação entre $\mathcal{RT}$ e as linguagens de árvores de atributos. Deliberadamente identificaremos $\mathcal{RT}$ e a teoria E_{RT}, e a linguagem $\mathcal{L}_U$ será interpretada em $\mathcal{RT}$.

Como foi mencionado na introdução, Smolka em [Smo92] propôs uma lógica de estruturas atributos para a formalização dos formalismos linguísticos baseados em estruturas de atributos. Esta lógica, difere de outras existentes, no facto de que as descrições de estruturas de atributos serem consideradas fórmulas de linguagens de lógica de 1ª ordem com igualdade. Estas linguagens são construídas a partir dum conjunto numerável infinito de variáveis e duma assinatura que contém símbolos de predicado binários (atributos) e constantes. Definem-se álgebras de atributos onde os predicados binários são interpretados como relações funcionais, as constantes distintas como objectos distintos e, ainda, onde as constantes não admitem atributos. Aos atributos associam-se predicados binários $f(x, y)$ que indicam que o objecto x tem para o atributo f o valor y. Em [Smo92] Smolka apresenta uma axiomatização destas álgebras para aquelas linguagens, cujos axiomas coincidem com os Axiomas FT1-FT3, da Tabela 3.1. É demonstrado que a satisfazibilidade de fórmulas sem quantificadores é um problema decidível mas para fórmulas em geral esse problema é indecidível. Como modelos canónicos para o fragmento existencial destas linguagens são apresentadas as denominadas álgebras de grafos de atributos.

Esta axiomatização, embora capture o essencial das propriedades das estruturas de atributos, não é completa.

Introduzindo axiomas novos e considerando como modelos canónicos álgebras de árvores de atributos, Smolka e outros apresentaram em [AKPS94, BS92, ST94, BS95, Bac94] várias teorias completas para as linguagens de estruturas de atributos. Entre essas linguagens destacam-se a linguagem $\mathcal{FT}$ e linguagem $\mathcal{CFT}$ que estão na base de linguagens de programação em lógica com restrições, respectivamente, LIFE [AKP93a] e Oz [?].

A apresentação das linguagens de árvores de atributos baseia-se, essencialmente, em [BS95, Bac94].

3.1 Árvores de Atributos

As árvores de atributos são árvores cujos ramos são etiquetados por *atributos* e as folhas por *constantes*[1]. Sejam $\mathcal{FEA}$ e $\mathcal{CON}$ conjuntos infinitos disjuntos de símbolos de predicado binários (denominados *atributos*) e de símbolos de *constantes*. Um *domínio de árvore* é um conjunto não vazio $D \subseteq \mathcal{FEA}^\star$ que é fechado para prefixos, i.e., se $pq \in D$ então $p \in D$, com p e q elementos (caminhos) de $\mathcal{FEA}^\star$. Dado um domínio de árvore D define-se $l(D)$ como o conjunto de caminhos maximais de D, i.e.,

$$l(D) = \{p \in \mathcal{FEA}^\star \mid \forall f \in \mathcal{FEA}\; pf \notin D\}$$

Uma *árvore de atributos* é um par $\sigma = (D, \lambda)$, onde D é um domínio de árvore e λ é uma função total $\lambda : l(D) \longrightarrow \mathcal{CON}$. Os caminhos em D representam os nós de σ; o caminho ϵ corresponde à raiz da árvore e λ representa as folhas de σ que são constantes. Uma árvore de atributos é *finita* (*infinita*) se o seu domínio é finito (infinito). Um elemento $f \in \mathcal{FEA}$ é um atributo duma árvore de atributos $\sigma = (D, \lambda)$, se existe $p \in \mathcal{FEA}^\star$ tal que $pf \in D$. Uma sub-árvore $p^{-1}\sigma$ duma árvore de atributos $\sigma = (D, \lambda)$ é a árvore de atributos $\sigma' = (D', \lambda')$ definida por

$$D' = \{q \mid pq \in D\} \text{ e } \lambda' = \{(q, a) \mid (pq, a) \in \lambda\}$$

Uma árvore de atributos $\sigma = (D, \lambda)$ é *racional* se σ tem apenas um número finito de sub-árvores e para todo $p \in D$ o conjunto $\{f \in \mathcal{FEA} \mid pf \in D\}$ é finito. A *aridade* duma árvore de atributos σ é o conjunto de atributos que ocorrem directamente na sua raiz, e designa-se por $aridade(\sigma)$. Identifica-se $a \in \mathcal{CON}$ com a árvore $(\{\epsilon\}, \{(\epsilon, a)\})$.

[1] Esta formalização difere ligeiramente da apresentada em [AKPS94, ST94], onde cada nó é etiquetado com um *tipo*, mas é a usada em [BS95, Bac94].

Em particular, as árvores sobre um conjunto de símbolos funcionais são exemplos de árvores de atributos. Dada uma assinatura Σ, suponhamos que $\mathcal{FEA}$ contém o atributo fun (o seu valor corresponderá a um functor) e os inteiros 1, 2, ..., e que $\mathcal{CON}$ contém uma constante f para cada $f^n \in \Sigma$. Para cada functor $f^n \in \Sigma$ considera-se uma árvore σ_{f^n} tal que $fun \in aridade(\sigma)$, $i \in aridade(\sigma)$ para $1 \leq i \leq n$ e $\lambda(fun) = f$. Na Figura 3.1 apresenta-se dois exemplos de árvores de atributos, que correspondem a árvores sobre $\{f^2, g^1, a, b\}$ apresentadas na Figura 2.1, no Capítulo 2.

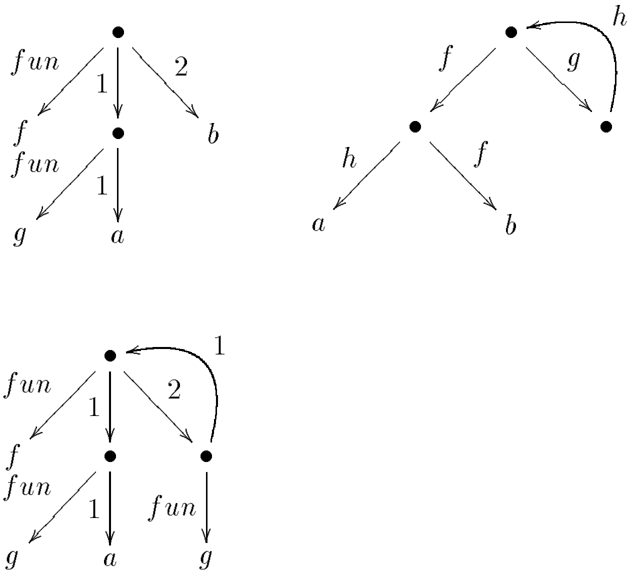


Figura 3.1: Exemplos de árvores de atributos.

3.2 Linguagens de Árvores de Atributos

As linguagens de árvores de atributos são linguagens de lógica de 1ª ordem com igualdade cuja assinatura apenas contém símbolos de constantes, designados por a, b, ..., símbolos de predicados binários (atributos), designados por f, g, ...e, eventualmente, outros símbolos de predicado. Supõe-se um conjunto infinito de variáveis, x, y, ... O conjunto de variáveis livres duma fórmula ϕ designa-se por $\mathcal{V}(\phi)$.

Cada linguagem é interpretada numa álgebra que tem como universo o conjunto das árvores de atributos. O conjunto de fórmulas válidas nessa álgebra, denominada *modelo canónico*, constituí a teoria associada à linguagem. A designação dos axiomas dessa teoria e a da linguagem serão iguais.

A linguagem $\mathcal{FT}$ [AKPS94] tem como assinatura $\mathcal{FEA} \cup \mathcal{CON}$, sendo ambos conjuntos infinitos. As fórmulas atómicas são as *restrições de atributos* xfy (que correspondem a $f(x,y)$, na notação habitual de predicados) e as *equações* $t = t'$ com t, t' variáveis ou constantes.
A álgebra de árvores de atributos $\mathfrak{T}_{FT}$ é a $\mathcal{FT}$-álgebra definida por:

(i) o universo de $\mathfrak{T}_{FT}$, $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}_{FT}}$, é o conjunto de todas as árvores de atributos sobre $\mathcal{FEA} \cup \mathcal{CON}$

(ii) $a^{\mathfrak{T}_{FT}} = (\{\epsilon\}, \{(\epsilon, a)\})$ para toda o símbolo constante $a \in \mathcal{CON}$

(iii) para todo $f \in \mathcal{FEA}$, $(\sigma, \tau) \in f^{\mathfrak{T}_{FT}}$ se e só se $f \in aridade(\sigma)$ e $\tau = f^{-1}\sigma$

As sub-álgebras constituídas apenas por árvores racionais é denotada por $\mathfrak{R}_{FT}$.
Na Tabela 3.1 apresentamos a teoria $\mathcal{FT}$ que constituí uma axiomatização completa de $\mathfrak{T}_{FT}$ [BS92]. Os três primeiros Axiomas FT1-FT3 correspondem aos apresentados para lógicas de estruturas de atributos em [Smo92]. O quarto axioma garante que certas descrições de atributos consistentes são satisfazíveis. Para isso, foi introduzida a noção de *cláusula resolvida*.

FT1. $\forall f \in \mathcal{FEA}, \forall(xfy \wedge xfz \Rightarrow y = z)$

FT2. $\forall\, a \in \mathcal{CON}, \forall(afx \Rightarrow \bot)$

FT3. $a \neq b$, se a e b são constantes distintas

FT4. $\forall\exists\mathcal{CV}(\phi)\phi$, para toda a cláusula resolvida ϕ

Tabela 3.1: Axiomas de $\mathcal{FT}$.

Uma restrição de *exclusão* é da forma $xf\uparrow$ ("f é indefinida em x") e é uma abreviatura de $\neg\exists y(xfy)$.

Definição 3.1 *Uma* cláusula resolvida *é uma conjunção ϕ, possivelmente vazia, de fórmulas atómicas da forma xft e $xf\uparrow$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) nenhuma fórmula ocorre duas vezes em ϕ

(ii) não ocorrem fórmulas da forma aft *ou* $af\uparrow$ *em* ϕ

(iii) se $xft \in \phi$ *então não existe* $t' \neq t$ *tal que* $xft' \in \phi$

(iv) se $xft \in \phi$*, então* $xf\uparrow \notin \phi$

Uma variável diz-se *restringida* numa cláusula resolvida ϕ se ϕ contém uma restrição da forma xft ou $xf\uparrow$. Designa-se por $\mathcal{CV}(\phi)$ o conjunto de todas as variáveis que são *restringidas* em ϕ. As variáveis de $\mathcal{V}(\phi) \setminus \mathcal{CV}(\phi)$ são denominadas *parâmetros* de ϕ. O Axioma FT4 afirma que as variáveis restringidas duma cláusula resolvida tem soluções para todos os valores dos parâmetros. Como a teoria é completa, resulta que $\mathfrak{T}_{FT}$ e $\mathfrak{R}_{FT}$ são modelos elementarmente equivalentes.

A teoria $\mathcal{FT}$ formaliza as propriedades essenciais das descrições de estruturas de atributos usadas em vários formalismos linguísticos e linguagens de programação.

Contudo, $\mathcal{FT}$ não é uma teoria *extensiva*, isto é, não é possível identificar um objecto do domínio por uma fórmula. É sempre possível adicionar atributos sem que descrição se torne inconsistente. Por outro lado, a propriedade da *extensão* garante que duas estruturas de atributos são iguais se o são as suas descrições, isto é, se têm os mesmos atributos e, para um mesmo atributo, os mesmos valores. As teorias E_T e E_{RT}, apresentadas no Capítulo 2, são extensivas no sentido em que dois termos são iguais se têm o mesmo functor e os mesmos sub-termos. Em particular, isto significa, que as linguagens de programação em lógica, como o Prolog, onde as estruturas de dados são os termos interpretados em $\mathcal{T}$ ou $\mathcal{RT}$, são extensivas.

A linguagem $\mathcal{CFT}$ permite que a descrição de estruturas de atributos seja extensiva.

A assinatura da linguagem $\mathcal{CFT}$ [ST94] é a de $\mathcal{FT}$ acrescida de mais um símbolo de predicado unário para todo o conjunto $F \subseteq \mathcal{FEA}$ de atributos, e que são, denominados *aridades*. As fórmulas atómicas de $\mathcal{CFT}$ são as de $\mathcal{FT}$ e as *restrições de aridade* do tipo xF. A restrição $x\emptyset$ é interpretada como uma constante.

A álgebra de árvores de atributos $\mathfrak{T}_{CFT}$ é a $\mathcal{CFT}$-álgebra cujo universo, interpretação de símbolos de constantes e de símbolos de atributos são definidos como para $\mathfrak{T}_{FT}$ e $\sigma \in F^{\mathfrak{T}_{CFT}}$ se e só se $aridade(\sigma) = F$.

As sub-álgebras constituídas apenas por árvores racionais são denotadas por $\mathfrak{R}_{CFT}$.

Na Tabela 3.2 apresentamos a teoria $\mathcal{CFT}$ que constituí uma axiomatização completa de $\mathfrak{T}_{CFT}$ [BS95]. Os Axiomas CFT4–CFT6 garantem que se x tem aridade F então um atributo f está definido para x se e só se $f \in F$. Para garantir a existência e a unicidade de soluções, foi introduzida a noção de determinante

Definição 3.2 *Um* determinante *para x é uma fórmula da forma*

$$x\{f_1, \ldots, f_n\} \ \wedge \ xf_1t_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ xf_nt_n$$

onde cada t_i é uma variável ou uma constante. Abrevia-se a fórmula anterior para

$$x \doteq (f_1 : t_1, \ldots f_n : t_n)$$

O determinante *de variáveis distintas $x_1, \ldots, x_n$ é a conjunção dos determinantes de cada uma delas. Para uma conjunção de fórmulas atómicas ϕ define-se $\mathcal{D}(\phi)$ como o conjunto de variáveis que contêm um determinante em ϕ.*

O Axioma CFT7 afirma que cada determinante determina uma única solução para as suas variáveis determinadas.
A álgebra $\mathfrak{R}_{CFT}$ também é um modelo de $\mathcal{CFT}$, logo, é elementarmente equivalente a $\mathfrak{T}_{CFT}$.

Como no caso de árvores racionais sobre símbolos funcionais [Cou83], qualquer árvore de atributos racional τ é solução duma das variáveis duma fórmula ϕ_τ de $\mathcal{CFT}$. Para cada σ sub-árvore de τ seja x_σ uma variável distinta. Se $aridade(\sigma) = \emptyset$ então σ é uma constante a e $x_\sigma = a \in \phi_\tau$. Sendo $aridade(\sigma) = \{f_1, \ldots, f_n\}$ e $\sigma_i = f_i^{-1}\sigma$ defina-se o determinante $x_\sigma \doteq (f_1 : x_{\sigma_1}, \ldots f_n : x_{\sigma_n}) \in \phi_\tau$. Claramente, ou τ é uma constante ou τ é solução (única) para o determinante de x_τ.

3.3 $\mathcal{RT}$ e $\mathcal{CFT}$

Nesta secção vamos mostrar que as teorias $\mathcal{CFT}$ e $\mathcal{RT}$ são equivalentes no sentido em que existem transformações efectivas, parametrizadas pelas assinaturas, tais que uma fórmula é válida numa delas se e só se a transformada é válida na outra. Este resultado, foi apresentado por Damas em [Dam91] e também em [DMV94]. Deste modo, podemos dizer que, $\mathcal{CFT}$ não tem um poder expressivo maior que $\mathcal{RT}$. Em [ST94] é também mostrado que $\mathcal{CFT}$ é uma

---

CFT1. $\forall f \in \mathcal{FEA}, \forall(xfy \ \wedge \ xfz \ \Rightarrow \ y = z)$

CFT2. $\forall\, a \in \mathcal{CON}, \forall(afx \ \Rightarrow \ \perp)$

CFT3. $a \neq b$, se a e b são constantes distintas.

CFT4. $\forall(xF \ \wedge \ xfy \ \Rightarrow \ \perp)$, se $f \notin F$.

CFT5. $\forall\, a \in \mathcal{CON}$, F aridade, $aF \ \Rightarrow \ \perp$

CFT6. $\forall(xF \ \Rightarrow \ \exists y(xfy))$, se $f \in F$.

CFT7. $\forall(\exists! D(\delta)\delta)$, se δ é um determinante.

Tabela 3.2: Axiomas de $\mathcal{CFT}$.

extensão conservativa de $\mathcal{RT}$. Isto é, sendo Σ uma assinatura de símbolos funcionais define-se uma assinatura de Σ^F de $\mathcal{CFT}$ tal que existe uma tradução efectiva duma Σ-fórmula ϕ numa Σ^F-fórmula ϕ^F tal que $\mathcal{RT} \models \phi$ se e só se $\mathcal{CFT} \models \phi^F$. Se as assinaturas forem finitas as duas linguagens têm a mesma expressividade. No entanto, em [ST94] argumenta-se que, considerando um número infinito de atributos, $\mathcal{CFT}$ é mais expressivo que $\mathcal{RT}$ pois fórmulas do tipo

$$x \ f \ y$$

que indicam apenas que x tem o atributo f, e nada dizem sobre os restantes atributos, não podem ser expressas em $\mathcal{RT}$. Contudo, como será visto na secção seguinte, uma fórmula daquele tipo só será válida em $\mathcal{CFT}$ se o for numa álgebra com um número finito de atributos. Como consequência, do ponto vista prático, é indiferente usar qualquer uma destas duas teorias (linguagens) para as descrições das estruturas de atributos.

Em particular, o estudo da satisfazibilidade em $\mathcal{L}_U$ e os resolutores para $\mathcal{L}_U$ que irão ser apresentados nos capítulos seguintes são adaptáveis directamente para $\mathcal{CFT}$.

Este facto, permite que $\mathcal{RT}$ seja tomado como modelo canónico para as teorias das descrições de estruturas de atributos em formalismos linguísticos, em particular nas gramáticas lógicas com restrições.

Na prática, as linguagens de estruturas de atributos são variantes sintácticas de $\mathcal{RT}$ que são adequadas para representar estruturas em linguagens de programação em lógica com restrições como LIFE [AKP93a] e Oz [?], e também em formalismos linguísticos baseados em restrições.

3.3.1 Modelos finitos e infinitos

Um primeiro resultado apresentado em [Dam91, DMV94] foi que, supondo um conjunto infinito de constantes, uma fórmula $\phi \in \mathcal{CFT}$ é válida numa álgebra com um número infinito de atributos se e só se é válida para uma álgebra com um número finito de atributos. Na realidade, numa fórmula ϕ só podem ocorrer um número finito de atributos, sejam $f_1, \ldots, f_n$. Se uma solução de ϕ envolver outros atributos estes podem ser "codificados" com apenas mais um atributo f_{n+1} e identificando cada um deles com uma constante específica. Este tipo de representação é também comum em muitas implementações de estruturas de atributos usando termos, por exemplo, [Kei94].

No caso de $\mathcal{FEA}$ ser finito (e $\mathcal{CON}$ infinito) para que se obter uma axiomatização completa é necessário mais um axioma, análogo, ao Axioma do Domínio Fechado:

$$\forall x \bigvee_{F \subseteq \mathcal{FEA}} xF$$

Vamos denominar por $\mathcal{CFT}^{<\infty}$ a teoria constituída pelos Axiomas CFT1-CFT7 e pelo axioma anterior.

Designámos por $\mathfrak{T}^{\infty}_{CFT}$ (ou $\mathfrak{R}^{\infty}_{CFT}$) uma $\mathcal{CFT}$-álgebra tal que $\mathcal{FEA}$ é um conjunto infinito e por $\mathfrak{T}^{n}_{CFT}$ (ou $\mathfrak{R}^{n}_{CFT}$) uma $\mathcal{CFT}$-álgebra tal que $\mathcal{FEA}$ é um conjunto com n elementos $f_1, \ldots, f_n$, para qualquer $n > 0$.

Proposição 3.3 *As álgebras* $\mathfrak{T}^{n}_{CFT}$ *e* $\mathfrak{R}^{n}_{CFT}$ *são modelos de* $\mathcal{CFT}^{<\infty}$.

Proposição 3.4 *Seja* $\phi \in \mathcal{CFT}$ *e suponhamos que em* ϕ *ocorrem os atributos* $f_1, \ldots, f_n$. *Então,* $\mathfrak{R}^{\infty}_{CFT} \models \phi$ *se e só se* $\mathfrak{R}^{n+1}_{CFT} \models \phi$.

Dem. Vamos construir funções injectivas H_0 e H_1 de $\mathcal{U}_{\mathfrak{R}^{n+1}_{CFT}}$ para $\mathcal{U}_{\mathfrak{R}^{\infty}_{CFT}}$ e vice-versa, tal que para $1 \leq i \leq n$ se $\tau = f_i^{-1}\tau'$ então $H_k(\tau) = f_i^{-1}H_k(\tau')$, para $k = 0, 1$. A função H_0 é definida como a inclusão de $\mathcal{U}_{\mathfrak{R}^{n+1}_{CFT}}$ em $\mathcal{U}_{\mathfrak{R}^{\infty}_{CFT}}$. Para H_1, considere-se para cada atributo $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$ uma constante distinta $a_1, a_2, \ldots$.

Para cada $\tau \in \mathcal{U}_{\mathfrak{R}^{\infty}_{CFT}}$, a função H_1 é definida por indução a estrutura de τ:

(i) se $aridade(\tau) = \emptyset$ então τ é uma constante $(\{\epsilon\}, \{(\epsilon, a)\})$ e $H_1(\tau) = \tau$;

(ii) se $aridade(\tau) \neq \emptyset$ seja ϕ_τ a fórmula em $\mathcal{CFT}$ associada a τ e $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ as suas sub-árvores. Vamos transformar ϕ_τ numa fórmula $\phi_{\tilde\tau}$ tal que $\tilde\tau \in \mathcal{U}_{\mathfrak{R}^{n+1}_{CFT}}$ e definimos $H_1(\tau) = \tilde\tau$.

Para cada σ sub-árvore de τ, se $aridade(\sigma) = \{f_{j_1}, \ldots f_{j_k}, f_{n+i_1} \ldots f_{n+i_m}\}$, com $0 < j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$, $0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ e $f_l^{-1}\sigma = \sigma_l$, temos que

$$x_\sigma = (f_{j_1} : x_{\sigma_{j_1}}, \ldots, f_{j_k} : x_{\sigma_{j_k}}, f_{n+i_1} : x_{\sigma_{n+i_1}}, \ldots, f_{n+i_m} : x_{\sigma_{n+i_m}}) \in \phi_\tau$$

onde cada variável x_{σ_l} corresponde à sub-árvore σ_l de τ e se σ_l é uma constante a temos que $x_{\sigma_l} = a \in \phi_\tau$.

Para cada x_{σ_l}, para $1 \leq l \leq s$, seja $\tilde x_{\sigma_l}$ a variável correspondente em $\phi_{\tilde\tau}$. Definimos

$$\tilde x_\sigma = (f_{j_1} : \tilde x_{\sigma_{j_1}}, \ldots, f_{j_k} : \tilde x_{\sigma_{j_k}}, f_{n+1} : y_\sigma^{i_1}) \in \phi_{\tilde\tau}$$

e

$$\begin{array}{lcll} y_\sigma^j & = & (f_1 : a_j, f_2 : \tilde x_{\sigma_{n+j}}, f_{n+1} : y_\sigma^{j+1}) \in \phi_{\tilde\tau} & \text{para } j = i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \\ y^{i_m} & = & (f_1 : a_j, f_2 : \tilde x_{\sigma_{n+j}}) \in \phi_{\tilde\tau} & \end{array}$$

onde, para cada σ, $y_\sigma^{i_1}, \ldots y_\sigma^{i_m}$ são variáveis novas.

Se $x_\sigma = a \in \phi_\tau$ então $\tilde x_\sigma = a \in \phi_{\tilde\tau}$. Resulta da definição que $\phi_{\tilde\tau}$ tem uma única solução $\tilde\tau$ em $\mathfrak{R}^{n+1}_{CFT}$.

Por indução na estrutura de ϕ é imediato provar que

$$\forall\rho \quad \mathfrak{R}^{n+1}_{CFT} \models_\rho \phi \text{ se e só se } \mathfrak{R}^{\infty}_{CFT} \models_{H_0(\rho)} \phi$$

$$\forall\rho \quad \mathfrak{R}^{\infty}_{CFT} \models_\rho \phi \text{ se e só se } \mathfrak{R}^{n+1}_{CFT} \models_{H_1(\rho)} \phi$$

sendo n escolhido adequadamente em cada caso. □

3.3.2 Equivalência entre $\mathcal{RT}$ e $\mathcal{CFT}$

Nesta secção vamos apresentar transformações efectivas, parametrizadas pelas assinaturas, $.^c : \mathcal{CFT} \longrightarrow \mathcal{RT}$ e $.^f : \mathcal{RT} \longrightarrow \mathcal{CFT}$ tais que

$$\mathcal{CFT} \models \phi \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{RT} \models \phi^c$$

e

$$\mathcal{RT} \models \phi \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{CFT} \models \phi^f$$

Seja $\mathcal{FEA} \cup \mathcal{CON}$ uma assinatura para $\mathcal{CFT}$ com $\mathcal{FEA} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Construímos uma assinatura Σ^c para $\mathcal{RT}$ constituída por $\mathcal{CON}$ e um conjunto finito de símbolos funcionais F, para cada subconjunto não vazio de $\{1, \ldots, n\}$. A aridade de cada símbolo F é igual à cardinalidade do conjunto F, e representa-se por n_F. A transformação $.^c$ é definida para as fórmulas de $\mathcal{CFT}$ como a extensão homomórfica de

$(xf_iy)^c$	$:=$	$\bigvee_{F\subseteq\{1,\ldots,n\}, i\in F}\ x.F_{i_F}^{n_F} \doteq y$	para $1 \leq i \leq n$ e onde i_F é o índice de i em F
$(xF)^c$	$:=$	$x.F^{n_F}$	onde F se identifica com os correspondentes subconjuntos de $\mathcal{FEA}$ e de $\{1, \ldots, n\}$
$(t = t')^c$	$:=$	$t = t'$	se t e t' são variáveis ou constantes

onde as abreviaturas $x.f^n$ e $x.f_i^n \doteq y$ são fórmulas em $\mathcal{L}_U$.

Usando $.^c$ é imediato verificar que as imagens dos axiomas de $\mathcal{CFT}^{<\infty}$ são Σ^c-fórmulas válidas em $\mathcal{RT}$.

Cada Σ^c-álgebra $\mathcal{A}$ de E_{RT} pode ser traduzida numa $\mathcal{CFT}$-álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ considerando que:

(i) o universo de $\widehat{\mathcal{A}}$ é o de $\mathcal{A}$;

(ii) para todo $f_i \in \mathcal{FEA}$, $(\sigma, \sigma_i) \in f_i^{\widehat{\mathcal{A}}}$ se e só se existe $F^{\mathcal{A}}$ tal que $(\sigma_{n_1}, \ldots, \sigma_{i_F}, \ldots, \sigma_{n_F}, \sigma) \in F^{\mathcal{A}}$ e $\sigma_{i_F} = \sigma_i$, onde i_F é o índice de i em F;

(iii) $\sigma \in F^{\widehat{\mathcal{A}}}$ se e só se $\sigma \in F^{\mathcal{A}}$

Se $\mathcal{A} \models E_{RT}$ então para toda a fórmula ϕ, $(\phi^c)^{\mathcal{A}} = \phi^{\widehat{\mathcal{A}}}$ e $\widehat{\mathcal{A}} \models \mathcal{CFT}^{<\infty}$.

Proposição 3.5 *Para toda a $\mathcal{CFT}$-fórmula ϕ, $\mathcal{CFT} \models \phi$ se e só se $\mathcal{RT} \models \phi^c$.*

Dem. ($\Rightarrow$)

Seja ϕ tal que $\mathcal{CFT} \models \phi$ e suponhamos que os atributos que ocorrem em ϕ são $f_1, \ldots, f_n$. Pela Proposição 3.4, $\mathfrak{R}_{CFT}^{n+1} \models \phi$ e $\mathcal{CFT}^{<\infty} \models \phi$. Como $\mathcal{RT} \models (CFT^{<\infty})^c$ então $\mathcal{RT} \models \phi^c$.

($\Leftarrow$)

Suponhamos que $\mathcal{RT} \models \phi^c$. Então, $\widehat{\mathcal{RT}} \models \phi$ e $\mathcal{CFT}^{<\infty} \models \phi$. Temos então que $\mathcal{CFT} \models \phi$. $\square$

A transformação $.^f$ pode ser definida com base na construção, apresentada na Secção **??**, de árvores sobre símbolos funcionais como árvores de atributos. Sendo Σ uma assinatura para $\mathcal{RT}$ seja $\Sigma^f = \mathcal{FEA} \cup \mathcal{CON}$, onde $\mathcal{FEA} = \{fun\} \cup \{1, 2, \ldots\}$ e $\mathcal{CON} = \Sigma$.
A transformação $.^f$ é definida para as fórmulas de $\mathcal{L}_U$ como a extensão homomórfica de

$$
\begin{array}{lll}
(x.f_i^n \doteq v)^f & := & x\,fun\,f \;\wedge\; x\{1, \ldots, n\} \;\wedge\; xiv \\
(x.f^n)^f & := & x\,fun\,f \;\wedge\; x\{1, \ldots, n\} \\
(v = v')^f & := & v = v' \qquad\qquad \text{se } v \text{ e } v' \text{ são variáveis ou constantes}
\end{array}
$$

Usando $.^f$ é imediato verificar que as imagens dos axiomas de E_{RT} (escritos como fórmulas de $\mathcal{L}_U$) são Σ^f-fórmulas válidas em $\mathcal{CFT}$.
Como no caso anterior é possível definir para cada Σ^f-álgebra $\mathcal{A}$ de $\mathcal{CFT}$ uma Σ-álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ de E_{RT} considerando que:

(i) o universo de $\widehat{\mathcal{A}}$ é o de $\mathcal{A}$;

(ii) para todo $f^n \in \Sigma$, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma) \in f^{\widehat{\mathcal{A}}}$ se e só se $\sigma \in \{fun, 1, \ldots, n\}^{\mathcal{A}}$, $(\sigma, \sigma_f) \in fun^{\mathcal{A}}$ e σ_f é a constante f e $(\sigma, \sigma_i) \in i^{\mathcal{A}}$ para todo $1 \leq i \leq n$;

Se $\mathcal{A} \models \mathcal{CFT}$ então para toda a fórmula ϕ, $(\phi^f)^{\mathcal{A}} = \phi^{\widehat{\mathcal{A}}}$ e $\widehat{\mathcal{A}} \models \mathcal{RT}$.

Proposição 3.6 *Para toda a Σ-fórmula ϕ, $\mathcal{RT} \models \phi$ se e só se $\mathcal{CFT} \models \phi^f$.*

Dem. ($\Rightarrow$)

Seja ϕ tal que $\mathcal{RT} \models \phi$. Temos que $(\mathcal{RT})^f \models \phi^f$. Como $\mathcal{CFT} \models (\mathcal{RT})^f$, então $\mathcal{CFT} \models \phi^f$.

($\Leftarrow$)

Suponhamos que $\mathcal{CFT} \models \phi^f$. Então, $\mathfrak{T}_{CFT} \models \phi^f$. Como $\mathcal{RT}$ é completo e consistente, ou $\mathcal{RT} \models \phi$ ou $\mathcal{RT} \models \neg\phi$. Como $\widehat{\mathfrak{T}_{CFT}} \models \phi$ temos que $\mathcal{RT} \models \phi$. $\square$

Como corolário destas transformações, podemos concluir que $\mathcal{CFT}$ é completa uma vez que RTo é.

3.4 Outras Linguagens de Árvores de Atributos

As linguagens de árvores de atributos podem ser generalizadas para permitir quantificar sobre atributos, isto é, ter variáveis que denotem atributos. Para isso, as restrições de atributos xfy podem ser generalizadas para predicados ternários $\cdot[\cdot]\cdot$, onde $x[y]z$ representa que z é uma sub-árvore de x no atributo y. A linguagem de atributos $\mathcal{F}$ definida em [Tre93, Bac94] tem com assinatura símbolos constantes (que podem ser interpretados como atributos ou constantes) e um único símbolo de predicado ternário $\cdot[\cdot]\cdot$.

A álgebra de árvores de atributos $\mathfrak{T}_F$ é a $\mathcal{F}$-álgebra definida por:

(i) o universo de $\mathfrak{T}_F, \mathcal{U}_{\mathfrak{T}_F}$, é o conjunto de todas as árvores de atributos sobre $\mathcal{FEA} \cup \mathcal{CON}$

(ii) $a^{\mathfrak{T}_F} = (\{\epsilon\}, \{(\epsilon, a)\})$ para toda o símbolo constante $a \in \mathcal{CON} \cup \mathcal{FEA}$

(iii) $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \cdot[\cdot]\cdot^{\mathfrak{T}_F}$ se e só se existe $f \in \mathcal{FEA}$ tal que $\sigma_2 = f^{\mathfrak{T}_F}$ e $\sigma_3 = f^{-1}\sigma_1$

A álgebra $\mathfrak{T}_F$ é um modelo canónico para $\mathcal{F}$.

Nesta linguagem, por exemplo, é possível a quantificação sobre as sub-árvores duma árvore. A expressividade de $\mathcal{F}$ é obviamente muito maior do que as linguagens anteriores, e pode-se mostrar que as contém [Tre93, Bac94]. No entanto, a teoria correspondente é indecidível, [Tre93]. Em [Tre93] Treinen apresenta uma axiomatização de $\mathcal{F}$ que é completa para a satisfazibilidade de fórmulas sem quantificadores, e portanto este fragmento de $\mathcal{F}$ é decidível. Em particular, o decidira a satisfazibilidade do fragmento de conjunções de fórmulas atómicas positivas é **NP**-completo.

Backofen em [Bac94] apresenta ainda uma linguagem que permite expressões regulares sobre $\mathcal{FEA}$, $\mathcal{RFT}$. Usando esta linguagem é possível especificar propriedades de subárvores cujo caminho corresponda a uma expressão regular. Este tipo de expressões foi introduzido por Kaplan em [KI88], em formalismos linguísticos, para tratar fenómenos de longa-distância. Backofen [Bac94] mostrou que a teoria associada a $\mathfrak{R}_{FT}$ é indecidível, mas o fragmento existencial de conjunções de fórmulas atómicas positivas é decidível.

Mais recentemente, Treinen em [Tre95] apresenta uma linguagem entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{CFT}$ que é decidível. Esta linguagem admite a quantificação sobre atributos (e aridades) mas não sobre sub-árvores. Uma fórmula do tipo $xf\downarrow$ indica que o atributo f está definido para x, podendo f ser uma variável. Pode-se assim estabelecer uma relação entre conjuntos (finitos) de atributos (conjunto infinito) e fórmulas duma linguagem de árvores de atributos. Generalizando esta correspondência, Treinen apresenta uma transformação, por eliminação de quantificadores, de fórmulas da linguagem de árvores de atributos em fórmulas equivalentes da teoria de atributos associada. Se esta última teoria for decidível, a correspondente teoria de árvores de atributos também o é. No caso anterior, essa teoria é a teoria dos conjuntos finitos sobre um alfabeto infinito, que é decidível [Büc60].

3.5 Sumário

Capítulo 4

Satisfazibilidade em $\mathcal{L}_U$

Neste capítulo vamos estudar a satisfazibilidade em $\mathcal{L}_U$ para $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, isto é, dada uma restrição $c \in \mathcal{L}_U$ pretende-se saber se c é satisfazível e neste caso determinar o seu conjunto de soluções. Como exposto nas Secções 2.2.1 e 2.2.2 do Capítulo 2, este problema é decidível. No entanto, como veremos, é um problema **NP**-completo. Um resultado equivalente foi apresentado por Maher em [Mah] e por Smolka, em [Smo89], para as lógicas de estruturas de atributos. Um estudo da complexidade computacional das teorias E_{RT} e E_T foi feito por Maher [Mah], como complemento a [Mah88], onde se prova que estas teorias são **PSPACE**-completas.

O carácter exponencial dos algoritmos para decidir a satisfazibilidade em $\mathcal{L}_U$, reside na transformação de fórmulas em forma normal disjuntiva (DNF), as quais podem ter um tamanho exponencial em relação ao tamanho da fórmula inicial. O nosso objectivo será apresentar, no capítulo seguinte, resolutores de restrições em $\mathcal{L}_U$ que reduzam o custo desta transformação.

Neste e nos restantes capítulos vamos considerar essencialmente a satisfazibilidade ou outras propriedades de $\mathcal{L}_U$ na álgebra das árvores racionais, $\mathcal{RT}$. Portanto, por vezes, será omitida a referência a essa álgebra.

No entanto, as diversas formas normais e o *Calculus* de restrições apresentado pode-se adaptar para a álgebra das árvores finitas, como será referido em alguns casos.

Em geral, estamos interessados em soluções restritas a um conjunto finito de variáveis, V, tal que $Vars(c) \subseteq V$,

$$\mathcal{S}_V(c, \mathcal{RT}) = \{\rho_{|V} \mid \mathcal{RT} \models_\rho c\}$$

Como no caso da unificação, vamos ver que restrições em forma resolvida caracterizam as soluções duma conjunção de restrições atómicas positivas. Essa forma será estendida para englobar conjunções de restrições atómicas negativas e finalmente será estudado o caso de restrições em geral. Para cada caso serão estudadas algumas propriedades das formas normais encontradas.

A comutatividade, a associatividade e a idempotência da conjunção e da disjunção preservam, em qualquer álgebra $\mathcal{A}$, a satisfazibilidade das restrições $c \in \mathcal{L}_U$. Seja $\equiv_{\mathcal{B}}$ a menor relação de equivalência definida em $\mathcal{L}_U$, tal que

$$
\begin{aligned}
c_1 \wedge c_2 &\equiv_{\mathcal{B}} c_2 \wedge c_1 \\
c_1 \wedge (c_2 \wedge c_3) &\equiv_{\mathcal{B}} (c_1 \wedge c_2) \wedge c_3 \\
c \wedge c &\equiv_{\mathcal{B}} c \\
c_1 \vee c_2 &\equiv_{\mathcal{B}} c_2 \vee c_1 \\
c_1 \vee (c_2 \vee c_3) &\equiv_{\mathcal{B}} (c_1 \vee c_2) \vee c_3 \\
c \vee c &\equiv_{\mathcal{B}} c
\end{aligned}
$$

Salvo indicação em contrário, serão consideradas restrições a menos de $\equiv_{\mathcal{B}}$. Este facto permite tratar conjunções de restrições como conjuntos que, em geral, serão denotados por $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, ..., $\mathcal{C}_1$, ... O *conjunto vazio*, como conjunção vazia, corresponderá à restrição $\top$. Analogamente, a disjunção vazia corresponderá à restrição $\perp$. Como habitualmente, designaremos a conjunção por multiplicação e a disjunção por adição.

4.1 Formas Resolvidas

Definição 4.1 *Um conjunto de restrições atómicas $\mathcal{C}$ está em (ou é uma)* forma resolvida *se é $\top$ ou se satisfaz as seguintes condições:*

(i) toda a restrição em $\mathcal{C}$ é do tipo $x.f^n$, $x.f_i^n \doteq v$ ou $x = v$;

(ii) se $x = v \in \mathcal{C}$ então x ocorre exactamente uma vez em $\mathcal{C}$;

(iii) se $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{C}$ então não existe em $\mathcal{C}$ outra restrição $x.f_i^n \doteq v'$ para $v \not\equiv v'$;

(iv) se $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{C}$ então $x.f^n \in \mathcal{C}$;

(v) se $x.f^n \in \mathcal{C}$ então não existe em $\mathcal{C}$ nenhuma outra restrição do tipo $x.g^m$;

Proposição 4.2 *Se $\mathcal{C}$ é uma forma resolvida, então $\mathcal{C}$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$.*

Dem. Vamos mostrar que uma restrição em forma resolvida é equivalente a uma fórmula básica, i.e., uma fórmula resolvida racional onde certas variáveis estão existencialmente quantificadas (ver Teorema 2.30), e portanto é satisfazível. Seja $\mathcal{C}$ uma forma resolvida. Construímos a fórmula $\phi \in \mathcal{L}$ do seguinte modo (onde $\psi \in \phi$ denota que ϕ é da forma $\psi \wedge \phi'$):

(i) se $x = v \in \mathcal{C}$ então $x = v \in \phi$;

(ii) se $y.f^n \in \mathcal{C}$ então $\exists \bar{z}.\ y = t \in \phi$ onde, t é um termo tal que, visto como uma árvore, $t(\epsilon) = f^n$ e $t(i) = v_i$ se $y.f_i^n \doteq v_i \in \mathcal{C}$ ou, caso contrário, $t(i) = z_i$ onde z_i é uma variável nova e $z_i \in \bar{z}$;

Seja $\hat{\phi}$ a forma prenex normal de ϕ. Pela definição das restrições e pelo Lema 2.25, temos que $\hat{\phi} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}$. As variáveis que aparecem do lado esquerdo de cada equação são todas distintas e se $x = v \in \phi$ então x não ocorre mais em ϕ. Estas condições garantem que a conjunção de equações (matriz) de ϕ, que designaremos por $\phi_{\mathcal{C}}$, está em forma resolvida racional e que $\hat{\phi}$ é uma fórmula básica (racional).

□

As formas resolvidas serão designadas por $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, ... Dada uma forma resolvida $\mathcal{M}$ seja $\phi_{\mathcal{M}}$ a matriz da fórmula de $\mathcal{L}$ equivalente em $\mathcal{RT}$ a $\mathcal{M}$, definida na demonstração da Proposição 4.2. Temos que $\phi_{\mathcal{M}} \equiv x_1 = u_1 \wedge \ldots \wedge x_n = u_n$ onde para cada $1 \leq i \leq n$, $u_i \equiv v$ se $x_i = v \in \mathcal{M}$ ou $u_i \equiv f(v_1, \ldots v_k)$ se $x_i.f^k \in \mathcal{M}$ e para $1 \leq j \leq k$, $x_i.f_j^k \doteq v_j \in \mathcal{M}$ ou $v_j \equiv z_i$, com z_i uma variável nova. Seja $(t_1, \ldots, t_n)$ uma solução de $\phi_{\mathcal{M}}$ para $\{x_1, \ldots, x_n\}$ em $\mathcal{RT}(\Sigma \cup (Vars(\phi) - \{x_1, \ldots, x_n\})$, isto é, $t_i = u_i\{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$, identificando árvores com termos.
Definimos a substituição $\theta_{\mathcal{M}}$ em $\mathcal{RT}(\Sigma \cup X)$, por

$$\theta_{\mathcal{M}} = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$$

que é única a menos renomeação das variáveis $\bar{z}$. Para toda a atribuição de variáveis ρ em $\mathcal{RT}$, $\rho\theta_{\mathcal{M}}$ é uma solução de $\mathcal{M}$, e, inversamente, qualquer solução ρ de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{RT}$ verifica $\rho = \rho\theta_{\mathcal{M}}$.

Definição 4.3 *Se $\mathcal{C}$ é uma forma resolvida e $x = v \in \mathcal{C}$ diz-se que x é uma* variável resolvida *em $\mathcal{C}$.*

Vamos ver que um conjunto de restrições atómicas positivas satisfazível pode sempre ser transformado numa forma resolvida equivalente. As regras de reescrita a seguir apresentadas são baseadas nas originalmente usadas por Herbrand [Her30] para a resolução de equações na álgebra das árvores finitas e retomadas por Robinson no algoritmo da unificação de termos [Rob65]. Correspondem às regras de simplificação dadas por Colmerauer em [Col82] para a obtenção de formas resolvidas racionais e são, ainda, análogas às apresentadas por Smolka em [Smo89, ST92], para estruturas de atributos.

Proposição 4.4 *Qualquer conjunto $\mathcal{C}$ de restrições atómicas positivas pode ser transformado numa restrição $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}$, pela aplicação do sistema de reescrita* R, *constituído pelas seguintes regras:*

R1. $\{\top\} \cup \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$

R2. $\{v = v\} \cup \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$

R3. $\{a = b\} \cup \mathcal{C} \mapsto \bot$

R4. $\{x = v\} \cup \mathcal{C} \mapsto \{x = v\} \cup \mathcal{C}[v/x]$ *se x é distinto de v e $x \in Vars(\mathcal{C})$*

R5. $\{a = x\} \cup \mathcal{C} \mapsto \{x = a\} \cup \mathcal{C}$

R6. $\{x.f_i^n \doteq v, x.f_i^n \doteq v'\} \cup \mathcal{C} \mapsto \{x.f_i^n \doteq v', v = v'\} \cup \mathcal{C}$

R7. $\{a.f_i^n \doteq v\} \cup \mathcal{C} \mapsto \bot$

R8. $\{a.f^n\} \cup \mathcal{C} \mapsto \bot$

R9. $\{x.g^m, x.f^n\} \cup \mathcal{C} \mapsto \bot$

R10. $\{x.f_i^n \doteq v\} \cup \mathcal{C} \mapsto \{x.f^n, x.f_i^n \doteq v\} \cup \mathcal{C}$ *se $x.f^n \notin \mathcal{C}$*

O sistema de reescrita R *termina e se $\mathcal{M}$ é irredutível para este conjunto de regras e $\mathcal{M} \not\equiv \bot$ então $\mathcal{M}$ está em forma resolvida.*

Dem. As regras R1, , R2, R4 e R5 são correctas em qualquer álgebra de $\mathcal{L}$. A correcção das regras R3, R6, R7, R8, R9 e R10 resulta dos axiomas de $\mathcal{RT}$ e das definições das restrições. Analisemos a terminação. Nenhuma regra faz aumentar o número de variáveis. A aplicação das regras R3, R7, R8 ou R9 causa a terminação. A regra R1 só se aplica se inicialmente $\top \in \mathcal{C}$ e só uma vez para cada uma dessas ocorrências. A regra R2 faz diminuir o número de restrições. A regra R6 faz diminuir o número de restrições do tipo $x.f_i^n \doteq v$, portanto a sua aplicação é finita (sem a aplicação da regra R4). Se a regra R10 se aplica mais que uma vez para a mesma variável então a terminação resulta da aplicação da regra R9. As regras R2, R5, R6 e R10 só se aplicam um número finito de vezes antes da aplicação da regra R4 e, portanto se esta regra não se aplicar o processo termina. A regra R4 elimina todas as outras ocorrências duma variável em restrições do tipo $v = v'$ portanto só pode ser aplicada no máximo uma vez para cada variável. Donde, a regra aplica-se um número finito de vezes, garantindo a terminação. Finalmente, falta mostrar que as restrições irredutíveis, diferentes de $\perp$, estão em forma resolvida. Se a primeira condição não se verifica, a restrição não é irredutível: se uma restrição atómica for do tipo $v.f^n$ ou $v.f^n \doteq v'$ e v não é uma variável então a regra R8 ou a regra R7 aplica-se; se for do tipo $v = v'$ e v não for variável então uma das regras R2, R3 ou R5 aplica-se. Analogamente, mostra-se que se alguma das outras condições não se verifica, a restrição não é irredutível.

Sendo N o número de variáveis de $\mathcal{C}$ e M o número de restrições atómicas o sistema de reescrita R tem complexidade, no pior caso, da ordem $O(NM)$.[1] $\square$

Corolário 4.5 *Um conjunto $\mathcal{C}$ de restrições atómicas positivas é satisfazível em $\mathcal{RT}$ se e só se $\mathcal{C} \overset{\mathsf{R}}{\mapsto}{}^\star \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ é irredutível e $\mathcal{M} \not\equiv \perp$.*

Definição 4.6 *Uma restrição atómica positiva diz-se* contraditória *se é da forma $a = b$, com $a \not\equiv b$, $a.f^n$ ou $a.f_i^n \doteq v$. A restrição $\perp$ também é designada de* contraditória.

Uma restrição atómica contraditória não é satisfazível em $\mathcal{RT}$.

[1]Na prática pode-se implementar um algoritmo da ordem $O(N \log N)$, [Jaf84].

4.2 Formas Resolvidas Normais

Uma forma resolvida $\mathcal{M}$ define uma relação de equivalência $=_{\mathcal{M}}$ entre as suas variáveis tal que $x =_{\mathcal{M}} y$ se $x = y \in \mathcal{M}$ e $=_{\mathcal{M}}$ é a menor relação de equivalência que verifica esta condição.

Então resulta da demonstração da Proposição 4.4 que

Corolário 4.7 *Se $\mathcal{C}$ é um conjunto de restrições atómicas positivas e $\mathcal{M}$ é uma forma resolvida de $\mathcal{C}$ irredutível para o sistema de reescrita* R*, então $\mathcal{M}$ é única a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}}$.*

No entanto, duas formas resolvidas distintas podem ser equivalentes em $\mathcal{RT}$.

Por exemplo, as restrições[2] c_1 e c_2 são equivalentes em $\mathcal{RT}$:

(c_1) $\quad y.f_1^1 \doteq y \ \wedge \ x = y$

(c_2) $\quad x.f_1^1 \doteq y \ \wedge \ y.f_1^1 \doteq x$

A única solução das variáveis x e y é árvore racional cuja representação gráfica é:

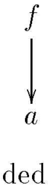
Por outro lado, numa forma resolvida duas variáveis podem corresponder à mesma árvore sem que essa identidade seja consequência da redução a forma resolvida.

A restrição $x = y$ é consequência de (é vinculada por) cada uma das seguintes restrições:

(c_3) $\quad x.f_1^1 \doteq y \ \wedge \ y.f_1^1 \doteq x$

(c_4) $\quad x.f_1^1 \doteq a \ \wedge \ y.f_1^1 \doteq a$

No caso da restrição c_4 a única solução das variáveis é a árvore racional, cuja representação gráfica é:



No entanto, aquela igualdade não pode ser deduzida do sistema de reescrita R, apresentado na Proposição 4.4.

[2] Passaremos a identificar a referência da fórmula com a denotação da restrição correspondente.

Note-se que embora este facto não seja relevante para a satisfazibilidade de conjunções de restrições atómicas positivas, é-o para a satisfazibilidade de restrições que envolvam negações. Assim, o facto da conjunção da restrição c_4 com a restrição $x \neq y$ ser não satisfazível não é "imediato" da restrição c_4, mas torna-se explícito na restrição

$$(\mathsf{c}_5) \qquad x.f_1^1 \doteq a \ \wedge \ x = y$$

que é equivalente em $\mathcal{RT}$ à restrição c_4. Esta restrição pode representar-se graficamente por:

$$\begin{array}{c} [x, y] \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_1^1} \\ a \end{array}$$

Nesta secção iremos considerar formas resolvidas $\mathcal{M}$ tal que, se a igualdade de duas variáveis é vinculada por $\mathcal{M}$, então essas variáveis pertencem à mesma classe de equivalência da relação $=_{\mathcal{M}}$.

Proposição 4.8 *Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ são formas resolvidas tais que $\mathcal{M} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}'$ então $Vars(\mathcal{M}) = Vars(\mathcal{M}')$.*

Dem. Provamos por redução ao absurdo. Suponhamos que $x \in Vars(\mathcal{M})$ e $x \notin Vars(\mathcal{M}')$. Temos os seguintes casos:

(i) se $x = v \in \mathcal{M}$, seja $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{M}', \mathcal{RT})$ tal que $\rho(x) = a$ e $\rho(v) \neq a$. Então $\rho \notin \mathcal{S}(\mathcal{M}, \mathcal{RT})$;

(ii) se $x.f^n \in \mathcal{M}$ para algum $f^n \in \Sigma$ prova-se como no caso anterior, sendo $a \neq f^n$;

(iii) se $y = x \in \mathcal{M}$ ou $y.f_i^n \doteq x$ para algum $y \in Vars(\mathcal{M})$, algum $f^n \in \Sigma$ e algum $1 \leq i \leq n$. Podemos construir $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{M}', \mathcal{RT})$ tal que $\rho(x) \neq \rho(y)$ ou $\rho(y) = t_y$ e $\rho(x) \neq t_y|_i$.

□

Em analogia com a minimização de autómatos determinísticos finitos [HU79, Col82], vamos obter uma forma resolvida mínima correspondente a uma conjunção de restrições atómicas positivas, que identifique expressões equivalentes, no sentido de corresponderem às mesmas árvores racionais. Recordando que cada árvore racional é caracterizada por um conjunto (finito) de sequências, possivelmente infinitas, de elementos de $\Pi(\Sigma)$, é necessário caracterizar estes conjuntos em termos de restrições.

Sendo $\mathcal{M}$ uma forma resolvida, o conjunto de valores de $\mathcal{M}$ é dado por

$$Val(\mathcal{M}) = Vars(\mathcal{M}) \ \cup \ \{a \mid a \in \Sigma,\ x = a \in \mathcal{M} \text{ ou } x.f_i^n \doteq a \in \mathcal{M}\}$$

A relação de equivalência $=_{\mathcal{M}}$ pode ser estendia a $Val(\mathcal{M})$, dividindo-o duma maneira única, em classes de equivalência.
Se $x \in Vars(\mathcal{M})$ e x não ocorre em nenhuma igualdade então considera-se uma classe unitária $[x]_{\mathcal{M}}$.
Pela Definição **??**, condição (ii), cada classe tem como representante um valor v que corresponde ao lado direito das equações que definem a classe e denota-se essa classe por $[v]_{\mathcal{M}}$.
Pretendemos encontrar uma forma resolvida equivalente a $\mathcal{M}$ cujo número de classes de equivalência seja mínimo.

Definição 4.9 *Sendo $\mathcal{M}$ uma forma resolvida e considerando a partição de $Val(\mathcal{M})$ em classes de equivalência, tem-se que toda a classe $[v]_{\mathcal{M}}$ satisfaz uma das seguintes condições:*

(i) *cada classe de equivalência contém no máximo uma constante, e nesse caso, designa-se a classe por* constante*;*

(ii) *se $x.f^n \in \mathcal{M}$ então a classe $[x]_{\mathcal{M}}$ é designada por* funcional *e f^n é o seu* functor*; x é também designado por* funcional*;*

(iii) *se $x.f^n \notin \mathcal{M}$ (para nenhum $f^n \in \Sigma$) e a classe de x não é constante então $[x]_{\mathcal{M}}$ é designada por* livre *em $\mathcal{M}$; a variável x também é designada por* livre *em $\mathcal{M}$.*

Note-se que a satisfazibilidade de $\mathcal{M}$ não dependente dos valores atribuídos às suas variáveis *livres*.

Definição 4.10 *Dada uma forma resolvida $\mathcal{M}$, uma variável $x \in Vars(\mathcal{M})$ diz-se* definida em *$\mathcal{M}$ se $x.f^n \in \mathcal{M}$ e para todo o $1 \leq i \leq n$, $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}$ para algum valor $v \in Val(\mathcal{M})$. Se para algum $1 \leq j \leq n$, não existe $v \in Val(\mathcal{M})$ tal que $x.f_j^n \doteq v \in \mathcal{M}$ diz-se que a variável x* não é definida para j em *$\mathcal{M}$. Uma classe funcional $[x]_{\mathcal{M}}$ diz-se* (não) definida*, se a variável x* (não) *o for em $\mathcal{M}$.*

Definição 4.11 *Sendo $\mathcal{M}$ uma forma resolvida, os valores $v, v' \in Val(\mathcal{M})$ são* equivalentes em $\mathcal{M}$, *se $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} v = v'$ e denota-se este facto por $v \sim_{\mathcal{M}} v'$. Se $v, v' \in Val(\mathcal{M})$ e $v \not\sim_{\mathcal{M}} v'$, então os valores v e v' dizem-se* distinguíveis *em $\mathcal{M}$. Duas classes $[v]_{\mathcal{M}}$ e $[v']_{\mathcal{M}}$ são distinguíveis se $v \not\sim_{\mathcal{M}} v'$.*

A relação $\sim_{\mathcal{M}}$ é uma relação de equivalência. Obviamente, todos os valores duma mesma classe $[v]_{\mathcal{M}}$ são equivalentes em $\mathcal{M}$. Por outro lado, duas constantes distintas são sempre distinguíveis e duas variáveis x e y são distinguíveis em $\mathcal{M}$ se:

- pertencem a classes constantes distintas ou se só uma delas pertence a uma tal classe.
- pertencem a classes livres em $\mathcal{M}$ distintas ou se só uma delas pertence a uma tal classe.
- pertencem a classes funcionais com functores distintos ou se só uma delas pertence a uma tal classe.
- pertencem a classes funcionais com o mesmo functor mas pelo menos uma delas não é definida em $\mathcal{M}$.

Nestes casos é fácil exibir uma atribuição de variáveis[3] ρ tal que $\mathcal{RT} \models_\rho \mathcal{M}$ e $\mathcal{RT} \not\models_\rho x = y$.

Para caracterizar todas as variáveis distinguíveis em $\mathcal{M}$, reintroduzimos a noção de caminhos mas restringindo-nos às variáveis que ocorrem em $\mathcal{M}$.

Definição 4.12 *Dada uma forma resolvida $\mathcal{M}$, o conjunto $Paths(\mathcal{M})$ dos caminhos de $\mathcal{M}$ é o menor conjunto tal que:*

(i) se $x \in Vars(\mathcal{M})$ então $x\langle\epsilon\rangle x \in Paths(\mathcal{M})$, onde ϵ denota a sequência vazia;

(ii) se $x = v \in \mathcal{M}$ então $x\langle\epsilon\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$;

(iii) se $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}$ então $x\langle f_i^n\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$;

(iv) se $x\langle p\rangle z \in Paths(\mathcal{M})$ e $z\langle q\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$ então $x\langle pq\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$, onde p e q denotam caminhos em $\Pi(\Sigma)$.

[3] No caso de Σ ser finito, supomos que Σ contém pelo menos uma constante e um functor, ou duas constantes.

Para cada $x \in Vars(\mathcal{M})$ definem-se o conjunto de caminhos de x em $\mathcal{M}$ e os conjuntos dos valores e das variáveis acessíveis de x em $\mathcal{M}$, respectivamente por:

$$\begin{aligned} Paths_x(\mathcal{M}) &= \{x\langle p\rangle v \mid x\langle p\rangle v \in Paths(\mathcal{M})\} \\ Val_x(\mathcal{M}) &= \{v \in Val(\mathcal{M}) \mid \textit{existe } p \textit{ tal que } x\langle p\rangle v \in Paths(\mathcal{M})\} \\ Vars_x(\mathcal{M}) &= Val_x(\mathcal{M}) \cap Vars(\mathcal{M}) \end{aligned}$$

Se $z \in Vars_x(\mathcal{M})$ diz-se que z depende *de x em $\mathcal{M}$.*

Noções como comprimento, maximalidade, etc, de caminhos são estendidas naturalmente para elementos de $Paths(\mathcal{M})$. Para qualquer $x \in Vars(\mathcal{M})$, o conjunto $Val_x(\mathcal{M})$ é finito e pode ser determinado a partir da definição do conjunto $Paths(\mathcal{M})$. Em particular, se $x\langle\epsilon\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$ então $x \in [v]_{\mathcal{M}}$.

Lema 4.13 *O conjunto $Paths(\mathcal{M})$ é infinito se e só se existe $x \in Vars(\mathcal{M})$ e $p \not\equiv \epsilon$ tal que $x\langle p\rangle x \in Paths(\mathcal{M})$.*

Dem. ($\Leftarrow$)

Se $x\langle p\rangle x \in Paths(\mathcal{M})$ então por indução sobre n prova-se que $\forall n > 1$, $x\langle p^n\rangle x \in Paths(\mathcal{M})$.

($\Rightarrow$)

Por redução ao absurdo. Sendo $m = |Vars(\mathcal{M})|$, se a condição não se verificar o comprimento de cada p seria no máximo m, logo $Paths(\mathcal{M})$ seria finito. $\square$

Lema 4.14 *Seja $\mathcal{M}$ uma forma resolvida e x e y variáveis distintas em $\mathcal{M}$). As variáveis x e y são distinguíveis em $\mathcal{M}$ se e só se existem p, v e v' tal que $x\langle p\rangle v$, $y\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{M})$, $v \not\equiv v'$ e, as classes $[v]_{\mathcal{M}}$ e $[v']_{\mathcal{M}}$ satisfazem uma das seguintes condições:*

1. *pelo menos uma é constante;*
2. *pelo menos uma é livre em $\mathcal{M}$;*
3. *são classes funcionais com functores distintos;*
4. *são classes funcionais com o mesmo functor mas pelo menos uma delas não é definida.*

Dem. ($\Leftarrow$)

Provamos por indução na estrutura de p que $x \not\sim_{\mathcal{M}} y$.

Base. Se $p \equiv \epsilon$, então $x \in [v]_{\mathcal{M}}$ e $y \in [v']_{\mathcal{M}}$ e é imediato que se $[v]_{\mathcal{M}}$ e $[v']_{\mathcal{M}}$ satisfazem uma das condições *1.-4.*, então $v \not\sim_{\mathcal{M}} v'$, e consequentemente $x \not\sim_{\mathcal{M}} y$.

Indução. Se $p \equiv f_i^n q$ então existem valores v_1, $v_2 \in Val(\mathcal{M})$ tal que $x.f_i^n \doteq v_1 \in \mathcal{M}$ e $y.f_i^n \doteq v_2 \in \mathcal{M}$. Se v_1 ou v_2 são constantes, verificam a condição 1 e $q \equiv \epsilon$. Podemos concluir facilmente que $x \not\sim_{\mathcal{M}} y$. Senão v_1 e v_2 são variáveis, sejam z_1 e z_2, respectivamente. Então temos $x.f_i^n \doteq z_1 \in \mathcal{M}$, $z_1\langle q\rangle v$, $y.f_i^n \doteq z_2 \in \mathcal{M}$ e $z_2\langle q\rangle v'$. Por hipótese de indução, sabemos que $z_1 \not\sim_{\mathcal{M}} z_2$, logo existe ρ tal que $\mathcal{RT} \models_\rho \mathcal{M}$ e $\rho(z_1) \neq \rho(z_2)$. Sendo $\rho(x) = t_x$ e $\rho(y) = t_y$ como $\rho(z_1) = t_x |_i \neq t_y |_i = \rho(z_2)$ então $\rho(x) \neq \rho(y)$.

($\Rightarrow$)

Sendo $x \not\sim_{\mathcal{M}} y$ existe uma atribuição das variáveis ρ tal que $\mathcal{RT} \models_\rho \mathcal{M}$ e $t_x = \rho(x) \neq \rho(y) = t_y$. Seja α a posição de comprimento mínimo tal que $t_x(\alpha) \neq t_y(\alpha)$. Provamos por indução no comprimento de α, a existência de p, v e v' que verificam as condições.

Base. Se $\alpha = \epsilon$ então $t_x(\epsilon) \neq t_y(\epsilon)$, isto é, são elementos distintos de Σ. Para todos os casos, $p \equiv \epsilon$, $x \in [v]_{\mathcal{M}}$, $y \in [v']_{\mathcal{M}}$ e uma das condições *1.-3.* é satisfeita por $[v]_{\mathcal{M}}$ e $[v']_{\mathcal{M}}$. Suponhamos que $t_x(\epsilon) = a$ e $t_y(\epsilon) = b$ então

(i) $x \in [a]_{\mathcal{M}}$ e $y \in [b]_{\mathcal{M}}$ (a condição *1.* verifica-se); ou

(ii) $x \in [a]_{\mathcal{M}}$, y é livre em $\mathcal{M}$ e $\rho(y) = b$, ou vice-versa (a condição *2.* verifica-se); ou

(iii) x e y são livres em $\mathcal{M}$ e $\rho(y) = b$ e $\rho(x) = a$ (a condição *2.* verifica-se);

(iv) e não há mais possibilidades

Analogamente, se prova para o caso de $t_x(\epsilon)$ ou $t_y(\epsilon)$ serem functores distintos.

Indução. Seja $\alpha = i\beta$ e suponhamos que $t_x(\epsilon) = t_y(\epsilon) = f^n$ e $1 \leq i \leq n$[4]. Se x ou y é livre em $\mathcal{M}$ então, mais uma vez, a condição *2.* é verificada e $p \equiv \epsilon$. Caso contrário, sabemos que $x.f^n \in \mathcal{M}$ e $y.f^n \in \mathcal{M}$. Se x ou y é não definida em $\mathcal{M}$, a condição *4.* verifica-se e $p \equiv \epsilon$. Caso contrário, $x.f_i^n \doteq v_1 \in \mathcal{M}$ e $y.f_i^n \doteq v_2 \in \mathcal{M}$.

[4] Note que nem t_x nem t_y podem ser constantes.

Então $\rho(v_1) = t_x \mid_i$, $\rho(v_2) = t_y \mid_i$ e β é a posição de comprimento mínimo tal que $t_x \mid_i (\beta) \neq t_y \mid_i (\beta)$. Se v_1 ou v_2 são constantes então, necessariamente, $\beta \equiv \epsilon$ e consideramos $p \equiv f_i^n$. Senão, v_1 e v_2 são variáveis, sejam z_1 e z_2, respectivamente. Por hipótese de indução, existe q tal que $z_1\langle q\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$ e $z_2\langle q\rangle v' \in Paths(\mathcal{M})$ e uma das condições *1.-4.* verifica-se para $[v]_{\mathcal{M}}$ e $[v']_{\mathcal{M}}$. Neste caso, consideramos $p \equiv f_i^n q$.

□

Corolário 4.15 *Sendo $\mathcal{M}$ uma forma resolvida e x e y variáveis distintas definidas em $\mathcal{M}$ então $x \sim_{\mathcal{M}} y$ se e só se para todo o p, v e v' tal que $x\langle p\rangle v$, $y\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{M})$, $v =_{\mathcal{M}} v'$ ou as classes $[v]_{\mathcal{M}}$ e $[v']_{\mathcal{M}}$ são definidas com o mesmo functor.*

O Corolário 4.15 permite concluir que $x = y$ é vinculado pelas restrições dos exemplos c_4 e c_3.

O lema seguinte apresenta um algoritmo que a partir de uma forma resolvida $\mathcal{M}$ determina todas as variáveis x, $y \in Vars(\mathcal{M})$ tal que $x \sim_{\mathcal{M}} y$.

Lema 4.16 *Sendo $\mathcal{M}$ uma forma resolvida é possível determinar todos os pares de classes de equivalência $([v]_{\mathcal{M}}, [v']_{\mathcal{M}})$ que são distinguíveis em $\mathcal{M}$.*

Dem. Considere-se o algoritmo da Figura 4.1, que é uma adaptação do usado na minimização de autómatos finitos, em [HU79].

O algoritmo termina dado que é finito o número classes e a aridade de cada functor, e não há a possibilidade de ciclo infinito no passo 2. O facto de $x \not\sim_{\mathcal{M}} y$ se e só se $([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}})$ foi marcado, é consequência do Lema 4.14.

($\Rightarrow$)

Suponhamos que $x \not\sim_{\mathcal{M}} y$ e que p é o caminho de comprimento mínimo tal que o Lema 4.14 é satisfeito. Provamos por indução na estrutura do caminho p.

Base. Se $p \equiv \epsilon$ então o par $([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}})$ é marcado no passo 1

Indução. Se $p \equiv f_i^n q$ então existem valores v_1 e v_2 tais que $x.f_i^n \doteq v_1 \in \mathcal{M}$ e $y.f_i^n \doteq v_2 \in \mathcal{M}$. Se v_1 ou v_2 são constantes então $q \equiv \epsilon$ e o par $([v_1]_{\mathcal{M}}, [v_2]_{\mathcal{M}})$ é marcado no passo 1. Logo, o par $([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}})$ é marcado no passo 2. Senão v_1 e

Entrada: Conjunto de classes de equivalência duma forma resolvida $\mathcal{M}$.

Saída: Pares de classes de equivalência distinguíveis.

Passo 1

Marcar todos pares de classes distintas $([v]_{\mathcal{M}}, [v']_{\mathcal{M}})$ que verifiquem uma das seguintes condições:

- pelo menos uma delas é constante;
- pelo menos uma delas é livre em $\mathcal{M}$;
- são classes funcionais com functores distintos;
- são classes funcionais com o mesmo functor mas pelo menos uma delas não é definida.

Passo 2

Enquanto existe um par não marcado de classes funcionais definidas $([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}})$ com um mesmo functor f^n, tal que para algum $1 \leq i \leq n$, $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}$, $y.f_i^n \doteq v' \in \mathcal{M}$ e $([v]_{\mathcal{M}}, [v']_{\mathcal{M}})$ está marcado **faça** {

marcar o par $([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}})$

}

Figura 4.1: Algoritmo para identificar classes distinguíveis numa forma resolvida $\mathcal{M}$.

v_2 são variáveis e q é o caminho mínimo que distingue v_1 de v_2. Por hipótese de indução, $([v_1]_{\mathcal{M}}, [v_2]_{\mathcal{M}})$ é marcado pelo algoritmo. E portanto, o par $([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}})$ é marcado no passo 2.

$(\Leftarrow)$
Por indução, supondo que o resultado é válido para os pares já marcados.

Sendo N o número de classes de equivalência de $\mathcal{M}$ e

$$K = max\{n \in \mathbb{N} \mid f^n \in \Sigma \text{ e } f^n \text{ é o functor de alguma classe } [x]_{\mathcal{M}}\}$$

o algoritmo da Figura 4.1 é da ordem $O(KN^2)$. $\square$

Se $x,\ y \in Vars(\mathcal{M})$ distintos e o par $([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}})$ não é marcado pelo algoritmo da Figura 4.1, então $x \sim_{\mathcal{M}} y$.

Definição 4.17 *Uma forma resolvida $\mathcal{M}$ é* normal *se para todas as variáveis $x,\ y \in Vars(\mathcal{M})$ tal que $x \sim_{\mathcal{M}} y$, então $x =_{\mathcal{M}} y$.*

Proposição 4.18 *Toda a forma resolvida $\mathcal{M}$ pode ser transformada numa forma normal equivalente pela aplicação da seguinte regra de reescrita:*

N1. $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}\ \cup\ \{x = y\}$ *se* $x,\ y \in Vars(\mathcal{M})$, $x \sim_{\mathcal{M}} y$ *e* $x \neq_{\mathcal{M}} y$

e reduzindo a restrição irredutível resultante a forma resolvida, usando o sistema de reescrita R.

Dem. Sendo $\mathcal{M}$ uma forma resolvida aplique-se o algoritmo da Figura 4.1. Para cada par de classes não marcadas $([x]_{\mathcal{M}}, [y]_{\mathcal{M}})$, x e y verificam a condição da regra de reescrita e são as únicas variáveis de $\mathcal{M}$ que a verificam. Como é finito o número de tais pares, a aplicação da regra termina. Se não existirem tais pares, $\mathcal{M}$ já está em forma normal, e nada há a fazer. Senão, pela definição de $\sim_{\mathcal{M}}$ é evidente que a forma resultante é equivalente à inicial, i.e., $\mathcal{M} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}\ \wedge\ x = y$, para cada par de variáveis, x e y. A redução a forma resolvida garante que se $x \sim_{\mathcal{M}} y$ então x e y pertencem à mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}}$. $\square$

Iremos designar por sistema de reescrita N o sistema de reescrita que resulta do sistema de reescrita R acrescentando, com o controlo indicado na Proposição 4.18, a regra N1.

Proposição 4.19 *Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ são formas normais tais que $\mathcal{M} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}'$, então as relações $=_{\mathcal{M}}$ e $=_{\mathcal{M}'}$ são a mesma relação e $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ são idênticas a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}}$.*

Dem. Tem-se que que $Vars(\mathcal{M}) = Vars(\mathcal{M}')$. Sejam m e m', respectivamente, o número de classes de equivalência de $=_{\mathcal{M}}$ e $=_{\mathcal{M}'}$ e suponhamos que $m' > m$. Sejam x e y tal que $x =_{\mathcal{M}} y$ e $x \neq_{\mathcal{M}'} y$. Mas então $x \sim_{\mathcal{M}} y$ e como $\mathcal{RT} \models \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{M}'$, $x \sim_{\mathcal{M}'} y$ o que contradiz o facto de $\mathcal{M}'$ ser normal. Logo $x =_{\mathcal{M}} v$ se e só se $x =_{\mathcal{M}'} v$. Por outro lado, $[x]_{\mathcal{M}}$ é unitária se e só se $[x]_{MM'}$ o for. A identidade resulta do facto de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ serem formas resolvidas equivalentes. $\square$

Resulta imediatamente da Proposição 4.18 o seguinte corolário:

Corolário 4.20 *Se $\mathcal{M}$ é uma forma resolvida, a sua forma normal é obtida pela conjunção de $\mathcal{M}$ com restrições do tipo $x = y$, tal que $x \sim_{\mathcal{M}} y$, e eliminando restrições do tipo $v = v$, $a = x$ e $x.f_i^n \doteq v$.*

Dem. A redução a forma normal é feita por aplicação finita das regras $\mathsf{R2}$, $\mathsf{R4}$, $\mathsf{R5}$ ou $\mathsf{R6}$ do sistema de reescrita R de redução a forma resolvida. $\square$

Teorema 4.21 *Todo o conjunto $\mathcal{C}$ de restrições atómicas positivas ou não é satisfazível ou $\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é uma forma normal e $\mathcal{M}$ é única a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}}$.*

Dem. É consequência das Proposições 4.4, 4.18 e 4.19. $\square$

Pelo Teorema 4.21, uma forma normal $\mathcal{M}$ será considerada, salvo indicação em contrário, a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}}$. Usaremos, a relação $\equiv$ para indicar que duas formas normais $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são idênticas a menos essa permutação. Esta notação aplica-se também a formas resolvidas.

4.2.1 Formas Normais para $\mathcal{T}$

Nesta secção vamos apenas referir quais as formas normais de $\mathcal{L}_U$ para o caso de $\mathcal{A} = \mathcal{T}$. Uma restrição $\mathcal{M} \in \mathcal{L}_U$ é uma *forma resolvida finita* se $\mathcal{M}$ é uma forma resolvida e para além disso verifica a seguinte condição:

(vi) para todo $x \in Vars(\mathcal{M})$, se $x\langle p\rangle x \in Paths\mathcal{M}$ então $p \equiv \epsilon$

Uma forma resolvida finita $\mathcal{M}$ é *normal* se e só se verifica a seguinte condição:

(i) se existem $x,\ y \in Vars(\mathcal{M})$ e valor v tal que $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}$ e $y.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}$ então para algum $1 \leq j \leq n$ não existe v' tal que $x.f_i^n \doteq v' \in \mathcal{M}$ e $y.f_i^n \doteq v' \in \mathcal{M}$

Proposição 4.22 *Se $\mathcal{M}$ é uma forma resolvida finita então $\mathcal{M}$ é satisfazível em $\mathcal{T}$.*

Dem. Resulta da Proposição 4.2 e do Lema 4.13. □

Proposição 4.23 *Se $\mathcal{M}$ é uma forma resolvida finita normal então $\forall x,\ y \in Vars(\mathcal{M})$, $x \sim_{\mathcal{M}} y$ se e só se $x =_{\mathcal{M}} y$.*

Dem. Pelo Lema 4.14 e Corolário 4.15. □

4.3 Formas Primárias

Nesta secção vamos analisar a satisfazibilidade duma conjunção $\mathcal{C}_p \ \wedge \ \mathcal{C}_n$ de restrições atómicas positivas e negativas. Podemos supor que a conjunção $\mathcal{C}_p$ de restrições atómicas positivas está em forma normal. A noção de forma resolvida normal será estendida, de modo a incluir restrições atómicas negativas, a uma forma que chamaremos *forma primária*.[5]
O estudo destas restrições será dividido em dois casos, consoante o cardinal da assinatura Σ seja infinito ou finito. Enquanto que, no primeiro caso, cada conjunção de restrições atómicas satisfazível será caracterizada por uma forma primária, no segundo, será caracterizada por uma disjunção dessas formas. Para ambos os casos, serão ainda analisadas as condições em que as restrições negativas podem ser eliminadas ou substituídas por disjunções de restrições positivas.

Começamos por caracterizar as restrições negativas *triviais*.

Definição 4.24 *Uma restrição atómica negativa diz-se* trivial *se é do tipo $v \neq v$ ou $\neg a.f^n$. No primeiro caso, é ainda designada por restrição* contraditória.

[5] Não se usa a designação de *básica* para evitar confusões com as *fórmulas básicas* tal como definidas por Maher [Mah88], embora outros autores usem o termo *básica* para outros tipos de fórmulas, por exemplo em [Com91]. As propriedades essenciais destas fórmulas são: serem satisfazíveis e qualquer outra fórmula ser equivalente a uma sua combinação booleana.

As restrições do tipo $v \neq v$ são não satisfazíveis em qualquer álgebra de $\mathcal{L}$. As restrições do tipo $\neg a.f^n$ são válidas em $\mathcal{RT}$.

Embora em $\mathcal{L}_U$ não exista o operador de negação de restrições, se c for uma restrição atómica positiva do tipo $v = v'$ ou $x.f^n$, denotamos por $\neg c$ a restrição negativa correspondente, e, analogamente, se c for uma restrição atómica negativa, $\neg c$ representa a restrição positiva correspondente.

4.3.1 Formas Primárias para Σ infinito

Lema 4.25 *Seja $\mathcal{C}$ um conjunto de restrições atómicas negativas não triviais do tipo $x \neq v$ ou $\neg x.f^n$. Se $\mid \Sigma \mid = \infty$, então $\mathcal{C}$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$.*

Dem. Seja $Sym = \{\tau \in \Sigma : \ x \neq \tau \in \mathcal{C}$ ou $\neg x.\tau \in \mathcal{C}\}$. Como Sym e $Vars(\mathcal{C})$ são finitos, basta considerar uma solução ρ, tal que $\rho(x) = t_x$ e $t_x(\epsilon) \in \Sigma \setminus Sym$ seja diferente para cada $x \in Vars(\mathcal{C})$. □

O lema seguinte afirma que $\mathcal{L}_U$ verifica a propriedade da *Independência das Restrições Negativas*. É uma generalização do Lema da *Independência das Desigualdades* (ver página 18) e é uma consequência imediata do lema anterior.

Lema 4.26 *Seja $\mid \Sigma \mid = \infty$ e $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m$, onde $\mathcal{C}_p$ é um conjunto de restrições atómicas positivas e cada n_i uma restrição atómica negativa. A restrição $\mathcal{C}$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$ se e só se para todo o $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ o for.*

Dem. ($\Rightarrow$)

É trivial.

($\Leftarrow$)

Analisemos o caso de algum n_i ser trivial. Se n_i é do tipo $v \neq v$, então $\mathcal{C}$ é não satisfazível em $\mathcal{RT}$. Se n_i é do tipo $\neg a.f^n$, então n_i pode ser omitido. Caso contrário, se $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m \Leftrightarrow \perp$ então existe i tal que $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_p \wedge n_i \Leftrightarrow \perp$, caso contrário teríamos $\mathcal{RT} \models n_1 \wedge \ldots \wedge n_m \Leftrightarrow \perp$ o que contradiz o Lema 4.25.
□

Sendo $\mathcal{C}_p$ uma forma resolvida normal, $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ é não satisfazível em $\mathcal{RT}$ se e só se $\mathcal{C}_p \models_{\mathcal{RT}} \neg n_i$, isto é, se $\mathcal{C}_p$ vincula $\neg n_i$ em $\mathcal{RT}$, em que $\neg n_i$ é uma restrição atómica positiva, que denotaremos por c_i. Podemos distinguir os seguintes casos:

- Se $\mathcal{C}_p \wedge c_i \overset{\mathsf{R}}{\mapsto}^{\star} \perp$, então $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ é satisfazível e $\mathcal{C}_p \models_{\mathcal{RT}} n_i$.
- Se $\mathcal{C}_p \wedge c_i \overset{\mathsf{R}}{\mapsto}^{\star} \mathcal{C}_p$, então $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ é não satisfazível e $\mathcal{C}_p \models_{\mathcal{RT}} c_i$.
- Se $\mathcal{C}_p \wedge c_i \overset{\mathsf{R}}{\mapsto}^{\star} \mathcal{C}'_p$ e $\mathcal{C}'_p \not\equiv \mathcal{C}_p$ é uma forma normal, então $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ é satisfazível. Como veremos, no Capítulo 5, Corolário 5.5, resulta duma extensão do Lema 4.51 que neste caso $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}'_p \Leftrightarrow \mathcal{C}_p \wedge c'$ e $c' \equiv c'_1 \wedge \ldots \wedge c'_n$, com cada c'_i da forma $v = v'$ ou $v.f^n$. Então $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_p \wedge n_i \Leftrightarrow \mathcal{C}_p \wedge (\neg c'_1 \vee \ldots \vee \neg c'_n)$.

No entanto, nesta secção iremos ver que no caso de $\mathcal{C}_p$ ser uma forma resolvida normal podemos caracterizar as conjunções de restrições atómicas satisfazíveis sem necessitar de avaliar $\mathcal{C}_p \wedge c_i$. Uma comparação entre os dois métodos será feita no fim da Secção 5.1.

Definição 4.27 *Sendo $\mid \Sigma \mid = \infty$, um conjunto de restrições $\mathcal{C}$ está em (ou é uma)* forma primária *se é $\top$ ou se satisfaz as seguintes condições:*

(i) toda a restrição em $\mathcal{C}$ é do tipo $x.f^n$, $x.f_i^n \doteq v$, $x = v$, $x \neq v$ ou $\neg x.f^n$;

(ii) o conjunto de todas as restrições atómicas positivas de $\mathcal{C}$ está em forma resolvida normal e denota-se por $\mathcal{C}_p$;

(iii) se $x = v \in \mathcal{C}_p$ então x ocorre exactamente uma vez em $\mathcal{C}$;

(iv) se $x \neq a \in \mathcal{C}$ ou $\neg x.f^n \in \mathcal{C}$ então ou $x \notin Vars(\mathcal{C}_p)$ ou $[x]_{\mathcal{C}_p}$ é livre em $\mathcal{C}_p$;

(v) se $x \neq y \in \mathcal{C}$ então $y \neq x \notin \mathcal{C}$ e $x \not\equiv y$.

Considerando a condições (i) e (iv) da definição anterior, numa forma primária não vamos distinguir $v \neq v'$ de $v' \neq v$.

Proposição 4.28 *Se $\mid \Sigma \mid = \infty$ e $\mathcal{C}$ é uma forma primária, então $\mathcal{C}$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$.*

Dem. Seja $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma forma primária. Os casos $\mathcal{C}_p \equiv \top$ ou $\mathcal{C}_n \equiv \top$ são triviais. Sendo $\mathcal{C}_n \equiv n_1 \wedge \ldots \wedge n_m$, resulta do Lema 4.26 que $\mathcal{C}$ é satisfazível se para todo o $1 \leq i \leq m$, a conjunção $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ o for. Por outro lado, $\rho\theta_{\mathcal{C}_p}$ é uma solução de $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ se ρ for construída como na demonstração do Lema 4.25. No caso de n_i ser do tipo $x \neq a$ ou $\neg x.f^n$ a condição *(iv).* garante a existência de solução. No caso *(v).* a existência de solução resulta do facto de $\mathcal{C}_p$ estar em forma normal e, portanto, $x \neq y \in \mathcal{C}$ se $\mathcal{C}_p$ não vincula $x = y$ em $\mathcal{RT}$. $\square$

Proposição 4.29 *Seja* $\mid \Sigma \mid = \infty$. *Qualquer conjunto de restrições atómicas* $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ *pode ser transformado numa restrição* $\mathcal{C}$, *tal que* $\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}'$ *e* $\mathcal{C}'$ *ou é uma forma primária* $\mathcal{C}'_p \wedge \mathcal{C}'_n$ *ou é* $\perp$. *A transformação é efectuada pela redução do conjunto de restrições atómicas positivas de* $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_p$ *a forma resolvida normal* $\mathcal{C}'_p$ *ou a* $\perp$, *e depois, no primeiro caso, pela aplicação das restantes regras do sistema reescrita* P, *a seguir apresentado, até obter uma restrição irredutível.*

P1. $\mathcal{C}_p \cup \mathcal{C}_n \mapsto \perp$ *se* $\mathcal{C}_p \overset{\mathsf{R}}{\mapsto^\star} \perp$

P2. $\mathcal{C}_p \cup \mathcal{C}_n \mapsto \mathcal{C}'_p \cup \mathcal{C}_n$ *se* $\mathcal{C}_p \overset{\mathsf{N}}{\mapsto^\star} \mathcal{C}'_p$ *e* $\mathcal{C}'_p$ *é uma forma normal*

P3. $\{\top\} \cup \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$

P4. $\{\perp\} \cup \mathcal{C} \mapsto \perp$ *se* $\mathcal{C} \not\equiv \top$

P5. $\{x = v\} \cup \mathcal{C} \mapsto \{x = v\} \cup \mathcal{C}[v/x]$ *se* $x \in Vars(\mathcal{C})$

P6. $\{a \neq x\} \cup \mathcal{C} \mapsto \{x \neq a\} \cup \mathcal{C}$

P7. $\{a \neq b\} \cup \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ *se* a *e* b *são constantes distintas*

P8. $\{v \neq v\} \cup \mathcal{C} \mapsto \perp$

P9. $\{\neg a.f^n\} \cup \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$

P10. $\{x \neq a\} \cup \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ *se* $x.f^n \in \mathcal{C}_p$, *para algum* $f^n \in \Sigma$

P11. $\{\neg x.g^m\} \cup \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ *se* $x.f^n \in \mathcal{C}_p$, *para algum* $f^n \neq g^m$

P12. $\{\neg x.f^n\} \cup \mathcal{C} \mapsto \perp$ *se* $x.f^n \in \mathcal{C}_p$

P13. $\{x \neq y, y \neq x\} \cup \mathcal{C} \mapsto \{x \neq y\} \cup \mathcal{C}$

Dem. A redução da conjunção de restrições atómicas positivas de $\mathcal{C}'$ a forma resolvida normal garante que $\mathcal{C}' \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}_p \cup \mathcal{C}''$, onde $\mathcal{C}''$ é uma conjunção de restrições atómicas negativas, ou $\mathcal{C}' \approx_{\mathcal{RT}} \perp$. No primeiro caso, vejamos que as regras P3–P13 são correctas em $\mathcal{RT}$, terminam e que as restrições irredutíveis ou são $\perp$ ou formas primárias. Como na Proposição 4.4, as regras P3–P8 e P13 são correctas em qualquer álgebra de $\mathcal{L}$. A correcção das restantes resulta dos axiomas de $\mathcal{RT}$, da definição das restrições, como abreviaturas de fórmulas de $\mathcal{L}$, e do facto de $\mathcal{C}_p$ estar em forma normal. A análise da terminação é análoga à efectuada para a Proposição 4.4. Nenhuma regra faz aumentar o número de variáveis nem o número de restrições. As regras P4, P8 e P12 fazem terminar. A regra P3 só se aplica se $\top \in \mathcal{C}$ inicialmente (logo, em número finito[6]). As regras P7, P9, P10, P11 e P13 fazem diminuir o número de restrições. As regras P6, P7, P9, P10, P11 e P13 aplicam-se um número finito de vezes antes da aplicação da regra P5 e, portanto, se esta regra não se aplicar o processo termina. Ora, como $\mathcal{C}_p$ está em forma resolvida normal existe no máximo uma restrição do tipo $x = v$ para cada variável que ocorre em $\mathcal{C}$ e x não ocorre mais em $\mathcal{C}_p$. Assim , a regra P5 só se pode aplicar um número finito de vezes. Finalmente, é imediato que se para uma restrição, diferente de $\bot$, alguma das condições na definição de forma primária não se verifica, a restrição não é irredutível.

Supondo que $\mathcal{C}_p$ está em forma resolvida normal o sistema de reescrita P tem complexidade linear no número de restrições atómicas. $\square$

Corolário 4.30 *Seja* $\mid \Sigma \mid = \infty$. *Se* $\mathcal{C}'$ *é um conjunto de restrições atómicas e* $\mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ *é uma forma primária de* $\mathcal{C}'$ *obtida pelo algoritmo da Proposição 4.29, então* $\mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ *é única a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de* $=_{\mathcal{C}_p}$.

Corolário 4.31 *Um conjunto* $\mathcal{C}$ *de restrições atómicas é não satisfazível em* $\mathcal{RT}$ *se e só se* $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto}^{\star} \bot$.

O lema seguinte permite caracterizar em termos de caminhos, os conjuntos de restrições atómicas não satisfazíveis em $\mathcal{RT}$. Para tal é necessário, considerar a noção de caminhos definida em qualquer conjunto $\mathcal{C}_p$ de restrições atómicas positivas. Analogamente, podemos considerar a relação $=_{\mathcal{C}_p}$ definida nos valores de $\mathcal{C}_p$.

Lema 4.32 *Um conjunto* $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ *de restrições atómicas é não satisfazível em* $\mathcal{RT}$ *se e só se contém alguma restrição contraditória ou existem* $x \in Vars(\mathcal{C})$, p, v *e* v' *tal que* $x\langle p\rangle v$, $x\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{C}_p)$ *e as classes* $[v]_{\mathcal{C}_p}$ *e* $[v']_{\mathcal{C}_p}$ *satisfazem uma das seguintes condições:*

1. *são constantes distintas;*

2. *uma é funcional e outra é constante;*

[6] Considerando a idempotência da conjunção esse número é no máximo 1.

3. *são classes funcionais com functores distintos;*

4. $v \neq v' \in \mathcal{C}_n$

5. $[v]_{\mathcal{C}'_p}$ *é uma classe funcional com functor* f^n *e* $\neg v'.f^n \in \mathcal{C}$ *(ou vice-versa).*

Dem. Pelo Corolário 4.31, um conjunto de restrições atómicas é não satisfazível se e só se $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \perp$.

($\Leftarrow$)

Se $\mathcal{C}$ contém alguma restrição contraditória é trivial verificar que $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \perp$. Caso contrário, supondo que existem $x \in Vars(\mathcal{C})$, p, v e v' tal que $x\langle p\rangle v$, $x\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{C}_p)$ e as classes $[v]_{\mathcal{C}_p}$ e $[v']_{\mathcal{C}_p}$ verificam uma das condições 1–5, provamos por indução na estrutura do caminho p, que $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \perp$.

Base. Se $p \equiv \epsilon$, para cada uma das condições 1–5 é simples exibir uma derivação $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \perp$.

Indução. Se $p \equiv f_i^n q$ então existem valores v_1 e v_2 tais que $x.f_i^n \doteq v_1 \in \mathcal{C}_p$ e $x.f_i^n \doteq v_2 \in \mathcal{C}_p$. Se v_1 ou v_2 são constantes, então $q \equiv \epsilon$ e as classes $[v_1]_{\mathcal{C}_p}$ e $[v_2]_{\mathcal{C}_p}$ verificam uma das condições 1, 2 ou 4. Para cada uma dessas condições, é também fácil obter a partir de $\mathcal{C}$ uma derivação de $\perp$. Senão, v_1 e v_2 são variáveis, sejam z_1 e z_2, respectivamente. Então temos $x.f_i^n \doteq z_1 \in \mathcal{C}_p$, $z_1\langle q\rangle v$, $x.f_i^n \doteq z_2 \in \mathcal{C}_p$ e $z_2\langle q\rangle v'$. Aplicando a regra R6 a $\mathcal{C}$ obtém-se $\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C} \wedge z_1 = z_2$ e $\mathcal{RT} \models \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}'$. Temos que $z_1\langle q\rangle v$, $z_1\langle q\rangle v' \in \mathcal{C}'_p$ e por hipótese de indução existe uma derivação $\mathcal{C}' \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \perp$. Obtemos, assim, uma derivação $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \perp$.

($\Rightarrow$)

Se $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \perp$, provamos por indução no menor número n de aplicações de regras de reescrita para produzir $\perp$, que ou $\mathcal{C}$ contém alguma restrição contraditória ou existem x, p, v e v', tal que $x\langle p\rangle v$, $x\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{C}_p)$ e as classes $[v]_{\mathcal{C}_p}$ e $[v']_{\mathcal{C}_p}$ verificam uma das condições 1–5.

Base. Seja $n = 1$. Se a regra aplicada for uma das regras R3, R7 ou R8 do sistema de reescrita R ou a regra P9 do sistema de reescrita P, então $\mathcal{C}$ contém uma restrição contraditória. Se a regra aplicada for a regra R9 ou a regra P12, tomamos x a variável envolvida na aplicação dessa regra, $v \equiv v' \equiv x$ e $p \equiv \epsilon$.

Indução. Suponhamos que, sendo $\mathcal{C}$ um conjunto de restrições atómicas, se $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto}^{\star} \perp$ em menos de n aplicações então existe $x \in Vars(\mathcal{C})$, p, v e v' tal que $x\langle p\rangle v,\ x\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{C}_p)$ e as classes $[v]_{\mathcal{C}_p}$ e $[v']_{\mathcal{C}_p}$ verificam uma das condições 1–5. Consideremos que $\mathcal{C} \overset{\mathsf{P}}{\mapsto}^{\star} \perp$ em n aplicações. A aplicação das regras R1, R2, R5, P6, P7, P9, P10, P11 e P13 não conduzem a uma derivação de $\perp$ e, portanto, é necessária a aplicação duma das regras R4, R6 ou R10.

Caso R4. Seja $x = v$ a equação envolvida na aplicação desta regra. Então $\mathcal{C}[x/v] \overset{\mathsf{P}}{\mapsto}^{\star} \perp$ em menos de n aplicações. Suponhamos que $\mathcal{C}[x/v] \equiv \mathcal{C}'_p \ \wedge\ \mathcal{C}'_n$ contém uma restrição contraditória, diferente de $\perp$. Para cada um dos tipos de restrições contraditórias, tomamos esse x e $p \equiv \epsilon$. Caso contrário, por hipótese de indução, sejam $x_1 \in Vars(\mathcal{C}[x/v])$, q, v_1 e v'_1 nas condições referidas. As mesmas expressões podem ser usadas para $\mathcal{C}$.

Caso R6. Sejam $x.f_i^n \doteq v$ e $x.f_1^n \doteq v'$ as restrições envolvidas na aplicação desta regra. Análogo ao caso anterior. Consideramos, na primeira parte, $p \equiv f_i^n$ e na segunda $p \equiv f_i^n q$, se $x_1 \equiv v$ ou $x_1 \equiv v'$.

Caso R10. Da aplicação desta regra não resultam restrições contraditórias. Basta, considerar as expressões obtidas pela hipótese de indução.

□

Apesar da unicidade duma forma primária, obtida pelo sistema de reescrita P, esta pode conter restrições *redundantes*.

Definição 4.33 *Sendo $\mathcal{C}$ um conjunto de restrições diz-se que $c_1 \in \mathcal{C}$, é* redundante *em $\mathcal{C}$, se $\mathcal{S}(\mathcal{C}, \mathcal{RT}) = \mathcal{S}(\mathcal{C} \setminus \{c_1\}, \mathcal{RT})$. Se $c_1 \notin \mathcal{C}$ diz-se que c_1 é redundante em $\mathcal{C}$ se c_1 é redundante em $\mathcal{C} \ \wedge\ c_1$.*

Pela definição anterior, temos que uma forma normal $\mathcal{M}$ pode conter restrições redundantes do tipo $x.f^n$ desde que contenha alguma do tipo $x.f_i^n \doteq v$. No entanto, a inclusão de restrições do tipo $x.f^n$, na condição (iv) da Definição **??** de forma resolvida é apenas uma questão técnica, que facilita a detecção da não satisfazibilidade, e, portanto, *não* serão consideradas *redundantes*[7].

[7] Em termos da implementação computacional, essas restrições não alteram a representação duma forma resolvida.

Lema 4.34 *Uma forma normal $\mathcal{M}$ não contém restrições redundantes. Em particular, se c é uma restrição atómica positiva e se $\mathcal{M} \models c$, então $c \in \mathcal{M}$ a menos permutação de variáveis na mesma classe equivalência de $=_{\mathcal{M}}$.*

Dem. Por indução na estrutura de $\mathcal{M}$. $\square$

Pela Proposição 2.15, sendo $\mathcal{C}$ um conjunto de restrições atómicas e $c_1 \notin \mathcal{C}$ uma restrição atómica positiva, se $\mathcal{RT} \not\models \mathcal{C} \wedge \neg c_1$ então c_1 é redundante em $\mathcal{C}$.
Resulta ainda do Lema 4.25, que[8]:

Proposição 4.35 *Seja $\mid \Sigma \mid = \infty$. Sendo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma forma primária, $n_i \in \mathcal{C}_n$ é redundante em $\mathcal{C}$ se e só se ou $\mathcal{RT} \not\models \mathcal{C}_p \wedge \neg n_i$ ou existe $n_k \in \mathcal{C}_n$, com $i \neq k$, tal que $\mathcal{C}_p \wedge n_k \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}_p \wedge n_i$, ou equivalentemente, $\mathcal{C}_p \wedge \neg n_i \models_{\mathcal{RT}} \neg n_k$.*

Pela definição, uma forma primária $\mathcal{C}$ só pode conter restrições redundantes da forma $x \neq y$.

Definição 4.36 *Se $\mathcal{C}$ é um conjunto de restrições satisfazível e $\mathcal{C} \models_{\mathcal{RT}} x \neq y$ dizemos que x e y são variáveis* incompatíveis em $\mathcal{C}$. *Esta noção estende-se naturalmente a* valores *e* classes.

Pela Proposição 4.35 e pela Definição 4.27 de formas primárias, temos

Proposição 4.37 *Sendo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma forma primária e $x, y \in Vars(\mathcal{C})$, x e y são incompatíveis em $\mathcal{C}$ se e só se $\mathcal{C} \wedge x = y \overset{\mathsf{P}}{\mapsto}^{\star} \bot$.*

Salvo referência em contrário vamos supor que uma forma primária não contém restrições redundantes.

Note-se que a exigência de numa forma primária, a conjunção de restrições atómicas positivas $\mathcal{C}_p$ estar em forma normal pode ser enfraquecida, atendendo a que ela só é necessária para determinar a satisfazibilidade duma forma primária, quando ocorrem restrições do tipo $x \neq y$. Assim, suponhamos que $\mathcal{C}_p$ é uma forma resolvida. Depois de se aplicar o sistema de reescrita P da Proposição 4.29, excluindo as regras $\mathsf{P1}$ e $\mathsf{P2}$, para cada restrição da forma $x \neq y$ aplica-se a seguinte versão restrita do algoritmo da Figura 4.1: considera-se na entrada do algoritmo

[8] Esta proposição corresponde, para $\mathcal{L}_U$, à Proposição 6.2 em [LMM87] para sistemas de equações e inequações no Universo de Herbrand.

apenas o conjunto de todos os pares de classes $([w]_{\mathcal{C}_p}, [z]_{\mathcal{C}_p})$ para as quais existe p tal que $x\langle p\rangle w \in Paths(\mathcal{C}_p)$ e $y\langle p\rangle z \in Paths(\mathcal{C}_p)$. Se algum destes pares for "marcado" (no passo 1 ou no passo 2) conclui-se imediatamente que $x \not\approx_{\mathcal{C}_p} y$ e portanto o algoritmo pode terminar. Se todos esses pares $([x]_{\mathcal{C}_p}, [y]_{\mathcal{C}_p})$ forem distinguíveis em $\mathcal{C}_p$, a restrição inicial é satisfazível, caso contrário, não o é.

Este método apresenta as seguintes desvantagens, quando comparado com o da obtenção duma forma normal:

- não se obtém uma forma única, e, habitualmente mais simples, para a conjunção de restrições atómicas positivas.
- repetição desnecessária de marcações de pares de classes distinguíveis.

A vantagem é, obviamente, evitar o cálculo da forma normal.

Tal como no caso de conjuntos de equações e desigualdades no Universo de Herbrand [LMM87], vamos ver que em geral numa forma primária (sem redundâncias) as negações não podem ser substituídas por uma disjunção de restrições atómicas positivas.

Começamos por apresentar uma generalização do Lema 4.26.

Proposição 4.38 *Seja* $\mid \Sigma \mid = \infty$ *e sejam* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{M}_i$*, para* $1 \leq i \leq m$*, formas normais. Se* $\mathcal{M} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{M}_m$ *então, para algum* $\mathcal{M}_i$*, com* $1 \leq i \leq m$*, tem-se que* $\mathcal{M} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}_i$*.*

Dem. Provamos por redução ao absurdo. Suponhamos que para todo o $1 \leq i \leq m$ temos $\mathcal{S}(\mathcal{M}_i, \mathcal{RT}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{M}, \mathcal{RT})$. Então,

$$\forall\, i,\ 1 \leq i \leq m,\ \exists \rho_i\ \rho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{M}, \mathcal{RT}) \text{ e } \rho_i \notin \mathcal{S}(\mathcal{M}_i, \mathcal{RT})$$

Como $Vars(\mathcal{M}) \subseteq Vars(\mathcal{M}_i)$ e como qualquer solução ρ' de $\mathcal{M}_i$ verifica $\rho' = \rho'\theta_{\mathcal{M}}$, para cada $1 \leq i \leq m$ existe $x_i \in Vars(\mathcal{M}_i)$ tal que uma das seguintes condições ocorre:

(i) $x_i \in [y]_{\mathcal{M}_i}$, $y \not\equiv x_i$, e tal não acontece em $\mathcal{M}$.

(ii) $x_i \notin Vars(\mathcal{M})$ ou $[x_i]_{\mathcal{M}}$ é livre e $[x_i]_{\mathcal{M}_i}$ é constante ou funcional

(iii) $[x_i]_{\mathcal{M}}$ é funcional com functor f^n, é não definida em j, para algum $1 \leq j \leq n$, e $[x_i]_{\mathcal{M}_i}$ é definida em j.

As condições anteriores garantem que existem p e v_i tal que $x_i\langle p\rangle v_i \in Paths(\mathcal{M}_i)$, com $x_i \not\equiv v_i$ se $p \equiv \epsilon$, e para p não existe v_i' tal que $x_i\langle p\rangle v_i' \in Paths(\mathcal{M})$ ou se existe v_i' é livre e v_i é constante ou funcional.

Supondo que as variáveis introduzidas por $\theta_{\mathcal{M}}$ não ocorrem em nenhum dos $\mathcal{M}_i$, seja Y o seguinte conjunto de variáveis:

$$\begin{array}{rcl} Y & = & \{y \in X \mid \ \ y \text{ é livre em } \mathcal{M} \text{ ou } y \text{ foi introduzida por } \theta_{\mathcal{M}}\} \\ & & \cup \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} Vars(\mathcal{M}_i) \setminus Vars(\mathcal{M}) \end{array}$$

e seja

$$Sym = \{\tau \in \Sigma : \ x = \tau \in \mathcal{M}_i \text{ ou } x.\tau \in \mathcal{M}_i, \ \text{para todo o } 1 \leq i \leq m\}$$

Definimos a atribuição de variáveis ρ tal que para cada $y \in Y$, $\rho(y) = t_y$, $t_y(\epsilon) \in \Sigma \setminus Sym$ e $t_y(\epsilon)$ seja diferente para cada $y \in Y$. Então, $\rho\theta_{\mathcal{M}}$ é solução de $\mathcal{M}$ e para todo o $1 \leq i \leq m$ tem-se que $\rho\theta_{\mathcal{M}} \notin \mathcal{S}(\mathcal{M}_i, \mathcal{RT})$, já que o valor de $\rho(x_i)$ não satisfaz $\mathcal{M}_i$. Obtemos uma contradição. $\square$

Proposição 4.39 *Se* $\mid \Sigma \mid = \infty$ *e* $\mathcal{C}$ *é uma forma primária então* $\mathcal{C}$ *não é equivalente em* $\mathcal{RT}$ *a nenhuma disjunção finita de formas normais.*

Dem. Provamos por redução ao absurdo.

Suponhamos que $\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{M}_n$, onde cada $\mathcal{M}_i$ é uma forma normal para $1 \leq i \leq n$. Seja $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m$, então:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{RT} & \models & \mathcal{C}_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{M}_n \\ & \models & \mathcal{C}_p \Leftrightarrow c_1 \vee \ldots \vee c_m \vee \mathcal{M}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{M}_n \end{array}$$

onde $n_i \equiv \neg c_i$ para $1 \leq i \leq m$. Pela Proposição 4.38, existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\mathcal{C}_p \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}_j$ ou existe $1 \leq i \leq m$ tal que $\mathcal{C}_p \approx_{\mathcal{RT}} c_i$. No primeiro caso, isso implicaria que $n_1 \wedge \ldots \wedge n_m \approx_{\mathcal{RT}} \top$ o que é impossível supondo que $\mathcal{C}$ é um forma primária sem redundâncias. No segundo caso, ter-se-ia $\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \perp$ o que também contradiz a hipótese de $\mathcal{C}$ ser uma forma primária. $\square$

4.3.2 Formas Primárias para Σ finito

Se Σ for finito o Lema da Independência das Restrições Negativas, Lema 4.26, não é válido. O exemplo seguinte ilustra este facto. Se $\Sigma = \{a, f^1\}$ a conjunção de restrições

$$(\mathsf{c}_6) \qquad x \neq a \ \wedge \ \neg x.f^1$$

não é satisfazível em $\mathcal{RT}$, embora cada uma das restrições o seja.

O *Axioma do Domínio Fechado* $\mathcal{DCA}$, necessário para garantir a completa axiomatização de $\mathcal{RT}$ para Σ finito, pode-se enunciar em $\mathcal{L}_U$ da seguinte forma:

$$(1) \qquad \forall x \ (\bigvee_{a \in \Sigma} x = a) \ \vee \ (\bigvee_{f^n \in \Sigma} x.f^n)$$

Dado $c \in \mathcal{L}_U$ e $x \in Vars(c)$, seja $\mathcal{DCA}(x) \in \mathcal{L}_U$ a restrição

$$\mathcal{DCA}(x) \equiv (\bigvee_{a \in \Sigma} x = a) \ \vee \ (\bigvee_{f^n \in \Sigma} x.f^n)$$

Então

$$(2) \qquad E_{RT} \ \cup \ \{\mathcal{DCA}\} \models c \ \Leftrightarrow \ c \ \wedge \bigwedge_{x \in Vars(c)} \mathcal{DCA}(x)$$

Aplicando a equivalência (2) ao exemplo anterior vem

$$(\mathsf{c}_7) \qquad x \neq a \ \wedge \ \neg x.f^1 \ \wedge \ (x = a \ \vee \ x.f^1)$$

que transformando em forma normal disjuntiva e usando o sistema de reescrita P da Proposição 4.29, para cada elemento da disjunção, é reduzido a $\perp$.

Em certos casos, a equivalência (2) permite substituir restrições negativas por disjunções de conjunções de restrições atómicas positivas.

Proposição 4.40 *Supondo que Σ é finito e que apenas contém constantes, qualquer conjunção de restrições atómicas $\mathcal{C}$ é equivalente em $\mathcal{RT}$ (ou em $\mathcal{T}$) a uma disjunção de conjunções de restrições atómicas positivas. Em particular, $\mathcal{C}$ é satisfazível se e só se pelo menos uma das conjunções o for.*

Dem. Suponhamos que $\mathcal{C}$ só contém restrições atómicas negativas. Aplicando (2) a $\mathcal{C}$ e transformando[9] a restrição obtida em forma normal disjuntiva, resulta que cada elemento da disjunção é da forma $\mathcal{C} \wedge \mathcal{C}_i$, onde $\mathcal{C}_i$ é uma conjunção de restrições do tipo $x = a$, uma para cada $x \in Vars(\mathcal{C})$ e algum $a \in \Sigma$. Então cada $\mathcal{C}_i$ está em forma normal. Usando o sistema de reescrita P da Proposição 4.29, que é correcto em $\mathcal{RT}$ com Σ finito, é imediato que cada conjunção é equivalente a $\perp$ ou a uma conjunção de restrições da forma $x = a$. Note-se que após a aplicação da regra $\mathsf{P5}$ as restrições negativas ou são triviais ou do tipo $a \neq b$, com $a \not\equiv b$.

Se $\mathcal{C}$ contiver restrições atómicas positivas depois de se aplicar (2) e se transformar em forma normal disjuntiva, para cada elemento $\mathcal{C} \wedge \mathcal{C}_i$ da disjunção, é necessário obter a forma normal da conjunção de restrições atómicas positivas ou $\perp$. Essa forma normal, se existir, é $\mathcal{C}_i$ e a demonstração prossegue como no caso anterior. $\square$

Se Σ contiver pelo menos um functor, $\mathcal{RT}(\Sigma)$ é infinito e, em geral, não vai ser possível "substituir" restrições negativas por disjunções de conjunções de restrições atómicas positivas. Sendo $\Sigma = \{a, f^1\}$ a restrição $x \neq y$ é equivalente em $\mathcal{RT}$ a

$$(x = a \wedge y.f^1) \vee (x.f^1 \wedge y = a) \vee (x.f^1 \wedge y.f^1 \wedge x \neq y) \tag{c8}$$

e a negação não pode ser eliminada.

No que se segue supomos, a menos referência em contrário, que Σ contém pelo menos um functor e outro símbolo.

A definição de formas primárias é modificada para traduzir a aplicação do axioma $\mathcal{DCA}$.

Definição 4.41 *Sendo $2 \leq |\ \Sigma\ | < \infty$, um conjunto de restrições $\mathcal{C}$ está em (ou é uma)* forma primária *se é $\top$ ou se satisfaz as seguintes condições:*

(i) toda a restrição em $\mathcal{C}$ é do tipo $x.f^n$, $x.f_i^n \doteq v$, $x = v$ ou $x \neq y$;

(ii) o conjunto de todas as restrições atómicas positivas de $\mathcal{C}$ está em forma resolvida normal e denota-se por $\mathcal{C}_p$;

(iii) se $x = v \in \mathcal{C}_p$ então x ocorre exactamente uma vez em $\mathcal{C}$;

[9] Ver Teorema 4.57.

(iv) para cada $x \in Vars(\mathcal{C})$ ou x é resolvida em $\mathcal{C}_p$ ou $x.\tau \in \mathcal{C}_p$ para algum $\tau \in \Sigma$;

(v) se $x \neq y \in \mathcal{C}$ então $y \neq x \notin \mathcal{C}$ e $x \not\equiv y$.

Na demonstração da Proposição 4.43 serão usados os conceitos de "profundidade" em árvores a seguir apresentados. Em particular, a profundidade duma árvore finita t corresponde ao maior comprimento duma posição de t mais um. Formalmente,

Definição 4.42 *A* profundidade *duma árvore $t \in \mathcal{T}$, $\mathcal{D}(t)$ é definida inductivamente por:*

(i) $\mathcal{D}(t) = 1$ se $t(\epsilon)$ é uma constante;

(ii) $\mathcal{D}(t) = 1 + max\{\mathcal{D}(t|_i) : 1 \leq i \leq n$ sendo n a aridade de $t(\epsilon)\}$.

Dado $t \in \mathcal{RT}$ (ou $t \in \mathcal{T}$) diz-se que $\tau \in \Sigma$ aparece à profundidade $d+1$ em t *se existe α tal que $t(\alpha) = \tau$ e $|\alpha| = d$. Sendo $\mathcal{M}$ uma forma resolvida diz-se que τ* aparece à profundidade $d+1$ em $\mathcal{M}$ *se existe p tal que $x\langle p\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$, $|p| = d$ e a classe $[v]_{\mathcal{M}}$ é constante τ ou o seu functor é τ. Sendo v é uma variável diz-se que v* depende de x à profundidade $d+1$ em $\mathcal{M}$ *se d é o comprimento do menor caminho p tal que $x\langle p\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$.*

Seja $f^n \in \Sigma$ e a um elemento de Σ de aridade arbitrária, diferente de f^n. Definimos $G(h) \equiv F_h(a, \ldots, a) \in \mathcal{RT}$ como a árvore[10] uniforme de profundidade h, folhas a e nós internos com functor f^n, isto é, $G(h)(\alpha) = a$ se $|\alpha| = h-1$ e $G(h)(\alpha) = f^n$ se $0 \leq |\alpha| < h-1$.

Proposição 4.43 *Se $2 \leq |\Sigma| < \infty$ e $\mathcal{C}$ é uma forma primária, então $\mathcal{C}$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$.*

Dem. Sejam $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ e $\mathcal{C}_n \equiv n_1 \wedge \ldots \wedge n_k$, onde cada n_i é do tipo $x \neq y$ para $x, y \in Vars(\mathcal{C}_p)$ e $\mathcal{C}_p$ uma forma normal. Então, para cada $x \neq y$, x e y pertencem a classes funcionais com o mesmo functor mas distinguíveis em $\mathcal{C}_p$. Dado que $|Vars(\mathcal{C}_n)|$ é finito, e Σ contém pelo menos um functor e outro símbolo, por exemplo f^n e a, é possível construir $\rho\theta_{\mathcal{C}_p}$ solução de $\mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$. A ideia da demonstração é a seguinte. Como $\mathcal{RT}(\Sigma)$ é infinito é possível construir árvores "suficientemente" profundas e todas distintas que assegurem valores diferentes para todas as variáveis que ocorrem

[10] Os termos $G(h)$ são usados em [Mah88] e [JL87] na demonstração de teoremas análogos.

em restrições negativas. A demonstração que se segue é uma adaptação, para $\mathcal{L}_U$, do método apresentado por Maher em [Mah88].

Sendo $m = |Vars(\mathcal{C}_n)|$ tem-se que $k \leq \frac{m(m-1)}{2}$. Cada $n_i \in \mathcal{C}_n$ é do tipo $x_d \neq x_e$, $1 \leq d, e \leq m$, $d \neq e$ e pelo Lema 4.14 existem p_i, v_d^i e v_e^i tal que $x_d\langle p_i\rangle v_d^i$, $x_e\langle p_i\rangle v_e^i \in Paths(\mathcal{C}_p)$ e, as classes $[v_d^i]_{\mathcal{C}_p}$ e $[v_e^i]_{\mathcal{C}_p}$ satisfazem uma das seguintes condições:

(i) pelo menos uma é constante;

(ii) são classes funcionais com functores distintos;

(iii) são classes funcionais com o mesmo functor mas pelo menos uma delas não é definida.

Nos dois primeiros casos qualquer atribuição de variáveis que satisfaça $\mathcal{C}_p$ também satisfaz n_i.

Sejam $w_1, \ldots, w_l$, para algum $1 \leq l \leq m$, as variáveis não definidas em $\mathcal{C}_p$ que incluem os valores $v_e^i, v_d^i \in Vars(\mathcal{C})$, para $1 \leq i \leq k$, que verifiquem a terceira condição acima. Seja P a maior profundidade a que aparece algum w_j em $\mathcal{C}_p$. Para cada $1 \leq j \leq l$, suponhamos que $w_j.f^n \in \mathcal{C}_p$ e que w_j não é definida para alguns $1 \leq r_1, \ldots, r_{l_j} \leq n$, com $l_j \leq n$, em $\mathcal{C}_p$.

Seja h definido por:

$$h = \begin{cases} P + D + 1 & \text{onde } D \text{ é a profundidade a que aparece } \tau \in \Sigma, \\ & \tau \not\equiv f^n, \text{ em } \mathcal{C}_p \text{ se esse valor é finito} \\ & \\ P + 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definimos uma atribuição de variáveis ρ tal que para cada $1 \leq j \leq l$ tem-se $\rho(w_j) = t_{w_j}$ e para cada $1 \leq k \leq l_j$, $t_{w_j}|_{r_k} = G(h \times (n \times j + r_k))$.

Então, a atribuição de variáveis $\rho\theta_{\mathcal{C}_p}$ satisfaz $\mathcal{C}$. $\square$

Dado que uma forma primária para Σ finito é uma forma primária para Σ infinito, a referência a Σ será omitida, sempre que isso seja explícito pelo contexto.

Na definição 4.41 de forma primária para Σ finito, para garantir a satisfazibilidade, bastava exigir a aplicação do Axioma $\mathcal{DCA}$ apenas às variáveis que ocorrem em negações, isto é, a condição (iv) podia ser substituída pela condição seguinte:

$(iv)_a$ *para cada* $x \in Vars(\mathcal{C}_n)$, $x.\tau \in \mathcal{C}_p$ *para algum* $\tau \in \Sigma$.

Nesse caso a Proposição 4.45, ainda seria válida. O uso da condição (iv) apenas garante que não existem variáveis livres numa forma primária, o que simplifica a demonstração da Proposição 4.43.

Resulta da Proposição 4.43 que uma conjunção de restrições não triviais da forma $x \neq y$ é sempre satisfazível em $\mathcal{RT}$, se Σ contiver pelo menos um functor e outro símbolo. O corolário seguinte, justifica a afirmação feita no exemplo c_8.

Corolário 4.44 *Seja* $2 \leq |\Sigma| < \infty$. *Qualquer conjunto de restrições atómicas negativas não triviais do tipo* $x \neq y$ *é satisfazível em* $\mathcal{RT}$, *mas não é equivalente em* $\mathcal{RT}$ *a nenhuma disjunção finita de formas normais.*

Dem. Seja $\mathcal{C} \equiv n_1 \wedge \ldots \wedge n_k \in \mathcal{L}_U$ e $m = |Vars(\mathcal{C})|$. Provamos a segunda parte por redução ao absurdo. Suponhamos que

$$\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \exists \bar{z}.\, \mathcal{M}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{M}_n$$

onde $\bar{z} \notin Vars(\mathcal{C})$ e cada $\mathcal{M}_i$ é uma forma normal para $1 \leq i \leq n$. Para cada $x \neq y \in \mathcal{C}$ e cada $1 \leq i \leq n$ existe p_i tal que $x\langle p_i \rangle v_i$, $y\langle p_i \rangle v_i' \in Paths(\mathcal{M}_i)$ e $[v_i]_{\mathcal{M}_i}$ e $[v_i']_{\mathcal{M}_i}$ são constantes distintas ou funcionais com functores distintos. Seja H o máximo dos h_i, com $1 \leq i \leq n$, obtidos para cada $\mathcal{M}_i$ da mesma forma que h foi obtido na demonstração da Proposição 4.43, substituindo $\mathcal{C}_p$ por $\mathcal{M}_i$. Então a atribuição de variáveis ρ tal que $\rho(x_j) = G(H \times j)$, para cada $1 \leq j \leq m$, é solução de $\mathcal{C}$ e não o é de nenhum $\mathcal{M}_i$, com $1 \leq i \leq n$. $\square$

Proposição 4.45 *Seja* $2 \leq |\Sigma| < \infty$. *Qualquer conjunto* $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ *de restrições atómicas positivas e negativas é equivalente em* $\mathcal{RT}$ *a uma disjunção de formas primárias ou a* $\perp$.

Dem. Como anteriormente podemos supor que $\mathcal{C}_p$ está em forma normal, porque se tal não for possível $\mathcal{C}$ é não satisfazível em $\mathcal{RT}$. Notando que as regras da Proposição 4.29 são correctas em $\mathcal{RT}$ com $2 \leq |\Sigma| < \infty$, podemos transformar $\mathcal{C}$ numa forma primária (para Σ infinito) equivalente, $\mathcal{C}'_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m$, ou em $\perp$. No primeiro caso, vem

$$\begin{aligned} \mathcal{RT} \models \; & \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}'_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m \\ \Leftrightarrow \; & \mathcal{C}'_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m \wedge (\bigwedge_{x \in Vars(\mathcal{C}'_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m)} \mathcal{DCA}(x)) \\ \Leftrightarrow \; & \bigvee_{1 \leq k \leq |\Sigma|^l} \mathcal{C}'_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m \wedge c_k^1 \wedge \ldots \wedge c_k^l \end{aligned}$$

onde cada n_i é do tipo $x \neq v$ ou $\neg x.f^n$, $l = |Vars(\mathcal{C}'_p \wedge n_1 \wedge \ldots \wedge n_m)|$ e cada c_k^i é uma restrição do tipo $x = \tau$ ou $x.\tau$, para cada $x \in Vars(n_1 \wedge \ldots \wedge n_m)$ e algum $\tau \in \Sigma$. Para cada k, pode-se reduzir $\mathcal{C}'_p \wedge c_k^1 \wedge \ldots \wedge c_k^l$ a forma normal ou a $\perp$. No primeiro caso, aplicando mais uma vez as regras da Proposição 4.29 obtém-se uma forma primária ou $\perp$. Basta mostrar que cada uma dessas restrições é uma forma primária para Σ finito. Se for uma forma normal, está demonstrado. Caso contrário, seja $\mathcal{C}^k \equiv \mathcal{C}''_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma dessas formas primárias. Todas as classes de equivalência da relação $=_{\mathcal{C}''_p}$ ou são constantes ou são funcionais. Se $x \in Vars(\mathcal{C}_n)$ então $x \in Vars(\mathcal{C}''_p)$ e x não é livre em $\mathcal{C}''_p$. Então $\mathcal{C}_n$ é constituído por negações do tipo $x \neq y$ onde x e y pertencem a classes funcionais com o mesmo functor mas que são distinguíveis em $\mathcal{C}''_p$. Assim, são verificadas as condições (i), (iv) e (v) da definição de formas primárias para Σ finito. As restantes condições resultam de $\mathcal{C}''_p \wedge \mathcal{C}_n$ ser uma forma primária para Σ infinito.

Em particular, $\mathcal{C}$ não é satisfazível se e só se todos os elementos da disjunção se reduzirem a $\perp$. $\square$

Exemplificamos a seguir a aplicação desta proposição.
Sendo $\Sigma = \{a, f^1\}$, a restrição

$$(\mathsf{c}_9) \qquad x.f_1^1 \doteq a \wedge x \neq y$$

é, aplicando o algoritmo da Proposição 4.45 e factorizando elementos comuns, equivalente a

$$(\mathsf{c}_{10}) \qquad x.f^1 \wedge x.f_1^1 \doteq a \wedge (y = a \vee (y.f^1 \wedge x \neq y))$$

Corolário 4.46 *Sendo $2 \leq |\, \Sigma \,| < \infty$, o problema de determinar a satisfazibilidade duma conjunção de restrições atómicas é* **NP**-*completo.*

Dem. Seja $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \ \wedge \ \mathcal{C}_n$ um conjunto de restrições atómicas e suponhamos que $\mathcal{C}_p$ está em forma resolvida normal. Pela Proposição 4.45, para decidir a satisfazibilidade de $\mathcal{C}$ basta para cada $x_i \in Vars(\mathcal{C}_n)$, com $1 \leq i \leq l = |Vars(\mathcal{C}_n)|$ escolher para algum $\tau \in \Sigma$, uma restrição c_i da forma $x = \tau$ ou $x.\tau$ e reduzir, usando o sistema de reescrita P, $\mathcal{C} \ \wedge \ c_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ c_l$ a forma primária ou a $\perp$. A restrição $\mathcal{C}$ é satisfazível se e só se alguma destas restrições admite forma primária. Este processo poder ser executado em tempo não-determinístico polinomial.

Para provar que é **NP-hard** exibimos uma redução polinomial (linear) ao problema da colorir um grafo com 3 cores, que é um problema **NP**-completo [GJ79]. Este último problema pode ser enunciado da seguinte forma: **(3-COLOR)**

Instância: Um grafo não dirigido $G = (V, E)$.

Questão: É possível colorir G com 3 cores, isto é, existe uma função

$$\Phi : V \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

tal que se $(x, y) \in E$ é $\Phi(x) \neq \Phi(y)$?

Dada uma instância de 3-**COLOR** vamos construir uma restrição $\mathcal{C}$ e Σ tal que $\mathcal{C}$ tem solução em $\mathcal{RT}$ se e só se essa instância tem solução. Considere-se $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ e para cada $(x, y) \in E$, $x \neq y \in \mathcal{C}$. Temos que $Vars(\mathcal{C}) \subseteq V$ e $\mathcal{C}$ é uma conjunção de restrições atómicas, cujo tamanho é linear no tamanho da representação da instância de 3-**COLOR**.

$\square$

4.3.2.1 Eliminação de Negações

O problema de determinar se uma conjunção de restrições atómicas $c \in \mathcal{L}_U$ é equivalente a uma disjunção de conjunções de restrições atómicas positivas é resolvido pelo algoritmo da Proposição 4.45, se as restrições negativas em c são apenas do tipo $x \neq a$ ou $\neg x.f^n$ (ou reduzidas a esse tipo pela aplicação de alguma regra).
Por exemplo, se $\Sigma = \{a, f^1\}$ a restrição

(c11) $$y.f_1^1 \doteq x \ \wedge \ (\neg x.f^1 \ \vee \ (x.f_1^1 \doteq x_0 \ \wedge \ x_0 \neq a))$$

é reduzida a

$$(\mathsf{c}_{12}) \qquad y.f_1^1 \doteq x \ \wedge \ (x = a \ \vee \ (x.f_1^1 \doteq x_0 \ \wedge \ x_0.f^1))$$

Por sua vez, as restrições do tipo $x \neq y$ que ocorram numa disjunção c de formas primárias podem ser eliminadas se forem redundantes em cada elemento de c, usando o método da Proposição 4.37.

Contudo, considerem-se, para a mesma assinatura, as seguintes restrições:

$$(\mathsf{c}_{13}) \qquad x.f^1 \ \wedge \ x.f_1^1 \doteq a \ \wedge \ (y = a \ \vee \ (y.f^1 \ \wedge \ (y.f_1^1 \doteq y_1 \ \wedge \ y \neq x)))$$

$$(\mathsf{c}_{14}) \qquad x.f^1 \ \wedge \ x.f_1^1 \doteq a \ \wedge \ (y = a \ \vee \ (y.f^1 \ \wedge \ (y.f_1^1 \doteq y_1 \ \wedge \ y_1.f^1)))$$

Pela Proposição 4.45, as restrições c_{13} e c_{14} são equivalentes em $\mathcal{RT}$. Por outro lado, tem-se que $(\exists y_1\, \mathsf{c}_{13}) \approx_{\mathcal{RT}} \mathsf{c}_{10}$ e para toda atribuição de variáveis $\rho \in \mathcal{S}_{Vars(\mathsf{c}_{10})}(\mathsf{c}_{10}, \mathcal{RT})$ existe uma única extensão que é solução de c_{13}. Isto é, dada uma restrição $c \in \mathcal{L}_U$ e introduzindo novas variáveis pode ser possível obter uma restrição c_1 sem negações e cujas soluções restritas às variáveis de c, coincidem com as de c.

Um algoritmo para obter uma tal forma, quando existe, será apresentado a seguir.

Recordemos, ver página 37, que

Definição 4.47 *Uma variável $x \in Vars(c)$ é* determinada *em $c \in \mathcal{L}_U$ se para todas as soluções $\rho, \rho' \in \mathcal{S}(c, \mathcal{RT})$, se tem $\rho(x) = \rho'(x) = t_x$. Se t_x é finita diz-se que x é* determinada finita *em c. Se x é uma variável determinada finita o seu tamanho $\|x\|$ define-se como sendo o tamanho $|t_x|$ de t_x. Estas noções estendem-se naturalmente a* valores*. Para uma forma resolvida c, a classe $[v]_c$ é* determinada *se v o for.*

Serão necessários vários lemas sobre formas resolvidas (normais) que são válidos em $\mathcal{RT}$ para qualquer assinatura Σ não singular, e que serão usados também em secções posteriores.

O lema seguinte é uma aplicação directa do Axioma $\mathsf{A6}$ de E_{RT}.

Lema 4.48 *Seja Σ não singular e $\mathcal{M}$ uma forma resolvida. Todas as variáveis de $\mathcal{M}$ são determinadas em $\mathcal{M}$ se e só se para todo $x \in Vars(\mathcal{M})$, a classe $[x]_{\mathcal{M}}$ ou é constante ou é definida.*

Dem. $(\Rightarrow)$

Se $x \in Vars(\mathcal{M})$ e a classe $[x]_{\mathcal{M}}$ é livre ou funcional não definida é óbvio que x não é determinada em $\mathcal{M}$.

($\Leftarrow$)

Suponhamos que para toda a variável $x \in Vars(\mathcal{M})$, a classe $[x]_{\mathcal{M}}$ é constante ou definida. Neste caso, $\mathcal{M}$ é equivalente a uma forma resolvida racional de $\mathcal{L}$ cujas variáveis são as de $\mathcal{M}$ e onde todas as variáveis ocorrem do lado esquerdo duma equação. Logo, pelo Axioma A6 de E_{RT}, todas as variáveis são determinadas.

$\square$

A demonstração dos lemas a seguir apresentados é trivial.

Lema 4.49 *Sendo $\mathcal{M}$ é uma forma normal, $x \in Vars(\mathcal{M})$ é determinada finita em $\mathcal{M}$ se e só se $Paths_x(\mathcal{M})$ é finito e para cada caminho maximal $x\langle p\rangle v \in Paths_x(\mathcal{M})$, a classe $[v]_{\mathcal{M}}$ é constante.*

Lema 4.50 *Sendo $\mathcal{M}$ uma forma normal, $x \in Vars(\mathcal{M})$ é não determinada em $\mathcal{M}$ se e só se existem p e v tal que $x\langle p\rangle v \in Paths(\mathcal{M})$ e a classe $[v]_{\mathcal{M}}$ é livre ou funcional não definida.*

Lema 4.51 *Seja $\mathcal{M}$ uma forma normal e x e y variáveis distintas definidas em $\mathcal{M}$. Se $\mathcal{M} \cup \{x = y\}$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$ então $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} x = y \Leftrightarrow \mathcal{C}_i$ onde $\mathcal{C}_i$ é a conjunção de todas as restrições da forma $v_i = v_i'$, com v_i e v_i' distintas não definidas em $\mathcal{M}$ e existe p tal que $x\langle p\rangle v_i,\ y\langle p\rangle v_i' \in Paths(\mathcal{M})$.*

Dem. Pelo Corolário 4.15. $\square$

Lema 4.52 *Seja $\mathcal{M}$ uma forma normal e $x, y \in Vars(\mathcal{M})$ determinadas em $\mathcal{M}$. Então $\mathcal{M}$ determina $x = y$, isto é, ou $x \sim_{\mathcal{M}} y$ ou $x \neq y$ é redundante em $\mathcal{M}$.*

Lema 4.53 *Seja $2 \leq |\Sigma| < \infty$ e $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma forma primária. Então para todas as restrições $x \neq y \in \mathcal{C}_n$ e para todo o p tal que $x\langle p\rangle v,\ y\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{C}_p)$ tem-se que $v \equiv v'$ ou v e v' são distinguíveis em $\mathcal{C}_p$.*

Lema 4.54 *Seja $2 \leq |\Sigma| < \infty$ e $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma forma primária. Se $x \neq y \in \mathcal{C}_n$, a variável x é determinada não finita em $\mathcal{C}_p$ com functor f^n e a variável y não é definida em $\mathcal{C}_p$ para nenhum $1 \leq i \leq n$, então $\mathcal{C}$ não é equivalente em $\mathcal{RT}$ a nenhuma disjunção de formas normais.*

Dem. Se x é determinada não finita em $\mathcal{C}_p$ existe $w \in Vars_x(\mathcal{C}_p)$ e $p \not\equiv \epsilon$ tal que $w\langle p\rangle w$. Suponhamos que $w.f^n \in \mathcal{C}_p$ e $x\langle q\rangle w \in Paths(\mathcal{C}_p)$. Por redução ao absurdo, seja

$$\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \exists \bar{z}.\, \mathcal{M}_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ \mathcal{M}_m$$

onde $\bar{z} \notin Vars(\mathcal{C})$ e para cada $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{M}_i$ é uma forma normal. Então, para cada $1 \leq i \leq m$, seja p_i o menor caminho tal que existem v_i, v_i' e $x\langle p_i\rangle v_i$, $y\langle p_i\rangle v_i' \in Paths(\mathcal{M}_i)$, e as classes $[v_i]_{\mathcal{M}_i}$ e $[v_i']_{\mathcal{M}_i}$ são constantes distintas ou funcionais com functores distintos. Seja $M = max\{|p_i|, 1 \leq i \leq m\}$. Seja t_x o valor de x para qualquer solução de $\mathcal{C}$, $\beta = j_1 \ldots j_m$ e $\alpha = i_1 \ldots i_l$ posições tal que $q = \gamma^1_{j_1} \ldots \gamma^m_{j_m}$ e $p = \tau^1_{i_1} \ldots \tau^l_{i_l}$. Considere-se a atribuição de variáveis ρ tal que $\rho(y) = t_y$ coincide com t_x excepto que $t_y\,|_{\beta\alpha^{M+1}}(\epsilon) = a$, e $a \not\equiv f^n$. Então ρ é solução de $\mathcal{C}$ e não o é de nenhum $\mathcal{M}_i$, $1 \leq i \leq m$. $\square$

Iremos ainda usar o Lema 2.33, que é aqui enunciado como Lema 4.55:

Lema 4.55 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, para todas as variáveis x, $y \in X$, functor $f^n \in \Sigma$ e valores v_i, v_i', para todo $1 \leq i \leq n$ tem-se*

(1)
$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models\ & \bigwedge_{i=1}^{n} (x.f_i^n \doteq v_i \ \wedge \ y.f_i^n \doteq v_i') \ \wedge \ x \neq y \\ \Leftrightarrow\ & \bigwedge_{i=1}^{n} (x.f_i^n \doteq v_i \ \wedge \ y.f_i^n \doteq v_i') \ \wedge \ \bigvee_{i=1}^{n} v_i \neq v_i' \end{aligned}$$

Na proposição seguinte apresenta-se uma caracterização necessária e suficiente para a eliminação negações numa forma primária. É apresentado um sistema de reescrita que dada uma forma primária permite obter, se existir, uma disjunção de formas normais equivalente.

Proposição 4.56 *Seja $2 \leq |\Sigma| < \infty$. Sendo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \ \wedge \ \mathcal{C}_n$ uma forma primária, existem formas normais $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ tais que,*

(1)
$$\mathcal{RT} \models \mathcal{C} \ \Leftrightarrow \ \exists \bar{z}.\, \mathcal{M}_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ \mathcal{M}_n \qquad \begin{array}{l} \bar{z} \notin Vars(\mathcal{C}) \\ Vars(\mathcal{M}_i) \setminus \{\bar{z}\} \subseteq Vars(\mathcal{C}) \end{array}$$

se e só se para cada negação $x \neq y \in \mathcal{C}_n$ tem-se que:

para todo o p, v e v' tal que $x\langle p\rangle v$, $y\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{C}_p)$ e as classes $[v]_{\mathcal{C}_p}$ e $[v']_{\mathcal{C}_p}$ são funcionais com um mesmo functor f^n, uma das seguintes condições é verificada:

(i) $[v]_{\mathcal{C}_p}$ e $[v']_{\mathcal{C}_p}$ são definidas;

(ii) se $[v]_{\mathcal{C}_p}$ é não definida para algum $1 \leq i \leq n$, então $v'.f_i^n \doteq v_i \in \mathcal{C}_p$ e v_i é determinada finita para i. Ou vice-versa.

Dem. ($\Rightarrow$)

Por redução ao absurdo. Seja $x \neq y \in \mathcal{C}$. Suponhamos que existem p, v e v' tal que $x\langle p\rangle v$, $y\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{C}_p)$, existe $1 \leq i \leq n$ tal que a classe $[v]_{\mathcal{C}_p}$ é não definida para i em $\mathcal{C}_p$ e para a classe $[v']_{\mathcal{C}_p}$ verifica-se uma das seguintes condições:

a) $[v']_{\mathcal{C}_p}$ é não definida para i;

b) $v'.f_i^n \doteq v'_i \in \mathcal{C}_p$ e $[v'_i]_{\mathcal{C}_p}$ é não determinada;

c) $v'.f_i^n \doteq v'_i \in \mathcal{C}_p$ e $[v'_i]_{\mathcal{C}_p}$ é determinada não finita.

Provamos por indução na estrutura do caminho p, que $\mathcal{C}$ não é equivalente a nenhuma disjunção de formas normais, isto é, que a condição (1) não se verifica. Seja $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}' \wedge x \neq y$.

Base. Seja $p \equiv \epsilon$. Aplicando o Lema 4.55 vem

$$\begin{aligned} \mathcal{RT} \models \mathcal{C}' \wedge x \neq y \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \bar{z}.\, \mathcal{C}'' \wedge \bigvee_{j=1}^{n} v_j \neq v'_j \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \bar{z}.\, \bigvee_{j=1}^{n} \mathcal{C}'' \wedge v_j \neq v'_j \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}''$ difere de $\mathcal{C}'$ pela eventual introdução de restrições da forma $x.f_j \doteq z_j$ ou $y.f_j \doteq z_j$. Temos os seguintes casos:

- se se verificar o caso a), então para $j = i$, v_j e v'_j são variáveis novas. Pelo Corolário 4.44, $v_i \neq v'_i$ não é equivalente a uma disjunção de formas normais. Como $\mathcal{C}''$ e $v_i \neq v'_i$ são independentes para a satisfazibilidade em $\mathcal{RT}$, a condição (1) não se verifica.
- analogamente se mostra para o caso b), usando o Lema 4.50.
- se se verificar o caso c), então podemos aplicar o Lema 4.54 a v'_i e a uma nova variável v_i.

Indução. Seja $p \equiv f_i^n q$. Então dado que v e v' são funcionais, existem $z_1,\ z_2 \in Vars(\mathcal{C})$ tais que $x.f_i^n \doteq z_1 \in \mathcal{C}_p$, $z_1\langle q\rangle v \in Paths(\mathcal{C}_p)$, $y.f_i^n \doteq z_2 \in \mathcal{C}_p$ e $z_2\langle q\rangle v' \in Paths(\mathcal{C}_p)$. Mais uma vez, aplicando o Lema 4.55 a $\mathcal{C}$ vem

$$\mathcal{RT} \models \mathcal{C}' \wedge x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad \exists \bar{z}.\, \mathcal{C}'' \wedge \bigvee_{j=1}^{n} v_j \neq v_j'$$

onde, para $j = i$ tem-se a inequação $z_1 \neq z_2$. Aplicando a hipótese de indução a z_1 e z_2, conclui-se que (1) não se verifica.

($\Leftarrow$)

Seja $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma forma primária e $\mathcal{N}$ um conjunto, possivelmente vazio, de restrições atómicas negativas do tipo $x \neq y$. Definimos o seguinte sistema de reescrita E, para pares $\langle \mathcal{C}, \mathcal{N}\rangle$:

E1. $\langle \mathcal{C} \cup \{x \neq y\}, \mathcal{N}\rangle \mapsto \langle \exists \bar{z}.\, \mathcal{C}' \wedge \bigvee_{i=1}^{n} v_i \neq v_i', \mathcal{N} \cup \{x \neq y\}\rangle$

se $x \neq y \notin \mathcal{N}$ e sendo $x.f^n \in \mathcal{C}_p$ e $y.f^n \in \mathcal{C}_p$, para cada $1 \leq i \leq n$ verifica-se uma das seguintes condições:

(i) $x.f_i^n \doteq v_i \in \mathcal{C}_p$ e $y.f_i^n \doteq v_i' \in \mathcal{C}_p$;

(ii) se x (respectivamente, y) não está definida para i em $\mathcal{C}_p$, $y.f_i^n \doteq v_i' \in \mathcal{C}_p$ ($x.f_i^n \doteq v_i \in \mathcal{C}_p$) e v_i' (v_i) é determinada finita em $\mathcal{C}_p$, então v_i (v_i') é uma variável nova, z_i, que não ocorria em $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C} \cup \bigcup_i \{x.f_i^n \doteq v_i (y.f_i^n \doteq v_i')\}$ para cada i que verifica a condição a (ii); $\bar{z}$ contém as variáveis introduzidas em (ii) ou, omite-se $\exists \bar{z}$, se tais variáveis não ocorrem.

E2. $\langle \mathcal{C} \cup \{x \neq y\}, \mathcal{N}\rangle \mapsto \langle \perp, \mathcal{N}\rangle$ se $x \neq y \in \mathcal{N}$

Sendo $c \equiv \mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n \in \mathcal{L}_U$, uma restrição em forma normal disjuntiva, e $\mathcal{C}_i$, $1 \leq i \leq n$, formas primárias, podemos estender as noções de forma primária, forma normal disjuntiva e forma prenex a pares $\langle c_i, \mathcal{N}_i \rangle$ considerando que:

$$\langle \mathcal{C}_1 \ \vee \ \mathcal{C}_2, \mathcal{N} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{N} \rangle \ \vee \ \langle \mathcal{C}_2, \mathcal{N} \rangle$$

e analogamente para a conectiva $\wedge$, o quantificador $\exists$, $\top$ e $\perp$.

Assim, sendo $\mathcal{D} \equiv \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{N}_1 \rangle \ \vee \ \ldots \ \vee \ \langle \mathcal{C}_n, \mathcal{N}_n \rangle$, define-se a seguinte regra de reescrita:

E3. $\quad \exists \bar{z}.\, \mathcal{D} \quad \mapsto \quad \exists \bar{z}.\, \mathcal{D}'$

se $\mathcal{D} \not\equiv \mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}'$ resulta de $\mathcal{D}$ pela aplicação de uma das regras E1 ou E2 a um dos elementos da disjunção, pela transformação em forma prenex e forma normal disjuntiva e pela redução de cada elemento da disjunção a forma primária ou a $\perp$.

Sendo $\mathcal{C}$ uma forma primária aplica-se a regra de reescrita E3 ao par $\langle \mathcal{C}, \top \rangle$.

Analisemos a correcção destas regras em $\mathcal{RT}$. Considerando as soluções da restrição associada a $\mathcal{D}$, a regra E3 é correcta se as restantes regras o forem. A correcção da regra E1 resulta da equivalência (1), do Lema 4.55, sendo as condições de aplicação apenas necessárias para garantir a terminação da regra E3. A correcção da regra E2 resulta do Lema 4.51.

Pretendemos ainda provar que o sistema de reescrita termina e que se

$$\mathcal{D} \equiv \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{N}_1 \rangle \ \vee \ \ldots \ \vee \ \langle \mathcal{C}_n, \mathcal{N}_n \rangle$$

é irredutível para a regra E3, então $c \equiv \mathcal{C}_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ \mathcal{C}_n$ é uma disjunção de formas normais.

Se houvesse uma cadeia infinita de transformações essa cadeia tinha de envolver a regra E1. Podemos supor, sem falta de generalidade, que a regra E2 é aplicada sempre que possível a seguir à regra E1 e que as várias formas normais são obtidas. Nenhuma das regras envolvidas nessas transformações pode conduzir a cadeias infinitas. Em relação à regra E1, vamos ver, que podemos reforçar o controlo da sua aplicação, sem alterar a correcção. Note-se, ainda, que o número total de variáveis introduzidas é limitado pelo tamanho das variáveis determinadas finitas.

Seja $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \ \wedge \ n_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ n_r$ uma forma primária e $\mathcal{D} \equiv \langle \mathcal{C}, \top \rangle$. Suponhamos que $r = 1$ e $n_1 \equiv x \neq y$. Como $x \neq y$ não é redundante em $\mathcal{C}$ e a regra E2 garante a não existência de ciclos[11], a regra E1 apenas com a condição (i) só se pode aplicar um número finito de vezes antes da condição (ii) se verificar[12]. Pelo Lema 4.53, se apenas a condição (i) se verificar, depois da redução a forma normal disjuntiva cada elemento ou é equivalente a $\perp$ ou está em forma primária. Neste caso, vem

$$\mathcal{D} \ \mapsto^{\star}_{\mathsf{E1}.(i),\mathsf{E2},\mathsf{E3}} \ \langle \mathcal{C}_p \ \wedge \ x_1 \neq y_1, \mathcal{N}_1 \rangle \ \vee \ \ldots \ \vee \ \langle \mathcal{C}_p \ \wedge \ x_m \neq y_m, \mathcal{N}_m \rangle$$

Suponhamos que a condição (ii) se verifica para o par $\langle \mathcal{C}_p \ \wedge \ x_1 \neq y_1, \mathcal{N}_1 \rangle$, isto é, $x_1.f^n$, $y_1.f^n \in \mathcal{C}_p$ e que para alguns i, com $1 \leq i \leq n$, x_1 (ou y_1) é não definida para i, $y_1.f^n_i \doteq v'_i$ ($x_1.f^n_i \doteq v_i$) e v'_i (v_i) é determinada finita em $\mathcal{C}_p$.

Sendo u ou x_1 ou y_1, $l + k = n$, e u_i variáveis novas para $1 \leq i \leq l$, vem, omitindo os quantificadores existenciais,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{RT} & \models & \mathcal{C}_p \ \wedge \ x_1 \neq y_1 \\ & \Leftrightarrow & \mathcal{C}_p \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{l} (u.f^n_i \doteq u_i) \ \wedge \ \bigvee_{i=1}^{n} v_i \neq v'_i \\ & \Leftrightarrow & \bigvee_{i=1}^{k} (\mathcal{C}_p \ \wedge \ v_i \neq v'_i) \ \vee \ \bigvee_{j=1}^{l} (\mathcal{C}_p \ \wedge \ u.f^n_j \doteq u_j \ \wedge \ u_j \neq v_j) \end{array}$$

Para os primeiros k elementos da disjunção torna-se a aplicar a regra E1 se após redução a forma primária ainda contiverem negações (e se não forem equivalente a $\perp$).

Provamos por indução no tamanho de v_j, $\|v_j\|$, que cada restrição $\mathcal{C}_p \ \wedge \ u.f^n_j \doteq u_j \ \wedge \ u_j \neq v_j$ é equivalente a uma disjunção de formas normais, as quais são obtidas pelo sistema de reescrita.

Base. Se $\|v_j\| = 1$ então v_j é uma constante, a. Por redução a forma primária vem,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{RT} & \models & \mathcal{C}_p \ \wedge \ u.f^n_j \doteq u_j \ \wedge \ u_j \neq a \\ & \Leftrightarrow & \bigvee_{\tau_i \in \Sigma \setminus \{a\}} \mathcal{C}_p \ \wedge \ u.f^n_j \doteq u_j \ \wedge \ u_j.\tau_i \end{array}$$

onde se τ_i é constante $u_j.\tau_i$ denota a restrição $u_i = \tau_i$.

[11] Isto é, reduções do tipo $\langle \mathcal{C} \ \wedge \ x \neq y, \mathcal{N} \rangle \mapsto_{\mathsf{E1}} \ldots \mapsto_{\mathsf{E1}} \langle \mathcal{C}' \ \wedge \ x \neq y, \mathcal{N}' \rangle$.

[12] Note-se que se a condição (ii) não se verificar o sistema de reescrita termina, e podia-se concluir que $\mathcal{C}$ não era equivalente a uma disjunção de formas normais, isto é, o sistema de reescrita pode ser usado para determinar se essa disjunção existe ou não.

Indução. Suponhamos $\|v_j\| = k$ e que o resultado é válido para v_j de tamanho menor que k. Necessariamente, v_j é uma variável e seja f^n o seu functor. Reduzindo a forma primária vem,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{RT} & \models & \mathcal{C}_p \wedge u.f_j^n \doteq u_j \wedge \mathcal{DCA}(u_j) \wedge u_j \neq v_j \\ & \Leftrightarrow & \bigvee_{\tau_i \in \Sigma \setminus \{f^n\}} (\mathcal{C}_p \wedge u.f_j^n \doteq u_j \wedge u_j.\tau_i) \\ & & \vee (\mathcal{C}_p \wedge u.f_j^n \doteq u_j \wedge u_j.f^n \wedge v_j.f^n \wedge u_j \neq v_j) \end{array}$$

Aplicando a regra E1 para o último elemento da disjunção, se a condição (ii) se aplicar, tem-se necessariamente que $v_j.f_i^n \doteq v_{j_i} \in \mathcal{C}_p$ e $\|v_{j_i}\| < k$, para alguns $1 \leq i \leq n$. Por hipótese de indução, cada uma das restrições resultantes é equivalente a uma disjunção de formas normais obtidas pelo sistema de reescrita, logo cada $\mathcal{C}_p \wedge u.f_j^n \doteq u_j \wedge u_j \neq v_j$ também o é.

Repetindo o processo para cada $x_j \neq y_j$, $1 \leq j \leq m$, conclui-se que

$$\mathcal{RT} \models \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists \bar{z}.\, \mathcal{M}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{M}_n.$$

Se $r > 1$ podemos repetir o processo anterior sucessivamente para cada n_i, $2 \leq i \leq r$, bastando verificar de cada vez se $\mathcal{M}_j \wedge n_i$ é satisfazível, para $1 \leq j \leq n$. Note-se que é garantido que pelo menos um deles o é. □

Esta proposição generaliza, para árvores racionais e $\mathcal{L}_U$, os resultados sobre representações de termos definidos por contra-exemplos apresentados em [LM87] e também analisados em [Mah88] e [LMM92]. Generalizações da forma $t \setminus \{t_1 \vee \ldots \vee t_n\}$ representam o conjunto das instâncias do termo t que não são instâncias de nenhum t_i. Em [LM87], é apresentado um algoritmo (**uncover**) que permite determinar uma disjunção finita de termos equivalente a uma generalização, quando tal generalização existe. Várias aplicações deste algoritmo são apresentadas em [LMM92] e [Mah88], por exemplo para a negação construtiva em linguagens de programação em lógica.

Supondo $\Sigma = \{a, f^2\}$ vamos considerar dois exemplos.

Seja a restrição

$$(\text{c}_{15}) \quad \begin{array}{l} x.f^2 \wedge x.f_1^2 \doteq a \wedge x.f_2^2 \doteq x_1 \wedge x_1.f_1^2 \doteq x \wedge x_1.f_2^2 \doteq a \wedge y.f^2 \\ \quad \wedge\, y.f_2^2 \doteq y_1 \wedge y_1.f_1^2 \doteq y \wedge y_1.f_2^2 \doteq a \wedge x \neq y \end{array}$$

Sendo $\mathcal{C}_p$ a conjunção de restrições atómicas positivas da restrição c_{15} podemos aplicar o sistema de reescrita E, usado na demonstração da Proposição 4.56, ao par $\langle \mathcal{C}_p \wedge x \neq y, \top \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{C}_p \wedge x \neq y, \top \rangle \;\mapsto\;& \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge (a \neq y_2 \vee x_1 \neq y_1), \{x \neq y\} \rangle \\
\mapsto\;& \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge y_2.f^2, \{x \neq y\} \rangle \\
& \vee \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge x_1 \neq y_1, \{x \neq y\} \rangle \\
\mapsto\;& \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge y_2.f^2, \{x \neq y\} \rangle \\
& \vee \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge (x \neq y \vee a \neq a), \{x \neq y, x_1 \neq y_1\} \rangle \\
\mapsto\;& \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge y_2.f^2, \{x \neq y\} \rangle \vee \langle \perp, \{x \neq y\} \rangle \vee \langle \perp, \{x \neq y\} \rangle \\
\mapsto\;& \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge y_2.f^2, \{x \neq y\} \rangle
\end{aligned}$$

Concluímos que c_{15} é equivalente em $\mathcal{RT}$ a

$$\begin{aligned}
(\mathsf{c}_{16}) \qquad & \exists y_2\, x.f_1^2 \doteq a \wedge x.f_2^2 \doteq x_1 \wedge x_1.f_1^2 \doteq x \wedge x.f_2^2 \doteq a \wedge y.f^2 \\
& \wedge y.f_2^2 \doteq y_1 \wedge y_1.f_1^2 \doteq y \wedge y.f_2^2 \doteq a \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge y_2.f^2
\end{aligned}$$

Seja a restrição

$$\begin{aligned}
(\mathsf{c}_{17}) \qquad & x.f^2 \wedge x.f_1^2 \doteq a \wedge x.f_2^2 \doteq x_1 \wedge x_1.f^2 \wedge x_1.f_1^2 \doteq a \\
& \wedge x_1.f_2^2 \doteq x_1 \wedge z.f^2 \wedge z.f_2^2 \doteq x_1 \wedge y.f^2 \wedge y.f_1^2 \doteq a \\
& \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z
\end{aligned}$$

Como no exemplo anterior, seja $\mathcal{C}_p$ a conjunção de restrições atómicas positivas da restrição c_{17}. Aplicando do sistema de reescrita E ao par $\langle \mathcal{C}_p \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z, \top \rangle$ vem

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{C}_p \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z, \top \rangle \;\mapsto\;& \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge x \neq z \wedge y \neq z \\
& \wedge (a \neq a \vee x_1 \neq y_2), \{x \neq y\} \rangle \\
\mapsto\;& \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge \mathcal{DCA}(y_2) \wedge x \neq z \wedge y \neq z \\
& \wedge x_1 \neq y_2, \{x \neq y\} \rangle \\
\mapsto\;& \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge y_2 = a \wedge x \neq z \\
& \wedge y \neq z, \{x \neq y\} \rangle \\
& \vee \langle \exists y_2\, \mathcal{C}_p \wedge y.f_1^2 \doteq y_2 \wedge y_2.f^2 \wedge x \neq z \\
& \wedge y \neq z, \{x \neq y\} \rangle
\end{aligned}$$

Vamos considerar os dois elementos da disjunção em separado. Para o primeiro elemento da disjunção e sendo $\mathcal{C}_p^1 \equiv \mathcal{C}_p \ \wedge\ y.f_1^2 \doteq a$, vem

$$
\begin{aligned}
\cdots \ &\mapsto\ \langle \exists y_2 z_1\, \mathcal{C}_p^1 \ \wedge\ z.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ y \neq z \ \wedge\ (z_1 \neq a \ \vee\ x_1 \neq x_1), \{x \neq y, x \neq z\}\rangle \\
&\mapsto\ \langle \exists y_2 z_1\, \mathcal{C}_p^1 \ \wedge\ z.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ z_1.f^2 \ \wedge\ (a \neq a \ \vee\ a \neq x_1), \{x \neq y, x \neq z, y \neq z\}\rangle \\
&\mapsto\ \langle \exists y_2 z_1\, \mathcal{C}_p^1 \ \wedge\ z.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ z_1.f^2, \{x \neq y, x \neq z, y \neq z\}\rangle
\end{aligned}
$$

No segundo elemento da disjunção o tratamento da restrição $x \neq z$ produz restrições análogas, dado que y não depende em $\mathcal{C}_p$ de x nem de z. Sendo $\mathcal{C}_p^2 \equiv \mathcal{C}_p \ \wedge\ y.f_1^2 \doteq y_2 \ \wedge\ y_2.f^2$, vem

$$
\begin{aligned}
\cdots \ &\mapsto\ \langle \exists y_2 z_1\, \mathcal{C}_p^2 \ \wedge\ z.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ z_1.f^2 \ \wedge\ y \neq z, \{x \neq y, x \neq z\}\rangle \\
&\mapsto\ \langle \exists y_2 z_1\, \mathcal{C}_p^1 \ \wedge\ z.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ z_1.f^2 \ \wedge\ (z_1 \neq a \ \vee\ x_1 \neq y_2), \{x \neq y, x \neq z, y \neq z\}\rangle \\
&\mapsto\ \langle \exists y_2 z_1 y_3 y_4\, \mathcal{C}_p^3 \ \wedge\ y_2.f_1^2 \doteq y_3 \ \wedge\ y_2.f_2^2 \doteq y_4 \ \wedge\ (y_3 \neq a \ \vee\ y_4 \neq a), \\
&\qquad \{x \neq y, x \neq z, y \neq z, x_1 \neq y_2\}\rangle \\
&\mapsto\ \langle \exists y_2 z_1 y_3 y_4\, \mathcal{C}_p^3 \ \wedge\ y_2.f_1^2 \doteq y_3 \ \wedge\ y_2.f_2^2 \doteq y_4 \ \wedge\ (y_3.f^2 \ \vee\ y_4.f^2), \\
&\qquad \{x \neq y, x \neq z, y \neq z, x_1 \neq y_2\}\rangle
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{C}_p^3 \equiv \mathcal{C}_p^1 \ \wedge\ z.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ z_1.f^2$. Temos então que c_{17} é equivalente em $\mathcal{RT}$ à restrição sem negações

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{c}_{18}) \qquad & \exists y_2 z_1 y_3 y_4\ x.f^2 \ \wedge\ x.f_1^2 \doteq a \ \wedge\ x.f_2^2 \doteq x_1 \ \wedge\ x_1.f^2 \ \wedge\ x_1.f_1^2 \doteq a \ \wedge\ x_1.f_2^2 \doteq x_1 \\
& \wedge z.f^2 \ \wedge\ z.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ z_1.f^2 \ \wedge\ z.f_2^2 \doteq x_1 \ \wedge\ y.f^2 \ \wedge\ y.f_1^2 \doteq a \\
& \wedge y.f_2^2 \doteq y_2 \ \wedge\ (y_2 = a \ \vee\ (y_2.f_1^2 \doteq y_3 \ \wedge\ y_2.f_2^2 \doteq y_4 \ \wedge\ (y_3.f^2 \ \vee\ y_4.f^2)))
\end{aligned}
$$

Sendo $\Sigma = \{a, f^1\}$, considere-se a restrição

$$(\mathsf{c}_{19}) \qquad x.f_1^1 \doteq x \ \wedge\ x \neq y$$

A restrição c_{19} não é equivalente a nenhuma disjunção de formas normais embora uma das variáveis seja determinada (mas não finita). A restrição c_{19} é equivalente à seguinte disjunção de formas primárias

$$(\mathsf{c}_{20}) \qquad (x.f^1 \ \wedge\ x.f_1^1 \doteq x \ \wedge\ y = a) \ \vee\ (x.f^1 \ \wedge\ x.f_1^1 \doteq x \ \wedge\ y.f^1 \ \wedge\ x \neq y)$$

Usando a expressividade da linguagem $\mathcal{L}_U$ é impossível eliminar a negação no segundo elemento da disjunção. Uma possibilidade seria introduzir restrições que permitissem a referência a pontos fixos, por exemplo, $x = \star(f)$ e a referência a possíveis caminhos em árvores, por exemplo, $\exists p\ y.p \doteq a$. Como foi referido, no Cap'ítulo **??**, Secção 3.4, estas extensões foram estudadas para árvores de atributos por R. Treinen em [Tre93] e R. Backofen em [Bac94].

4.3.3 Formas Primárias para $\mathcal{T}$

No caso de $\mid \Sigma \mid = \infty$ a noção de forma primária para $\mathcal{T}$ coincide com a que foi dada para $\mathcal{RT}$, considerando que conjunção de restrições atómicas positivas está em forma resolvida finita normal. Em particular, são válidos os Lemas 4.25 e 4.26 e a Proposição 4.28. No caso de $2 \leq \mid \Sigma \mid < \infty$, a noção de forma primária também coincide podendo o algoritmo de eliminação de negações da Proposição 4.56 e os seus lemas preparatórios, serem adaptados (simplificando) para $\mathcal{T}$.

4.4 Caso Geral

Finalmente, as soluções duma restrição $c \in \mathcal{L}_U$ podem ser caracterizadas pelo seguinte teorema:

Teorema 4.57 *Toda a restrição $c \in \mathcal{L}_U$ é equivalente em $\mathcal{RT}$ (e em $\mathcal{T}$) a uma disjunção finita de formas primárias ou a $\perp$.*

Dem. Pode-se transformar $c \in \mathcal{L}_U$ numa restrição equivalente em forma normal disjuntiva, i.e, numa disjunção de conjunções de restrições atómicas positivas e negativas, c_i, pela aplicação das usuais regras de distributividade [13]:

D1. $c_1 \wedge (c_2 \vee c_3) \mapsto (c_1 \wedge c_2) \vee (c_1 \wedge c_3)$

D2. $(c_1 \vee c_2) \wedge c_3 \mapsto (c_1 \wedge c_3) \vee (c_2 \wedge c_3)$

Estas regras são correctas e completas para formas normais disjuntivas em qualquer álgebra de $\mathcal{L}$. Como usualmente[14], a terminação pode ser provada pela seguinte função de interpretação de $\mathcal{L}_U$ nos inteiros positivos, δ:

$$
\begin{aligned}
&\delta(c) = 2 && \text{se } c \text{ é atómica}\\
&\delta(c_1 \vee c_2) = \delta(c_1) + \delta(c_2) + 1 &&\\
&\delta(c_1 \wedge c_2) = \delta(c_1) \times \delta(c_2) &&
\end{aligned}
$$

[13] Considerando $c \in \mathcal{L}_U$ a menos de $\equiv_B$ apenas uma regra é necessária.

[14] Ver, por exemplo, [DJ90].

A aplicação de qualquer das regras decresce estritamente o valor de δ.

Então $c \approx_{\mathcal{RT}} c_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ c_n$, isto é,

$$\forall \rho, \mathcal{T}, \mathcal{RT} \models_\rho c \quad \text{se e só se} \quad \exists i \ \mathcal{T}, \mathcal{RT} \models_\rho c_i$$

Se c_i é uma conjunção de restrições atómicas positivas então ou é equivalente a $\perp$ ou a uma forma resolvida $\mathcal{M}$. Se c_i contiver restrições atómicas negativas é equivalente a uma disjunção de formas primárias (apenas uma, se $\mid \Sigma \mid = \infty$) ou a $\perp$. A restrição c é equivalente a $\perp$ se e só se todos os c_i o forem. $\square$

Corolário 4.58 *Determinar a satisfazibilidade em $\mathcal{L}_U$ é um problema* **NP**-*completo.*

Dem. Seja $c \in \mathcal{L}_U$. As regras do sistema de reescrita D podem ser aplicadas não deterministicamente da seguinte forma:

Dn1. $c_1 \ \wedge \ (c_2 \ \vee \ c_3) \mapsto (c_1 \ \wedge \ c_2)$

e considerando a relação $\equiv_\mathcal{B}$. A restrição c é satisfazível se e só se pelo menos uma das restrições resultantes é satisfazível. Como cada uma destas restrições tem tamanho polinomial no tamanho de c, a satisfazibilidade de c pode ser determinada em tempo não-determinístico polinomial se isso for possível para cada uma das restrições resultantes. No caso de Σ ser infinito vimos que esse problema pode ser resolvido em tempo polinomial. No caso de Σ ser finito, esse problema é **NP**-completo. Portanto, em ambos os casos é garantido que determinar a satisfazibilidade em $\mathcal{L}_U$ é um problema em **NP**.

Vamos provar que é **NP-hard** por redução polinomial ao problema da satisfazibilidade duma fórmula da lógica proposicional em forma normal conjuntiva , normalmente conhecido por **SAT** e que é **NP**-completo [GJ79]. Uma fórmula proposicional está em forma normal conjuntiva se for uma conjunção de disjunções de variáveis proposicionais ou das suas negações. Podemos transformar, em tempo linear, uma fórmula destas numa restrição de $\mathcal{L}_U$ tal que uma é satisfazível se e só se a outra o é. Para tal, basta associar a cada variável proposicional x uma restrição $x = a$ e à sua negação a restrição $x \neq a$[15]. $\square$

[15] Se Σ apenas contiver functores consideram-se as restrições $x.f^n$ e $\neg x.f^n$ para algum $f^n \in \Sigma$.

Para Σ finito, o corolário seguinte permite determinar em que condições uma restrição $c \in \mathcal{L}_U$ é equivalente a uma disjunção de conjunções de restrições atómicas positivas.

Corolário 4.59 *Seja* $2 \leq |\Sigma| < \infty$ *. Para toda a restrição* $c \in \mathcal{L}_U$ *é possível determinar se* c *é equivalente a uma disjunção de formas normais.*

Dem. Consequência do Teorema 4.57 e da Proposição 4.56. $\square$

4.5 Modelos Minimais

Nesta secção, dada uma restrição $c \in \mathcal{L}_U$ e satisfazível em $\mathcal{RT}$ pretendemos obter conjuntos minimais de formas primárias cuja disjunção é equivalente a c. Considerando a relação $\equiv_{\mathcal{B}}$ vamos supor que uma disjunção não contém elementos repetidos e que se algum elemento é $\top$ então é equivalente a $\top$.

Embora as formas primárias, caracterizem as restrições satisfazíveis de $\mathcal{L}_U$ essa caracterização, tal como acontecia para as formas resolvidas, não é única mesmo supondo que as formas primárias não contêm restrições redundantes. Duas formas primárias distintas podem ser equivalentes ou equivalentes a disjunções de formas primárias. Considerem-se os seguintes[16] exemplos:

$$(\mathsf{c}_{21}) \qquad x.f_1^1 \doteq w_1 \ \wedge \ y.f_1^1 \doteq z_1 \ \wedge \ x \neq y$$

$$(\mathsf{c}_{22}) \qquad x.f_1^1 \doteq w_1 \ \wedge \ y.f_1^1 \doteq z_1 \ \wedge \ w_1 \neq z_1$$

$$(\mathsf{c}_{23}) \qquad x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq w_2 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq z_2 \ \wedge \ x \neq y$$

$$(\mathsf{c}_{24}) \qquad \begin{array}{l}(x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq w_2 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq z_2 \ \wedge \ w_1 \neq z_1) \ \vee \\ (x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq w_2 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq z_2 \ \wedge \ w_2 \neq z_2)\end{array}$$

Temos que $\mathsf{c}_{21} \approx_{\mathcal{RT}} \mathsf{c}_{22}$ e $\mathsf{c}_{23} \approx_{\mathcal{RT}} \mathsf{c}_{24}$.

Designaremos por *modelo* uma forma primária, diferente de $\top$, e sem redundâncias. Se um modelo não contém restrições negativas será habitualmente denotado por $\mathcal{M}$.

[16] Para clareza da exposição, alguns exemplos não estarão em forma primária ou disjunção de tais formas, mas são convertíveis facilmente a essas formas.

Definição 4.60 *Seja $c_1 \in \mathcal{L}_U$ uma restrição satisfazível em $\mathcal{RT}$. Uma forma primária $\mathcal{C}$ é um* modelo parcial *de c_1 se c_1 víncula $\mathcal{C}$, ou seja, $c_1 \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}$. Uma forma primária $\mathcal{C}$ é um* modelo *de c_1 se $\mathcal{C}$ víncula c_1, ou seja, $\mathcal{C} \models_{\mathcal{RT}} c_1$, ou seja, $\mathcal{S}(\mathcal{C}, \mathcal{RT}) \subseteq \mathcal{S}(c_1, \mathcal{RT})$. Se estas inclusões forem próprias, os modelos designam-se por* próprios. *A relação de vínculo entre modelos designa-se por* subsunção. *Um modelo $\mathcal{C}$ de c_1 diz-se um* modelo minimal, *se $\mathcal{C}$ não subsume nenhum modelo de c_1. Dado um conjunto de variáveis $V \subseteq X$, diz-se que $\mathcal{C}$ é um* modelo de c_1 em V, *e escreve-se $\mathcal{C} \models^V_{\mathcal{RT}} c_1$, se $\mathcal{S}_V(\mathcal{C}, \mathcal{RT}) \subseteq \mathcal{S}_V(c_1, \mathcal{RT})$.*

Resulta da definição anterior que se $\mathcal{C}$ é modelo parcial de $c_1 \in \mathcal{L}_U$, então $Vars(\mathcal{C}) \subseteq Vars(c_1)$. A relação de *subsunção* definida no conjunto dos modelos de $\mathcal{L}_U$ é uma relação de pré-ordem.
Por exemplo,

$$(\mathsf{c}_{25}) \qquad x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge\ x.f_2^2 \doteq w_2 \ \wedge\ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ y.f_2^2 \doteq z_2 \ \wedge\ w_1 \neq z_1$$

$$(\mathsf{c}_{26}) \qquad x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge\ x.f_2^2 \doteq w_2 \ \wedge\ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge\ y.f_2^2 \doteq z_2 \ \wedge\ w_1 = a \ \wedge\ z_1 = b$$

são modelos de c_{23}. No entanto, não são modelos minimais de c_{23}, pois, as retrições c_{25} e c_{26} subsumem a restrição c_{23}.

Corolário 4.61 *Se $\mathcal{C}$ é uma conjunção de restrições atómicas positivas e $\mathcal{C}$ é satisfazível, então $\mathcal{C}$ tem um modelo minimal único. Se $\mid \Sigma \mid = \infty$ e $\mathcal{C}$ for uma conjunção de restrições atómicas, então $\mathcal{C}$ tem um modelo minimal.*

Dem. Basta considerar a forma primária associada e a unicidade de formas normais. □

Corolário 4.62 *Seja $\mid \Sigma \mid = \infty$. Se $c \in \mathcal{L}_U$ é satisfazível e c é equivalente a uma disjunção de formas normais, então c é equivalente a uma disjunção finita e única de modelos minimais.*

Dem. Pelo Teorema 4.57, pela Proposição 4.38 e excluindo da disjunção os modelos que subsumam outros modelos. A unicidade é garantida pela unicidade de formas normais, Proposição 4.19. □

No caso geral, se $c \in \mathcal{L}_U$ é satisfazível, então existem formas primárias $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ tais que $c \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}_1 \ \vee\ \ldots\ \vee\ \mathcal{C}_n$, mas o facto de uma forma primária poder ser equivalente a uma disjunção de formas primárias, não garante que as formas primárias $\mathcal{C}_i$ sejam modelos minimais de c. Por outro lado, a presença de negações e disjunções leva a que uma forma primária $\mathcal{C}$ seja equivalente a disjunções do tipo $(c_1 \wedge \mathcal{C}) \vee (\neg c_1 \wedge \mathcal{C})$. Por exemplo, sendo

$$(\mathsf{c}_{27}) \qquad x.f_1^2 \doteq w_1 \wedge x.f_2^2 \doteq w_2 \wedge y.f_1^2 \doteq z_1 \wedge y.f_2^2 \doteq z_2 \wedge w_1 \neq a \wedge w_1 \neq z_1$$

$$(\mathsf{c}_{28}) \qquad x.f_1^2 \doteq w_1 \wedge x.f_2^2 \doteq w_2 \wedge y.f_1^2 \doteq z_1 \wedge y.f_2^2 \doteq z_2 \wedge z_1 \neq b \wedge w_1 \neq z_1$$

temos que $\mathsf{c}_{25} \approx_{\mathcal{RT}} \mathsf{c}_{26} \vee \mathsf{c}_{27} \vee \mathsf{c}_{28}$.

4.5.1 Formas Primárias Normais

A forma primária c_{23} pode ser "normalizada" para a restrição c_{24}, e então c_{23} seria equivalente a uma disjunção (única) de modelos minimais "normais". Isso é possível porque as variáveis envolvidas na desigualdade estão *definidas* e pode-se, usando o Lema 4.56 e o Lema 4.51, associar à equivalência (1) a regra de reescrita

$\mathsf{NP1}$. $\mathcal{C} \wedge x \neq y \;\mapsto\; \mathcal{C} \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} v_i \neq v_i')$
se $\mathcal{C}$ é uma forma primária, $x.f^n$, $y.f^n \in \mathcal{C}$ e para todo o $1 \leq i \leq n$, $x.f_i^n \doteq v_i \in \mathcal{C}$ e $y.f_i^n \doteq v_i' \in \mathcal{C}$

Definição 4.63 *Uma forma primária $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ diz-se* normal *se não contiver redundâncias e se $x \neq y \in \mathcal{C}_n$ pelo menos uma das variáveis x ou y é não definida ou livre em $\mathcal{C}_p$.*

Proposição 4.64 *Toda a forma primária é equivalente a uma disjunção de formas primárias normais.*

Dem. Usando a regra $\mathsf{NP1}$, basta modificar o sistema de reescrita E, da demonstração da Proposição 4.56, restringindo-nos a negações $x \neq y$ com x e y definidas em $\mathcal{C}_p$ (em particular, sem introduzir variáveis novas). $\square$

Corolário 4.65 *Se $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ e $\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}_p' \wedge \mathcal{C}_n'$ são duas formas primárias normais tal que $\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}'$ então $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são idênticas a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{C}_p}$.*

Redefinimos os conceitos de modelos, modelos parciais e modelos minimais considerando *apenas* formas primárias normais. No que se segue, a menos referência em contrário, vamos apenas considerar modelos *normais*.

Apesar do Corolário 4.65, em certos casos, mesmo sem variáveis definidas, uma forma primária normal podia ainda ser "simplificada", introduzindo variáveis novas. Vamos ver contudo, que isso nem sempre é possível e portanto apenas consideraremos a normalização da Definição 4.63.

Supondo $\mid \Sigma \mid = \infty$, consideremos os seguintes exemplos:

(c_{29}) $x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ x \neq y$

(c_{30}) $x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ w_1 \neq z_1$

(c_{31}) $x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq z_2 \ \wedge \ x \neq y$

(c_{32}) $x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ w_1.g_1^2 \doteq u_1 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ z_1.g_1^2 \doteq v_1 \ \wedge \ x \neq y$

(c_{33}) $x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ w_1.g_1^2 \doteq u_1 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ z_1.g_1^2 \doteq v_1 \ \wedge \ u_1 \neq v_1$

(c_{34}) $x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ w_1.g_1^2 \doteq u_1 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ z_1.g_1^2 \doteq v_1 \ \wedge \ w_1 \neq z_1$

(c_{35}) $x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq w_2 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq z_2 \ \wedge \ x \neq y$

(c_{36}) $x.f_1^2 \doteq w_1 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq z_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq w_2 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq z_2 \ \wedge \ w_1 \neq z_1 \ \wedge \ w_2 \neq y_2$

(c_{37}) $x.f^2 \ \wedge \ x \neq y$

(c_{38}) $x.f^2 \ \wedge \ y.f^2 \ \wedge \ x \neq y$

(c_{39}) $x.f_1^1 \doteq x \ \wedge \ x \neq y$

Em relação aos exemplos anteriores, temos que:

- c_{30} é modelo de c_{29} mas não é modelo minimal;
- c_{29} e c_{31} admitem os próprios como modelo principal;
- c_{33} e c_{34} são modelos de c_{32} mas não são minimais;
- c_{33} é modelo não minimal de c_{34};

- c_{36} é modelo não minimal de c_{35}; neste caso, apenas se pode concluir que $x \neq y$ é redundante em c_{36} e o único modelo minimal de c_{36} é ele próprio.

Introduzindo novas variáveis, $\bar{z}$, podíamos ainda transformar a restrição c_{29} numa restrição c' em que as variáveis x e y fossem definidas e, tal que $\mathcal{RT} \models \mathsf{c}_{29} \;\Leftrightarrow\; \exists \bar{z}.\ c'$. Neste caso, seria possível garantir que se $z \neq w \in c'$ então z e w eram variáveis livres. Para tal, basta usar a regra $\mathsf{NP1}$. O mesmo processo podia-se aplicar às restrições c_{31}, c_{32} e c_{36}. Em relação, à restrições c_{37} podíamos obter o mesmo resultado considerando que $\mathsf{c}_{37} \models y.f^2 \vee \neg y.f^2$ e depois, procedendo como nos casos anteriores. Analogamente, para a restrição c_{38}. No entanto, dada a expressividade de $\mathcal{L}_U$, tal não seria possível para a restrição c_{39}. Este exemplo ilustra que não é sempre possível transformar uma forma primária numa disjunção de formas primárias normais em que as desigualdades só ocorrem entre variáveis livres.
Se $\mid \Sigma \mid < \infty$, uma forma primária pode ser sempre considerada sem variáveis livres, logo esse tipo de normalização também não é possível. Na Proposição 4.56, o sistema de reescrita E, fornece um método para eliminar as negações ou, apenas para transformar as formas primárias em disjunções de formas primárias normais.

4.5.2 Disjunções de Modelos Minimais

Uma forma primária normal pode, ainda, ser equivalente a uma disjunção de modelos. Por exemplo,

$$(\mathsf{c}_{40}) \qquad (x \neq y \wedge x \neq a) \vee (x \neq y \wedge y \neq b) \vee (y = b \wedge x \neq b) \vee (x = a \wedge y \neq a)$$

é equivalente em $\mathcal{RT}$ a $x \neq y$.
Para simplificar c_{40} para $x \neq y$ será necessário obter os modelos minimais de c_{40}. Como iremos ver, normalmente, não existe apenas uma disjunção de modelos minimais equivalente a uma restrição $c \in \mathcal{L}_U$. Assim a noção de simplificação terá de ser explicítada para que dadas duas restrições equivalentes em $\mathcal{RT}$, decidir qual a mais "simples". Contudo, apenas vamos considerar aqui o problema de determinar todos os modelos minimais duma dada restrição.

Para lógica proposicional, o problema de determinar todos os modelos minimais, denominados *implicantes primos*, duma fórmula, foi estudado por Quine [Qui52, Qui55, Qui59]. Teve como motivação a minimização de funções booleanas [McC56, SM54], onde se pretendia obter a representação mais simples, segundo o dado critério, duma fórmula proposicional. Este problema também é relevante em inteligência artificial em problemas de diagnóstico [Rei87, dKMR90], manutenção de verdades [dKR87], aprendizagem [Rym94] e raciocínio não-monótono [dKR87, Prz89]. Alguns algoritmos para obter implicantes primos de fórmulas proposicionais foram apresentados em [JRSL70, JP90, KT90, dK92, Nga93].

Nesta secção, vamos estender o método apresentado por Quine [Qui55, Qui59] para $\mathcal{L}_U$.

4.5.2.1 Modelos Mimimais para Σ com constantes

Começamos por considerar que Σ é infinito e apenas contém constantes. Note-se que no caso de Σ ser finito e apenas contiver constantes, pela Proposição 4.40, o problema já está resolvido.

A definição da noção de resolvente de duas formas primárias $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ será necessária para o método a seguir descrito para a obtenção dos modelos minimais de $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$. Esta noção corresponde à noção de *consensus* de duas conjunções de literais em [Qui55, Qui59, SM54].

O lema seguinte será utilizado para provar que a resolvente de duas formas primárias é um modelo da sua disjunção.

Lema 4.66 *Sendo* $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ *ou* $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$ *e* v, v',v'' *e* v''' *valores de* $\mathcal{L}_U$ *tem-se que*

(1) $\mathcal{A} \models v' = v \Rightarrow v'' \neq v' \vee v'' = v$

(2) $\mathcal{A} \models v' \neq v'' \Rightarrow v' \neq v \vee v'' \neq v$

(3) $\mathcal{A} \models v'' = v''' \Rightarrow v'' \neq v \vee v''' \neq v'$ *se* v *e* v' *são valores incompatíveis, isto é, constantes distintas*

Dem. (1) Seja ρ é uma atribuição de variáveis tal que $\rho(v) = \rho(v')$. Então, $\rho(v'') = \rho(v)$ ou $\rho(v'') \neq \rho(v')$.

(2) Deduz-se da transitividade da igualdade, Axioma A3 de E_T ou E_{RT}.

(3) Deduz-se do Axioma A5 de E_T ou E_{RT}.

□

Definição 4.67 *Sendo* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *formas primárias, diferentes de* $\top$, *uma forma primária* $\mathcal{C}'$ *é uma* resolvente *de* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *se uma das seguintes condições é verificada:*

(i) $v'' \neq v' \in \mathcal{C}_n^1$, $v'' \in [v]_{\mathcal{C}_p^2}$ *e* $v'' \not\equiv v$; $\mathcal{C}'$ *é, se existir, a forma primária de* $(\mathcal{C}_1 \setminus \{v'' \neq v'\}) \cup \mathcal{C}_2'$ *onde* $\mathcal{C}_2'$ *é uma forma primária que resulta de* $\mathcal{C}_2$ *excluindo da classe* $[v]_{\mathcal{C}_p^2}$ *pelo menos os elementos que pertençam à classe* $[v'']_{\mathcal{C}_p^1}$ *e acrescentando os que pertencem à classe* $[v']_{\mathcal{C}_p^1}$ *de tal forma que:*

   (a) $[v'']_{\mathcal{C}_p'} \cap [v]_{\mathcal{C}_p'} = \emptyset$

   (b) $[v'']_{\mathcal{C}_p'} \cup [v]_{\mathcal{C}_p'} \subseteq [v'']_{\mathcal{C}_p^1} \cup [v]_{\mathcal{C}_p^1} \cup [v'']_{\mathcal{C}_p^2} \cup [v]_{\mathcal{C}_p^2}$

(ii) $x \neq v \in \mathcal{C}_n^1$, $y \neq v' \in \mathcal{C}_n^2$ *e* v *e* v' *são valores incompatíveis em* $\mathcal{C}_1$ *e em* $\mathcal{C}_2$; $\mathcal{C}'$ *é, se existir, a forma primária de* $(\mathcal{C}_1 \setminus \{x \neq v\}) \cup (\mathcal{C}_2 \setminus \{y \neq v'\}) \cup \{x = y\}$;

(iii) $v' \neq v \in \mathcal{C}_n^1$, $v'' \neq v \in \mathcal{C}_n^2$; $\mathcal{C}'$ *é, se existir, a forma primária de* $(\mathcal{C}_1 \setminus \{v' \neq v\}) \cup (\mathcal{C}_2 \setminus \{v'' \neq v\}) \cup \{v' \neq v''\}$.

Considerando a condição (i), da definição anterior, temos que a resolvente de $x \neq z$ e $y = z$ é $x = y$. Este facto permite concluir, por exemplo, que

(c$_{41}$) $\quad x = z \vee x \neq y \vee y \neq z$

é equivalente em $\mathcal{RT}$ a $\top$. O mesmo resultado é obtido, considerando a resolvente entre $x \neq y$ e $y \neq z$, pela condição (iii).
Sendo

(c$_{42}$) $\quad y_1 = a \wedge y_2 = a \wedge y_3 = a$

(c$_{43}$) $\quad y_1 \neq y_2$

As resolventes de c$_{42}$ e c$_{43}$ são

(c$_{44}$) $\quad y_1 = a \wedge y_3 = a$

(c$_{45}$) $\quad y_2 = a \wedge y_3 = a$

(c$_{46}$) $\quad y_1 = y_3 \wedge y_2 = a$

(c$_{47}$) $\quad y_2 = y_3 \wedge y_1 = a$

No entanto, sendo

(c$_{48}$) $\quad x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge y_1 \neq y_2$

(c49) $\quad y_1 = y_2 \;\wedge\; x_1 = x_2$

não existe nenhuma resolvente de c48 e c49, pois a condição (i)a da Definição 4.67 nunca é verificada.

Lema 4.68 *Sendo $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ formas primárias e $\mathcal{C}'$ uma resolvente de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ então $\mathcal{C}' \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$.*

Dem. Consideramos cada uma das possíveis formas de obter resolventes, de acordo com a Definição 4.67.

(i) Seja $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}', \mathcal{RT})$. A restrição $\mathcal{C}'$ só difere de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ nas restrições que envolvem variáveis nas classes $[v'']_{\mathcal{C}'_p}$ e $[v]_{\mathcal{C}'_p}$, garantindo-se que $[v'']_{\mathcal{C}^1_p} \subseteq [v'']_{\mathcal{C}'_p}$ e $[v']_{\mathcal{C}^1_p} \subseteq [v']_{\mathcal{C}'_p}$. Seja $[v'']_{\mathcal{C}^2_p} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, com $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq [v'']_{\mathcal{C}^1_p}$, $\{v_{k+1}, \ldots, v_l\} \subseteq [v']_{\mathcal{C}^1_p}$ e os restantes elementos v_i, para $l+1 \leq i \leq n$, não pertencem a nenhuma dessas classes. Então, $[v'']_{\mathcal{C}'_p} = \{v_1, \ldots, v_k, v_{l+1}, \ldots, v_{n-m}, w_1, \ldots, w_s\}$ e $[v']_{\mathcal{C}'_p} = \{v_{k+1}, \ldots, v_l, v_{n-m+1}, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_r\}$. Suponhamos que $\rho(v'') = \rho(v)$. Para que $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_2, \mathcal{RT})$ basta ver que os w_i, para $1 \leq i \leq s$, e u_j, para $1 \leq j \leq r$, são não incompatíveis em $\mathcal{C}_2$ com os elementos de $[v'']_{\mathcal{C}^2_p}$ e entre si. Mas se tal acontecesse também o seriam em $\mathcal{C}'$ e então $\rho \notin \mathcal{S}(\mathcal{C}', \mathcal{RT})$. Temos então que $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_2, \mathcal{RT})$. Analogamente se $\rho(v'') \neq \rho(v)$ então $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_1, \mathcal{RT})$. Neste caso, algum w_i, para $1 \leq i \leq s$, e algum u_j, para $1 \leq j \leq r$, não podem pertencer a uma mesma classe de $=_{\mathcal{C}^1_p}$, pois nesse caso a condição (i)a não se verificava.

(ii) Neste caso o resultado, envolve o Axioma A5 de E_{RT} na noção de valores incompatíveis. Seja $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}', \mathcal{RT})$. Então, se $\rho(x) = \rho(v)$ como necessariamente $\rho(v) \neq \rho(v')$ temos que $\rho(y) \neq \rho(v')$, logo $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_2, \mathcal{RT})$. Se $\rho(x) \neq \rho(v)$ então $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_1, \mathcal{RT})$.

(iii) Neste caso o resultado, envolve a transitividade da igualdade. Seja $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}', \mathcal{RT})$. Se $\rho(v) = \rho(v')$ então $\rho(v) \neq \rho(v'')$ e $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_2, \mathcal{RT})$. Caso contrário, $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_1, \mathcal{RT})$.

□

Corolário 4.69 *Sendo $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ formas primárias e $\mathcal{C}'$ uma resolvente de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ então $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{C}'$.*

Calculando as resolventes da restrição c_{40}, entre a primeiro e a último elemento da disjunção e entre o segundo e terceiro, temos que $\mathsf{c}_{40} \approx_{\mathcal{RT}} \mathsf{c}_{50}$, onde

$$(\mathsf{c}_{50}) \qquad (x \neq y \ \wedge \ x \neq a) \ \vee \ (x \neq y \ \wedge \ y \neq b) \ \vee \ (y = b \ \wedge \ x \neq b) \ \vee \ (x = a \ \wedge \ y \neq a) \ \vee \ (x \neq y \ \wedge \ y \neq a) \ \vee \ (x \neq y \ \wedge \ x \neq b)$$

Considerando que $x = a \ \wedge \ y \neq a \models_{\mathcal{RT}} x \neq y \ \wedge \ y \neq a$ e $y = b \ \wedge \ x \neq b \models_{\mathcal{RT}} x \neq y \ \wedge \ x \neq b$ vem

$$(\mathsf{c}_{51}) \qquad (x \neq y \ \wedge \ x \neq a) \ \vee \ (x \neq y \ \wedge \ y \neq b) \ \vee \ (x \neq y \ \wedge \ y \neq a) \ \vee \ (x \neq y \ \wedge \ x \neq b)$$

Finalmente, podemos mais uma vez calcular as resolventes da restrição c_{51}, entre a primeiro e a último elemento da disjunção e entre o segundo e terceiro, usando a condição (ii) da Definição 4.67. Concluímos assim que $\mathsf{c}_{40} \approx_{\mathcal{RT}} x \neq y$.

Proposição 4.70 *Supondo que Σ é infinito e que contém apenas constantes, qualquer disjunção $\mathcal{C}$ de formas primárias pode ser transformada numa disjunção de modelos minimais de $\mathcal{C}$ pela aplicação do sistema de reescrita* M*, constituído pelas seguintes regras:*

M1. $\mathcal{C}_i \vee \mathcal{C} \ \mapsto \ \mathcal{C}$ *se existe em $\mathcal{C}$ uma forma primária $\mathcal{C}_j$ tal que $\mathcal{C}_i$ subsume $\mathcal{C}_j$;*

M2. $\mathcal{C} \ \mapsto \ \mathcal{C} \vee \mathcal{C}'$ *onde $\mathcal{C}'$ é a resolvente de duas formas primárias em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ não subsume nenhuma forma primária de $\mathcal{C}$.*

Se $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ \mathcal{C}_n$ é irredutível para M *então, para cada $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{C}_i$ é um modelo minimal de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ contém todos os seus modelos minimais.*

Dem. A correcção da regra M1 é imediata e a da regra M2 resulta do Corolário 4.69. É também evidente que as regras transformam disjunções de formas primárias em disjunções de formas primárias (ou $\top$). Analisemos a terminação. Nenhuma regra introduz variáveis ou símbolos funcionais, portanto, basta provar que não há ciclos pela aplicação das regras. A regra M1 faz diminuir o número de elementos da disjunção e uma restrição eliminada não pode ser reintroduzida pela regra M2. Se $\mathcal{C}'$ foi eliminada pela regra M1, então existe em $\mathcal{C}$, uma forma primária $\mathcal{C}_j$ tal que $\mathcal{C}'$ subsume $\mathcal{C}_j$. Assim, não pode haver um ciclo que inclua a aplicação da regra M1. Por outro lado, a regra M2 aumenta o número de elementos da disjunção.

Seja $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$ irredutível para M. Se $\mathcal{C} \equiv \top$ então $\mathcal{C}$ admite apenas um modelo minimal. Se os $\mathcal{C}_i$, para $1 \leq i \leq n$ são todos formas normais, pelo Corolário 4.62, são todos modelos minimais de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ não admite outros modelos minimais.

Caso contrário, suponhamos que existe um modelo minimal $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ que não é nenhum dos $\mathcal{C}_i$, para $1 \leq i \leq n$, isto é:

(i) $\mathcal{C}' \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}$ e, portanto, $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}', \mathcal{RT})\ \exists 1 \leq i \leq n \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_i, \mathcal{RT})$

(ii) $\mathcal{C}'$ não subsume nenhum modelo de $\mathcal{C}$, em particular nenhum $\mathcal{C}_i$, para $1 \leq i \leq n$

(iii) $\forall 1 \leq i \leq n\ \exists \rho_i\ \rho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}', \mathcal{RT})$ e $\rho_i \notin \mathcal{S}(\mathcal{C}_i, \mathcal{RT})$

Seja ρ_i uma atribuição de variáveis tal que $\rho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}', \mathcal{RT})$, $\rho_i \notin \mathcal{S}(\mathcal{C}_i, \mathcal{RT})$ e $\mathcal{C}' \wedge \mathcal{C}_i$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$. Como $\mathcal{C}'$ é modelo minimal, podemos supor que ρ_i só não é solução de $\mathcal{C}_i$ apenas por uma restrição atómica c_i tal que $\mathcal{C}_i \models_{\mathcal{RT}} c_i$ e c_i não é determinada em $\mathcal{C}'$. A restrição c_i pode ser dum dos seguintes tipos:

Caso: $v = v''$**.** Como $\mathcal{C}_i$ é forma primária temos que $v'' \in [v]_{\mathcal{C}_p^i}$. Como $\mathcal{C}'$ é um modelo de $\mathcal{C}$ existe pelo menos um $1 \leq j \leq n$ tal que $\rho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_j, \mathcal{RT})$. Como Σ é infinito, temos que $v'' \neq v' \in \mathcal{C}_j$ e $v' \in [v]_{\mathcal{C}_p'}$. Falta apenas ver que a resolvente de $\mathcal{C}_j$ e de $\mathcal{C}_i$, pela condição (i) da Definição 4.67, $\mathcal{C}''^{\equiv \mathcal{C}_j \setminus \{v'' \neq v'} \cup \mathcal{C}_i'$ é satisfazível. É evidente que $\rho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_j \setminus \{v'' \neq v', \mathcal{RT})$. Também $\rho_i \in \mathcal{C}_i'$, tendo em consideração o que foi dito sobre ρ_i e $\mathcal{C}_i$, e porque $\mathcal{C}''$ não víncula $v = v''$. Concluí-se que a regra $\mathsf{M2}$ é aplicável.

Caso: $v'' \neq v'$**.** Como no caso anterior, existe pelo menos um $1 \leq j \leq n$ tal que $\rho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{C}_j, \mathcal{RT})$. Se $\mathcal{C}_j \models_{\mathcal{RT}} v'' = v$ e $v' \in [v]_{\mathcal{C}_p'}$ a demonstração segue como no caso anterior. Senão, como foi visto no Lema 4.66, podemos ainda ter os seguintes casos:

a) $v''' \neq v \in \mathcal{C}_j$, v e v' são incompatíveis em $\mathcal{C}_i$ e $\mathcal{C}_j$ e $v'' \in [v''']_{\mathcal{C}_p'}$

b) $v'' \neq v \in \mathcal{C}_j$ e $\mathcal{C}' \models_{\mathcal{RT}} v' \neq v$

No primeiro caso, aplica-se a regra $\mathsf{M2}$ considerando a resolvente da condição (ii) da Definição 4.67. E, no segundo caso, a resolvente da condição (iii).

Suponhamos, agora, que $\mathcal{C}$ é irredutível para M, mas que um dos $\mathcal{C}_i$, para algum $1 \leq i \leq n$, não é modelo minimal de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}_i$ é modelo de $\mathcal{C}$ existe um modelo minimal $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C}_i \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}'$. Se $\mathcal{C}'$ é algum dos $\mathcal{C}_j$ para $1 \leq j \leq n$, e $j \neq i$, então aplica-se a regra M1. Senão, existe um modelo minimal que ainda não pertence à disjunção, e como vimos, acima a regra M2 aplica-se. $\square$

Note-se que a disjunção de todos modelos minimais de uma restrição $c \in \mathcal{L}_U$ pode conter restrições redundantes. Isto é, um modelo minimal pode víncular a disjunção de dois ou mais modelos minimais. Os métodos descritos em [Qui55, Qui59] para eliminar fórmulas redundantes podem ser adaptados directamente para $\mathcal{L}_U$.
Por exemplo, para a restrição

$$(x = a \ \wedge \ y = a) \ \vee \ x \neq y \tag{c_{52}}$$

a disjunção de todos os seus modelos minimais é:

$$x = a \ \vee \ y = a \ \vee \ x \neq y \tag{c_{53}}$$

mas ou $x = a$ ou $y = a$ podem ser eliminados.
No entanto, o nosso o objectivo nesta secção foi apenas mostrar como é possível obter todos os modelos minimais duma restrição de $\mathcal{L}_U$ satisfazível em $\mathcal{RT}$.

4.5.2.2 Modelos Minimais para Σ com functores

$$y = x \ \wedge \ y_1 = x_1 \ \wedge \ y_2 = x_2 \ \wedge \ x.f_1^2 \doteq x_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq x_2 \tag{c_{54}}$$

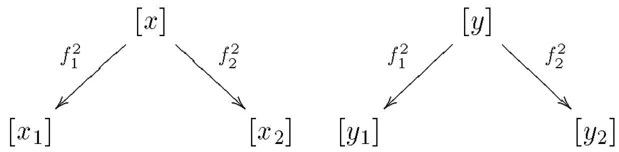
$$x.f_1^2 \doteq x_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq x_2 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq y_1 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq y_2 \ \wedge \ y_1 \neq x_1 \tag{c_{55}}$$

$$x.f_1^2 \doteq x_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq x_2 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq y_1 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq y_2 \ \wedge \ y_2 \neq x_2 \tag{c_{56}}$$

$$x.f_1^2 \doteq x_1 \ \wedge \ x.f_2^2 \doteq x_2 \ \wedge \ y.f_1^2 \doteq y_1 \ \wedge \ y.f_2^2 \doteq y_2 \tag{c_{57}}$$

A disjunção das restrições c_{54}, c_{55} e c_{56} é equivalente em $\mathcal{RT}$ à restrição c_{57}. Contudo, considerando, por exemplo a resolvente entre c_{54} e c_{55}, usando a condição (i) da Definição 4.67, obtém-se novamente a restrição c_{54}, devido à presença da restrição $x = y$ na resolvente.

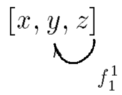
$$\begin{tikzcd}
 & {[x, y]} \arrow[dl, "f_1^2"'] \arrow[dr, "f_2^2"] & \\
{[x_1, y_1]} & & {[x_2, y_2]}
\end{tikzcd}$$



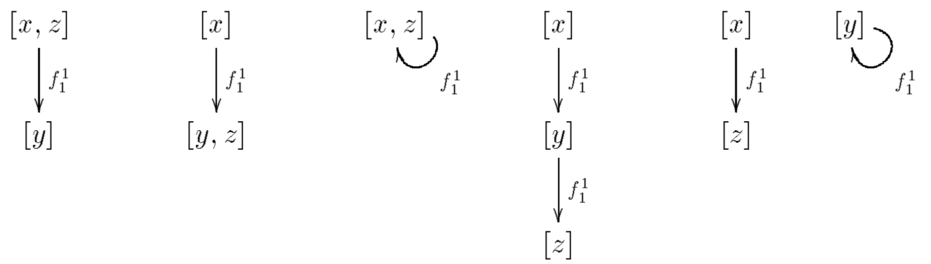
(c$_{58}$) $y = x \ \wedge\ z = x \ \wedge\ x.f_1^1 \doteq x$

(c$_{59}$) $x \neq y$

Qualquer resolvente de c$_{58}$ e de c$_{55}$ não pode víncular nem $x \neq y$ nem $y \neq z$ nem $x \neq z$. Sendo a representação de c$_{58}$



as resolventes de c$_{58}$ e c$_{59}$ são representadas a seguir, a menos renomeação de variáveis no conjunto $\{x, y, z\}$,



(a) (b) (c) (d) (e)

Assim, é necessário alterar a noção de resolvente para garantir que se

Lema 4.71 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$ e para todos x, y variáveis, v, v', v'' e v''' valores de $\mathcal{L}_U$ e f^n functores tem-se que*

(1) $\mathcal{A} \models x.f_i^n \doteq v \Rightarrow v'' \neq v \ \vee\ x.f_i^n \doteq v''$

(2) $\mathcal{A} \models x = y \Rightarrow \neg x.f^n \ \vee\ y.f^n$

(3) $\mathcal{A} \models x = y \Rightarrow \neg x.f^n \ \vee\ y.g^k$

(4) $\mathcal{A} \models x = y \Rightarrow \neg x.f^n \ \vee\ y \neq a$

(5) $\mathcal{A} \models x = y \Rightarrow \neg x.f^n \ \vee\ y \neq z \ \ \&\ \ z.g^k$

(6) $\mathcal{A} \models x = y \Rightarrow \neg x.f^n \ \vee\ y \neq z \ \ \&\ \ \neg z.f^n$

(7) $\mathcal{A} \models \neg y.f^n \Rightarrow \neg x.f^n \ \vee\ y \neq x$

$$
\begin{tikzcd}
{[x,y,z]} \arrow[d, "f_1^1"] \\
{[w,u]} \arrow[d, "g_1^1"] \\
{[s,t]} \arrow[uu, bend left=50, "h_2^2"] \arrow[u, bend right=70, "h_1^2"']
\end{tikzcd}
$$

>>>>>COMMENT<<<<<

Acabar

>>>>>END<<<<<

Na prática, a unicidade de modelos minimais e a sua obtenção é útil para a determinação de restrições equivalentes e sua simplificação. Contudo, como já foi referido, não é necessário para resolver o problema da satisfazibilidade.

No Corolário 5.5, da Secção 5.1, estabelece-se outro método para a obtenção de modelos minimais.

4.6 Sumário

Capítulo 5

Resolutores para $\mathcal{L}_U$

Embora o Teorema 4.57 do Capítulo 4 estabeleça um algoritmo para determinar a satisfazibilidade duma restrição $c \in \mathcal{L}_U$, esse algoritmo é de complexidade exponencial e, como já foi dito, é extremamente ineficiente para aplicações práticas. Se $\mid \Sigma \mid = \infty$, o seu caracter exponencial resulta da transformação da restrição inicial em forma normal disjuntiva. Para reduzir o custo desta transformação, utilizaremos neste capítulo uma estratégia baseada em técnicas de factorização que permitem reduzir o tamanho das restrições às quais se tem de aplicar a transformação referida. Começamos por introduzir informalmente essas técnicas e ilustrar com um exemplo. Como no capítulo anterior, vamos considerar essencialmente a álgebra das árvores racionais, $\mathcal{RT}$.
Se $\mid \Sigma \mid < \infty$, como vimos no Corolário 4.46, a satisfazibilidade duma conjunção de restrições atómicas é um problema **NP**-completo e, portanto, os métodos acima indicados não evitam o seu caracter exponencial. Neste caso, métodos usados em programação com restrições em domínios finitos serão também necessários, mas esse estudo não será feito no trabalho aqui apresentado. Assim, neste capítulo vamos supor que $\mid \Sigma \mid = \infty$.

Qualquer restrição $c \in \mathcal{L}_U$ pode ser transformada em tempo polinomial, considerando a relação $\equiv_{\mathcal{B}}$, numa restrição equivalente da forma

(1) $$\mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n \wedge \mathcal{D}isj_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{D}isj_m$$

onde, cada um dos factores é $\top$ ou

$\mathcal{C}_p$ é uma conjunção (conjunto) de restrições atómicas positivas

$\mathcal{C}_n$ é uma conjunção (conjunto) de restrições atómicas negativas

$\mathcal{D}isj_i$ é uma disjunção de restrições da mesma forma, $1 \leq i \leq m$

Cada $c \in \mathcal{L}_U$ é constituído por conjunções e disjunções de:

- restrições atómicas negativas
- conjunções de restrições atómicas positivas

Sendo $\mathcal{P}$ uma conjunção de restrições atómicas (forma primária ou $\perp$), uma restrição $e \in \mathcal{L}_U$ na forma (1) é definida pela seguinte gramática:

$$
\begin{array}{rcl}
e & ::= & \mathcal{P} \ \wedge \ f \\
 & | & \mathcal{P} \\
 & | & f \\
f & ::= & (d) \\
 & | & f \ \wedge \ (d) \\
d & ::= & e \ \vee \ e \\
 & | & e \ \vee \ d
\end{array}
$$

Qualquer restrição c_1 que é um modelo parcial de c vamos de denominar um *factor determinístico* de c. Se c está na forma (1) e se $\mathcal{C}_p$ for (ou admitir) uma forma normal, $\mathcal{C}_p$ é um factor determinístico de c. Esta informação, teoremas clássicos da lógica de 1ª ordem, os axiomas de $\mathcal{RT}$ e a definição de $\mathcal{L}_U$ podem ser utilizados – através de regras de reescrita – para simplificar cada um dos outros elementos da conjunção. Este processo, que é de complexidade polinomial, pode ser repetido recursivamente no interior das disjunções. A detecção de factores determinísticos comuns a várias disjunções $Disj_i$ e a sua factorização permitirá também reduzir o tamanho das restrições a multiplicar. Finalmente, para obter um algoritmo completo para a satisfazibilidade, será necessário multiplicar as disjunções $Disj_i$ que restarem. No entanto, bastará multiplicar disjunções que não forem independentes para a satisfazibilidade. Isto é, dada uma conjunção $c_1 \wedge c_2 \in \mathcal{L}_U$, serão formulados critérios para que a conjunção seja satisfazível se e só se cada um dos factores o seja, independentemente.

Consideremos o seguinte exemplo:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathsf{c}_1) & x.f_1^1 \doteq u \ \wedge \ y.f_1^3 \doteq w \ \wedge \ x \neq b \ \wedge \ (z = x \ \vee \ y = b) \\
 & \quad \wedge \ ((y.f_1^3 \doteq u \ \wedge \ u.g^2 \ \wedge \ (u = a \ \vee \ x_1 = z)) \ \vee \ (x_1 = x \ \wedge \ y \neq z)) \\
 & \quad \wedge \ (y.f_2^3 \doteq x \ \vee \ y.f_2^3 \doteq a) \ \wedge \ (y.f_3^3 \doteq u \ \vee \ y.f_3^3 \doteq b)
\end{array}
$$

Sendo $\mathcal{C}_p \equiv x.f^1 \wedge x.f_1^1 \doteq u \wedge y.f^3 \wedge y.f_1^3 \doteq w$ podemos simplificar c_1 para

$$(\mathsf{c}_2) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{C}_p \wedge z = x \wedge ((w = u \wedge u.g^2 \wedge (u = a \vee x_1 = z)) \\ &\vee (x_1 = x \wedge y \neq z)) \\ &\wedge (y.f_2^3 \doteq x \vee y.f_2^3 \doteq a) \wedge (y.f_3^3 \doteq u \vee y.f_3^3 \doteq b) \end{aligned}$$

porque na primeira disjunção $\mathcal{RT} \not\models \mathcal{C}_p \wedge y = b$ reduzindo-se essa disjunção a $z = x$ e, na segunda disjunção, pelo Axioma A4 de $\mathcal{RT}$, como $y.f_1^3 \doteq w$ então $w = u$.
Sendo $\mathcal{C}_p' \equiv \mathcal{C}_p \wedge z = x$ podemos simplificar, usando argumentos análogo aos anteriores, c_2 para

$$(\mathsf{c}_3) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{C}_p' \wedge ((w = u \wedge u.g^2 \wedge (u = a \vee x_1 = x)) \vee x_1 = x) \\ &\wedge (y.f_2^3 \doteq x \vee y.f_2^3 \doteq a) \wedge (y.f_3^3 \doteq u \vee y.f_3^3 \doteq b) \end{aligned}$$

Aplicando o mesmo processo ao primeiro elemento da primeira disjunção obtemos

$$(\mathsf{c}_4) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{C}_p' \wedge ((w = u \wedge u.g^2 \wedge x_1 = x) \vee x_1 = x) \\ &\wedge (y.f_2^3 \doteq x \vee y.f_2^3 \doteq a) \wedge (y.f_3^3 \doteq u \vee y.f_3^3 \doteq b) \end{aligned}$$

Factorizando $x_1 = x$ na primeira disjunção de c_4 e dado que um dos elementos dessa disjunção se reduz a $\top$, obtemos a seguinte restrição:

$$(\mathsf{c}_5) \qquad \mathcal{C}_p' \wedge (y.f_2^3 \doteq w \vee y.f_2^3 \doteq a) \wedge (y.f_3^3 \doteq u \vee y.f_3^3 \doteq b)$$

Finalmente, é necessário analisar a independência para a satisfazibilidade das disjunções em c_5. Embora a variável y ocorra em ambas as disjunções, neste caso é fácil ver que elas são independentes, logo c_5 é satisfazível. Concluímos assim a satisfazibilidade de c_1 sem ter de utilizar um algoritmo exponencial. Note-se que, no caso geral, para que $c_1 \vee c_2$ seja independente de c_3 para a satisfazibilidade, basta que um dos elementos da disjunção seja independente de c_3. Por exemplo, mesmo que $u = w$ pertencesse a $\mathcal{C}_p'$ não seria ainda necessário multiplicar as disjunções em c_5.

5.1 Satisfazibilidade Incremental para Formas Normais

Começamos por apresentar um algoritmo para a satisfazibilidade dum conjunto de restrições atómicas positivas $\mathcal{C}$, dada uma forma normal $\mathcal{M}$ (modelo), designada por *contexto*. Se $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ for satisfazível pretendemos obter as "diferenças" entre $\mathcal{M}$ e a forma normal de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$.

Definição 5.1 *Sendo $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$ diz-se que a restrição $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível se $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$.*

A proposição seguinte generaliza o Lema 4.51 e relaciona-o com a obtenção de formas resolvidas e normais.

Proposição 5.2 *Seja $\mathcal{M}$ uma forma resolvida normal e $\mathcal{C}$ um conjunto de restrições atómicas positivas. Se $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível, então $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{M}_1$, onde $\mathcal{M}_1$ resulta de $\mathcal{C}$ pela aplicação finita do sistema de reescrita* I *constituído pelas seguintes regras de reescrita:*

I1. $\mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}[v/x]$ *se $x = v \in \mathcal{M}$ e $x \in Vars(\mathcal{C})$;*

I2. $\{y.f_i^n \doteq v'\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{v = v'\} \cup \mathcal{C}$ *se $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}$ e $x =_{\mathcal{C}} y$;*

I3. $\{y.f^n\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}$ *se $x.f^n \in \mathcal{M}$, $x =_{\mathcal{C}} y$ e para nenhum $1 \leq i \leq n$ e v, $y.f_i^n \doteq v \in \mathcal{C}$;*

I4. $\{\top\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}$

I5. $\{v = v\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}$

I6. $\{a = x\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{x = a\} \cup \mathcal{C}$

I7. $\{x.f_i^n \doteq v, x.f_i^n \doteq v'\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{x.f_i^n \doteq v', v = v'\} \cup \mathcal{C}$

I8. $\{x = v\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{x = v\} \cup \mathcal{C}[v/x]$ *se nenhuma regra anterior se aplica e $x \in Vars(\mathcal{C})$;*

I9. $\mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{v = v'\} \cup \mathcal{C}$ *se nenhuma regra anterior se aplica, $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}$ e $y.f_i^n \doteq v' \in \mathcal{M}$ para algum $f^n \in \Sigma$ e $1 \leq i \leq n$, $x =_{\mathcal{C}} y$, v e v' não são simultaneamente constantes, $v \not\equiv v'$ e $v \neq_{\mathcal{C}} v'$;*

I10. $\{x.f_i^n \doteq v\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{x.f^n, x.f_i^n \doteq v\} \cup \mathcal{C}$ *se $x.f^n \notin \mathcal{C}$;* [1]

I11. $\mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C} \cup \{x = y\}$ *se nenhuma regra anterior se aplica, $x \sim_{\mathcal{M} \cup \mathcal{C}} y$ e $x \neq_{\mathcal{M} \cup \mathcal{C}} y$.*

[1] *Para a satisfazibilidade bastaria considerar se $y.f^n \notin \mathcal{M} \cup \mathcal{C}$ e $x =_{\mathcal{C}} y$, mas neste caso $\mathcal{M}_1$ não seria uma forma resolvida.*

O sistema de reescrita termina e se $\mathcal{M}_1$ é irredutível para este conjunto de regras então $\mathcal{M}_1$ é uma forma resolvida normal e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1$ coincide com a forma normal de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$, $\mathcal{M}'$, a menos permutação de valores na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}'}$ e repetição de restrições atómicas. Neste caso, escreve-se $\mathcal{M}' \doteq \mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1$. Em particular, se $\mathcal{M} \equiv \top$ então $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}_1$.

Dem. Cada regra do sistema de reescrita $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$ é correcta em relação a $\mathcal{M}$, se $\mathcal{C} \overset{\mathsf{I}}{\mapsto}_{\mathcal{M}} \mathcal{C}'$ implicar $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}'$, ou, equivalentemente, se $\mathcal{RT} \models \mathcal{M} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}'$. Excluindo as regras I2, I3, I8 e I9, o conjunto de regras definido acima coincide com o que seria usado na redução de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ a forma resolvida normal, pelo sistema de reescrita R, porque $\mathcal{M}$ está em forma normal. Para esse conjunto de regras fica provada a correcção e que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1$ corresponde à forma normal de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$. A regra I8 é correcta em qualquer álgebra de $\mathcal{L}$. A regra I3 é correcta porque se $x \not\equiv y$ corresponde, no sistema de reescrita R ao resultado da aplicação da regra R4 e, em ambos os casos, do facto de supormos que num conjunto (conjunção) não existem restrições repetidas. Cada aplicação das regras I2 ou I9 corresponde a uma aplicação da regra R6, na redução a forma normal. No caso da regra I2, se $x \not\equiv y$, essa aplicação seria precedida por outras regras em R, nomeadamente, duma aplicação da regra R4. Aplicando a regra I9 não se elimina uma restrição da forma $x.f_i^n \doteq v$ em $\mathcal{M}$, mas essa restrição coincide com $y.f_i^n \doteq v'$ a menos permutação de valores numa classe de equivalência de $=_{\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}}$. Para cada aplicação da regra I8, uma vez que as regras I1 e I2 foram aplicadas primeiro, é garantido que se x ocorre em $\mathcal{M}$ então x é livre em $\mathcal{M}$ ou é funcional, e em ambos os casos $\{x = v\} \cup \mathcal{M}$ é satisfazível e difere duma forma resolvida a menos permutação de valores na mesma classe de equivalência de $=_{\{x=v\} \cup \mathcal{M}}$. Isto prova a correcção desta regra. Temos que $\mathcal{M}_1$ é forma resolvida e a regra I11 restrita a $\mathcal{C}$ garante que $\mathcal{M}_1$ é normal. Apesar da semelhança entre este sistema de reescrita e o usado para redução a forma normal é necessário ainda garantir a sua terminação. A aplicação das regras I3, I4, I5, I6 e I10 não podem conduzir a cadeias infinitas de reduções, portanto apenas analisaremos a terminação das restantes regras. Nenhuma regra faz aumentar o número de variáveis. Dado um modelo $\mathcal{M}$, consideremos as seguintes funções de $\mathcal{L}_U$ em $\mathbb{N}$:

$\gamma_1(\mathcal{C})$: número de variáveis não resolvidas em $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$

$\gamma_2(\mathcal{C})$: número de restrições da forma $x.f_i^n \doteq v$ em $\mathcal{C}$

$\gamma_3(\mathcal{C})$: número de classes de equivalência da relação $=_{\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}}$

$\gamma_4(\mathcal{C})$: número de variáveis não resolvidas em $\mathcal{C}$

O conjunto de elementos $\nu(\mathcal{C}) = (\gamma_1(\mathcal{C}), \gamma_2(\mathcal{C}), \gamma_3(\mathcal{C}), \gamma_4(\mathcal{C}))$ ordenado lexicográficamente é bem-fundado. Provando que ν é estritamente decrescente pela aplicação das regras de $\mathsf{I}_\mathcal{M}$ (excluindo as atrás referidas), garantimos a terminação, dado que uma cadeia infinita de reescritas corresponderia a uma cadeia infinita estritamente decrescente de elementos ν, o que é impossível. A aplicação das regras atrás referidas não altera o valor de nenhuma destas funções. O quadro seguinte resume a variação de cada γ_i, pela aplicação de cada uma das restantes regras:

$\overset{\mathsf{I}}{\mapsto}_\mathcal{M}$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
I1	$<$			
I2	$\leq$	$<$		
I7	$\leq$	$<$		
I8	$\leq$	$=$	$\leq$	$<$
I9	$\leq$	$=$	$<$	
I11	$=$	$=$	$<$	

A aplicação da regra I1 faz diminuir γ_1 porque resolve uma variável de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$, não resolvida em $\mathcal{C}$. A regra I2 não aumenta γ_1, pois se v ou v' são variáveis elas não estão resolvidas em $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$, antes da sua aplicação. Esta regra decresce estritamente γ_2. Pelas mesmas razões a regra I7 não aumenta γ_1 e decresce estritamente γ_2. A regra I8 não pode fazer aumentar o número de variáveis não resolvidas em $\mathcal{M}$, portanto não aumenta γ_1. O valor de γ_2 não é alterado pois ou v é uma constante e como $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ é satisfazível não existe para esse x restrição da forma $x.f_i^n \doteq v'$, ou v é uma variável e no máximo há uma substituição de variável nas restrições daquela forma. O valor de γ_3 não pode aumentar e pode diminuir[2] se existir em $\mathcal{C}$ outra restrição da forma $x = v'$ e $v \neq_\mathcal{C} v'$. Esta regra decresce estritamente o valor de γ_4, porque resolve uma variável em $\mathcal{C}$. A regra I9 não aumenta γ_1, por razões análogas às da regra I2, e mantém o valor de γ_2. Pelas condições impostas à aplicação desta regra, γ_3 decresce estritamente.

[2] Aliás γ_3 é não crescente pela aplicação de qualquer regra de $\mathsf{I}_\mathcal{M}$.

Note-se que como v e v' são distintas é garantido que $v \neq_{\mathcal{M}} v'$. Finalmente, a regra I11 não altera γ_1 nem γ_2 e decresce estritamente γ_3. $\square$

Corolário 5.3 *Sejam $\mathcal{M}$ uma forma resolvida normal, $\mathcal{C}$ um conjunto de restrições atómicas positivas e $\mathcal{M}_1$ uma forma resolvida obtida de $\mathcal{C}$ e irredutível para o sistema de reescrita $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$, da Proposição 5.2. Então*

(i) $\mathcal{M}_1$ é única a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}_1}$.

(ii) Considere-se a substituição $\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1}$ em $\mathcal{RT}(\Sigma \cup X)$ definida recursivamente por:

$$
\begin{array}{ll}
x\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} = v\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} & \textit{se } x = v \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1 \\
x\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} = f(t_1, \ldots, t_n) & x.f^n \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1,\ x = v \notin \mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1 \textit{ para} \\
& \textit{nenhum valor } v \textit{ e} \\
& t_i = \begin{cases} v_i\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} & \textit{se } x.f_i^n \doteq v_i \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1 \\ z_i & \textit{caso contrário e } z_i \notin \\ & Vars(\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1) \end{cases} \\
x\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} = x & \textit{caso contrário}
\end{array}
$$

A substituição $\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1}$ está bem definida e $\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} \equiv \theta_{\mathcal{M}'}$ onde $\mathcal{M}'$ é a forma normal de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$.

(iii) $\mathcal{M}_1 \equiv \top$ se e só se $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}$.

Dem.

(i) É consequência da Proposição 4.19.

(ii) Embora $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1$ não seja uma forma resolvida $\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1}$ está bem defina porque, pela Proposição 5.2, para $x \in Vars(\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1)$ temos que:

- se x é resolvida em $\mathcal{M}$ então $x \notin Vars(\mathcal{M}_1)$; se x é resolvida em $\mathcal{M}_1$ e x ocorre em $\mathcal{M}$ então $[x]_{\mathcal{M}}$ é livre ou funcional.
- se $x.f^n \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1$ então não existe em $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1$ outra restrição da forma $y.g^m$, para $g^m \not\equiv f^n$ e $x \in [y]_{\mathcal{M}_1}$ (ou $y \in [x]_{\mathcal{M}_1}$).
- se $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}$ então para $x \in [y]_{\mathcal{M}_1}$, a classe $[y]_{\mathcal{M}_1}$ é não definida para i em $\mathcal{M}_1$ e se $y.f_i^n \doteq v' \in \mathcal{M}$ então $v =_{\mathcal{M}_1} v'$; se $x.f_i^n \doteq v \in \mathcal{M}_1$ e $x \in Vars(\mathcal{M})$

então $[x]_{\mathcal{M}}$ é livre ou funcional com o mesmo functor f^n mas não definida para i em $\mathcal{M}$.

Dado que as relações $=_{\mathcal{M}'}$ e $=_{\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_1}$ são iguais, temos que $\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} \equiv \theta_{\mathcal{M}'}$.

(iii) Pela correcção do sistema $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{C} \overset{\mathsf{I}}{\mapsto}^{\star}_{\mathcal{M}} \top$ se e só se $\mathcal{RT} \models \mathcal{M} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}$.

□

Por outro lado,

Corolário 5.4 *Sendo $\mathcal{M}$ uma forma normal e $\mathcal{C}$ um conjunto de restrições atómicas positivas, $\mathcal{RT} \not\models \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ se e só se $\mathcal{M} \cup \mathcal{C} \overset{\mathsf{R}}{\mapsto}^{\star} \perp$.*

Dem. Pela correcção do sistema de reescrita R e pela Proposição 2.15 temos que:

$$\mathcal{M} \cup \mathcal{C} \overset{\mathsf{R}}{\mapsto}^{\star} \perp \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{RT} \not\models \mathcal{M} \wedge \mathcal{C} \quad \text{se e só se} \quad \mathcal{RT} \not\models \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$$

□

Os dois corolários anteriores, justificam as afirmações da página 67, referentes à satisfazibilidade de conjunções de restrições atómicas. O corolário seguinte resume essas afirmações.

Corolário 5.5 *Sendo $\mathcal{C}_p$ uma forma normal e n_i uma restrição negativa não trivial, verifica-se uma das seguintes condições:*

(i) $\mathcal{C}_p \cup \{\neg n_i\} \overset{\mathsf{R}}{\mapsto}^{\star} \perp$ e então $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ é satisfazível e $\mathcal{C}_p \models_{\mathcal{RT}} n_i$.

(ii) $\neg n_i \overset{\mathsf{I}}{\mapsto}^{\star}_{\mathcal{C}_p} \top$ e então $\mathcal{C}_p \models_{\mathcal{RT}} \neg n_i$ e $\mathcal{C}_p \wedge n_i$ é não satisfazível.

(iii) $\neg n_i \overset{\mathsf{I}}{\mapsto}^{\star}_{\mathcal{C}_p} \mathcal{C}_i$ onde $\mathcal{C}_i$ ou é da forma $x.f^n$ ou uma conjunção de restrições da forma $v = v'$. Então, $\mathcal{C}_p \models_{\mathcal{RT}} n_i \Leftrightarrow \neg c'_1 \wedge \ldots \wedge \neg c'_m$ onde $\mathcal{C}_i \equiv c'_1 \wedge \ldots \wedge c'_m$.

Dem. Apenas se considera a demonstração do caso (iii), por análise da forma de n_i. Seja n_i da forma $\neg x.f^n$. Se $x = v \in \mathcal{C}_p$ então $\mathcal{C}_i \equiv v.f^n$, senão $\mathcal{C}_i \equiv x.f^n$. Se n_i é da forma $v \neq v'$ então é fácil ver que as regras de $\mathsf{I}_{\mathcal{C}_p}$ que se podem aplicar só envolvem a eliminação ou a adição de igualdades. Se v ou v' são constantes as únicas regras que se podem aplicar são a $\mathsf{I1}$, $\mathsf{I4}$, $\mathsf{I5}$ ou $\mathsf{I6}$. Se v e v' são variáveis, para além das regras referidas podem também aplicar-se as regras I8, I9 ou I11. Esta última regra não é necessária para a satisfazibilidade, portanto podemos supor que nunca é aplicada. Dada a correcção das regras de $\mathsf{I}_{\mathcal{C}_p}$ é evidente que cada $\mathcal{C}_p \wedge \neg c_i'$ é um modelo de $\mathcal{C}_p \wedge n_i$. $\square$

Os resultados anteriores podem-se generalizar para a conjunção finita de conjunções de restrições atómicas positivas (ou formas normais). Esta generalização corresponde a um processo incremental de satisfazibilidade.

Corolário 5.6 *Sendo $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_m$ conjunções de restrições atómicas positivas, se $\mathcal{C}_0 \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$então:*

(i) A forma normal $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{C}_0 \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m$ coincide a menos permutação de valores na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}'}$ e repetição de restrições atómicas, com $\mathcal{M}_0 \wedge \mathcal{M}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{M}_m$, onde $\mathcal{M}_i$ e $\mathcal{M}_i'$, para $0 \leq i \leq n$, são definidos por:

(a) $\mathcal{M}_0' \equiv \mathcal{M}_0$ se $\mathcal{C}_0 \overset{\mathsf{R}}{\mapsto^\star} \mathcal{M}_0$

(b) $\mathcal{M}_{i+1}' \dot{\equiv} \mathcal{M}_i' \cup \mathcal{M}_{i+1}$ se $\mathcal{C}_{i+1} \overset{\mathsf{I}}{\mapsto^\star_{\mathcal{M}_i'}} \mathcal{M}_{i+1}$, para $0 \leq i \leq m-1$.

(ii) Para toda a atribuição de variáveis ρ em $\mathcal{RT}$, $\rho\theta_{\mathcal{M}_0} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} \cdot \ldots \cdot \theta_{\mathcal{M}_m}$ é solução em $\mathcal{RT}$ de $\mathcal{C}_0 \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m$.

Dem. Por indução no número n de conjunções de restrições atómicas positivas. A substituição $\theta_{\mathcal{M}_0} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1} \cdot \ldots \cdot \theta_{\mathcal{M}_m}$ define-se por analogia com $\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{M}_1}$. $\square$

O sistema de reescrita I pode ainda ser estendido para o caso de $\mathcal{C}$ ser uma conjunto de restrições atómicas positivas e negativas.

Proposição 5.7 *Seja $\mathcal{M}$ uma forma resolvida normal e $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ um conjunto de restrições atómicas. Se $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível, então $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$, onde $\mathcal{C}^1 e_p$ é irredutível para o sistema de reescrita $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$ e $\mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$ é irredutível para o sistema de reescrita* IP*, a seguir apresentado:*

IP1. $\mathcal{C}_p \cup \mathcal{C}_n \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}_p^1 \cup \mathcal{C}_n$ *se* $\mathcal{C}_p \overset{\mathsf{I}}{\mapsto^\star_{\mathcal{M}}} \mathcal{C}_p^1$ *e* $\mathcal{C}_p^1$ *é irredutível.*

IP2. $\mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}[v/x]$ *se* $x = v \in \mathcal{M}$ *e* $x \in Vars(\mathcal{C})$*;*

IP3. $\{x = v\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{x = v\} \cup \mathcal{C}[v/x]$ *se* $x \in Vars(\mathcal{C})$;

IP4. $\{a \neq x\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{x \neq a\} \cup \mathcal{C}$

IP5. $\{a \neq b\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}$ *se a e b são constantes distintas;*

IP6. $\{\neg a.f^n\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}$

IP7. $\{x \neq a\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}$ *se* $x.f^n \in \mathcal{C}_p^1$ *ou* $y.f^n \in \mathcal{M}$ *e* $x \in [y]_{\mathcal{C}_p^1}$, *para algum* $f^n \in \Sigma$;

IP8. $\{\neg x.g^m\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}$ *se* $x.f^n \in \mathcal{C}_p^1$ *ou* $y.f^n \in \mathcal{M}$ *e* $x \in [y]_{\mathcal{C}_p^1}$, *para algum* $f^n \neq g^m$;

IP9. $\{x \neq y, y \neq x\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{M}} \{x \neq y\} \cup \mathcal{C}$

O sistema de reescrita IP *termina e* $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$ *coincide com a forma primária* $\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}_p' \wedge \mathcal{C}_n'$ *de* $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ *a menos permutação de valores na mesma classe de equivalência de* $=_{\mathcal{C}_p'}$ *e repetição de restrições atómicas. Neste caso, escreve-se* $\mathcal{C}' \doteqdot \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$.

Dem. Cada regra do sistema de reescritaIP$_{\mathcal{M}}$ é correcta em relação a $\mathcal{M}$, se $\mathcal{C} \overset{\mathsf{IP}}{\mapsto}_{\mathcal{M}} \mathcal{C}'$ implicar $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}'$, ou, equivalentemente, se $\mathcal{RT} \models \mathcal{M} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}'$. A regra de reescrita IP1 é correcta e as regras IP2–IP9 coincidem com regras do sistema de reescrita P, para redução a forma primária, considerando a forma normal $\mathcal{C}_p' \doteqdot \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_p^1$. A terminação resulta da terminação dos sistemas I$_{\mathcal{M}}$ e P, e da sua ordem de aplicação. Resulta ainda que $\mathcal{C}_p^1$ está em forma normal e se $\mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$ é irredutível para IP$_{\mathcal{M}}$ então é uma forma primária. $\square$

5.2 Sistema de Reescrita Completo, S$_{\mathcal{M}}$

Como anteriormente $\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_p', \ldots$ denotam conjunções (conjuntos) de restrições atómicas positivas; $\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_n', \ldots$ conjunções (conjuntos) de restrições atómicas negativas; $\mathcal{C}, \mathcal{C}_0, \ldots$ conjunções (conjuntos) de restrições. Se $c \in \mathcal{L}_U$ denotamos por $\mathcal{C}$ a mesma restrição a menos de $\equiv_{\mathcal{B}}$. Em vez de adoptarmos (sempre) uma representação em termos de conjuntos usaremos a conectivas $\wedge$ e $\vee$.

Para facilitar a exposição, vamos supor que qualquer $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$ está na forma (1), definida na página 107. As seguintes regras de reescrita podem ser usadas para essa transformação:

G1.	$(c_1 \wedge c_2) \wedge c_3$	$\mapsto$	$c_1 \wedge (c_2 \wedge c_3)$
G2.	$c_1 \wedge c_2$	$\mapsto$	$c_2 \wedge c_1$
			se c_2 é atómica e c_1 não é atómica;
G3.	$c_1 \wedge (c_2 \wedge c_3)$	$\mapsto$	$c_2 \wedge (c_1 \wedge c_3)$
			se c_2 é atómica e c_1 não é atómica positiva e se c_2 é negativa então c_1 não é atómica;
G4.	$c_1 \wedge c$	$\mapsto$	$c \wedge c_1$
			se c_1 é atómica negativa e c é atómica positiva.

A correcção destas regras resulta da relação $\equiv_{\mathcal{B}}$. A terminação prova-se adaptando as técnicas em [DM79] ou [Der82] para o caso dum sistema de reescrita só com a regra G1. É também imediato que uma restrição irredutível para este sistema de reescrita, está na forma (1) (omitindo os parêntesis).

Dada uma restrição $\mathcal{C}_0$, o sistema de reescrita que iremos apresentar ou produz $\perp$ e, neste caso, $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow \perp$ ou um modelo parcial $\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}_0$ e uma restrição $\mathcal{C}$, possivelmente mais simples, com as seguintes características:

- $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$
- Qualquer modelo minimal de $\mathcal{C}_0$ pode ser obtido pela reunião de $\mathcal{M}$ com um modelo minimal de $\mathcal{C}$.
- Para qualquer modelo minimal $\mathcal{M}_c$ de $\mathcal{C}$, $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_c$ é satisfazível.
- O sistema de reescrita é completo no sentido que $\mathcal{C}_0$ é satisfazível a menos que o modelo final $\mathcal{M}$ seja $\perp$.
- Se a regra S8 do sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ for omitida, o sistema de reescrita é incompleto mas a sua complexidade é polinomial.

O sistema de reescrita pode-se sub-dividir em dois passos: um que "extrai" a "informação determinística" e outro que "usa" essa informação para simplificar a restrição restante. No primeiro passo serão reescritos pares $\langle \mathcal{M}, \mathcal{C} \rangle$, correspondendo à conjunção $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$, considerando-se inicialmente o par $\langle \top, \mathcal{C}_0 \rangle$.

O sistema de reescrita S para pares $\langle \mathcal{M}, \mathcal{C} \rangle$ é definido pelas seguintes regras:

$$
\begin{array}{lll}
\langle \mathcal{M}, \{\bot\} \cup \mathcal{C}\rangle & \Rightarrow \langle \bot, \emptyset\rangle & \text{se } \mathcal{M} \not\equiv \bot \\
\langle \mathcal{M}, \{\top\} \cup \mathcal{C}\rangle & \Rightarrow \langle \mathcal{M}, \mathcal{C}\rangle & \\
\langle \mathcal{M}, \{x = t\} \cup \mathcal{C}\rangle & \Rightarrow \langle \mathcal{M} \cup \{x = t\}, \mathcal{C}\rangle & \\
\langle \mathcal{M}, \{x.f^n\} \cup \mathcal{C}\rangle & \Rightarrow \langle \mathcal{M} \cup \{x.f^n\}, \mathcal{C}\rangle & \\
\langle \mathcal{M}, \{x.f_i^n \doteq t\} \cup \mathcal{C}\rangle & \Rightarrow \langle \mathcal{M} \cup \{x.f_i^n \doteq t\}, \mathcal{C}\rangle & \\
\langle \bot, \mathcal{C}\rangle & \Rightarrow \langle \bot, \emptyset\rangle & \\
\langle \mathcal{M}, \mathcal{C}\rangle & \Rightarrow \langle \mathcal{M}, \mathcal{C}'\rangle & \text{se } \mathcal{C} \overset{\mathsf{S}}{\longmapsto}{}^{\star}_{\mathcal{M}} \mathcal{C}'
\end{array}
$$

com a convenção de que após cada aplicação duma das regras de reescrita o novo modelo parcial $\mathcal{M}$ é reduzido a forma resolvida normal (ou a $\bot$).

Definição 5.8 *Sendo $\mathcal{M}$ um modelo ou $\bot$ e $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}' \in \mathcal{L}_U$, diz-se que $\mathcal{C} \longmapsto_{\mathcal{M}} \mathcal{C}'$ se $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ se reescreve em $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}'$ pela aplicação de uma regra do sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$, a uma qualquer sub-expressão de $\mathcal{C}$.*

O conjunto de regras de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ para uma restrição $\mathcal{C}$ e modelo $\mathcal{M}$ (ou $\bot$), é apresentado na Tabela 5.2. Ao contrário dos sistemas de reescrita apresentados anteriormente, cada regra pode ser aplicada a uma sub-restrição da restrição $\mathcal{C}$, que satisfaça as condições de aplicabilidade. Salvo indicação em contrário, vamos ainda supor que se para um dado sistema de reescrita $c \mapsto^\star c'$, então c' é irredutível para esse sistema de reescrita.

O sistema de reescrita S pode ser omitido se inicialmente se considerar $\mathcal{M} \equiv \top$ e no fim se obtiver, ou $\bot$, ou uma restrição da forma $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$, pela regra S7. A introdução do sistema S é apenas uma notação que facilita a exposição, sendo as suas propriedades as do sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$, a seguir apresentadas.

Na relação $\mathcal{M}' \doteqdot \mathcal{M} \cup \mathcal{C}_p^1$, usada na regra S7, $\mathcal{C}_p^1$ corresponde às "diferenças" entre as formas normais $\mathcal{M}'$ e $\mathcal{M}$ pela "adição" de $\mathcal{C}_1$, como definido na Proposição 5.2.

Denotamos por $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ o sistema de reescrita que resulta de $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ excluindo a regra S8.

Proposição 5.9 *O sistema de reescrita $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ é correcto (em $\mathcal{RT}$) e termina.*

Dem. Dado $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$, para provar a correcção de $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ é necessário que para toda a regra, se $\mathcal{C} \longmapsto^-_{\mathcal{M}} \mathcal{C}'$ então $\mathcal{M} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}'$. As regras S1 a S4 são correctas em qualquer álgebra de $\mathcal{L}$. A correcção das regras S6 e S7 resulta da correcção dos sistemas de reescrita P e IP e da correcção das restantes regras deste sistema. Para a terminação,

S1.	$\mathcal{C}$	$\longmapsto_{\perp}$	$\perp$
S2.	$\mathcal{C} \wedge \top$	$\longmapsto_{\mathcal{M}}$	$\mathcal{C}$
S3.	$\mathcal{C} \wedge \perp$	$\longmapsto_{\mathcal{M}}$	$\perp$
S4.	$\mathcal{C} \vee \top$	$\longmapsto_{\mathcal{M}}$	$\top$
S5.	$\mathcal{C} \vee \perp$	$\longmapsto_{\mathcal{M}}$	$\mathcal{C}$
S6.	$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}$	$\longmapsto_{\mathcal{M}}$	$\perp$ se nenhuma das regras anteriores se aplica, $\mathcal{C}_1$ é uma conjunção, não vazia, de restrições atómicas, $\mathcal{C}$ é uma conjunção, possivelmente vazia, de restrições não atómicas e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1 \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^{\star}} \perp$;
S7.	$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}$	$\longmapsto_{\mathcal{M}}$	$\mathcal{C}'_p \wedge \mathcal{C}^1_n \wedge \mathcal{C}'$ se nenhuma das regras anteriores se aplica, $\mathcal{C}_1$ é uma conjunção, não vazia, de restrições atómicas, $\mathcal{C}$ é uma conjunção, possivelmente vazia, de restrições não atómicas, $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1 \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^{\star}} \mathcal{M}' \wedge \mathcal{C}^1_n$, $\mathcal{C} \overset{\mathsf{S}}{\longmapsto^{\star}_{\mathcal{M}'}} \mathcal{C}'$, $\mathcal{M}' \doteq \mathcal{M} \cup \mathcal{C}^1_p$, e $\mathcal{C} \not\equiv \mathcal{C}'$ ou $\mathcal{C}_1 \not\equiv \mathcal{C}^1_p \wedge \mathcal{C}^1_n$;
S8.	$(\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2) \wedge \mathcal{C}_3$	$\longmapsto_{\mathcal{M}}$	$(\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_3) \vee (\mathcal{C}_2 \wedge \mathcal{C}_3)$ se nenhuma das regras anteriores se aplica, $\mathcal{C}_3$ não é uma conjunção de restrições atómicas positivas e nem $\mathcal{C}_1$ nem $\mathcal{C}_2$ são $\mathcal{M}$-independentes com $\mathcal{C}_3$.

Tabela 5.2: Sistema de reescrita, $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$

começamos por dar uma justificação informal e depois será construída uma ordenação bem-fundada associada a $\mathsf{S^-}_{\mathcal{M}}$. Considerando a forma geral (1) para cada $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$, podemos associar as seguintes funções de $\mathcal{L}_U$ em $\mathbb{N}$:

$\gamma_c(\mathcal{C})$: número de conjunções de restrições atómicas incluindo $\top$ e $\bot$

$\gamma_{np}(\mathcal{C})$: número de conjunções de restrições atómicas não em forma primária

O sistema de reescrita reduz as conjunções de restrições atómicas a formas primárias e simplifica as restrições usando as propriedades booleanas. Nenhuma aplicação de uma regra faz aumentar γ_c.

As regras S2 a S5 fazem diminuir γ_c e γ_{np}.

A aplicação das regras S1, S6 e S7 se $\mathcal{C}_p^1 \equiv \top$, obrigam a aplicação duma das regras S2 a S5 (caso contrário, mais nenhuma regra se aplica). Assim, simplificando, podemos supor que aquelas regras decrescem γ_c e γ_{np}.

A única regra que pode conduzir a uma cadeia infinita de reescritas é a regra S7.

A regra S7, dado um modelo parcial, reduz conjunções de restrições atómicas a forma primária e constrói um novo modelo – temporário – para a restrições "abaixo". Pela unicidade das formas primárias, a regra S7 aplica-se no máximo uma vez para cada conjunção de restrições atómicas positivas de $\mathcal{C}$, antes da aplicação de outra regra. Se na aplicação da regra S7, $\mathcal{C} \equiv \top$, a terminação resulta da terminação do sistema de reescrita $\mathsf{IP}_{\mathcal{M}}$. Se $\mathcal{C} \not\equiv \top$, a não terminação só podia resultar por aplicação da regra S7, pois γ_c e γ_{np} decresce em cada aplicação recursiva.

Por outro lado, a regra S7 só se aplica sucessivamente no topo, isto é,

$$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C} \overset{\mathsf{S7}}{\longmapsto}_{\mathcal{M}} \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1 \wedge \mathcal{C}' \overset{\mathsf{S7}}{\longmapsto}_{\mathcal{M}} \ldots$$

se $\mathcal{C}'$ for uma conjunção que contém restrições atómicas positivas (ou negativas), caso contrário, alguma regra de $\longmapsto_{\mathcal{M}'}$ ainda se aplicava. Neste caso, essas restrições serão "adicionadas" a $\mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$, e, portanto, o número total de conjunções de restrições atómicas, γ_c, diminui. Podemos concluir que não pode haver nenhuma cadeia infinita de reescritas usando a regra S7.

Para associar uma ordenação bem-fundada a $\mathsf{S^-}_{\mathcal{M}}$ e considerando o Teorema 4.57, definimos[3] $\Delta(\mathcal{C})$ como o menor conjunto tal que:

(i) $\Delta(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}\}$ se $\mathcal{C}$ é uma conjunção de restrições atómicas

(ii) $\Delta(\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2) = \Delta(\mathcal{C}_1) \cup \Delta(\mathcal{C}_2)$

(iii) $\Delta(\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2) = \{\mathcal{C} \dot{\wedge} \mathcal{C}' \mid \mathcal{C} \in \Delta(\mathcal{C}_1) \text{ e } \mathcal{C}' \in \Delta(\mathcal{C}_2)\}$, onde $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ não são simultaneamente conjunções de restrições atómicas e $\dot{\wedge}$ indica a conjunção de conjunções de restrições atómicas, consideradas como fórmulas atómicas.

É imediato verificar que a disjunção dos elementos de $\Delta(\mathcal{C})$ coincide com a forma normal disjuntiva de $\mathcal{C}$ (ver [And86]). Por outro lado, cada $\mathcal{D}_i \in \Delta(\mathcal{C})$ é da forma $\mathcal{C}_1 A\dot{N}D \ldots A\dot{N}D \mathcal{C}_{r_i}$, onde cada $\mathcal{C}_j \equiv \mathcal{C}_p^j \wedge \mathcal{C}_n^j$ é uma conjunção de restrições atómicas correspondendo a um dos factores obtidos pelo passo (iii), da definição de Δ. Para cada $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{C}_k$, para algum $1 \leq k \leq r_i$, é uma *semi-forma primária* se $\mathcal{C}_j$ é fechada para $\mathsf{IP}_{\mathcal{C}_p^1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_p^{k-1}}$.

Para cada $\mathcal{D}_i \in \Delta(\mathcal{C})$ e $\mathcal{M}$ definimos as seguintes funções em $\mathbb{N}$:

$\gamma_1(\mathcal{D}_i)$: número de conjunções de restrições atómicas

$\gamma_2(\mathcal{D}_i)$: número de conjunções de restrições atómicas não em forma primária

$\gamma_3(\mathcal{D}_i)$: número de conjunções de restrições atómicas não semi-formas primárias

Seja $\upsilon(\mathcal{D}_i) = (\gamma_1(\mathcal{D}_i), \gamma_2(\mathcal{D}_i), \gamma_3(\mathcal{D}_i))$. Para cada $\mathcal{C}$, sendo $\Delta(\mathcal{C}) = \{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n\}$ define-se o multiconjunto $\Upsilon(\mathcal{C}) = \{\upsilon(\mathcal{D}_1), \ldots, \upsilon(\mathcal{D}_n)\}$. Atendendo ao sistema de reescrita $\mathsf{IP}_{\mathcal{M}}$ e às regras que envolvem as restrições $\top$ e $\bot$, Υ é estritamente decrescente pela aplicação de qualquer regra de $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$. $\square$

Proposição 5.10 *O sistema de reescrita* $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ *é de complexidade temporal polinomial.*

Dem. Seja $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$ e $\mathcal{M}$ um modelo. Seja N o número de conjunções de restrições atómicas de $\mathcal{C}$. Seja P um polinómio que majora o tempo de redução da conjunção de todas as restrições atómicas de $\mathcal{C}$ a forma primária, em função do número de restrições atómicas e de variáveis de $\mathcal{C}$.

O sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ reduz em $O(NP)$ todas as conjunções de restrições atómicas a forma primária ou $\bot$ (usando contexto) e simplifica em $O(N)$ a restrição obtida

[3] É importante não confundir a notação de conjuntos normalmente usada para a conjunção de restrições, que aqui é usada para a disjunção de conjunções de restrições atómicas.

usando as regras $\mathsf{S1}$ a $\mathsf{S5}$. Para a restrição obtida o processo repete-se, e isto, no máximo N vezes. Então, o sistema de reescrita tem complexidade, no pior caso, da ordem $O(N^2P)$. $\square$

Considerando o conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_U$ satisfazíveis em $\mathcal{RT}$ e o facto de $\mathcal{RT}$ ser completo, podemos estender a noção de um sistema de reescrita completo para um conjunto de fórmulas (ver Definição 2.17) da seguinte forma:

Definição 5.11 *Um sistema de reescrita definido em $\mathcal{L}_U$ diz-se* completo para a satisfazibilidade em $\mathcal{RT}$ *(ou apenas* completo*) se toda a restrição $\mathcal{C}$ fechada para esse sistema de reescrita, e diferente de $\perp$, é satisfazível em $\mathcal{RT}$. Caso contrário, o sistema de reescrita diz-se* incompleto *(para a satisfazibilidade).*

Proposição 5.12 *O sistema de reescrita $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ é incompleto.*

Dem. Sejam
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{C} & \equiv & (x = a \lor x = b) \land (x = c \lor x = d) \\ \mathcal{M} & \equiv & \top \end{array}$$
$\mathcal{C}$ é uma restrição fechada para $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ mas aplicando o Teorema 4.57 resulta que $\mathcal{C}$ não é satisfazível em $\mathcal{RT}$. $\square$

Se $\mathcal{C}$ é uma conjunção de restrições atómicas, $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{M} \land \mathcal{C}$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$, fechar $\mathcal{C}$ para $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ é equivalente a fechar $\mathcal{C}$ para o sistema de reescrita $\mathsf{IP}_{\mathcal{M}}$. Se $\mathcal{M} \land \mathcal{C}$ não é satisfazível o modelo final será $\perp$. Como consequência, para estas classes de restrições o sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ é completo. Mais geralmente, podemos enunciar o seguinte corolário:

Corolário 5.13 *Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$ uma restrição fechada para o sistema de reescrita $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$, então para toda a conjunção $\mathcal{C}'$ de restrições atómicas, diferente de $\perp$, que ocorre em $\mathcal{C}$ tem-se que $\mathcal{C}'$ é $\mathcal{M}$-satisfazível.*

Dem. Caso contrário, pelo menos uma das regras $\mathsf{S6}$ ou $\mathsf{S7}$ aplicar-se-ia, o que contradiz o facto de $\mathcal{C}$ ser fechada para $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$. $\square$

Para provar que o sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ é completo acrescentando a $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ a regra $\mathsf{S8}$, que é um refinamento da regra da distributividade usada para reduzir uma restrição a forma normal disjuntiva (ver Teorema 4.57), é necessário estudar a independência de restrições em relação a um modelo.

Definição 5.14 *Sendo $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{L}_U$ e $\mathcal{M}$ um modelo, as restrições $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são $\mathcal{M}$-*independentes *se $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ é $\mathcal{M}$-satisfazível se e só se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são $\mathcal{M}$-satisfazíveis.*

Os critérios de $\mathcal{M}$-independência vão ser caracterizados em termos das variáveis que ocorrem nas restrições.

Definição 5.15 *Sendo $\mathcal{M}$ uma forma normal e $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$, define-se $Var_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ como o menor conjunto que verifica as seguintes condições:*

(i) se $x \in Vars(\mathcal{C})$ então $x \in Var_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$

(ii) se $x \in Var_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ e $x =_{\mathcal{M}} z$ então $z \in Var_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$

(iii) se $x \in Var_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ e $x.f_i^n \doteq z \in \mathcal{M}$, para algum $f^n \in \Sigma$ e algum $1 \leq i \leq n$, então $z \in Var_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$.

*Se $x \in Var_{\mathcal{M}}(\mathcal{C})$ então diz-se que x é $\mathcal{M}$-*ligada em $\mathcal{C}$.

É imediato que uma variável z é $\mathcal{M}$-ligada em $\mathcal{C}$ se z ocorre em $\mathcal{C}$ ou z depende de x em $\mathcal{M}$ e $x \in Vars(\mathcal{C})$. Por exemplo, se

$$\text{(c}_6\text{)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{M} &\equiv y.f^3 \wedge y.f_1^3 \doteq w \wedge w.g_1^2 \doteq z \\ \mathcal{C} &\equiv x = y \end{aligned}$$

então $Var_{\mathcal{M}}(\mathcal{C}) = \{x, y, w, z\}$.

Mesmo que uma variável ocorra em $\mathcal{M}$ e não em $\mathcal{C}$ o seu valor é necessário para a satisfazibilidade de $\mathcal{C} \wedge \mathcal{M}$. Assim, a $\mathcal{M}$-independência entre duas restrições $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ pode não ser garantida pelo facto da intersecção dos seus conjuntos de variáveis ser vazia.

As proposições seguintes estabelecem algumas condições suficientes de $\mathcal{M}$-independência.

Proposição 5.16 *Sendo $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{L}_U$ restrições fechadas para $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são $\mathcal{M}$-independentes se $Vars(\mathcal{C}_1) \cap Vars(\mathcal{C}_2) = \emptyset$.*

Dem. Suponhamos que $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são formas resolvidas. Seja $a \in \Sigma$ e denotaremos por ρ_a a atribuição de variáveis em $\mathcal{RT}$ tal que $\forall x \in X, \rho_a(x) = a$. Pelo Corolário 5.3, $\rho_a\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{C}_1}$ e $\rho_a\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{C}_2}$ são soluções, respectivamente, de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_2$. Vamos ver que $\rho_a\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2}$ é solução de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$. A restrição $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ está em forma resolvida e é fechada para o sistema de reescrita $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$ exceptuando, eventualmente, a regra $\mathsf{I11}$ que corresponde à normalização e, portanto, não é necessária para garantir a satisfazibilidade. A não aplicabilidade das regras $\mathsf{I1}$, $\mathsf{I4}$, $\mathsf{I5}$, $\mathsf{I6}$ e $\mathsf{I10}$ resulta de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ serem fechadas por $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$. Para as restantes, além deste facto, é necessário considerar que $Vars(\mathcal{C}_1) \cap Vars(\mathcal{C}_2) = \emptyset$. As regras $\mathsf{I2}$ e $\mathsf{I9}$ só se aplicariam se existisse $x \in Vars(\mathcal{C}_1)$ e $y \in Vars(\mathcal{C}_2)$ tal que $x =_{\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2} y$, o que é impossível. A regra $\mathsf{I8}$ s'o se aplicaria se existisse $x = v \in \mathcal{C}_1$ e $x \in Vars(\mathcal{C}_2)$, ou vice-versa. Analogamente, a regra $\mathsf{I7}$ não se aplica. Como $Vars(\mathcal{C}_1) \cap Vars(\mathcal{C}_2) = \emptyset$ temos que $\theta_{\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2} = \theta_{\mathcal{C}_1}\theta_{\mathcal{C}_2} = \theta_{\mathcal{C}_2}\theta_{\mathcal{C}_1}$. Pela Corolário 5.3, $\rho_a\theta_{\mathcal{M}} \cdot \theta_{\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2}$ é solução de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$. Note-se que se a regra $\mathsf{I11}$ se aplicar a $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$, apenas indica que existem em $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas variáveis distintas com a mesma solução.

Se $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$ contiverem restrições atómicas negativas, temos que $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ é fechada para $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$. Seja $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$ e $\mathcal{C}_2 \equiv \mathcal{C}_p^2 \wedge \mathcal{C}_n^2$. Como no caso anterior, $\mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_p^2$ é fechada para $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$, a menos a regra $\mathsf{I11}$, e $\mathcal{C}_n^1 \wedge \mathcal{C}_n^2$ é fechada para $\longmapsto_{\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_p^2}$. O facto da conjunção $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_p^2$ não estar normalizada poderia permitir que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_p^2 \models_{\mathcal{RT}} x = y$ e $x \neq y \in \mathcal{C}_n^1 \wedge \mathcal{C}_n^2$, mas tal não é possível, pois nesse caso ou $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$ não seriam fechadas por $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$, ou teriam variáveis em comum. Então $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ é equivalente a uma forma primária, logo satisfazível.

No caso geral, cada $\mathcal{C}_i$, para $i = 1, 2$ é equivalente a uma disjunção de formas primárias $\mathcal{P}_1^i \vee \mathcal{P}_2^i \vee \ldots \vee \mathcal{P}_{n_i}^i$ e então existe um $1 \leq k \leq n_1$, e um $1 \leq j \leq n_2$ tal que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{P}_k^1$ e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{P}_j^2$ são satisfazíveis o que implica que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{P}_k^1 \wedge \mathcal{P}_j^2$ é satisfazível, logo $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ também o é. $\square$

Na proposição anterior, é essencial que as restrições $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ estejam fechadas por $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$. Consideremos o seguinte exemplo:

$$
\begin{array}{llcl}
(\mathsf{c}_7) & \mathcal{M} & \equiv & x.f_1^2 \doteq w \wedge y.f_1^2 = z \wedge u = v \\
& \mathcal{C}_1 & \equiv & x = y \wedge v = a \\
& \mathcal{C}_2 & \equiv & w = a \wedge z = b \wedge u = c
\end{array}
$$

Claramente $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_2$ são satisfazíveis e $Vars(\mathcal{C}_1) \cap Vars(\mathcal{C}_2) = \emptyset$, mas $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ não o é. No entanto, se fecharmos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ por $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$, obtemos, respectivamente

$$
\begin{array}{llcl}
(\mathsf{c}_8) & \mathcal{M}_1 & \equiv & x = y \wedge z = w \wedge v = a \\
& \mathcal{M}_2 & \equiv & w = a \wedge z = b \wedge v = c
\end{array}
$$

e $Vars(\mathcal{M}_1) \cap Vars(\mathcal{M}_2) = \{v, w, z\} \neq \emptyset$.

Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ forem formas resolvidas temos ainda o seguinte critério de $\mathcal{M}$-independência:

Proposição 5.17 *Sendo $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{L}_U$ formas resolvidas fechadas para $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são $\mathcal{M}$-independentes se para todo $x \in Vars(\mathcal{C}_1) \cap Vars(\mathcal{C}_2)$ uma das seguintes condições se verifica:*

(i) x é livre em $\mathcal{C}_1$ ou em $\mathcal{C}_2$.

(ii) x é funcional em ambas, com o mesmo functor f^n, e para todo o $1 \leq i \leq n$, as classes $[x]_{\mathcal{C}_1}$ e $[x]_{\mathcal{C}_2}$ não estão simultaneamente definidas para i.

Dem. Considerando a demonstração da Proposição 5.16 é imediato que se as condições (i) ou (ii) se verificarem, as soluções existentes para $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_2$ podem-se estender para $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$. $\Box$

Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ forem formas primárias as condições da Proposição 5.17 já não garantem a $\mathcal{M}$-independência, a menos que as variáveis envolvidas não ocorram em negações nem em $\mathcal{C}_1$ nem em $\mathcal{C}_2$. Em particular, a noção de variável *livre* tem se ser modificada de modo a impor que a variável não ocorra em negações. Consideremos os seguintes exemplos:

$$\text{(c}_9\text{)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{C}_1 &\equiv x.f^2 \wedge x.f^2_1 \doteq a \wedge y.f^2 \wedge y.f^2_2 \doteq b \wedge y.f^1_2 \doteq a \wedge x \neq y \\ \mathcal{C}_2 &\equiv x.f^2 \wedge x.f^2_2 \doteq b \end{aligned}$$

$$\text{(c}_{10}\text{)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{C}_1 &\equiv x = y \wedge y \neq b \\ \mathcal{C}_2 &\equiv y = b \end{aligned}$$

Nestes exemplos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ não são T-independentes, embora as respectivas formas normais verifiquem as condições da Proposição 5.17.

Na Proposição 5.17, a condição (ii) pode ser estendida a caminhos $x\langle p\rangle v$, garantindo-se a não existência de caminhos maximais comuns nas duas restrições $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. No entanto, na prática, essa procura torna este critério pouco eficiente. As condições da Proposição 5.16

e da Proposição 5.17 podem ser verificadas em tempo polinomial, quadrático no máximo, antes da aplicação da regra S8 do sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$.

Teorema 5.18 *O sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ é correcto (em $\mathcal{RT}$) e termina.*

Dem. O sistema $\mathsf{S}^{-}{}_{\mathcal{M}}$ é correcto e a regra S8, sem controlo, é correcta em qualquer álgebra de $\mathcal{L}$. O controlo que é introduzido não altera a correcção da regra, apenas limita as condições de aplicabilidade. Analisemos a terminação. Dado que a regra S8 só se aplica se nenhuma das anteriores se aplicar e as restantes constituem um sistema de reescrita que termina ($\mathsf{S}^{-}{}_{\mathcal{M}}$), basta ver se poderá existir uma cadeia infinita que envolva esta regra. Omitindo o teste de $\mathcal{M}$-independência esta regra é a regra da distributividade, usada na demonstração do Teorema 4.57. Seja δ a seguinte função de $\mathcal{L}_U$ em $\mathbb{N}$:

$$
\begin{array}{ll}
\delta(\mathcal{C}) = 2 & \text{se } \mathcal{C} \text{ é atómica negativa ou uma conjunção} \\
 & \text{de restrições atómicas positivas} \\
\delta(\mathcal{C}_1 \ \vee \ \mathcal{C}_2) = \delta(\mathcal{C}_1) + \delta(\mathcal{C}_2) + 1 & \\
\delta(\mathcal{C}_1 \ \wedge \ \mathcal{C}_2) = \delta(\mathcal{C}_1) \times \delta(\mathcal{C}_2) &
\end{array}
$$

O valor de δ não aumenta por aplicação de nenhuma regra de $\mathsf{S}^{-}{}_{\mathcal{M}}$ e decresce estritamente por aplicação da regra S8. Considerando a análise feita na demonstração da Proposição 5.9, sendo Υ a medida associada ao sistema de reescrita $\mathsf{S}^{-}{}_{\mathcal{M}}$, temos que o par (δ, Υ), ordenado lexicográficamente, é estritamente decrescente por aplicação das regras de $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$.

$\Box$

Lema 5.19 *Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3 \in \mathcal{L}_U$ $\mathcal{M}$-satisfazíveis. Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ são $\mathcal{M}$-independentes então $(\mathcal{C}_1 \ \vee \ \mathcal{C}_2) \ \wedge \ \mathcal{C}_3$ é $\mathcal{M}$-satisfazível.*

Dem. Resulta trivialmente da distributividade e da $\mathcal{M}$-independência. $\Box$

Teorema 5.20 [4] *O sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ é completo, isto é, sendo $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$ irredutível para $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$, então $\mathcal{M} \ \wedge \ \mathcal{C}$ é satisfazível se e só se $\mathcal{C} \not\equiv \perp$.*

Dem. Se $\mathcal{C} \equiv \perp$ é óbvio que $\mathcal{M} \ \wedge \ \mathcal{C}$ não é satisfazível. Suponhamos, então, que $\mathcal{C} \not\equiv \perp$. Provamos por indução na estrutura de $\mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível. Supondo a forma geral (1), consideramos $\mathcal{C}$ como conjunções e disjunções de restrições atómicas negativas e de conjunções de restrições atómicas positivas.

[4] *Um teorema análogo para linguagens de estrutura de atributos foi apresentado em [Bro92]*

Base. Se $\mathcal{C}$ é uma conjunção de restrições atómicas o resultado é válido pelo Corolário 5.13.

Indução. Temos dois casos a considerar:

Caso $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$. Se $\mathcal{C}_1$ é uma conjunção de restrições atómicas positivas e $\mathcal{C}_2$ não o é , pela hipótese de indução e pela regra $\mathsf{S7}$, $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível. Se $\mathcal{C}_1$ (ou $\mathcal{C}_2$) é da forma $\mathcal{C}_0 \vee \mathcal{C}_3$, pela regra $\mathsf{S8}$ ou $\mathcal{C}_0$ ou $\mathcal{C}_3$ é $\mathcal{M}$-independente de $\mathcal{C}_2$. Logo pela hipótese de indução e pelo Lema 5.19, $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível. Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são restrições atómicas negativas (ou suas conjunções), usamos o caso base. E, neste caso, mais nada há a considerar.

Caso $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2$. Por hipótese de indução, temos que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_2$ são satisfazíveis, caso contrário pelo menos um deles era $\perp$ (regra $\mathsf{S5}$), e portanto $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ também o é (basta considerar uma das soluções).

□

Corolário 5.21 *Dado $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{L}_U$, $\langle \top, \mathcal{C}_0 \rangle \Rightarrow^\star \langle \mathcal{M}, \mathcal{C} \rangle$ tal que:*

(i) $\mathcal{M} \equiv \perp$ *se e só se* $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow \perp$

(ii) $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$, *caso contrário.*

As proposições seguintes caracterizam as soluções de $\mathcal{C}_0$ em termos das soluções de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{C}$.

Proposição 5.22 *Seja $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{L}_U$ e suponhamos que $\langle \top, \mathcal{C}_0 \rangle \Rightarrow^\star \langle \mathcal{M}, \mathcal{C} \rangle$ com $\mathcal{C} \not\equiv \perp$. Então existem formas primárias $\mathcal{C}'_i$ e $\mathcal{C}_i$, para $1 \leq i \leq n$, tal que $\mathcal{C}_0 \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}'_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}'_n$, $\mathcal{C} \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$ e $\mathcal{C}'_i$ é $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_i$ a menos a presença de restrições atómicas equivalentes.*

Dem. Pelo Teorema 4.57, $\mathcal{C}$ é equivalente em $\mathcal{RT}$ a uma disjunção de formas primárias, $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$. Pelo Corolário 5.21(ii), $\mathcal{C}_0 \approx_{\mathcal{RT}} (\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_1) \vee \ldots \vee (\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_n)$. Pelo Corolário 5.13, todas as conjunções de restrições atómicas que ocorrem em $\mathcal{C}$ são $\mathcal{M}$-satisfazíveis e a(s) regra(s) de redução a forma normal disjuntiva (ver Teorema 4.57) preservam a $\mathcal{M}$-satisfazibilidade. Analogamente, as regras de redução a forma primária, a menos que produzam $\perp$, preservam a $\mathcal{M}$-satisfazibilidade. Portanto, se cada $\mathcal{C}_i$, para $1 \leq i \leq n$ for satisfazível então é $\mathcal{M}$-satisfazível. Por outro lado cada

$\mathcal{C}_i$, para $1 \leq i \leq n$, é fechado para $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$, caso contrário, $\mathcal{C}$ também não o seria. Este facto garante que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_i$ está em forma primária, excepto, a presença de restrições atómicas equivalentes, como na Proposição 5.2. $\square$

Proposição 5.23 *Dado $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{L}_U$ se $\langle \top, \mathcal{C}_0 \rangle \Rightarrow^\star \langle \mathcal{M}, \mathcal{C} \rangle$ e $\mathcal{C} \not\equiv \bot$, qualquer modelo minimal de $\mathcal{C}_0$ pode ser obtido pela conjunção de $\mathcal{M}$ com um modelo minimal de $\mathcal{C}$ e vice-versa.*

Dem. Pelo Corolário 5.21(ii), $\mathcal{M}$ é um modelo parcial de $\mathcal{C}_0$. Vamos ver que se $\mathcal{M}_c$ é um modelo minimal de $\mathcal{C}$, então a forma primária de $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_c$ é um modelo minimal de $\mathcal{C}_0$. Seja $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_n$ uma disjunção de formas primárias equivalente a $\mathcal{C}$ em $\mathcal{RT}$. Como $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível, cada $\mathcal{C}_i$, para $1 \leq i \leq n$, também o é.

Temos então que $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}_c$ é um modelo de $\mathcal{C}_0$. Que é minimal resulta do facto de $\mathcal{M}$ ser uma forma normal que é modelo parcial de $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{M}_c$ ser um modelo minimal de $\mathcal{C}$ e restrição $\mathcal{C}$ ser fechada para $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$.

Para provar que qualquer modelo minimal de $\mathcal{C}_0$ pode ser obtido desse modo, seja $\mathcal{C}_0 \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}'_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}'_n$ como na Proposição 5.22. Qualquer modelo minimal de $\mathcal{C}_0$ é modelo minimal de $\mathcal{C}'_i$, para algum $1 \leq i \leq n$. Como $\mathcal{C}'_i \doteqdot \mathcal{M} \wedge \mathcal{C}_i$, qualquer modelo minimal de $\mathcal{C}'_i$ é obtido pela conjunção de um modelo minimal de $\mathcal{C}_i$ (portanto de $\mathcal{C}$) com $\mathcal{M}$. $\square$

5.3 Classes de Restrições Completas para $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$

Dada a importância do sistema de reescrita $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$, apesar de incompleto, é interessante analisar classes de restrições para os quais o sistema se torna completo.

Vamos considerar uma classe de restrições $\mathcal{L}_U^w \subset \mathcal{L}_U$ que é fechada para $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ e se uma restrição $c \in \mathcal{L}_U^w$ é irredutível para $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ é satisfazível se e só se é diferente de $\bot$.

A classe $\mathcal{L}_U^w$ é geral no sentido em que para qualquer $c \in \mathcal{L}_U$ existe uma $c' \in \mathcal{L}_U$ tal que $c \approx_{\mathcal{RT}} c'$. No entanto, embora seja fechada para disjunções não o é para conjunções. Por definição, a classe $\mathcal{L}_U^w$ é o subconjunto de $\mathcal{L}_U$ sem restrições que envolvem conjunções de disjunções e de negações. Mais concretamente, sendo M uma conjunção de restrições atómicas positivas (forma normal ou $\bot$) e P uma conjunção de restrições atómicas (forma primária ou $\perp$), as restrições $w \in \mathcal{L}_U^w$ podem ser descritas pela seguinte gramática:

$$\begin{array}{rcl} w & ::= & M \wedge d \\ & | & P \\ d & ::= & w \vee w \\ & | & w \vee d \end{array}$$

Lema 5.24 *Qualquer $c \in \mathcal{L}_U$ pode ser transformada numa restrição $w \in \mathcal{L}_U^w$ tal que $c \approx_{\mathcal{RT}} w$, pela aplicação da seguinte regra de reescrita, a menos de $\equiv_{\mathcal{B}}$:*

W1. $c \wedge (c_1 \vee c_2) \mapsto (c \wedge c_1) \vee (c \wedge c_2)$ *se c é uma restrição atómica negativa ou uma disjunção.*

Como é evidente, a transformação do lema anterior corresponde, no pior caso, à transformação em forma normal disjuntiva. Contudo, se a restrição estiver inicialmente nessa forma, ela é preservada pelo sistema de reescrita $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$:

Lema 5.25 *O sistema de reescrita $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ é fechado para $\mathcal{L}_U^w$.*

Dem. Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U^w$. Basta verificar que nenhuma das regras de $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ (e $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$) produz uma conjunção de disjunções ou negações. Na realidade, todas as regras de $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ fazem diminuir ou não alteram o número de operadores em $\mathcal{C}$ (não considerando os operadores das conjunções de restrições atómicas). $\square$

Proposição 5.26 *O sistema de reescrita $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$ é completo para $\mathcal{L}_U^w$.*

Dem. A demonstração é análoga à do Teorema 5.20. Seja $\mathcal{M}$ um modelo e $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U^w$ fechada para $\mathsf{S}^-{}_{\mathcal{M}}$. Se $\mathcal{C} \equiv \perp$ então $\mathcal{M} \wedge \mathcal{C}$ não é satisfazível. Suponhamos, então, que $\mathcal{C} \not\equiv \perp$. Provamos por indução na estrutura de $\mathcal{C}$, que $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível.

Base. Se $\mathcal{C}$ é uma conjunção de restrições atómicas o resultado é válido pelo Corolário 5.13.

Indução. Temos dois casos a considerar:

Caso $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$. Então $\mathcal{C}_1$ é uma conjunção de restrições atómicas positivas e $\mathcal{C}_2$ uma disjunção. Pela hipótese de indução e pela regra S7, a restrição $\mathcal{C}$ é $\mathcal{M}$-satisfazível.

Caso $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \lor \mathcal{C}_2$. Por hipótese de indução temos que $\mathcal{M} \land \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{M} \land \mathcal{C}_2$ são satisfazíveis, caso contrário, pelo menos uma delas era $\perp$ (regra $\mathsf{S5}$), e portanto, $\mathcal{M} \land \mathcal{C}$ também o seria (basta considerar uma das soluções).

$\square$

5.4 Factorização

Se uma restrição $c \in \mathcal{L}_U$ contém conjunções de disjunções, podemos reduzir o tamanho dessas disjunções, utilizando a propriedade distributiva para factorizar informação comum. Isso permitirá, em particular, diminuir o tamanho das restrições às quais ter-se-á de aplicar o sistema de reescrita completo.

5.4.1 Factorização de Formas Normais

Sendo c_1, $c_2 \in \mathcal{L}_U$ restrições satisfazíveis, vamos caracterizar a informação positiva comum a c_1 e c_2.

Definição 5.27 *Sejam c_1, $c_2 \in \mathcal{L}_U$ satisfazíveis em $\mathcal{RT}$. Uma forma normal $\mathcal{M}$, diferente de $\top$, é um* factor positivo comum *a c_1 e a c_2 se $c_1 \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}$ e $c_2 \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}$, isto é, se $\mathcal{M}$ é um modelo parcial de ambas. Esta noção generaliza-se para qualquer número de restrições em $\mathcal{L}_U$.*

Como na definição de redundâncias de restrições, ver página 72, as restrições da forma $x.f^n$ não serão, em geral, consideradas *factores comuns.*

Começamos por estudar o caso em que as restrições c_1 e c_2 são formas normais.

Proposição 5.28 [5] *Sejam $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ formas normais. Então*

$$\mathcal{RT} \models (\mathcal{M}_1 \lor \mathcal{M}_2) \Leftrightarrow \mathcal{F} \land (\mathcal{M}'_1 \lor \mathcal{M}'_2) \tag{2}$$

tal que $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \top \rangle \overset{\mathsf{F}}{\Rightarrow}^\star \langle \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \mathcal{F} \rangle$, onde o sistema de reescrita F *para ternos $\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{F} \rangle$ é definido por:*

[5] *Uma primeira versão desta proposição foi apresentada em [DMB93].*

F1.	$\langle \{x_1 = v\} \cup \mathcal{M}, \{x_1 = v'\} \cup \mathcal{M}', \mathcal{F} \rangle$	$\Rightarrow$	$\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{F} \cup \{x_1 = v_1\} \rangle$ *se* $v_1 \in [v]_{\mathcal{M}}$*,* $v_1 \in [v']_{\mathcal{M}'}$ *e* $x_1 \not\equiv v_1$*;*
F2.	$\langle \{x.f_i^n \doteq v\} \cup \mathcal{M}, \{y.f_i^n \doteq v'\} \cup \mathcal{M}', \mathcal{F} \rangle$	$\Rightarrow$	$\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{F} \cup \{x_1.f_i^n \doteq v_1\} \rangle$ *se* $x_1 \in [x]_{\mathcal{M}}$*,* $x_1 \in [y]_{\mathcal{M}'}$*,* $v_1 \in [v]_{\mathcal{M}}$ *e* $v_1 \in [v']_{\mathcal{M}'}$*;*
F3.	$\langle \{x.f^n\} \cup \mathcal{M}, \{y.f^n\} \cup \mathcal{M}', \mathcal{F} \rangle$	$\Rightarrow$	$\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{F} \cup \{x_1.f^n\} \rangle$ *se* $x_1 \in [x]_{\mathcal{M}}$ *e* $x_1 \in [y]_{\mathcal{M}'}$ *e*[6] *nem* x *nem* y *são definidas para algum* $1 \leq i \leq n$*, em* $\mathcal{M}$ *ou* $\mathcal{M}'$*;*

O sistema de reescrita F *termina e se o terno* $\langle \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \mathcal{F} \rangle$ *é irredutível para F, então* $\mathcal{M}'_1$ *e* $\mathcal{M}'_2$ *não têm factores positivos comuns.*

Dem. A correcção das regras F1–F3 é imediata, isto é, (2) verifica-se. A terminação resulta do número de variáveis e restrições atómicas ser finito em $\mathcal{M}_1$ e em $\mathcal{M}_2$. A regra F1 aplica-se no máximo uma vez para cada $x_1 \in Vars(\mathcal{M}_i)$, para $i = 1, 2$ porque $\mathcal{M}_i$ são formas normais. Pela mesma razão, as regras F2 e F3 aplicam-se no máximo uma vez para cada $x \in Vars(\mathcal{M}_i)$, para $i = 1, 2$. Apenas é necessário provar que se o terno $\langle \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \mathcal{F} \rangle$ é irredutível para o sistema de reescrita F, então $\mathcal{M}'_1$ e $\mathcal{M}'_2$ não têm factores comuns. Note-se que, com a eventual excepção da aplicação da regra F3, $\mathcal{M}'_1$ e $\mathcal{M}'_2$ são formas normais e $\mathcal{F}$ é satisfazível, logo, podemos supor que está em forma normal[7]. Basta verificar que restrições atómicas não são factores comuns a $\mathcal{M}_i$, para $i = 1, 2$. Suponhamos que $\mathcal{M}'_i \models_{\mathcal{RT}} v' = v$, $v \not\equiv v'$, para $i = 1, 2$. Então, v e v' pertenceriam à mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{M}'_1}$ e de $=_{\mathcal{M}'_2}$ e F1 aplicar-se-ia. Analogamente, se $\mathcal{M}'_i \models_{\mathcal{RT}} x.f_1^n \doteq v$, para $i = 1, 2$, também se concluiria que F2 se aplicaria. Finalmente, se $\mathcal{M}'_i \models_{\mathcal{RT}} x.f^n$ para $i = 1, 2$, $x.f^n$ é só considerado factor comum para $\mathcal{M}'_1$ e $\mathcal{M}'_2$ se não ocorrerem em $\mathcal{M}_i$ restrições da forma $u_i.f_k^n \doteq v'$ para $u_i \in [x]_{\mathcal{M}_i}$, $i = 1, 2$, caso em que F3 se aplicaria.

[7] Em cada passo podemos reduzir $\mathcal{F}$ a tal forma.

Seja $N = max\{| Vars(\mathcal{M}_1) |, | Vars(\mathcal{M}_2) |\}$ e $K = max\{n \mid f^n \in \Sigma$ e é o functor de alguma $[x]_{\mathcal{M}_i}, i = 1, 2\}$. Considerando que determinar se a intersecção de duas classes de equivalência é não vazia é da ordem $O(N^2)$ ($O(N \log N)$ se os elementos estiverem ordenados), o algoritmo é da ordem $O(N^3)$. $\square$

Por exemplo sendo,

$$\begin{array}{llll}(\mathsf{c}_{11}) & \mathcal{M}_1 & \equiv & x_2 = x_1 \ \wedge \ x_1.f_2^2 \doteq x_4 \ \wedge \ x_1.f^2 \ \wedge \ x_5 = x_4 \ \wedge \ x_6 = x_4 \ \wedge \ x_4.g^1 \\ & \mathcal{M}_2 & \equiv & x_2 = x_3 \ \wedge \ x_3.f_2^2 \doteq x_7 \ \wedge \ x_3.f^2 \ \wedge \ x_5 = x_7 \ \wedge \ x_6 = x_7 \ \wedge \ x_7.g^1\end{array}$$

aplicando o sistema de reescrita F temos que $\mathcal{M}_1 \ \vee \ \mathcal{M}_2$ é equivalente em $\mathcal{RT}$ a

$$\begin{array}{ll}(\mathsf{c}_{12}) & x_2.f^2 \ \wedge \ x_2.f_2^2 \doteq x_5 \ \wedge \ x_6 = x_5 \ \wedge \ x_5.g^1 \ \wedge \\ & ((x_1 = x_2 \ \wedge \ x_4 = x_5) \ \vee \ (x_3 = x_2 \ \wedge \ x_7 = x_5))\end{array}$$

Note-se que, as condições de aplicabilidade da regra $\mathsf{F3}$ podiam não ser tão exigentes, permitindo factorizar mais informação comum às duas restrições, mas as restrições finais $\mathcal{M}'_i$, para $i = 1, 2$, não se encontrariam em forma normal.
Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ forem formas normais e $\mathcal{M}_1$ vincular $\mathcal{M}_2$, isto é, $\mathcal{M}_1 \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{M}_2$, então $\mathcal{RT} \models (\mathcal{M}_1 \ \vee \ \mathcal{M}_2) \ \Leftrightarrow \ \mathcal{M}_2$. Neste caso, o sistema de reescrita F produz $\mathcal{M}'_2 \equiv \top$ e dizemos que a restrição $\mathcal{M}_2$ é *redundante* na disjunção $\mathcal{M}_1 \ \vee \ \mathcal{M}_2$.
Sendo $\mathcal{M}_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ \mathcal{M}_m$ uma disjunção de formas normais podemos eliminar as formas normais que são redundantes na disjunção usando o método anterior. Podemos, ainda, utilizar o sistema de reescrita F, da Proposição 5.28, para obter factores comuns a uma disjunção de formas normais.

Corolário 5.29 *Sejam $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m$ formas normais. Então*

$$(3) \qquad \mathcal{M}_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ \mathcal{M}_m \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{F}_m \ \wedge \ \mathcal{D}_m$$

onde $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{D}_i$, para $1 \leq i \leq m$, são definidos por:

a) $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{M}_1$
$\mathcal{D}_1 \equiv \top$

b) Para $1 \leq i \leq m-1$,
$\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{M}_{i+1}, \top \rangle \overset{\mathsf{F}}{\Rightarrow}^{\star} \langle \mathcal{F}'_i, \mathcal{M}'_{i+1}, \mathcal{F}_{i+1} \rangle$
$\mathcal{D}_{i+1} \equiv (\mathcal{F}'_i \ \wedge \ \mathcal{D}_i) \ \vee \ \mathcal{M}'_{i+1}$

e para cada $1 \le i \le m-1$, $\mathcal{F}'_i \wedge \mathcal{D}_i$ *e* $\mathcal{M}'_{i+1}$ *não têm factores factores comuns. Mais ainda,* $\mathcal{D}_m$ *é equivalente a uma disjunção de formas normais que não têm factores comuns.*
Em particular, se $\mathcal{F}_i \equiv \top$, *para algum* $1 < i < m$, *então*

$$(4) \qquad \mathcal{M}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{M}_m \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{D}_i \vee \mathcal{M}_{i+1} \vee \ldots \vee \mathcal{M}_m$$

Dem. Sejam $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ formas normais e $c \in \mathcal{L}_U$. Se $\langle \mathcal{M}_1, p\mathcal{M}_2, \top\rangle \overset{\mathsf{F}}{\Rightarrow}{}^\star \langle \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \mathcal{F}\rangle$ então

$$\mathcal{RT} \models (\mathcal{M}_1 \wedge c) \vee \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F} \wedge ((\mathcal{M}'_1 \wedge c) \vee \mathcal{M}'_2)$$

Prova-se por indução sobre m que para todo o $m > 1$, (3) é verdade. Analogamente, prova-se por indução sobre n que para todo $1 \le i \le m-1$, $\mathcal{F}'_i \wedge \mathcal{D}_i$ e $\mathcal{M}'_{i+1}$ não têm factores comuns. Para $m = 2$, é verdade pela Proposição 5.28. Supondo que é verdade para $m-1$, basta provar que $\mathcal{F}'_{m-1} \wedge \mathcal{D}_{m-1}$ e $\mathcal{M}'_m$ não têm factores comuns. Mas $\mathcal{D}_{m-1}$, por hipótese de indução, é uma disjunção de restrições que não têm factores comuns. Por outro lado, $\mathcal{F}'_{m-1}$ e $\mathcal{M}'_m$ também não têm factores comuns.

Então, em particular, se reduzirmos $\mathcal{D}_m$ a forma normal disjuntiva as formas normais resultantes não têm factores comuns.

Se $\mathcal{F}_i \equiv \top$, para algum $1 < i < m$ então, para todo $i+1 \le j \le m$, $\mathcal{F}_j \equiv \top$ e $\mathcal{D}_j \equiv \mathcal{D}_{j-1} \vee \mathcal{M}_j$. $\square$

Na prática, antes de procurar factores comuns a uma disjunção de formas normais será conveniente separar as formas normais em grupos independentes para a satisfazibilidade em $\mathcal{RT}$. Essa separação pode ser feita usando um dos critérios de $\mathcal{M}$-independência, atrás apresentados, para $\mathcal{M} \equiv \top$.

Se c_1 e c_2 forem formas primárias podemos aplicar o sistema de reescrita F às respectivas formas normais.

Corolário 5.30 *Sejam* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *formas primárias. Então*

$$(5) \qquad \mathcal{RT} \models (\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2) \Leftrightarrow \mathcal{F} \wedge (\mathcal{C}'_1 \vee \mathcal{C}'_2)$$

onde $\mathcal{F}$ *é uma forma normal e* $\mathcal{C}'_1$ *e* $\mathcal{C}'_2$ *são formas primárias sem factores positivos comuns, obtidas por aplicação do sistema de reescrita* F *às formas normais de* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$.

Dem. Sejam $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_p^1 \ \wedge\ \mathcal{C}_n^1$ e $\mathcal{C}_2 \equiv \mathcal{C}_p^2 \ \wedge\ \mathcal{C}_n^2$. Se $\langle \mathcal{C}_p^1, \mathcal{C}_p^2, \top\rangle \overset{\mathsf{F}}{\Rightarrow}{}^{\star} \langle \mathcal{C}_p^3, \mathcal{C}_p^4, \mathcal{F}\rangle$ e $\langle \mathcal{C}_p^3, \mathcal{C}_p^4, \mathcal{F}\rangle$ é irredutível, então

$$\mathcal{RT} \models (\mathcal{C}_p^1 \ \wedge\ \mathcal{C}_n^1) \ \vee\ (\mathcal{C}_p^2 \ \wedge\ \mathcal{C}_n^2) \ \Leftrightarrow\ \mathcal{F} \ \wedge\ ((\mathcal{C}_p^3 \ \wedge\ \mathcal{C}_n^1) \ \vee\ (\mathcal{C}_p^4 \ \wedge\ \mathcal{C}_n^2))$$

com $\mathcal{C}_1' \equiv \mathcal{C}_p^3 \ \wedge\ \mathcal{C}_n^1$ e $\mathcal{C}_2' \equiv \mathcal{C}_p^4 \ \wedge\ \mathcal{C}_n^2$. $\square$

Corolário 5.31 *Sejam $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ formas primárias tais que para cada $1 \leq i \leq m$, $\mathcal{C}_i \equiv \mathcal{M}_i \ \wedge\ \mathcal{N}_i$. Então*

(6) $$\mathcal{C}_1 \ \vee\ \ldots \ \vee\ \mathcal{C}_m \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{F}_m \ \wedge\ \mathcal{D}_m$$

onde $\mathcal{F}_i$ e $\mathcal{D}_i$, para $1 \leq i \leq m$, são definidos por:

a) $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{M}_1$
$\mathcal{D}_1 \equiv \mathcal{N}_1$

b) Para $1 \leq i \leq m-1$,
$\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{M}_{i+1}, \top\rangle \overset{\mathsf{F}}{\Rightarrow}{}^{\star} \langle \mathcal{F}_i', \mathcal{M}_{i+1}', \mathcal{F}_{i+1}\rangle$
$\mathcal{D}_{i+1} \equiv (\mathcal{F}_i' \ \wedge\ \mathcal{D}_i) \ \vee\ (\mathcal{M}_{i+1}' \ \wedge\ \mathcal{N}_{i+1})$

e para cada $1 \leq i \leq m-1$, as restrições $\mathcal{F}_i' \ \wedge\ \mathcal{D}_i$ e $\mathcal{M}_{i+1}' \ \wedge\ \mathcal{N}_{i+1}$ não têm factores positivos comuns.

5.4.2 Factorização de Formas Primárias

Para estender os resultados anteriores a formas primárias, alguns cuidados serão necessários. Neste caso, uma restrição pode ser consequência de duas restrições sem ser considerada *factor comum.* Seja

(c13) $$(x = a \ \wedge\ y = b) \ \vee\ (x = c \ \wedge\ y = d) \ \vee\ (x = a \ \wedge\ y \neq a)$$

Obviamente, $x \neq y$ é consequência de todos os elementos da disjunção, mas factorizar essa informação aumenta o tamanho da restrição, e portanto, não é em geral desejável. Por outro lado, em

(c14) $$x \neq y \ \vee\ (x = a \ \wedge\ y = b)$$

(c15) $$x \neq a \ \vee\ x = b$$

a mesma factorização permite reduzir c_{14} a $x \neq y$ e a factorização de $x \neq a$ permite reduzir c_{15} a $x \neq a$. Nestes dois casos um dos elementos da disjunção vincula o outro. Mais geralmente, dada uma disjunção de formas primárias podemos eliminar as formas primárias que são vinculadas por outras, usando o facto de que:

> Sendo $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ formas primárias, $\mathcal{C}_1 \models \mathcal{C}_2$ se e só se $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}_1$ se e só se $\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}_2$.

Para determinar se uma forma primária vincula outra podemos usar o sistema de reescrita P ou o método que iremos apresentar na Secção 5.5, Corolário 5.38. Ao contrário do que sucedia para formas normais, neste caso não será possível usar o processo de factorização de elementos comuns, a seguir apresentado, para este fim.
Assim, para obter factores comuns a duas formas primárias vamos supor que nenhuma delas vincula a outra e apenas iremos factorizar informação não redundante a ambas as formas primárias.

Definição 5.32 *Sejam $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}$ formas primárias. A restrição $\mathcal{C}$ é um* factor comum estrito *a $\mathcal{C}_1$ e a $\mathcal{C}_2$ se $\mathcal{C}_1 \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_2 \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}$, isto é, $\mathcal{C}$ é um modelo parcial de ambos, e $\mathcal{C}$ não é redundante nem em $\mathcal{C}_1$ nem em $\mathcal{C}_2$. Esta noção generaliza-se para qualquer número de restrições em $\mathcal{L}_U$.*

No exemplo 5.4.2, a restrição $x \neq y$ é redundante em todos os elementos da disjunção, logo não é um factor comum estrito.

Lema 5.33 *Sejam $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$ e $\mathcal{C}_2 \equiv \mathcal{C}_p^2 \wedge \mathcal{C}_n^2$ formas primárias. Uma forma normal $\mathcal{M}$ é um factor positivo comum a $\mathcal{C}_1$ e a $\mathcal{C}_2$ se e só se $\mathcal{M}$ é um factor estrito comum a $\mathcal{C}_1$ e a $\mathcal{C}_2$.*

Dem. ($\Rightarrow$)

Pela Proposição 4.38, $\mathcal{M}$ é um factor positivo comum a $\mathcal{C}_1^p$ e a $\mathcal{C}_2^p$, logo não é redundante nem em $\mathcal{C}_1$ nem em $\mathcal{C}_2$.

($\Leftarrow$)

Óbvio.

□

O lema seguinte caracteriza as restrições atómicas redundantes numa forma primária, que serão precisamente as que não serão factores estritos.

Lema 5.34 *Seja $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma forma primária sem redundâncias e c_1 uma restrição atómica, tal que c_1 é um modelo parcial de $\mathcal{C}$. A restrição c_1 é redundante em $\mathcal{C}$ se e só se verifica uma das seguintes condições:*

(i) c_1 é do tipo $x \neq a$ e a classe $[x]_{\mathcal{C}_p}$ é constante diferente de a ou é funcional;

(ii) c_1 é do tipo $\neg x.f^n$ e a classe $[x]_{\mathcal{C}_p}$ é constante ou é funcional com functor diferente de f^n;

(iii) c_1 é do tipo $x \neq y$ e $x_1 \neq y_1 \notin \mathcal{C}_n$ com $x \in [x_1]_{\mathcal{C}_p}$, $y \in [y_1]_{\mathcal{C}_p}$ e as classes $[x_1]_{\mathcal{C}_p}$ e $[y_1]_{\mathcal{C}_p}$ são incompatíveis em $\mathcal{C}$.

Dem. ($\Leftarrow$)

Se c_1 verifica uma das condições é fácil ver que c_1 é redundante em $\mathcal{C}$.

($\Rightarrow$)

Se c_1 fosse uma restrição atómica positiva então $\mathcal{C}_p \models c_1$ e, pelo Lema 4.34, c_1 ocorre em $\mathcal{C}_p$, a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{C}_p}$. Se c_1 é do tipo $\neg x.\tau$, onde se τ é uma constante a, $c_1 \equiv x \neq a$, e as condições (i) ou (ii) não se verificam então ou $x_1.\tau \in \mathcal{C}_p$ para $x \in [x_1]_{\mathcal{C}_p}$ ou não é verdade que $\mathcal{C} \models c_1$. Se c_1 é do tipo $x \neq y$ e não verifica as condições então, também, é fácil ver que $x \neq y \in \mathcal{C}$, a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{C}_p}$, ou não é verdade que $\mathcal{C} \models c_1$. $\square$

No exemplo c_{15} a restrição $x \neq a$ é redundante em $x = b$ e, como já foi dito, no exemplo 5.4.2, a restrição $x \neq y$ é redundante em todos os elementos da disjunção.
Para a factorização estrita de formas primárias, basta adaptar o sistema de reescrita F a formas primárias e adicionar regras para as restrições atómicas negativas.

Proposição 5.35 *Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas formas primárias. Então*

$$(7) \qquad \mathcal{RT} \models (\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2) \Leftrightarrow \mathcal{F} \wedge (\mathcal{C}_1' \vee \mathcal{C}_2')$$

tal que $\langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \top \rangle \overset{\mathsf{F^e}}{\Rightarrow^\star} \langle \mathcal{C}_1', \mathcal{C}_2', \mathcal{F} \rangle$, onde o sistema de reescrita $\mathsf{F^e}$ para ternos $\langle \mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F} \rangle$, $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}_p' \wedge \mathcal{C}_n'$ e $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_p \wedge \mathcal{F}_n$, é constituído pelas regras F1–F3 *do sistema de reescrita* F *da Proposição 5.28, que são aplicadas primeiro a $\mathcal{C}_p$ e $\mathcal{C}_p'$, e pelas regras seguintes:*

$$\begin{array}{llcl}
\mathsf{F^e4.} & \langle \{x \neq v\} \cup \mathcal{C}, \{y \neq v'\} \cup \mathcal{C}', \mathcal{F}\rangle & \Rightarrow & \langle \mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F} \cup \{x_1 \neq v_1\}\rangle \\
 & & & \textit{se } x_1 \in [x]_{\mathcal{C}_p \cup \mathcal{F}_p},\ x_1 \in [y]_{\mathcal{C}'_p \cup \mathcal{F}_p}, \\
 & & & v_1 \in [v]_{\mathcal{C}_p \cup \mathcal{F}_p} \textit{ e } v_1 \in [v']_{\mathcal{C}'_p \cup \mathcal{F}_p}; \\
\mathsf{F^e5.} & \langle \{\neg x.f^n\} \cup \mathcal{C}, \{\neg y.f^n\} \cup \mathcal{C}', \mathcal{F}\rangle & \Rightarrow & \langle \mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F} \cup \{\neg x_1.f^n\}\rangle \\
 & & & \textit{se } x_1 \in [x]_{\mathcal{C}_p \cup \mathcal{F}_p} \textit{ e } x_1 \in [y]_{\mathcal{C}'_p \cup \mathcal{F}_p}.
\end{array}$$

O sistema de reescrita $\mathsf{F^e}$ *termina e se o terno* $\langle \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{F}\rangle$ *é irredutível para o sistema de reescrita* $\mathsf{F^e}$*, então* $\mathcal{C}'_1$ *e* $\mathcal{C}'_2$ *não têm factores comuns estritos.*

Dem. A correcção e a terminação do sistema de reescrita $\mathsf{F^e}$ são imediatas. Apenas é necessário provar que se $\langle \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \mathcal{F}\rangle$ é irredutível para o sistema de reescrita $\mathsf{F^e}$, então $\mathcal{C}'_1$ e $\mathcal{C}'_2$ não têm factores comuns estritos. Pelo Lema 5.33 e pela Proposição 5.28, $\mathcal{C}'_1$ e $\mathcal{C}'_2$ não têm factores estritos comuns positivos. Por outro lado, se c_1 for um factor estrito comum negativo a $\mathcal{C}'_1$ e $\mathcal{C}'_2$, usando o Lema 5.34 e argumentos análogos aos da demonstração da Proposição 5.28 concluímos que uma das regras $\mathsf{F^e4}$ ou $\mathsf{F^e5}$ se aplica. $\square$

Podemos utilizar o sistema de reescrita $\mathsf{F^e}$ para obter factores comuns estritos a uma disjunção de formas primárias.

Corolário 5.36 *Sejam* $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ *formas primárias. Então*

$$\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_m \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{F}_m \wedge \mathcal{D}_m \tag{8}$$

onde $\mathcal{F}_i$ *e* $\mathcal{D}_i$*, para* $1 \leq i \leq m$*, são definidos por:*

a) $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{C}_1$
$\mathcal{D}_1 \equiv \top$

b) Para $1 \leq i \leq m-1$*,*
$\langle \mathcal{F}_i, \mathcal{C}_{i+1}, \top\rangle \overset{\mathsf{F^e}}{\Rightarrow^\star} \langle \mathcal{F}'_i, \mathcal{C}'_{i+1}, \mathcal{F}_{i+1}\rangle$
$\mathcal{D}_{i+1} \equiv (\mathcal{F}'_i \wedge \mathcal{D}_i) \vee \mathcal{C}'_{i+1}$

e para cada $1 \leq i \leq m-1$*,* $\mathcal{F}'_i \wedge \mathcal{D}_i$ *e* $\mathcal{C}'_{i+1}$ *não têm factores estritos comuns. Mais ainda,* $\mathcal{D}_m$ *é equivalente a uma disjunção de formas primárias que não têm factores estritos comuns.*

Em particular, se $\mathcal{F}_i \equiv \top$, para algum $1 < i < m$, então

$$\mathcal{C}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{C}_m \approx_{\mathcal{RT}} \mathcal{D}_i \vee \mathcal{C}_{i+1} \vee \ldots \vee \mathcal{C}_m \tag{9}$$

Dem. Como a demonstração do Corolário 5.29. □

Finalmente, se $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$ for uma restrição na forma geral (1) podemos factorizar informação comum a elementos duma disjunção, supondo as conjunções de restrições atómicas em forma primária. Em particular, podemos supor que $\mathcal{C}$ é fechada para o sistema de reescrita $\mathsf{S}^{-}{}_{\top}$, e aplicar a seguinte regra:

FG1. $(\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{D}_1) \vee (\mathcal{C}_2 \wedge \mathcal{D}_2) \longmapsto \mathcal{F} \wedge ((\mathcal{C}'_1 \wedge \mathcal{D}'_1) \vee (\mathcal{C}'_2 \wedge \mathcal{D}'_2))$ para $i = 1,2$ $\mathcal{C}_i$ são formas primárias, $\mathcal{D}_i$ são conjunções, possivelmente vazias, de restrições não primárias, $\langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \top \rangle \overset{\mathsf{F^e}}{\Rightarrow}{}^{\star} \langle \mathcal{F}, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2 \rangle$ e $\mathcal{D}_i \overset{\mathsf{FG}}{\longmapsto}{}^{\star} \mathcal{D}'_i$.

Esta regra generaliza o Corolário 5.36. Se $\mathcal{C}$ é irredutível para esta regra, então $\mathcal{C}$ será mais adequada para a aplicação da regra S8, do sistema de reescrita completo $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$.

O facto de se factorizar uma forma primária "comum" a uma disjunção de restrições, e não apenas, uma forma normal, é uma das motivações para a extensão no sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$, do modelo $\mathcal{M}$ a formas primárias. Essa extensão será objecto das duas secções seguintes. No entanto, o facto da informação negativa poder ser redundante cria, mais uma vez, problemas adicionais.

Sendo $\mathcal{C}$ uma restrição fechada para $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$, enquanto a forma normal $\mathcal{M}$ é independente de $\mathcal{C}$, a informação negativa contida no modelo pode ser redundante em relação a $\mathcal{C}$. Consideremos os seguintes exemplos:

$$x \neq a \wedge (x = b \vee (y = a \wedge (x = c \vee x.f^n))) \tag{c$_{16}$}$$

$$x \neq a \wedge (x = b \vee (y = a \wedge (z = b)) \tag{c$_{17}$}$$

A restrição $x \neq a$ é um modelo parcial de c_{16} e de c_{17}. Contudo, na restrição c_{16}, é redundante e, na restrição c_{17}, é redundante no primeiro elemento da disjunção. Assim, enquanto que em c_{16} pode ser eliminado, em c_{17} deve "passar para dentro", sendo equivalente em $\mathcal{RT}$ a

$$(x = b \vee (x \neq a \wedge (y = a \wedge (z = b)) \tag{c$_{18}$}$$

O mesmo resultado é obtido usando a regra S8 do sistema de reescrita completo $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$. Contudo, se o número de elementos da disjunção for grande, pode ser preferível manter factorizada informação redundante. Neste caso, os sistemas de reescritas a seguir apresentados serão preferíveis.

5.5 Satisfazibilidade Incremental para Formas Primárias

Nesta secção vamos estender o sistema de reescrita $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$, apresentado na Secção 5.1, para o caso do modelo ser uma forma primária. Dado um conjunto $\mathcal{C}$ de restrições atómicas e uma forma primária $\mathcal{P}$, se $\mathcal{C}$ é $\mathcal{P}$-satisfazível pretendemos obter as "diferenças" entre $\mathcal{P}$ e a forma primária de $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}$. Sem falta de generalidade podemos supor que $\mathcal{C}$ é uma forma primária.

Proposição 5.37 *Sejam $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}_p \wedge \mathcal{P}_n$ e $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ formas primárias. Se $\mathcal{C}$ é $\mathcal{P}$-satisfazível, então $\mathcal{P} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}_1$, onde $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^1$ e $\mathcal{C} \overset{\mathsf{I}^e}{\mapsto}{}^*_{\mathcal{P}} \mathcal{C}_1$. O sistema de reescrita $\mathsf{I}^e{}_{\mathcal{P}}$ é constituído pelas regras do sistema $\mathsf{I}_{\mathcal{P}_p}$ aplicado a $\mathcal{C}$ e pelas regras a seguir apresentadas. O sistema de reescrita $\mathsf{I}_{\mathcal{P}_p}$ aplica-se primeiro para obter $\mathcal{C}_p^1 \wedge \mathcal{C}_n^0$ fechada para $\mathsf{I}_{\mathcal{P}_p}$. As restantes regras do sistema $\mathsf{I}^e{}_{\mathcal{P}}$ são as seguintes:*

I^e12. $\{a \neq x\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{P}} \{x \neq a\} \cup \mathcal{C}$

I^e13. $\{a \neq b\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{P}} \mathcal{C}$ *se a e b são constantes distintas;*

I^e14. $\{\neg a.f^n\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{P}} \mathcal{C}$

I^e15. $\{x \neq a\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{P}} \mathcal{C}$ *se $x.f^n \in \mathcal{C}_p^1$ ou $y.f^n \in \mathcal{P}_p$ ou $y \neq a \in \mathcal{P}_p$ e $x \in [y]_{\mathcal{C}_p^1}$, para algum $f^n \in \Sigma$;*

I^e16. $\{\neg x.g^m\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{P}} \mathcal{C}$ *se $x.f^n \in \mathcal{C}_p^1$ ou $y.f^n \in \mathcal{P}_p$ ou $\neg y.g^m \in \mathcal{P}_p$ e $x \in [y]_{\mathcal{C}_p^1}$, para algum $f^n \neq g^m$;*

I^e17. $\{x \neq y\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{P}} \mathcal{C}$ *se $x_1 \neq y_1 \in \mathcal{P}_n$ e $x_1 \in [x]_{\mathcal{C}_p^1}$ e $y_1 \in [y]_{\mathcal{C}_p^1}$;*

I^e18. $\{x \neq y, y \neq x\} \cup \mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{P}} \{x \neq y\} \cup \mathcal{C}$

O sistema de reescrita $\mathsf{I}^e{}_{\mathcal{P}}$ termina e se $\mathcal{C}_1$ é irredutível para $\mathsf{I}^e{}_{\mathcal{P}}$, então $\mathcal{C}_1$ é uma forma primária e $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_1$ coincide com uma forma primária $\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}'_p \wedge \mathcal{C}'_n$ de $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}$ a menos permutação de valores na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{C}'_p}$ e a presença de restrições atómicas equivalentes. Neste caso, escreve-se $\mathcal{C}' \doteq \mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_1$.

Dem. Cada regra do sistema de reescrita $\mathsf{I^e}_{\mathcal{P}}$ é correcta em relação a $\mathcal{P}$, se $\mathcal{C} \mapsto_{\mathcal{P}} \mathcal{C}'$ implicar $\mathcal{RT} \models \mathcal{P} \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{P} \wedge \mathcal{C}'$. As regras do sistema de reescrita $\mathsf{I}_{\mathcal{P}_p}$ são correctas e as regras $\mathsf{I^e}$12–$\mathsf{I^e}$18 coincidem com regras do sistema de reescrita P, para redução a forma primária, considerando a forma normal $\mathcal{C}'_p \dot{\equiv} \mathcal{P}_p \wedge \mathcal{C}^1_p$. A terminação resulta da terminação dos dois sistemas referidos, $\mathsf{I}_{\mathcal{P}_p}$ e P, e da sua ordem de aplicação. Resulta ainda que $\mathcal{C}^1_p$ está em forma normal e se $\mathcal{C}_1$ é irredutível para $\mathsf{I^e}_{\mathcal{P}}$ então é uma forma primária. Para além da repetição de restrições atómicas positivas (a menos permutação de valores na mesma classe de equivalência de $=_{\mathcal{C}'_p}$), pode haver repetição de restrições atómicas negativas em $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{C}^1_n$. $\square$

Note-se que não é necessário que o conjunto $\mathcal{C}$ de restrições atómicas esteja uma forma primária para que o sistema de reescrita $\mathsf{I^e}_{\mathcal{P}}$ seja aplicado. Na realidade, no sistema de reescrita $\mathsf{I}_{\mathcal{M}}$ não se supõe que a conjunção de restrições atómicas positivas esteja em forma normal e as regras $\mathsf{I^e}$12–$\mathsf{I^e}$18 coincidem com as usadas para a redução a forma primária.
Se a forma primária $\mathcal{P}$ não contiver restrições redundantes e $\mathcal{C} \overset{\mathsf{I^e}}{\mapsto}{}^{\star}_{\mathcal{P}} \mathcal{C}_1$, a restrição $\mathcal{C}_1 \equiv \mathcal{C}^1_p \wedge \mathcal{C}^1_n$ só pode conter restrições redundantes da forma $x \neq y$. Estas redundâncias, podem ser apenas em $\mathcal{C}_1$ ou em $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_1$. Para verificar se uma restrição $x \neq y \in \mathcal{C}^1_n$ é redundante em $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_1$, podemos usar o método da Proposição 4.37 considerando a forma primária $\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}'_p \wedge \mathcal{C}'_n$ de $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}$. Claro que este teste, pode ser feito incrementalmente, quando se aplica a regra $\mathsf{I^e}$17.

Corolário 5.38 *Sejam $\mathcal{P}$ uma forma primária, $\mathcal{C}$ um conjunto de restrições atómicas e $\mathcal{P}_1$ uma forma primária obtida de $\mathcal{C}$, irredutível para o sistema de reescrita $\mathsf{I^e}_{\mathcal{P}}$ e tal que $\mathcal{P}_1$ não contém restrições redundantes em $\mathcal{P} \wedge \mathcal{P}_1$. Então*

(i) $\mathcal{P}_1 \equiv \mathcal{P}^1_p \wedge \mathcal{P}^1_n$ *é única a menos permutação de variáveis na mesma classe de equivalência de* $=_{\mathcal{P}^1_p}$.

(ii) $\mathcal{P}_1 \equiv \top$ *se e só se* $\mathcal{P} \models_{\mathcal{RT}} \mathcal{C}$.

A Proposição 5.37 pode-se generalizar para uma conjunção de formas primárias, correspondendo a um processo incremental de satisfazibilidade análogo ao do Corolário 5.6.

Corolário 5.39 *Sendo $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_m$ conjunções de restrições atómicas, se $\mathcal{C}_0 \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m$ é satisfazível em $\mathcal{RT}$, então* *(i) A forma primária* $\mathcal{C}'$ *de* $\mathcal{C}_0 \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}_m$ *coincide a menos permutação de valores na mesma classe de equivalência de* $=_{\mathcal{C}'}$ *e repetição de restrições atómicas, com* $\mathcal{P}_0 \wedge \mathcal{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_m$*, onde* $\mathcal{P}_i$ *e* $\mathcal{P}'_i$*, para* $0 \leq i \leq n$*, são definidos por:*

(a) $\mathcal{P}'_0 \equiv \mathcal{P}_0$ *se* $\mathcal{C}_0 \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \mathcal{P}_0$

(b) $\mathcal{P}'_{i+1} \doteqdot \mathcal{P}'_i \cup \mathcal{P}_{i+1}$ *se* $\mathcal{C}_{i+1} \overset{\mathsf{I^e}}{\mapsto^\star_{\mathcal{P}'_i}} \mathcal{P}_{i+1}$*, para* $0 \leq i \leq m-1$.

5.6 Sistema de Reescrita Completo, $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$

O sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$ pode ser estendido para o caso do modelo ser uma forma primária. Sendo $\mathcal{P}$ uma forma primária, o conjunto de regras de reescrita do sistema $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$ para um modelo $\mathcal{P}$ ou $\bot$ é apresentado na Tabela 5.3.

$\mathsf{S^e}1.$	$\mathcal{C}$	$\longmapsto_{\bot}$	$\bot$
$\mathsf{S^e}2.$	$\mathcal{C} \wedge \top$	$\longmapsto_{\mathcal{P}}$	$\mathcal{C}$
$\mathsf{S^e}3.$	$\mathcal{C} \wedge \bot$	$\longmapsto_{\mathcal{P}}$	$\bot$
$\mathsf{S^e}4.$	$\mathcal{C} \vee \top$	$\longmapsto_{\mathcal{P}}$	$\top$
$\mathsf{S^e}5.$	$\mathcal{C} \vee \bot$	$\longmapsto_{\mathcal{P}}$	$\mathcal{C}$
$\mathsf{S^e}6.$	$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}$	$\longmapsto_{\mathcal{P}}$	$\bot$ se $\mathcal{C}_1$ é uma conjunção, não vazia, de restrições atómicas, $\mathcal{C}$ é uma conjunção, possivelmente vazia, de restrições não atómicas e $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_1 \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \bot$;
$\mathsf{S^e}7.$	$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}$	$\longmapsto_{\mathcal{P}}$	$\mathcal{C}'_1 \wedge \mathcal{C}'$

Tabela 5.3: Sistema de reescrita, $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$

			se $\mathcal{C}_1$ é uma conjunção, não vazia, de restrições atómicas, $\mathcal{C}$ é uma conjunção, possivelmente vazia, de restrições não atómicas, $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_1 \overset{\mathsf{P}}{\mapsto}{}^{\star} \mathcal{P}'$, $\mathcal{C} \overset{\mathsf{S^e}}{\longmapsto}{}^{\star}_{\mathcal{P}'} \mathcal{C}'$, $\mathcal{P}' \doteq \mathcal{P} \cup \mathcal{C}_1'$ e $\mathcal{C} \not\equiv \mathcal{C}'$ ou $\mathcal{C}_1' \not\equiv \mathcal{C}_1$;
$\mathsf{S^e8}$.	$(\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2) \wedge \mathcal{C}_3$	$\longmapsto_{\mathcal{P}}$	$(\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_3) \vee (\mathcal{C}_2 \wedge \mathcal{C}_3)$ se nenhuma das regras anteriores se aplica, $\mathcal{C}_3$ não é uma conjunção de restrições atómicas e nem $\mathcal{C}_1$ nem $\mathcal{C}_2$ são $\mathcal{P}$-independentes com $\mathcal{C}_3$.

Tabela 5.3: Sistema de reescrita, $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$

Teorema 5.40 *O sistema de reescrita $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$ é correcto (em $\mathcal{RT}$), termina e é completo para a satisfazibidade em $\mathcal{RT}$.*

Dem. A correcção do sistema de reescrita $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$ é imediata pela correcção do sistema reescrita $\mathsf{I^e}_{\mathcal{P}}$ e do sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$. Como para o sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$, a não terminação apenas pode ser causada pela aplicação das regras $\mathsf{S^e7}$ ou $\mathsf{S^e8}$. Suponhamos que a regra $\mathsf{S^e8}$ não se aplica e para $\mathcal{C} \in \mathcal{L}_U$ seja $\gamma(\mathcal{C})$ o número de conjunções de restrições atómicas (incluindo $\top$ e $\perp$). Se mais nenhuma regra se aplica, a regra $\mathsf{S^e7}$ aplica-se uma vez para cada conjunção de restrições atómicas, transformando-a, duma maneira única, em forma primária (ou $\perp$). Cada uma das restantes regras diminui o valor de γ. Assim por cada aplicação duma destas regras o valor de γ ou diminui ou mantém-se constante para um número finito de aplicações. Podemos então concluir que não pode haver uma cadeia infinita de aplicações de regras de $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$, excluindo a regra $\mathsf{S^e8}$. Para esta regra, consideremos a função δ, análoga à usada na demonstração do Teorema 5.18,

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{C}) &= 2 && \text{se } \mathcal{C} \text{ é uma conjunção de restrições atómicas} \\ \delta(\mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2) &= \delta(\mathcal{C}_1) + \delta(\mathcal{C}_2) + 1 \\ \delta(\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2) &= \delta(\mathcal{C}_1) \times \delta(\mathcal{C}_2) \end{aligned}$$

O valor de δ não aumenta por aplicação de nenhuma regra de $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$ e decresce estritamente por aplicação da regra $\mathsf{S^e8}$. Considerando as propriedades da função γ e o controlo da regra $\mathsf{S^e8}$, temos que o par (δ, γ), ordenado lexicográficamente, é decrescente por aplicação das regras de $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$. A demonstração de que $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$ é completo é análoga à do Teorema 5.20 excepto que no passo de indução para $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$, considera-se $\mathcal{C}_1$ uma forma primária e a regra $\mathsf{S^e7}$. Note-se que o Corolário 5.13 e o Lema 5.19 são válidos para $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$ e $\mathcal{P}$-independência. $\square$

Condições suficientes de $\mathcal{P}$-independência podem ser obtidas modificando as Proposições 5.16 e 5.17. Denotamos por $\mathsf{S^{e-}}_{\mathcal{P}}$ o sistema de reescrita que resulta de $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$ excluindo a regra $\mathsf{S^e8}$.

Proposição 5.41 *Sendo $\mathcal{P}$ um modelo e $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{L}_U$ restrições fechadas para $\mathsf{S^-}_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são $\mathcal{P}$-independentes se $Vars(\mathcal{C}_1) \cap Vars(\mathcal{C}_2) = \emptyset$.*

Dem. Consideremos que $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são formas primárias. Por redução ao absurdo, suponhamos que $\mathcal{P}' \equiv \mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ é não satisfazível. Contudo, por construção, $\mathcal{P}'$ não contém restrições contraditórias. Sejam $x \in Vars(\mathcal{P}')$ p, v e v' tal que $x\langle p\rangle v$, $x\langle p\rangle v' \in Paths(\mathcal{P}'_p)$ e as classes $[v]_{\mathcal{P}'_p}$ e $[v']_{\mathcal{P}'_p}$ verificam uma das condições do Lema 4.32 ou $\mathcal{P}'$. Provamos por indução na estrutura do caminho p que tais expressões não existem.

Base. Seja $p \equiv \epsilon$. Como $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_k$, para $k = 1, 2$, são satisfazíveis temos de ter $x \in [v]_{\mathcal{C}^1_p}$ e $x \in [v']_{\mathcal{C}^2_p}$, o que contradiz o facto de $Vars(\mathcal{C}_1) \cap Vars(\mathcal{C}_2) = \emptyset$.

Indução. Suponhamos $p \equiv f^n_i q$. Então existem valores v_1 e v_2 tais que $x.f^n_i \doteq v_1 \in \mathcal{P}'$ e $x.f^n_i \doteq v_2 \in \mathcal{P}'$.

- Se v_1 ou v_2 são constantes, então $q \equiv \epsilon$. Se v_1 e v_2 são ambos constantes então $x.f^n_i \doteq v_k \in \mathcal{C}_k$, para $k = 1, 2$, o que é absurdo. Suponhamos que v_1 é constante e v_2 não. Como, as restrições $\mathcal{C}_k$, para $k = 1, 2$, estão fechadas para $\mathsf{S^-}_{\mathcal{M}}$, temos que $x.f^n_i \doteq v_1 \notin \mathcal{P}$. Então o único caso possível é $x.f^n_i \doteq v_1 \in \mathcal{C}_1$

(ou $\mathcal{C}_2$), $x.f_i^n \doteq v_2 \in \mathcal{P}$ e $v_2 \in Vars(\mathcal{C}_2)$ (ou $Vars(\mathcal{C}_1)$). Mas, então, pela regra I2, $v_2 \in Vars(\mathcal{C}_1)$ (ou $Vars(\mathcal{C}_2)$), o que é absurdo.

- Senão v_1 e v_2 são variáveis, sejam z_1 e z_2, respectivamente, e $z_1\langle q\rangle v\, z_2\langle q\rangle v' \in Paths(\mathcal{P}'_p)$. Mas, então, as restrições $x.f_i^n \doteq z_1 \in \mathcal{P}'$ e $x.f_i^n \doteq z_2 \in \mathcal{P}'$ não podem pertencer:
  - ambas a $\mathcal{P}$
  - ambas a $\mathcal{C}_k$, para cada $k = 1, 2$
  - uma a cada $\mathcal{C}_k$, para $k = 1, 2$
  - uma a um $\mathcal{C}_k$, para $k = 1, 2$, e a outra a $\mathcal{P}$

  Neste último caso, suponhamos que $x.f_i^n \doteq z_1 \in \mathcal{C}_1$, e $x.f_i^n \doteq z_2 \in \mathcal{P}$. Então $z_1 \in [z_2]_{\mathcal{C}_1}$ e $z_1\langle q\rangle v$, $z_1\langle q\rangle v' \in Paths(\mathcal{P}'_p)$, o que é absurdo, por hipótese de indução.

□

Definição 5.42 *Sendo $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_p \wedge \mathcal{C}_n$ uma forma primária, uma variável $x \in Vars(\mathcal{C})$ é* livre *em $\mathcal{C}$, se for livre em $\mathcal{C}_p$ e não ocorrer em $\mathcal{C}_n$.*

Se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ forem formas primárias temos ainda o seguinte critério de $\mathcal{P}$-independência:

Proposição 5.43 *Sendo $\mathcal{P}$ um modelo e $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{L}_U$ formas primárias fechadas para $\mathsf{S^{e-}}_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são $\mathcal{P}$-independentes se para todo $x \in Vars(\mathcal{C}_1) \cap Vars(\mathcal{C}_2)$ uma das seguintes condições se verifica:*

(i) x é livre em $\mathcal{C}_1$ ou em $\mathcal{C}_2$.

(ii) x é funcional em ambas, com o mesmo functor f^n, e para todo o $1 \leq i \leq n$, as classes $[x]_{\mathcal{C}_p^1}$ e $[x]_{\mathcal{C}_p^2}$ não estão simultaneamente definidas para i.

Os métodos de factorização de formas primárias apresentados na Secção 5.4.2 podem ser usados antes da aplicação da regra $\mathsf{S^e8}$, reduzindo, eventualmente, o tamanho das restrições a que essa regra se aplica.

Corolário 5.44 *Sendo $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{L}_U$, $\mathcal{C}_0 \overset{\mathsf{S^e}}{\longmapsto}{}^{\star}_{\top}\ \mathcal{P} \wedge \mathcal{C}$ tal que:*

(i) $\mathcal{P} \equiv \bot$ se e só se $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow \bot$

(ii) $\mathcal{P}$ *é uma forma primária e* $\mathcal{RT} \models \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow \mathcal{P} \wedge \mathcal{C}$*, caso contrário.*

Como foi dito, no fim da Secção 5.4.2, os modelos parciais $\mathcal{P}$ obtidos pelo sistema de reescrita $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$, podem conter redundâncias que seriam eliminadas pelo sistema de reescrita $\mathsf{S}_{\mathcal{M}}$. Esse facto foi ilustrado nos exemplos c_{16} e c_{17}. No caso geral, para que num modelo parcial $\mathcal{P}$ não se mantenham redundâncias será necessário "marcar", para cada restrição atómica negativa, quais as restrições em que é redundante. Se $\mathcal{C}$ for uma restrição fechada para $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$ e $n_i \in \mathcal{P}$ for redundante em $\mathcal{C}$, para eliminar n_i podemos usar o Lema 5.34 e substituir a regra $\mathsf{S^e7}$ do sistema de reescrita $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$, pela regra seguinte:

$\mathsf{S^e7a.}$ $\quad \mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C} \quad \longmapsto_{\mathcal{P}} \quad \mathcal{C}_1'' \wedge \mathcal{C}'$

se $\mathcal{C}_1$ é uma conjunção, não vazia, de restrições atómicas, $\mathcal{C}$ é uma conjunção, possivelmente vazia, de restrições não atómicas, $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}_1 \overset{\mathsf{P}}{\mapsto^\star} \mathcal{P}'$, $\mathcal{C} \overset{\mathsf{S^e}}{\longmapsto^\star_{\mathcal{P}'}} \mathcal{C}'$, $\mathcal{P}' \doteq \mathcal{P} \cup \mathcal{C}_1'$ e $\mathcal{C} \not\equiv \mathcal{C}'$ ou $\mathcal{C}_1' \not\equiv \mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}'\prime_1$ resulta de $\mathcal{C}_1'$ eliminando as restrições redundantes em $\mathcal{C}'$;

Se $\mathcal{C}$ for uma disjunção e $n_i \in \mathcal{P}$ for redundante só em alguns elementos da disjunção, a regra anterior já não é aplicável. Neste caso, podemos usar uma variante da regra $\mathsf{S^e8}$ modificando o próprio modelo parcial $\mathcal{P}$. Se, como para o sistema de reescrita S, o par $\langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ representar a conjunção $\mathcal{P} \wedge \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ for fechada para $\mathsf{S^e}_{\mathcal{P}}$, temos a seguinte regra:

$\langle \mathcal{P} \cup \{n_i\}, \mathcal{C}_1 \vee \mathcal{C}_2 \rangle \;\Rightarrow\; \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_1 \vee (n_i \wedge \mathcal{C}_2) \rangle$ se n_i é redundante em $\mathcal{C}_1$ e não o é em $\mathcal{C}_2$

5.7 Sumário

Capítulo 6

Implementação dos Sistemas de Reescrita

In this section we present a constraint solver based on the rewriting system described above. Note that given a solved form $\mathcal{M}$, and considering that the equality is a equivalence relation, $\mathcal{M}$ can be partitioned into equivalence classes. Given an order $<_{\mathcal{T}}$ on terms[1] we can induce an order in these classes and so, to each set of satisfiable atomic constraints corresponds a set of normalized classes. A set $\mathcal{N} = \{l_1, \ldots, l_n\}$, is a normalized solved form iff:

1. each l_i is of the form $v_1 = \ldots = v_k$, where each v_i is a variable, an atom or a slot and $v_i <_{\mathcal{T}} v_j$, for $i < j \in \{1, \ldots, k\}$, or l_i is $x.f_i^n$.

2. each l_i has at most an atom and in that case it is the first element.

3. if $v \in l_i$ then v occurs exactly once in $\mathcal{M}$.

4. if l_i is $x.f^n$, x does not occur in other l_j of this form.

5. if x is in l_i and the first element of l_i is an atom then there is no l_j of the form $x.f^n$, for any f and n.

6. if $x.f_i^n \in l_k$ then there is a l_j of the form $x.f^n$.

[1]Let $Vars$ and F be provided with the lexicographical order and let variables, atoms and slots be terms. Then consider the following order $<_{\mathcal{T}}$ on terms: atoms are less than variables, and variables less than slots; two atoms or two variables are compared lexicographically; two slots are first compared by their variables, if equal then by their functor and arity and finally if every thing else is identical by their projections.

With a slight modification of rule **??** in section **??** to deal with ordered variables, it is easy to see that each satisfiable constraint can be reduced to an unique equivalent normalized solved form. We will describe an algorithm that given a set of atomic constraints returns a solved form as a set of equality classes or $false$ if the set is not satisfiable. The main features of the algorithm are implemented in `C` but an interface to Prolog is provided via a set of basic predicates. The complete rewrite system was written in Prolog using these predicates. The `C` component of the solver implements essentially the unification of solved forms in a way which is very similar to the Prolog implementation of unification. The main reason for a detailed presentation is the novel use we made of the trail mechanism which is not only used to recover a previous state but also to produce, as a solved form, the "differences" between the current state and the previous state (see subsection 6.0.3).

6.0.1 Rational Tree Representation

The representation of rational trees to be used, allows not only an efficient implementation of unification but also provides an incremental way of obtaining partial models, which is suitable for the contexted rewrite of inner disjunctions of a complex constraint. Given a set of atomic constraints, a destructive unification algorithm is used, while producing a trail, and then undoing unification, by also using the trail, we retrieve the associated solved form (partial model).

Besides variables and atoms, the notion of term is extended to objects of the form f^n, denoting a functor (function symbol) f with arity n, and to *slots* of the form $x.f_i^n$ [2]. Terms will be stored in a table where each one is a structure with the following fields:

`kind` which can have the values $AtomS$, $VarS$, $FuncS$ or $SlotS$ indicating that the term is an *atom*, a *variable*, a *functor* or a *slot* respectively. These values are sorted by increasing order.

`name` if the term corresponds to an atom or a variable this field is their identifier (a Prolog atom in the actual implementation); if the term is a slot, it is the projection identifier.

`value` a link to the terms in the same equality class or NIL.

`daughters` if the term is a variable or a slot this field is a link to its subtrees; otherwise its value is NIL.

[2] Recall that it represents the ith projection of x which main functor is f of arity n

```
Deref(Term v)
{   while(v->value) v=v->value;
    return v;
}
Bind(Term v1,Term v2)
{   v1->value=v2;
    *TrailPtr++=v1;
}
```

Figura 6.1: *Dereference of a term and bind of two terms.*

`base` if the term is a slot $x.f_i^n$ this is a pointer to the entry corresponding to the variable x; if the term is a variable, it can be a pointer to a functor term.

`next` link to the next term in the table.

A partial model is represented on the `trail`. The `trail` is a stack that contains pointers to the terms which `value` have changed during the rewrite process. Two pointers `TrailOld` and `TrailPtr` will mark the beginning and the ending of the portion of stack currently in use.

6.0.2 Solved Form Algorithm

The basic algorithm for the unification of two terms is given in figure 6.2. As usual substitutions are replaced by a bind/dereference mechanism, so before any two terms are unified they must be dereferenced, see figure 6.1. In the unification procedure whenever the `value` of a term is bounded, its pointer is added to the top of the `trail`, see figure 6.1, and in this way the active model is extended. Whenever two variables $v1$ and $v2$ (or a variable and a slot) are unified we must ensure that all subtrees of $v2$ share with subtrees of $v1$. This is done by the procedure `UnifySubTrees`, figure 6.3. As new terms maybe added to the trail, this can lead to some redundancies which will be eliminated when the solved form will be retrieved. The rest of the algorithm is basically the implementation of the simplification rules given in section **??**.
The following Prolog predicates are provided to rewrite atomic constraints (the number after the slash indicates its arity).

`add_ac_va/2` add a constraint of the form $x = a$

```
Unify(Term v1,Term v2)
{   if(v1->kind>v2->kind) { /* exchange v1 with v2 */
        Term t=v1; v1=v2; v2=t; }
    if(v1->kind==AtomS)
        if(v2->kind==AtomS) return v1==v2;
        if(v2->kind==VarS) {
            /* test if v2 is not bounded to a functor */
            if(IsFunctor(v2)) return 0;
                Bind(v2,v1);
                return 1;
            }
        if(v2->kind==SlotS) {
            /* test if v2 is not of the form a.f_i^n */
            if(!IsProper(v2)) return 0;
            Bind(v2,v1);
            return 1;
         }
    if(v1->kind==VarS) {
        /* v2 is a variable or slot */
        if(v1==v2) return 1;
        if(!SameFunctor(v1,v2))return 0;
        if(!IsProper(v2)) return 0;
        /* sort variables */
        if(Compare(v2,v1)) { exchange v1 with v2 */
            Term t=v1; v1=v2; v2=t; }
        Bind(v2,v1);
        return UnifySubTrees(v1,v2);
    }
}
```

Figura 6.2: *Unification algorithm.*

```
UnifySubTrees(Term u, Term v)
{   Term du ,dv;
    if(!SameFunctor(v,u))return 0;
    /* ensure all daughters of v share with daughters of u */
    du =u;
    dv = v->daughters;
    while(dv!=NIL) {
        while(du->daughters!=NIL
              && du->daughters->name < dv->name)
            du = du->daughters;
        /* if u does not have that subtree it will be create */
        if(du->daughters==NIL ||du->daughters->name!=dv->name) {
            Term t = (Term) tmp_alloc(sizeof(*t));
            t->kind = SlotS;
            t->name=dv->name;
            t->base = u;
            t->value = NIL;
            t->daughters= du->daughters;
            du->daughters= t;
        }
        /* unify correspondent daughters of u and v */
        if(!Unify(Deref(du->daughters),Deref(dv)) return 0;
        dv=dv->daughters;
    }
    return 1;
    }
}
```

Figura 6.3: *Unification of subtrees.*

`add_ac_vv/2` add a constraint of the form $x = x$

`add_ac_fa/5` add a constraint of the form $x.f_i^n \doteq a$

`add_ac_fv/5` add a constraint of the form $x.f_i^n \doteq x$

`add_ac_f/3` add a constraint of the form $x.f^n$

For each argument the associated term is looked up in the `term table` and if not found, is created and added to the table [3]. Then the `Unify` procedure is called and if it fails, the predicate will fail. The last predicate `add_ac_f` is a bit different because instead of binding the `value` of x with the term representing f^n we just bind it to the `base` of x[4]. The reason is that two different terms can have the same functor. In this case they will be equal only if all their subtrees are defined and equal.

When no more constraints are to be added (and no failure has occurred) a call to the predicate `undo_ac/1`, see figure 6.4, returns a solved form as a set of equality classes. According to the rule **??** in section **??**, every two terms that agree in all their subtrees (slots) are unified. Then, beginning at the top of the `trail` each term is dereferenced and all the terms that dereference to the same `value` are removed from the `trail` and, joined in the same class. If a term is a slot, its `base` must be dereferenced[5] and the slot associated to the new `base` is added to the class. That is so, because that term could have been inserted in the trail before its `base` was bounded to another term. This step can also eliminate redundancies created by `UnifySubTrees`, see example below. Finally the values of all terms are zeroed and the `trail` is emptied. To illustrated, let $\mathcal{M}$ be a satisfiable set of atomic constraints: $\{z.f_1^4 \doteq b, z = y, z = x, w = b, x.f_1^4 \doteq u, x.f_1^4 \doteq b\}$. After adding these constraints, the `trail` contains pointers to the terms described in the following table:

[3] In this stage some clashes can be detected, namely if a variable earlier bounded to an atom is now to be bound to a functor or to a different functor. This avoids some tests done later in the `Unify` procedure.

[4] In the algorithms presented in this paper it is omitted the code concerning the treatment of these constraints.

[5] Function `DerefSlot` accomplishes that.

term	term.value
$z.f_1^4$	b
z	y
$y.f_1^4$	b
y	x
$x.f_1^4$	b
w	b
u	b

where the third and fifth elements are due to unification of subtrees and the last one is due to the dereference of $x.f_1^4$. The last conjunct in $\mathcal{M}$ was trivially true, so no more elements were added. This leads to the following normalized solved form: $\{b = u = w = x.f_1^4, x.f^4, x = y = z\}$. Note that if the first two constraints in $\mathcal{M}$ were swapped, then the first element will not appear in the `trail`.

The claim that `undo_ac` returns a normalized solved form of $\mathcal{M}$ follows from the fact that:

- the unification algorithm ensures that $\mathcal{M}$ is satisfiable.
- every term in the `trail` occurred in an equation of $\mathcal{M}$ or results from the unification of subtrees (akin to application of a substitution); and its value is the other element of the equation or corresponds to one or more applications of rules **??** and **??** of section **??**, which preserve equivalence.
- by construction the result of `undo_ac` is a normalized solved form.

The solved form algorithm for a set of atomic constraints can be summarized as follows:

```
solve(C,M):-
  clean_ac,
  add_constraints(C,C1),
  (C1==false -> M=false; undo_ac(M)).
```

where `C` is a list of atomic constraints, `clean_ac` initializes the `term table` and the `trail`[6] and `add_constraints` for each atomic constraint calls the appropriate predicate and returns *false* if any of them fails.

[6]The active model is the empty model.

```
undo_ac()
{   Term *p,r0,r1;
    SolvForm classes=NIL;
    /* apply rule ??  */
    check_eq_terms();
    while(1){
        *p=TrailPtr;
        r0=*--p;
        /* find first thing left in the trail;
        if a term r has been removed from the
        trail marked(r) will succeed */
        while(p!=TrailOld && marked(r0)) r0=*--p;
        if(p==TrailOld) break; /* nothing left */
        r0=Deref(r0);
        ++p; /* r0 back to the trail */
        StartClass();
        AddToClass(r0);
        /* find another term in the same class */
        while(p!=TrailOld){
            r1=*--p;
            if(marked(r1)) continue;
            if(Deref(r1)!=r0) continue;
            mark(r1); /* remove r1 from the trail */
            /* check slot base */
            r1=DerefSlot(r1);
            AddToClass(r1);
        }
        classes=MkClasses(MkAtomicClass(),classes);
    }
    /* clean trail and term values */
    while(TrailPtr!=TrailOld)(*--TrailPtr)->value=NIL;
    TrailPtr=TrailOld;
}
```

Figura 6.4: *Retrieve of a solved form.*

6.0.3 General Algorithm

The above algorithm can be efficiently extended to deal with general constraints and implement the complete rewriting system. The basic idea is to mark the model whenever a disjunction or a negation occurs. In this way all conjunctions of atomic constraints can be treated in a similar manner. Whenever a disjunct is rewritten the solved form corresponding to its atomic part (set of atomic constraints) is extracted, if it is satisfiable. Otherwise the model constructed so far (back to the last mark) must be erased, a new mark must be set and *false* is produced (for that disjunct or negation). This mechanism is achieved by having a stack of `choice points` which are the trail bounds. To set a `choice point` the current beginning of the trail is added to the top of the `choice point stack` and the current beginning of the trail is reset to be the current ending. The inverse operation is done whenever a model is extracted (`undo_ac` only extracts a model between two `trail` bounds) or a failure occurs, see figure 6.5. The following Prolog predicates are provided:

`clean_ac/0` set the active model to be the empty model

`mark_ac/0` set a choice point for the model

`undo_ac/1` restore previously marked model and returns a solved form

`fail_ac/0` restore previously marked model

Now the complete rewriting system can be easily implemented in Prolog. Here we just present a small fragment of the program[7].

```
solve(C,C1):-
        clean_ac,
        rewrite(C,C0)
        (C0==C-> C1=C0; solve(C0,C1)).
rewrite(C,C1):-
        rewrite_atomic(C,C0),
        rewrite_m(C0,C1),
        undo_ac(M),and(M,C1,C2).
        ⋮
rewrite_m(and(A,B),C):-
        rewrite_m(A,A1),
        rewrite_m(B,B1).
```

[7] Negations have been pushed down atomic constraints and the elimination of trivial constraints and earlier detection of failures have been omitted as well as other control features.

```
clean_ac()
{   if(TrailBase==0)
        TrailBase = (Term *) malloc(sizeof(Term)*TRAIL_SIZE);
    TermTable= 0;
    TrailPtr = TrailOld = TrailBase;
    ChoicePtr = ChoicePointBase ;
    return 1;
}

mark_ac()
{   *ChoicePtr++ = TrailOld;
    TrailOld = TrailPtr;
    return 1;
}

fail_ac()
{   while(TrailPtr!=TrailOld) (*--TrailPtr)->value = NIL;
    TrailOld = *--ChoicePtr;
    return 1;
}
```

Figura 6.5: *Set and remove choice points.*

```
            and(A1,B1,C).
    rewrite_m(or(A,B),C):-
            mark_ac,
            rewrite(A,A1),
            rewrite_tail_or(B,B1),
            or(A1,B1,C).
    rewrite_m(not(A),C):-
            mark_ac,
            rewrite(A,A1),
            not(A1,C).
            ⋮
```

The predicate `rewrite_atomic` is similar to `add_constraints` but scans a general constraint and looks for atomic constraints in the "top conjunction". The last rule of the rewrite system $\longmapsto_{\mathcal{M}}$ in section **??**, is applied only when nothing else applies.

Capítulo 7

O *Calculus*, $\Lambda_{\mathcal{RT}}$

Capítulo 8

Conclusões

Apêndice A

Decidibilidade de $\mathcal{RT}$

Teorema A.1 *Sendo $\mathcal{A} = \mathcal{RT}$, para toda a fórmula $\phi \in \mathcal{L}$ existe uma restrição $c \in \mathcal{L}_C$ tal que $\mathcal{A} \models \phi \Leftrightarrow c$.*

Dem. A demonstração a seguir apresentada é baseada em [Mah88]. Qualquer fórmula $\phi \in \mathcal{L}$ é equivalente, em qualquer álgebra, a uma fórmula em forma prenex normal. Podemos, então, supor que $\phi \equiv Q_n x_n \ldots Q_1 x_1 . \psi$, onde ψ é uma fórmula sem quantificadores e Q_i é ou $\forall$ ou $\exists$, para $1 \leq i \leq n$. É imediato que ψ é equivalente em $\mathcal{RT}$ a uma fórmula $c' \in \mathcal{L}_C$. Se ϕ não contiver quantificadores o resultado está demonstrado. Caso contrário, seja Y o conjunto de variáveis que ocorrem na forma prenex de ϕ.

Temos que

$$(1) \qquad \mathcal{RT} \models \phi \Leftrightarrow Q_n x_n \ldots Q_1 x_1 c' \Leftrightarrow Q_n x_n \ldots Q_1 x_1 \exists \bar{z} c_u \Leftrightarrow \exists \bar{z} c'_u \Leftrightarrow c$$

onde, $c, c' \in \mathcal{L}_C$ e $c_u, c'_u \in \mathcal{L}_U$. A segunda e quarta equivalências resultam do Teorema 2.32. Em particular, se c'_u for satisfazível e $\exists \bar{z} c'_u$ for uma fórmula fechada então $c \equiv \top$. Falta apenas provar a terceira equivalência, que corresponde à eliminação de quantificadores.

Podemos supor que em c_u as variáveis de Y não ocorrem do lado direito duma equação ou duma restrição do tipo $x.f_i^n \doteq v$. Se tais restrições ocorrerem, podemos substituí-las pelas conjunções $x = z \ \wedge \ v = z$ ou $x.f_i^n \doteq z \ \wedge \ v = z$, onde z é uma variável nova quantificada existencialmente. Por outro lado, pelas regras de reescrita do Teorema 2.32, todas as variáveis de $\bar{z}$ ocorrem do lado direito duma restrição daquele tipo. Finalmente, as regras de redução a forma resolvida ou a forma primária mantém estas características. Na redução a forma normal, a introdução de uma restrição da forma $z = y$ pode ser substituída pela introdução da restrição $y = z$ e a introdução de restrições da forma $x = y$ com $x, y \in Y$, embora garanta que x é uma variável resolvida na forma normal, pode ser substituída também por uma conjunção $x = z \ \wedge \ y = z$, com z uma variável nova quantificada existencialmente.

Vamos ver que podemos eliminar sucessivamente cada um dos quantificadores Q_i, para $1 \leq i \leq n$. Suponhamos que $Q_1 \equiv \exists$.

Pelo Teorema 4.57, a restrição c_u é equivalente a uma disjunção de formas primárias $\mathcal{P}_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ \mathcal{P}_m$ ou a $\perp$. Neste último caso, vem $\mathcal{RT} \models \phi \ \Leftrightarrow \ \perp$. No primeiro caso, podemos distribuir o quantificador pela disjunção e provar que $\mathcal{RT} \models \exists x_1 \exists \bar{z} P_i \ \Leftrightarrow \exists \bar{z} P_i'$, onde $\mathcal{P}_i'$ é uma forma primária, para $1 \leq i \leq m$. Temos os seguintes casos:

(i) $x_1 \notin Vars(\mathcal{P}_i)$ então $\mathcal{P}_i' \equiv \mathcal{P}_i$

(ii) $x_1 = v \in \mathcal{P}_i$, então x_1 é resolvida em $\mathcal{P}_i$ e portanto $\mathcal{P}'$ é idêntica a $\mathcal{P}_i$ excluindo apenas a restrição $x_1 = v$.

(iii) $x_1.f^n \in \mathcal{P}_i$ então $\mathcal{P}_i'$ resulta de $\mathcal{P}_i$ excluíndo todas as restrições que envolvam x_1. Estas restrições só podem ser do tipo $x_1.f_i^n \doteq z$, $x_1.f_i^n \doteq a$ ou $x_1 \neq v$.

(iv) $\neg x_1.f^n \in \mathcal{P}_i$ então $\mathcal{P}_i'$ resulta de $\mathcal{P}_i$ excluíndo todas as restrições que envolvam x_1. Estas restrições só podem ser do tipo $\neg x_1.f^n$ ou $x_1 \neq v$.

(v) $x_1 \neq v \in \mathcal{P}_i$ então $\mathcal{P}_i'$ é obtido como no caso anterior.

A equivalência resulta imediatamente da satisfazibilidade de $\mathcal{P}_i$ e o quantificador Q_1 é, assim, eliminado em cada elemento da disjunção. Note-se que cada $\exists \bar{z} \mathcal{P}_i'$ pode ser transformado numa restrição $c' \in \mathcal{L}_C$, envolvendo apenas variáveis de Y.

Se $Q_1 \equiv \forall$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{RT} \ \models \ & Q_n x_n \ldots Q_2 x_2 \forall x_1 c' \ \Leftrightarrow \ Q_n x_n \ldots Q_2 x_2 \neg \exists x_1 \neg c' \\ & \Leftrightarrow \ Q_n x_n \ldots Q_2 x_2 \neg \exists x_1 \exists \bar{z} c_u \ \Leftrightarrow \ Q_n x_n \ldots Q_2 x_2 \neg \exists \bar{z} c_u' \ \Leftrightarrow \ Q_n x_n \ldots Q_2 x_2 c'' \end{aligned}$$

onde $c', c'' \in \mathcal{L}_C$ e $c_u, c_u' \in \mathcal{L}_U$.

Repetindo este processo podemos eliminar todos os Q_i, para $1 \leq i \leq n$.

□

A decidibilidade de $\mathcal{RT}$ resulta do teorema anterior, uma vez que se ϕ é uma fórmula fechada, então c é $\top$ ou $\perp$.

Analogamente podemos obter a decidibilidade para $\mathcal{T}$ considerando as formas primárias adequadas.

Apêndice B

Terminologia

assignment	atribuição de variáveis
constraint	restrição
domain closure axiom	axioma do domínio fechado
determinant	determinante
entails	vincula
entailment	vínculo
extensional	extensiva
feature	atributo
feaure logic	lógica de estruturas de atributos
feature structure	estrutura de atributos
feature tree	árvore de atributos
normal form	forma normal
path	caminho
branch	ramo
satisfability	satisfazibilidade
satisfiable	satisfazível
slot	entrada
solved form	forma resolvida
record	estrutura

Referências

[AK86] Hassan Aït-Kaci. An algebraic semantics approach to the effective resolution of type equations. *Theoretical Computer Science*, 45:293–351, 1986.

[AKP93a] Hassan Aït-Kaci and A. Podelski. Towards a meaning of life. *Journal of Logic Programming*, 16:195–234, 1993.

[AKP93b] Hassan Aït-Kaci and Andreas Podelski. Entailment and disentailment for order-sorted feature constraints. In Andrei Voronkov, editor, *Proceedings of the Fourth International Conference on Logic Programming and Automated Reasoning.* Springer-Verlag, 1993.

[AKPS92] Hassan Aït-Kaci, Andreas Podelski, and Gert Smolka. A feature-based constraint system for logic programming with entailment. Technical Report RR-92-17, DFKI, 1992.

[AKPS94] Hassan Aït-Kaci, Andreas Podelski, and Gert Smolka. A feature-based constraint system for logic programming with entailmen. *TCS*, 122(1-2):263–283, January 1994.

[And86] Peter B. Andrews. *An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory:To Truth Through Proof.* Academic Press, Orlando,Florida, 1986.

[ASS+88] A. Aiba, K. Sakai, Y. Sato, D. J. Hawley, and R. Hasegawa. Constraint logic programming language CAL. In *Proceedings of the International Conference on Fifth Generation Computer Systems (FGCS-88), ICOT, Tokyo*, pages 263–276, December 1988.

[Bac94] Rolf Backofen. *Expressivity and Decidability of First Oder Theories over Feature Trees*. PhD thesis, Technische Fakultät der Universität des Saarlandes, Germany, 1994.

[Bro92] Sabine Broda. Um sistema de reescrita completo para linguagens com um número finito de features. Technical report, Centro de Informática da Universidade do Porto, 1992.

[BS92] Rolf Backofen and Gert Smolka. A complete and recursive feature theory. Technical Report RR-92-30, DFKI, 1992.

[BS95] Rolf Backofen and Gert Smolka. A complete and recursive feature theory. *Theoretical Computer Science*, 1995.

[Büc60] J. R. Büchi. On a decision method in restricted second order arithmetic. In E. Nagel et. al., editor, *International Congr. on Logic, Methodology and Philosophy of Science*, pages 1–11. Stanford University Press, 1960.

[CL89] H. Comon and Pierre Lescanne. Equational problems and disunification. *Journal of Symbolic Computation*, 7:317–425, 1989.

[Cla78] K. L. Clark. Negation as failure. In H. Gallaire and J.Minker, editors, *Logic and Databases*, pages 293–322. Plenum Press, New York, 1978.

[Col82] Alain Colmerauer. Prolog and infinite trees. In K. L. Clark and S. A. Tarnlund, editors, *Logic Programming*, pages 231–251. Academic Press, New York, 1982.

[Col90] Alain Colmerauer. An introduction to PROLOG-III. *Communications of the ACM*, 33(7):69–90, July 1990.

[Col94] Alain Colmerauer. Equations and inequations on finite and infinite trees. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Fifth Generation Computer System*, pages 85–99, Tokyo, 1994.

[Com88] H. Comon. *Unification et disunification: Théorie et applications*. PhD thesis, I.N.P. de Grenoble, France, 1988.

[Com91] H. Comon. Disunification: a survey. In J.-J. Lassez and Gordon Plötkin, editors, *Computational Logic:Essays in Honor of Alan Robinson*, pages 322–359. MIT Press, 1991.

[Cou83] Bruno Courcelle. Fundamental properties of infinite trees. *Theoretical Computer Science*, 2(25):95–169, March 1983.

[Dam91] Luís Damas. Clg final report. Technical report, Commission of the European Communities, September 1991.

[Der82] Nachum Dershowitz. Orderings for term-rewriting systems. *Theoretical Computer Science*, 17:279–301, 1982.

[DJ90] Nachum Dershowitz and Jean-Pierre Jouannaud. Rewrite systems. In J. van Leewen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B, chapter 6, pages 245–320. Elsevier Science Publishers, 1990.

[dK92] J. de Kleer. An improved incremental algorithm for computing prime implicants. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-92), San José, California*, pages 780–785, 1992.

[dKMR90] J. de Kleer, A. K. Mackworth, and R. Reiter. Characterizing diagnoses. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-90), Boston, Massachusetts*, pages 324–330, 1990.

[dKR87] J. de Kleer and R. Reiter. Foundations of assumption-based truth maintenance systems: preliminary report. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-87), Seattle*, pages 183–188, 1987.

[DM79] Nachum Dershowitz and Zohar Manna. Proving termination with multiset orderings. *Communications of the ACM*, 22(8):465–476, August 1979.

[DM91] Luís Damas and Nelma Moreira. A quantifier elimination algorithm for a first order logic with equality. Technical report, Univerdidade do Porto, July 1991.

[DMB93] Luís Damas, Nelma Moreira, and Sabine Broda. Resolution of constraints in algebras of rational trees. In Miguel Filgueiras and Luís Damas, editors, *Progress* *in Artificial Intelligence — 6th Portuguese Conference on Artificial Intelligence*, volume 727 of *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. Springer-Verlag, 1993.

[DMV91] Luís Damas, Nelma Moreira, and Giovanni B. Varile. The formal and processing models of CLG. In *Fiifth Conference of the European Chapter of the Association for Computational Linguistics*, pages 173–178, Berlin, 1991.

[DMV94] Luís Damas, Nelma Moreira, and Giovanni B. Varile. The formal and computational theory of complex constraint solution. In C. Rupp, M. A. Rosner, and R. L. Johnson, editors, *Constraints, Language, and Computation*, Computation In Cognitive Science, pages 149–166. Academic Press, London, 1994.

[DV92] Luís Damas and Giovanni B. Varile. On the satisfiability of complex constraints. In *Proceedings of the 14th International Conference on Computational Linguistics (COLING)*, Nantes, France, 1992.

[DvS+88] M. Dincbas, P. van Hentenryck, H. Simonis, A. Aggoun, T. Graf, and F. Berthier. The Constraint Logic Programming Language CHIP. In *Proceedings of the International Conference on Fifth Generation Computer Systems FGCS-88*, pages 693–702, Tokyo, Japan, December 1988.

[GJ79] Michael Garey and David Johnson. *Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-Completeness.* W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

[Her30] Jacques Herbrand. *Recherches sur la theorie de la démonstration.* PhD thesis, Université de Paris, 1930. Ecrits logiques de Jacques Herbrand, Paris, PUF, 1968.

[HU79] John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.* Addison Wesley, 1979.

[Hue76] G. Huet. *Résolution d'equations dans les Langages d'ordre* $1, 2, \ldots, \omega$. PhD thesis, Univ. Paris 7, 1976.

[Jaf84] J. Jaffar. Efficient unification over infinite trees. *New Generation Computing*, 2(2):207–219, 1984.

[JL87] Joxan Jaffar and Jean-Louis Lassez. Constraint logic programming. In *Proceedings of the 14th ACM Symposium on Principles of Programming Languages (POPL), Munich, Germany*, pages 111–119. ACM, January 1987.

[JM94] Joxan Jaffar and Michael Maher. Constraint logic programming: A survey. *Journal of Logic Programming*, 1994.

[JMSY90] Joxan Jaffar, Spiro Michaylov, Peter Stuckey, and Roland Yap. The CLP($\mathcal{R}$) language and system. Technical Report RC 16292 (#72336) 11/15/90, IBM Research Division, November 1990.

[JP90] Peter Jackson and John Pais. Computing prime implicants. In M. E. Stickel, editor, *10th International Conference on Automated Deduction*, number 449 in Lecture Notes on Computer Science, pages 543–557. Springer Verlag, 1990.

[JRSL70] C. Chang J. R. Slagle and R. C. Lee. A new algorithm for generating prime implicants. *IEEE Transactions on Computers*, 19(4):304–310, 1970.

[Kei94] Torbjörn Keisu. *Trees Constraints.* PhD thesis, The Royal Institute of Technology, 1994.

[KI88] Ronald M. Kaplan and John T. Maxwell III. An algorithm for functional uncertainly. In *Proceedings of the 12th International Conference on Computational Linguistics (COLING)*, pages 297–302, Budapest, Hungary, 1988.

[Kow79] Robert Kowalski. *Logic for problem solving.* Elsevier Science Publishing, 1979.

[KT90] A. Kean and G. Tsiknis. An incremental method for generating prime implicants/implicates. *Journal of Symbolic Computation*, 9:185–206, 1990.

[Kun87] K. Kunen. Negation in logic programming. *Journal of the Logic Programming*, 4:289–308, 1987.

[LM87] J.-L. Lassez and K. Marriott. Explicit representation of terms defined by counter examples. *Journal of Automated Reasoning*, 3:301–317, 1987.

[LM90] J.-L. Lassez and K. McAloon. A constraint sequent calculus. In *Proceedings of the Fifth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 52–62. IEEE, Philadelphia, 1990.

[LMM87] J.-L. Lassez, M.J. Maher, and K. Marriott. Unification revisited. In J.Minker, editor, *Foundations of Deductive Databases and Logic Programming*. Kauffman, 1987.

[LMM92] J.-L. Lassez, Michael Maher, and K. Marriott. Elimination of negation in term algebras. draft, 1992.

[Mah] Michael Maher. Complexity. draft.

[Mah88] Michael J. Maher. Complete axiomatizations of the algebras of finite, rational and infinite trees. Technical report, IBM Thomas J. Watson Research Center, P.O. Box 704, Yorktown Heights, NY 10598, U.S.A., 1988.

[Mah93] Michael Maher. A logic programming view of clp. In *Proceedings of the 10th International Conference on Logic Programming*, pages 737–753, 1993.

[Mal71] A. I. Mal'cev. Axiomatizable classes of locally free algebras of various types. In *The Metamathematics of Algebraic Systems: Collected Papers, 1936-1967*, pages 262–289. North-Holland, 1971.

[McC56] E. McCluskey. Minimization of boolean functions. *Bell Sys. Tech. Journal*, 35:1417–1444, 1956.

[MN70] Z. Manna and S. Ness. On the termination of markov algorithms. In *Procceedings of the 3rd Hawaii International Conference on System Science*, pages 789–792, 1970.

[Nga93] T. Ngair. A new algorithm for incremental prime implicate generation. In *Proceedings of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-93), Chambery, France*, 1993.

[Prz89] T. C. Przymusinski. An algorithm for circumscription. *AI Journal*, 38:49–73, 1989.

[Qui52] W. V. Quine. The problem of simplifying truth functions. *American Math. Monthly*, 59(8):521–531, 1952.

[Qui55] W. V. Quine. A way to simplify truth functions. *American Math. Monthly*, 62:627–631, 1955.

[Qui59] W. V. Quine. On cores and prime implicants of truth functions. *American Math. Monthly*, 66:755–760, 1959.

[Rei87] R. Reiter. A theory of diagnosis from first principles. *Artificial Intelligence*, 32:57–95, 1987.

[Rob65] J. A. Robinson. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *Journal of the ACM*, 12, 1965.

[Rym94] Ron Rymon. On kernel rules and prime implicants. In *Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-94)*, 1994.

[Sho67] J. Shoenfield. *Mathematical Logic*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

[SM54] E. W. Samson and Burton. E. Mills. Circuit minimization: Algebra and algorithm for new boolean canonical expressions. Technical Report 54-21, Air Force Cambridge Res. Center, April 1954.

[Smo89] Gert Smolka. Feature constraint logics for unification grammars. Technical report, IBM Wissenschafliches Zentrum, Institut für Wissensbasierte Systeme, 1989. IWBS Report 93.

[Smo92] Gert Smolka. Feature constraint logics for unification grammars. *Journal of Logic Programming*, 12:51–87, 1992.

[ST92] Gert Smolka and Ralf Treinen. Records for logic programming. In Krzysztof Apt, editor, *ICLP92*. MIT Press, 1992.

[ST94] Gert Smolka and Ralf Treinen. Records for logic programmin. *Journal of Logic Programming*, 18(3):229–258, April 1994.

[Tre93] Ralf Treinen. On feature constraints with variable feature access. Technical report, DFKI, 1993.

[Tre95] Ralf Treinen. Feature trees over arbitrary structures. Technical report, DFKI, 1995.

Índice Remissivo