

Introdução à Topologia – Resoluções de exercícios

Capítulo 1

Exercício nº5 (alíneas 3. e 4.)

É imediato, directamente a partir da definição, que, dados $r, s \in \mathbb{Q}$, $d_p(r, s) \geq 0$ e que $d_p(r, s) = 0$ se e só se $r = s$. Para demonstrar que $d_p(r, s) = d_p(s, r)$, observe-se que esta igualdade é trivial se $r = s$; caso contrário, se se escrever:

$$r - s = p^{v_p(r-s)} \cdot \frac{a}{b}$$

com $(a, p) = (b, p) = 1$, então tem-se:

$$s - r = p^{v_p(r-s)} \cdot \frac{-a}{b}$$

e $(-a, p) = (b, p) = 1$. Sendo assim, é claro que $v_p(s - r) = v_p(r - s)$ e, portanto, que $d_p(r, s) = d_p(s, r)$. Finalmente, pretende-se demonstrar que se $t \in \mathbb{Q}$, então

$$d_p(r, t) \leq \max\{d_p(r, s), d_p(s, t)\}. \quad (1)$$

Antes de se passar à demonstração desta afirmação, observe-se que ela implica que se tem $d_p(r, t) \leq d_p(r, s) + d_p(s, t)$. Por outro lado, ao demonstrar-se (1), pode-se supor que r, s e t são distintos dois a dois. De facto, se $r = t$, então (1) reduz-se a $0 \leq \max\{d_p(r, s), d_p(s, t)\}$ e se $r = s$ ou $s = t$, então (1) reduz-se a $d_p(r, t) \leq d_p(r, t)$. Será então suposto que r, s e t são dois a dois distintos; pretende-se provar que

$$|r - t|_p \leq \max\{|r - s|_p, |s - t|_p\},$$

ou seja, mostrar que

$$v_p(r - t) \geq \min\{v_p(r - s), v_p(s - t)\}.$$

Sejam $\alpha = r - s$ e $\beta = s - t$. Com esta notação, pretende-se mostrar que $v_p(\alpha + \beta) \geq \min\{v_p(\alpha), v_p(\beta)\}$. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ números primos com p tais que:

$$\alpha = p^{v_p(r-s)} \cdot \frac{a}{b} \text{ e } \beta = p^{v_p(s-t)} \cdot \frac{c}{d}.$$

Vai-se supor que $v_p(\alpha) \leq v_p(\beta)$; a demonstração é análoga se $v_p(\alpha) \geq v_p(\beta)$. Tem-se então:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= p^{v_p(\alpha)} \cdot \frac{a}{b} + p^{v_p(\beta)} \cdot \frac{c}{d} \\ &= p^{v_p(\alpha)} \frac{a + p^{v_p(\beta) - v_p(\alpha)} c}{b \cdot d}.\end{aligned}\quad (2)$$

Sejam $n \in \mathbb{Z}_+$ e $e \in \mathbb{Z}$ tais que $(e, p) = 1$ e que

$$a + p^{v_p(\beta) - v_p(\alpha)} c = p^n \cdot e;\quad (3)$$

seja $f = b \cdot d$. Então $(f, p) = 1$ e deduz-se de (2) e de (3) que:

$$\alpha + \beta = p^{v_p(\alpha) + n} \cdot \frac{e}{f};$$

logo, $v_p(\alpha + \beta) = v_p(\alpha) + n = \min\{v_p(\alpha), v_p(\beta)\} + n \geq \min\{v_p(\alpha), v_p(\beta)\}$.

Exercício nº9

Sejam $x, y \in E$; pretende-se mostrar que $d(x, y) \geq 0$. Basta observar que $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$.

Exercício nº16

1. A função não é contínua; de facto, vai ser visto que é descontínua em todos os pontos do domínio. Seja $f \in \mathcal{C}([0, 1])$; pretende-se demonstrar que:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists g \in \mathcal{C}([0, 1])) : d_1(f, g) < \delta \text{ e } |f(0) - g(0)| \geq \varepsilon.$$

Seja $\varepsilon = 1$ e seja $\delta > 0$. Se se encontrar uma função $h \in \mathcal{C}([0, 1])$ tal que

$$\int_0^1 |h| (= d_1(h, 0)) < \delta$$

e que $|h(0)| \geq 1$, então a função $g = f + h$ será claramente tal que $d_1(f, g) < \delta$ e que $|f(0) - g(0)| \geq 1$. Basta escolher h com um gráfico como o da figura 1. Mais precisamente, considere-se:

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t/d & \text{se } t < d \\ 0 & \text{se } t \geq d. \end{cases}$$

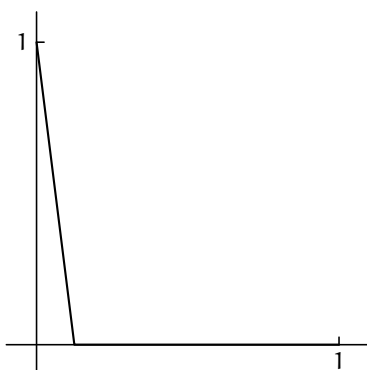


Figura 1

com $d \in]0, 1]$. Então $h(0) = 1$ e $\int_0^1 |h| = d/2$. Basta então escolher d tal que $d/2 < \delta$.

2. Sim, a função é contínua e é mesmo uniformemente contínua, ou seja, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall f, g \in \mathcal{C}([0, 1])) : d_\infty(f, g) < \delta \implies |f(0) - g(0)| < \varepsilon.$$

Com efeito, basta tomar $\delta = \varepsilon$, pois se $d_\infty(f, g) < \varepsilon$ então

$$|f(0) - g(0)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f, g) < \varepsilon.$$

Exercício nº19

1. Afirmar que a função é descontínua em todos os pontos do domínio equivale a afirmar que:

$$(\forall r \in \mathbb{Q})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists r' \in \mathbb{Q}) : d_p(r, r') < \varepsilon \text{ e } d(r, r') \geq \varepsilon.$$

Sejam então $r \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon = 1$ e $\delta > 0$; pretende-se encontrar um número racional r' tal que $d_p(r, r') < \delta$ e $|r - r'| \geq 1$. Para tal basta encontrar um número racional h tal que $|h|_p (= d_p(h, 0)) < \delta$ e $|h| \geq 1$; uma vez encontrado um tal h , bastará considerar $r' = r + h$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{-n} < \delta$. Então $|p^n|_p = p^{-n} < \delta$ (por escolha de n) e $|p^n| = p^n \geq 1$.

2. Sim; basta considerar a função que envia $r(\in \mathbb{Q})$ em $|r|_p$. Que esta função é contínua é uma consequência imediata do exercício 14, pois, para cada $r \in \mathbb{Q}$, $|r|_p = d_p(r, 0)$.

Exercício nº24

Que as aplicações $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ da forma $f(z) = \omega z + \beta$ ou $f(z) = \omega \bar{z} + \beta$, em que $\omega, \beta \in \mathbb{C}$ e $|\omega| = 1$, são isometrias é óbvio; o problema consiste em saber se há ou não outras isometrias. De facto não há. Para demonstrar esta afirmação, seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma isometria; sejam $\beta = f(0)$ e $\omega = f(1) - f(0)$. É claro que $|\omega| = 1$, pois $|\omega| = |f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$. Seja

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \rightsquigarrow (f(z) - \beta)/\omega;$$

é claro que g é uma isometria, que $g(0) = 0$ e que $g(1) = 1$. Pretende-se demonstrar que g é a identidade ou a conjugação; no primeiro caso ter-se-á então que, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega z + \beta$ e no segundo caso ter-se-á, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega \bar{z} + \beta$.

Primeira resolução: Vai-se começar por mostrar que:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : g(z) = z \text{ ou } g(z) = \bar{z}.$$

Seja então $z \in \mathbb{C}$ e seja $w = g(z)$. Sabe-se que $|w| = |z|$ e que $|w - 1| = |g(z) - g(1)| = |z - 1|$. Mas também se sabe que:

$$|z - 1|^2 = |w - 1|^2 \iff |z|^2 - 2 \operatorname{Re} z + 1 = |w|^2 - 2 \operatorname{Re} w + 1 \\ \implies \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$$

pois $|z| = |w|$. Logo, tem-se:

$$(\operatorname{Im} z)^2 = |z|^2 - (\operatorname{Re} z)^2 = |w|^2 - (\operatorname{Re} w)^2 = (\operatorname{Im} w)^2$$

e, portanto, $\operatorname{Im} z = \pm \operatorname{Im} w$; logo, $z = w$ ou $z = \bar{w}$.

Falta mostrar que se tem sempre $g(z) = z$ ou se tem sempre $g(z) = \bar{z}$. Suponha-se, por redução ao absurdo, que existe algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = z \neq \bar{z}$ e que existe algum $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(w) = \bar{w} \neq w$. Então $|z - \bar{w}| = |g(z) - g(w)| = |z - w|$. Mas tem-se

$$|z - \bar{w}| = |z - w| \iff (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w)^2 = \\ = (\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w)^2 \\ \iff \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w = \pm(\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w) \\ \iff \operatorname{Im} z = 0 \text{ ou } \operatorname{Im} w = 0 \\ \iff z = \bar{z} \text{ ou } w = \bar{w}$$

o que é absurdo.

Segunda resolução: Tem-se

$$|g(i)| = |g(i) - g(0)| = |i - 0| = 1$$

e

$$|g(i) - 1| = |g(i) - g(1)| = |i - 1| = \sqrt{2},$$

pelo que $g(i)$ está na intersecção das circunferências $S(0, 1)$ e $S(1, \sqrt{2})$; logo, $g(i) = \pm i$.

Suponha-se que $g(i) = i$; pretende-se demonstrar que g é então a identidade. Seja $z \in \mathbb{C}$. Sabe-se que $|g(z)| = |z|$, que $|g(z) - 1| = |z - 1|$ e que $|g(z) - i| = |z - i|$, ou seja que $g(z)$ está situado simultaneamente nas três circunferências de centros 0 , 1 e i e de raios respectivamente $|z|$, $|z - 1|$ e $|z - i|$. Mas três circunferências com centros não colineares só possuem, no máximo, um ponto comum e z pertence a cada uma delas; logo $g(z) = z$.

Se $g(i) = -i$, define-se, para cada $z \in \mathbb{C}$, $\hat{g}(z) = \overline{g(z)}$. A função \hat{g} é uma isometria, $\hat{g}(0) = 0$, $\hat{g}(1) = 1$ e $\hat{g}(i) = i$. Como já foi visto, \hat{g} é a função identidade, pelo que g é a conjugação.

Exercício nº27

Se I for um intervalo aberto de \mathbb{R} e se $a \in I$, existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que $]a - r_1, a + r_2[\subset I$. Se $r = \min\{r_1, r_2\}$, então $]a - r, a + r[\subset I$. Mas $]a - r, a + r[= B(a, r)$. Está então provado que

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists r \in \mathbb{R}_+^*) : B(a, r) \subset I,$$

ou seja, que I é um aberto.

Exercício nº30.1 (métrica p-ádica)

O conjunto em questão não é nem aberto nem fechado em \mathbb{Q} relativamente à métrica p-ádica. Para ver que não é aberto, observe-se que se $\varepsilon > 0$, então a bola $B(0, \varepsilon)$ não está contida em $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$; de facto, se $n \in \mathbb{N}$ for tal que $p^{-n} < \varepsilon$, então $p^n \in B(0, \varepsilon)$ mas $p^n \notin [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Para ver que $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ não é fechado em \mathbb{Q} será demonstrado que nenhuma bola aberta $B(r, \varepsilon)$ com $r \in \mathbb{Q}$ e $\varepsilon > 0$ está contida no complementar de $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Sejam $k, a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $r = p^k \frac{a}{b}$ e que $(a, p) = (b, p) = 1$. Se se tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^{-n-k} < \varepsilon$, então $r - r \frac{p^n}{p^{n-1}} \in B(r, \varepsilon)$; basta então escolher n tal que $\left| r - r \frac{p^n}{p^{n-1}} \right| \leq 1$ para que se tenha $r - r \frac{p^n}{p^{n-1}} \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Exercício nº34

1. Por hipótese, $b \in B(a, r)$, ou seja, $d(a, b) < r$. Basta então provar que $B(a, r) \subset B(b, r)$; por simetria, a inclusão oposta ficará também demonstrada. Seja então $c \in B(a, r)$; pretende-se mostrar que $c \in B(b, r)$, ou seja, mostrar que $d(c, b) < r$. Mas $d(c, b) \leq \max\{d(c, a), d(a, b)\} < r$ pois $d(c, a) < r$ e $d(a, b) < r$.

2. Seja $c \in B(a, r)$; pretende-se demonstrar que $c \in B(b, s)$. Seja $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$. Tem-se:

$$d(c, b) \leq \max\{d(c, x), d(x, b)\} \leq \max\{d(c, a), d(a, x), d(x, b)\}.$$

Mas $d(c, a) < r \leq s$, $d(a, x) < r \leq s$ e $d(x, b) < s$; deduz-se então que $d(c, b) < s$.

3. Sejam $a \in E$ e $r \in]0, +\infty[$; pretende-se demonstrar que $B(a, r)$ é um fechado de E , ou seja, que o conjunto $\{x \in E \mid d(x, a) \geq r\}$ é um aberto. Seja então $x \in E$ tal que $d(x, a) \geq r$. A bola $B(x, r)$ não intersecta $B(a, r)$ pois se a intersecção não fosse vazia deduzir-se-ia da alínea anterior que $B(a, r) = B(x, r)$, o que é absurdo porque $x \notin B(a, r)$.

Pretende-se agora demonstrar que $B'(a, r)$ é um aberto. Seja $x \in B'(a, r)$; vai-se mostrar que $B(x, r) \subset B'(a, r)$. De facto, se $y \in B(x, r)$, então $d(y, a) \leq \max\{d(y, x), d(x, a)\} \leq r$.

Exercício nº40 (relativamente ao exercício 31)

Observe-se que a topologia induzida pela métrica d_∞ é mais fina do que a topologia induzida pela métrica d_1 . De facto, a função identidade de $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ em $(\mathcal{C}([0, 1]), d_1)$ é contínua, porque se $f, g \in \mathcal{C}([0, 1])$, então:

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| \leq \int_0^1 \sup |f - g| = \sup |f - g| = d_\infty(f, g).$$

Logo, qualquer aberto (respectivamente fechado) de $(\mathcal{C}([0, 1]), d_1)$ é um aberto (resp. fechado) de $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$. Deduz-se que se $A \subset \mathcal{C}([0, 1])$, então a aderência de A relativamente a d_∞ está contida na aderência de A relativamente a d_1 e o interior de A relativamente a d_∞ contém o interior de A relativamente a d_1 .

1. Seja $A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(0) = 0\}$. Foi visto, no exercício 16, que a função

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0, 1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \rightsquigarrow & f(0) \end{array} \quad (4)$$

é contínua relativamente à métrica d_∞ ; logo, o conjunto A é fechado (relativamente à métrica d_∞), pois é a imagem recíproca de $\{0\}$ pela função (4) e, portanto, é igual à sua aderência.

A aderência de A relativamente a d_1 é o espaço $\mathcal{C}([0, 1])$. De facto, sejam $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ e $\varepsilon > 0$; quer-se mostrar que existe $g \in B(f, \varepsilon)$ tal que $g(0) = 0$. Seja $\varepsilon' \in]0, 1]$ e seja

$$g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} f(\varepsilon')x/\varepsilon' & \text{se } x < \varepsilon' \\ f(x) & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

vejam-se os gráficos de f (a cheio) e de g (a tracejado) na figura 2. Então tem-se:

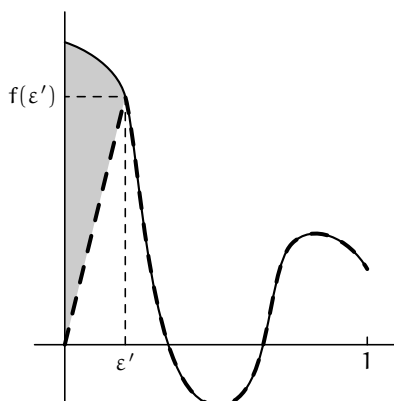


Figura 2

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g|$$

$$= \int_0^{\varepsilon'} |f - g| \text{ (pois } f(x) = g(x) \text{ se } x > \varepsilon') \leq 2M\varepsilon'.$$

sendo M o máximo de $|f|$. Basta então escolher $\varepsilon' < \varepsilon/(2M)$.

O interior de A relativamente a d_∞ é vazio. De facto, se $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ é tal que $f(0) = 0$ e se $\varepsilon > 0$, então a função $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ definida por $g(x) = f(x) + \varepsilon/2$ está na bola $B(f, \varepsilon)$, mas $g(0) \neq 0$. Deduz-se das observações feitas no início da resolução que o interior de A relativamente a d_1 também é vazio.

2. Seja $A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid (\forall t \in [0, 1]) : |f(t)| < 1\}$. O conjunto A é, relativamente à métrica d_∞ , a bola $B(0, 1)$, sendo 0 a função nula. Logo, é aberto e, portanto, igual ao seu interior. Relativamente à métrica d_1 , o conjunto A tem o interior vazio. Para o demonstrar, tome-se f tal que $(\forall t \in [0, 1]) : |f(t)| < 1$ e tome-se $\varepsilon > 0$. Considere-se a função:

$$h: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} 2 - 4x/\varepsilon & \text{se } x < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $d_1(f, f+h) = \varepsilon/2 < \varepsilon$ pelo que $f+h \in B(f, \varepsilon)$, mas $(f+h)(0) = f(0) + 2 > 1$, pelo que $f+h \notin A$.

Sejam A' a aderência de A relativamente à métrica d_1 e A^* a aderência relativamente à métrica d_∞ . Sabe-se que

$$A^* \subset \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid (\forall t \in [0, 1]) : |f(t)| \leq 1\},$$

pois este último conjunto é, relativamente à métrica d_∞ , a bola $B'(0, 1)$ e, portanto, um fechado. De facto, este conjunto é igual a A^* , pois se $(\forall t \in [0, 1]) : |f(t)| \leq 1$ e se $\varepsilon > 0$, então a função

$$g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} f(x)(1 - \varepsilon/2) & \text{se } \varepsilon \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

pertence a A e $d_\infty(f, g) < \varepsilon$. Deduz-se então das observações feitas no início da resolução que $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid (\forall t \in [0, 1]) : |f(t)| \leq 1\} \subset A'$. Finalmente, vai-se demonstrar que esta inclusão é uma igualdade. Seja $f \in \mathcal{C}([0, 1]) \setminus \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid (\forall t \in [0, 1]) : |f(t)| \leq 1\}$; pretende-se mostrar que $f \notin A'$. Existe algum $t \in [0, 1]$ tal que $f(t) > 1$ ou que $f(t) < -1$. Vamos supor que estamos no primeiro caso; o outro caso é análogo. Seja

$$r = \int_0^1 \max\{f(t), 1\} - 1 \, dt$$

e seja $g \in B(f, r)$; pretende-se mostrar que $g \notin A$. De facto, se se tivesse $g \in A$, então, em particular, ter-se-ia $g(t) \leq 1$ para qualquer $t \in [0, 1]$. Logo, para cada $t \in [0, 1]$ ter-se-ia:

- se $f(t) > 1$, $|f(t) - g(t)| = f(t) - g(t) \geq f(t) - 1 = \max\{f(t), 1\} - 1$;
- se $f(t) \leq 1$, $\max\{f(t), 1\} - 1 = 0 \leq |f(t) - g(t)|$.

Em ambos os casos tem-se então $\max\{f(t), 1\} - 1 \leq |f(t) - g(t)|$, pelo que:

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| \geq \int_0^1 \max\{f(t), 1\} - 1 dt = r$$

o que é absurdo pois, por hipótese, $g \in B(f, r)$.

3. Seja $A = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid \int_0^1 f = 0\}$. Relativamente à métrica d_1 , A é fechado e, portanto, idêntico à sua aderência. De facto, se $f \in A^c$, então a bola $B(f, \int_0^1 f)$ não intersecta A , pois se $d_1(f, g) < \left| \int_0^1 f \right|$, então

$$\int_0^1 g = \int_0^1 (g - f) + \int_0^1 f; \quad (5)$$

mas

$$\left| \int_0^1 (g - f) \right| \leq \int_0^1 |g - f| < \int_0^1 f.$$

Visto que a relação (5) exprime $\int_0^1 g$ como a soma de dois números com valores absolutos distintos, este número não pode ser igual a 0. Deduz-se das observações feitas no início da resolução que A é fechado relativamente à métrica d_∞ e que, portanto, também neste caso é igual à sua aderência.

O interior de A relativamente à métrica d_∞ é vazio. Para ver isso, basta observar que se $f \in A$ e $\varepsilon > 0$ e se se definir $g \in B(f, \varepsilon)$ por $g(x) = f(x) + \varepsilon/2$, então $\int_0^1 g = \varepsilon/2$, pelo que $g \notin A$. Pelas observações feitas no início da resolução, sabe-se que o interior de A relativamente à métrica d_1 também é vazio.

Exercício nº41

Cada conjunto $M(I)$ é fechado por ser a intersecção de todos os conjuntos da forma

$$\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(y) - f(x) \geq 0\} \quad (6)$$

ou da forma

$$\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(y) - f(x) \leq 0\} \quad (7)$$

com $x, y \in I$ e $x < y$. Cada conjunto do tipo (6) (respectivamente (7)) é fechado por ser a imagem recíproca de $[0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0]$) pela função contínua $F_{x,y}: \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F_{x,y}(f) = f(y) - f(x)$.

O interior de $M(I)$ é vazio, pois se $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ for crescente em I e se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, então, dado $a \in I$, seja $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0, 1]) : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Seja $g \in \mathcal{C}([0, 1])$ uma função que se anula fora de $]a - \delta, a + \delta[$, que toma o valor ε em a e que só toma valores entre 0 e ε nos restantes pontos do domínio. Seja $h = f - g$ (vejam-se, na figura figura 3, os gráficos das restrições a I de f e de h). Então $h|_I$ não é monótona, pois não é crescente ($h(a - \delta) = f(a - \delta) > f(a) - \varepsilon = h(a)$), nem decrescente ($h(a) < f(a) \leq f(a + \delta) = h(a + \delta)$), mas $d_\infty(f, h) = \varepsilon$, pelo que f não pertence ao interior de $M(I)$.

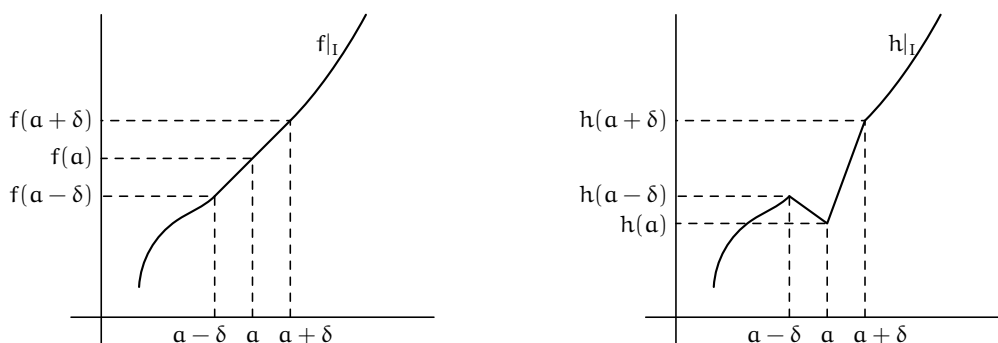


Figura 3

Analogamente, se $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ for decrescente, então f não pertence ao interior de $M(I)$.

Exercício nº47

Seja $a \in E_1$ e seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para a ; quer-se provar que a sucessão $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $f(a)$. Por hipótese, esta sucessão converge para algum $b \in E_2$. Considere-se a sucessão $a_1, a, a_2, a, a_3, a, \dots$, que converge para a . Logo, a sucessão das suas imagens pela função f converge. Como a sub-sucessão dos termos de ordem par das imagens converge para $f(a)$ e a dos termos de ordem ímpar converge para b , $f(a) = b$.

Exercício nº48

1. Seja $(x_n, f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de pontos do gráfico e suponha-se que converge para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; vai-se mostrar que (x, y) também pertence ao gráfico, i. e. que $y = f(x)$. Tem-se $x = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$ e resulta então da continuidade de f que $f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) = y$.

2. Sim. Considere-se, por exemplo a função

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} 1/x & \text{caso } x \neq 0 \\ 0 & \text{caso } x = 0, \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na figura 4.

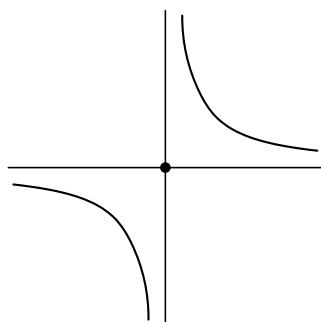


Figura 4

Exercício nº54

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de um espaço métrico discreto (E, d) . Então existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m, n \geq p \implies d(a_m, a_n) < 1.$$

Mas afirmar que $d(a_m, a_n) < 1$ é o mesmo que afirmar que $a_m = a_n$. Posto de outro modo, se $n \geq p$, $a_n = a_p$. Logo, $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_p$.

Exercício nº57

1. Se $m, n \in \mathbb{N}$, então $d_1(f_m, f_n)$ é a área da região a sombreado da figura 5. Aquela região é formada por dois triângulos congruentes, pelo que a sua área é igual ao dobro da do triângulo de baixo. Este último tem por base o segmento que une $(1/2 - 1/2n, 0)$ a $(1/2 - 1/2m, 0)$, cujo comprimento é $|1/2n - 1/2m|$, e a altura é $1/2$. Logo, a área da região a sombreado é $|1/n - 1/m|/4$.

Então, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, se $p \in \mathbb{N}$ for tal que $1/p < 4\varepsilon$, tem-se, sempre $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $m, n \geq p$:

$$d_1(f_m, f_n) = \frac{|1/n - 1/m|}{4} \begin{cases} < \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4p} < \varepsilon & \text{se } m > n \\ = 0 < \varepsilon & \text{se } m = n \\ < \frac{1}{4m} \leq \frac{1}{4p} < \varepsilon & \text{se } m < n, \end{cases}$$

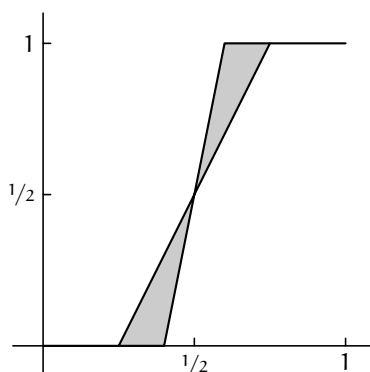


Figura 5

pelo que a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy.

2. Vai-se provar, por redução ao absurdo, que a sucessão da alínea anterior não converge. Suponha-se então que a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma função $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

Primeiro método: Vai-se provar que caso a sucessão da alínea anterior convergisse para uma função $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, então tinha-se necessariamente

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1/2 \\ 1 & \text{se } x > 1/2. \end{cases}$$

Como não há nenhuma função contínua de $[0, 1]$ em \mathbb{R} nestas condições, isto prova que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge.

Seja $\alpha \in [0, 1/2[$ e seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Se $n \in \mathbb{N}$ for suficientemente grande, então $d_1(f, f_n) < \varepsilon$ e $1/2 - 1/2n > \alpha$. Logo, para um tal n tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\alpha f \right| &\leq \int_0^\alpha |f| \\ &= \int_0^\alpha |f - f_n| \quad (\text{pois } f_n \text{ anula-se em } [0, \alpha]) \\ &\leq \int_0^1 |f - f_n| \\ &= d_1(f, f_n) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Como se tem $\left| \int_0^\alpha f \right| < \varepsilon$ para cada $\alpha \in [0, 1/2[$ e para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, a função

$$\begin{array}{ccc} [0, 1/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \rightsquigarrow & \int_0^\alpha f \end{array}$$

é a função nula, pelo que a sua derivada também se anula. Mas a derivada é a restrição a $[0, 1/2[$ de f .

Analogamente, a função $f - 1$ anula-se em $]1/2, 1]$, ou seja $f(x) = 1$ sempre que $x > 1/2$.

Segundo método: Seja $R_-: \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1/2])$ a função definida por $R_-(f) = f|_{[0, 1/2]}$; analogamente, seja $R_+: \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([1/2, 1])$ a função definida por $R_+(f) = f|_{[1/2, 1]}$. Cada uma destas funções é contínua pois, se $g, h \in \mathcal{C}([0, 1])$,

$$d_1(R_-(g), R_-(h)) = \int_0^{1/2} |g - h| \leq \int_0^1 |g - h| = d_1(g, h)$$

e, pelo mesmo argumento, $d_1(R_+(g), R_+(h)) \leq d_1(g, h)$; logo, basta tomar $\delta = \varepsilon$ na definição de continuidade. Então, pela proposição 1.4.5,

$$R_-(f) = R_- \left(\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) = \lim_{n \in \mathbb{N}} R_-(f_n).$$

Mas $(\forall n \in \mathbb{N}) : d_1(R_-(f_n), 0) = \frac{1}{8n}$, pelo que $R_-(f) \equiv 0$. Pelo mesmo argumento, $R_+(f) \equiv 1$. Isto é absurdo, pois $f(1/2)$ não pode ser simultaneamente 0 e 1.

3. Primeira resolução: Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$; quer-se provar que converge. Visto que, por hipótese, se tem

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geq p \implies \sup |f_m - f_n| < \varepsilon,$$

então, para cada $x \in [0, 1]$ tem-se

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geq p \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

ou seja, a sucessão $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de números reais. Logo, converge para algum $f(x) \in \mathbb{R}$. Falta ver que $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ e que $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$.

Sejam $\alpha \in [0, 1]$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$; quer-se mostrar que existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0, 1]) : |x - \alpha| < \delta \implies |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon.$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geq p \implies \sup |f_m - f_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$(\forall x \in [0, 1]) : |f(x) - f_p(x)| = \lim_{m \in \mathbb{N}} |f_m(x) - f_p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Como f_p é contínua, existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall x \in [0, 1]) : |x - a| < \delta \implies |f_p(x) - f_p(a)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Logo, se $x \in [0, 1]$ for tal que $|x - a| < \delta$, então

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(a)| + |f_p(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, o argumento usando para demonstrar (8) pode ser usado para mostrar que, mais geralmente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in [0, 1]) : n \geq p \implies |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ou seja, que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : n \geq p \implies d_\infty(f, f_n) < \varepsilon.$$

Isto é afirmar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para f .

Segunda resolução: O espaço métrico $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ é um sub-espaço de $(\mathcal{F}_1([0, 1]), d_\infty)$, que é um espaço métrico completo (exemplo 1.5.4). Logo, para mostrar que $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ é completo basta, pela proposição 1.5.2, que se mostre que $\mathcal{C}([0, 1])$ é um fechado de $(\mathcal{F}_1([0, 1]), d_\infty)$. Mas isso foi visto no exemplo 1.3.11. Para além do método empregue neste exemplo, também é possível demonstrar directamente que $\mathcal{C}([0, 1])$ é um fechado de $(\mathcal{F}_1([0, 1]), d_\infty)$, i. e. que o seu complementar é um aberto de $(\mathcal{F}_1([0, 1]), d_\infty)$. Para tal, seja $f \in \mathcal{F}_1([0, 1])$ uma função descontínua. Então f é descontínua em algum $a \in [0, 1]$, pelo que, para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\exists x \in [0, 1]) : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Seja $g \in B(f, \varepsilon/3)$. Se $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, seja $x \in [0, 1]$ tal que $|x - a| < \delta$ e que $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Então, se se tivesse $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/3$, tinha-se

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

o que não se verifica. Logo, g também é descontínua em a . Está então provado que se $f \in \mathcal{C}([0, 1])^c$, então existe alguma bola aberta centrada em f contida em $\mathcal{C}([0, 1])^c$.

Exercício nº60

1. Basta aplicar o teorema do ponto fixo de Banach à função

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \rightsquigarrow & F(i, x) \end{array}$$

para cada $i \in I$.

2. Seja $i \in I$; quer-se mostrar que a função

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \rightsquigarrow & \phi_i \end{array}$$

é contínua. Se $j \in I$ tem-se:

$$\begin{aligned} d_E(\phi_i, \phi_j) &= d_E(F(i, \phi_i), F(j, \phi_j)) \\ &\leq d_E(F(i, \phi_i), F(j, \phi_i)) + d_E(F(j, \phi_i), F(j, \phi_j)) \\ &\leq d_E(F(i, \phi_i), F(j, \phi_i)) + Kd_E(\phi_i, \phi_j), \end{aligned}$$

pelo que

$$d_E(\phi_i, \phi_j) \leq \frac{1}{1-K} d_E(F(i, \phi_i), F(j, \phi_i)). \quad (9)$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como F é contínua em (i, ϕ_i) , existe $\delta > 0$ tal que

$$d_{I \times E}((i, \phi_i), (j, \phi_k)) < \delta \implies d_E(F(i, \phi_i), F(j, \phi_k)) < (1-K)\varepsilon.$$

Logo, se $d_I(i, j) < \delta$, tem-se $d_{I \times E}((i, \phi_i), (j, \phi_i)) < \delta$ e então

$$d_E(F(i, \phi_i), F(j, \phi_i)) < (1-K)\varepsilon.$$

Deduz-se então de (9) que $d_E(\phi_i, \phi_j) < \varepsilon$.

Exercício nº64

1. Se não existesse nenhuma função nas condições do enunciado, então tinha-se $\mathcal{C}([0, 1]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M(I_n)$. Mas como, relativamente à métrica do supremo, cada $M(I_n)$ é um fechado com interior vazio e como $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ é completo (terceira alínea do exercício 57), a reunião dos conjuntos $M(I_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) tem interior vazio, pela versão do teorema de Baire enunciada na página 38; em particular, não pode ser igual a $\mathcal{C}([0, 1])$.

2. Seja $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ uma função que não pertença a nenhum conjunto da forma $M(I_n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Então f está nas condições do enunciado: se I for um intervalo de $[0, 1]$ com mais do que um ponto, então $I \supset I_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Mas f não é monótona em I_n , pelo que não é monótona em I .

Capítulo 2

Exercício nº4

1. Pela definição de \mathcal{T} sabe-se que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$; falta então ver que \mathcal{T} é estável para a reunião e para a intersecção finita.

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de elementos de \mathcal{T} e seja $A = \bigcup_{i \in I} A_i$; pretende-se mostrar que $A \in \mathcal{T}$. Se algum A_i for igual a \mathbb{R} , então $A = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$; pode-se pois supor que todos os A_i são diferentes de \mathbb{R} . Também se pode supor que todos os A_i são diferentes de \emptyset , pois caso contrário tem-se duas possibilidades:

- Qualquer A_i é vazio; então $A = \emptyset \in \mathcal{T}$.
- Existe algum $i \in I$ tal que $A_i \neq \emptyset$; seja $I' = \{i \in I \mid A_i \neq \emptyset\}$. É então claro que $A = \bigcup_{i \in I'} A_i$.

Está-se então a supor que cada A_i é da forma $] - \infty, a_i[$. Mas é então claro que $A =] - \infty, \sup\{a_i \mid i \in I\}[\in \mathcal{T}$.

Sejam agora $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$; pretende-se mostrar que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$. Mais uma vez, pode-se (e vai-se) supor que cada A_i ($i \in \{1, 2\}$) é da forma $] - \infty, a_i[$. É então claro que $A_1 \cap A_2 =] - \infty, \min\{a_1, a_2\}[\in \mathcal{T}$.

Nota: Pelo mesmo motivo atrás apresentado, dado um conjunto X e um conjunto $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$, se se pretender demonstrar que \mathcal{T} é estável para a reunião e para a intersecção finita, pode-se sempre supor que se está a trabalhar com elementos de \mathcal{T} distintos de \emptyset e de X .

2. Se (E, d) é um espaço métrico e $x, y \in E$, há abertos que contêm x mas não contêm y ; basta considerar, por exemplo, $B(x, d(x, y))$. Logo, se a topologia \mathcal{T} fosse metrizável, então dados $x, y \in \mathbb{R}$ haveria algum $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A$ e $y \notin A$. Mas isto é falso: tome-se $x = 1$ e $y = 0$. É claro, pela definição de \mathcal{T} , que qualquer elemento de \mathcal{T} que contém x também contém y .

3. Suponha-se, por redução ao absurdo, que a topologia \mathcal{T} é pseudo-metrizável; existe então uma pseudo-métrica $\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que os abertos correspondentes são os elementos de \mathcal{T} . Sabe-se, pela alínea anterior, que ρ não pode ser uma métrica, ou seja, que existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ e $\rho(x, y) = 0$. Então qualquer aberto A que contenha x contém y e reciprocamente. De facto, se $x \in A$, então existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mas $y \in B(x, \varepsilon)$, pelo que $y \in A$. Isto é absurdo, pois se $x < y$, o aberto $] - \infty, y[$ contém x mas não contém y e se $y < x$, então o aberto $] - \infty, x[$ contém y mas não contém x .

Exercício nº6

1. Vai-se resolver o problema desta alínea recorrendo ao exercício 5. Quer-se então provar que $\mathcal{F} = \{V(I) \mid I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$ contém o conjunto vazio, contém \mathbb{C}^n e é estável para reuniões finitas e para intersecções arbitrárias.

Tem-se $\emptyset \in \mathcal{F}$ porque $\emptyset = V(\{1\})$. Analogamente, $\mathbb{C}^n \in \mathcal{F}$ porque $\mathbb{C}^n = V(\{0\})$ (e também é igual a $V(\emptyset)$).

Se $(I_j)_{j \in I}$ for uma família de partes de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ então, para cada $w \in \mathbb{C}^n$, tem-se

$$\begin{aligned} w \in \bigcap_{j \in I} V(I_j) &\iff (\forall j \in I) : w \in V(I_j) \\ &\iff (\forall j \in I)(\forall P \in I_j) : P(w) = 0 \\ &\iff \left(\forall P \in \bigcup_{j \in I} I_j \right) : P(w) = 0, \end{aligned}$$

pelo que $\bigcap_{j \in I} V(I_j) = V\left(\bigcup_{j \in I} I_j\right)$.

Finalmente se $I_1, I_2, \dots, I_n \subset \mathbb{C}^n[x_1, \dots, x_n]$, seja $I = I_1 \cdot I_2 \dots I_n$; posto de outro modo, I é o conjunto dos polinómios $P \in \mathbb{C}^n[x_1, \dots, x_n]$ que são da forma $\prod_{k=1}^n P_k$, com, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $P_k \in I_k$. Então, se $w \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} w \in \bigcup_{k=1}^n V(I_k) &\iff (\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}) : w \in V(I_k) \\ &\iff (\exists k \in \{1, 2, \dots, n\})(\forall P \in I_k) : P(w) = 0 \quad (10) \\ &\implies (\forall P \in I) : P(w) = 0. \end{aligned}$$

Esta última implicação é uma equivalência, pois se não se tiver (10), então, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe algum $P_k \in I_k$ tal que $P_k(w) \neq 0$, de onde resulta que $P_1 \cdot P_2 \dots P_n (\in I)$ não se anula em w . Está então provado que $\bigcup_{k=1}^n V(I_k) = V(I)$.

2. A afirmação que se pretende demonstrar equivale a esta: os conjuntos da forma $V(I)$ ($I \subset \mathbb{C}[x]$) são \mathbb{C} e as partes finitas de \mathbb{C} .

Se $I \subset \mathbb{C}[x]$ então $I \subset \{0\}$ ou I contém algum $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ não nulo. No primeiro caso, $V(I) = \mathbb{C}$ e, no segundo, $V(I) \subset \{\text{zeros de } P(x)\}$. Este último conjunto é finito, pelo que $V(I)$ também é finito.

Reciprocamente, seja $F \subset \mathbb{C}$ um conjunto que seja igual a \mathbb{C} ou que seja finito. No primeiro caso, $F = V(\{0\})$ e, no segundo, se $F = \{z_1, \dots, z_n\}$, então $F = V\left(\left\{\prod_{k=1}^n (z - z_k)\right\}\right)$.

3. Se F é um fechado de $(\mathbb{C}^n, \mathcal{T})$ então, para algum $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$,

$$F = V(I) = \bigcap_{P \in I} \{\text{zeros de } P\} = \bigcap_{P \in I} P^{-1}(\{0\}).$$

Isto exprime F como uma intersecção de fechados de \mathbb{C}^n relativamente à topologia usual (pois as funções polinomiais de \mathbb{C}^n em \mathbb{C} são contínuas para a topologia usual), pelo que F é um fechado de \mathbb{C}^n relativamente à topologia usual.

Exercício nº8

Seja \mathcal{T} a topologia gerada por \mathcal{B} . Visto que \mathcal{T} é uma topologia, sabe-se que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ e, por outro lado, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. No entanto, $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \mathcal{B}$ não é uma topologia; de facto, se $a \in \mathbb{R}$, então

$$] - \infty, a[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}] - \infty, a - 1/n],$$

ou seja, $] - \infty, a[$, que não é um elemento de $\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, é reunião de elementos de $\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Deduz-se que os conjuntos da forma $] - \infty, a[$ pertencem a \mathcal{T} . Verifica-se facilmente que

$$\mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{] - \infty, a[\mid a \in \mathbb{R} \}$$

é uma topologia. Trata-se então necessariamente da topologia gerada por \mathcal{B} .

Exercício nº15

1. Seja $\mathcal{V} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto numerável de vizinhanças de um ponto a de \mathbb{R} ; vai-se mostrar que não é um sistema fundamental de vizinhanças, i. e. vai-se mostrar que existe alguma vizinhança de a que não contém nenhum elemento de \mathcal{V} . Por definição de vizinhança, cada $V_n \in \mathcal{V}$ contém algum aberto A_n do qual a é um elemento. Em particular, $A_n \neq \emptyset$, pelo que o conjunto $\mathbb{R} \setminus A_n$ é finito e, por maioria de razão, $\mathbb{R} \setminus V_n$ é finito. Logo, o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus V_n)$ é finito ou numerável; em particular, não é igual a $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Mas

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus V_n) \neq \mathbb{R} \setminus \{a\} &\iff \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \mathbb{R} \setminus \{a\} \\ &\iff \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \{a\}. \end{aligned}$$

Existe então algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq a$ e que pertence a todos os elementos de \mathcal{V} . O conjunto $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ é então uma vizinhança de a que não contém nenhum elemento de \mathcal{V} .

2. Se $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ fosse metrizável, seria 1-numerável, pela proposição 2.2.3.

Exercício nº17

Nas cinco primeiras alíneas, apenas serão demonstrados os resultados referentes à topologia \mathcal{T}_e ; as demonstrações são análogas no caso da topologia \mathcal{T}_a .

1. Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja

$$\mathcal{V}_a = \{ V \subset \mathbb{R} \mid (\exists b \in]-\infty, a[) :]b, a] \subset V \}.$$

Vejamos que estes conjuntos satisfazem as condições do teorema 2.2.1. Isto é trivial para as três primeiras condições. Quanto à quarta, basta tomar $W =]b, a]$ para algum $b \in]-\infty, a[$ tal que $]b, a] \subset V$. Então, para cada $w \in W$, $]b, a] \in \mathcal{V}_w$, visto que $]b, w] \subset W$.

2. Pelo que foi visto na alínea anterior e pelo teorema 2.2.1 tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e &= \{ A \subset \mathbb{R} \mid (\forall a \in A) : A \in \mathcal{V}_a \} \\ &= \{ A \subset \mathbb{R} \mid (\forall a \in A) (\exists b \in]-\infty, a[) :]b, a] \subset A \}. \end{aligned}$$

Logo, os intervalos da forma $]b, a]$ pertencem a \mathcal{T}_e .

3. Seja $A \in \mathcal{T}$. Então para cada $a \in A$ existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$. Em particular, $]a - \varepsilon, a] \subset A$ e, portanto, A é vizinhança de a relativamente à topologia \mathcal{T}_e . Como A é vizinhança de todos os seus pontos, $A \in \mathcal{T}_e$.

4. O conjunto $] - \infty, 0]$ é aberto e fechado para a topologia \mathcal{T}_e . Que é aberto resulta do facto de que, para cada $a \in] - \infty, 0]$, $]a - 1, a] \subset] - \infty, 0]$. Que é fechado resulta do facto de que, para cada $a \in]0, +\infty[$, $]0, a] \subset]0, +\infty[$.

5. Considere-se

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightsquigarrow \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta função é descontínua como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Para ver que é contínua se entendida como função de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ em $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, basta

ver que é contínua em cada $x \in \mathbb{R}$. Se V for uma vizinhança de $f(x)$, então $f^{-1}(V)$ só pode ser igual a $] -\infty, 0]$, a $]0, +\infty[$ ou a \mathbb{R} . Todos estes conjuntos são elementos de \mathcal{T}_e , pelo que f é contínua.

6a. O exemplo anterior também serve neste caso.

6b. Basta tomar $f(x) = -x$. O conjunto $]0, 1]$ pertence a \mathcal{T}_e , mas $f^{-1}(]0, 1]) = [-1, 0[$ e este conjunto não pertence a \mathcal{T}_e , pois não é vizinhança de -1 .

7. A topologia mais fina contida simultaneamente em \mathcal{T}_e e em \mathcal{T}_d é a topologia usual \mathcal{T} . Por um lado, já foi visto que tanto \mathcal{T}_e quanto \mathcal{T}_d contêm \mathcal{T} . Por outro lado, se $A \in \mathcal{T}_e \cap \mathcal{T}_d$, então, para cada $a \in A$, existe $b < a$ tal que $]b, a] \subset A$ (pois $A \in \mathcal{T}_e$) e existe $c > a$ tal que $]a, c[\subset A$ (pois $A \in \mathcal{T}_d$); logo, $]b, c[\subset A$, pelo que A é vizinhança de a relativamente à topologia \mathcal{T} . Como A é vizinhança de todos os seus pontos, $A \in \mathcal{T}$.

A topologia menos fina que contém \mathcal{T}_e e \mathcal{T}_d é a topologia discreta, ou seja, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. De facto, seja \mathcal{T}' uma topologia mais fina do que \mathcal{T}_e e do que \mathcal{T}_d e seja $a \in \mathbb{R}$. Visto que $\{a\} =]a-1, a] \cap [a, a+1[$, $\{a\} \in \mathcal{T}'$. Se $A \subset \mathbb{R}$, então $A = \bigcup_{a \in A} \{a\} \in \mathcal{T}'$. Logo, $\mathcal{T}' = \mathcal{P}(X)$.

Exercício nº20

1. Suponha-se que f é contínua em $b \in \mathbb{R}$; pretende-se demonstrar que f é semi-contínua superiormente e inferiormente em b . Afirmar que f é semi-contínua superiormente em b significa que se V for uma vizinhança de $f(b)$ (relativamente à topologia do exercício 4), então $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de b . Visto que $V(\subset \mathbb{R})$ é uma vizinhança de $f(b)$ sse V contém algum intervalo da forma $] -\infty, a[$ com $a > f(b)$, então para mostrar que f é semi-contínua superiormente em b bastará mostrar que $f^{-1}(] -\infty, a[)$ é uma vizinhança de b quando $a > f(b)$. Mas isto é óbvio, pois f é contínua e $] -\infty, a[$ é um aberto para a topologia usual de \mathbb{R} . Mostra-se de maneira análoga que f é semi-contínua inferiormente.

Suponha-se agora que f é semi-contínua superiormente e inferiormente em $b \in \mathbb{R}$. Quer-se mostrar que f é contínua em b , ou seja, quer-se mostrar que, para cada vizinhança V de $f(b)$, $f^{-1}(V)$ é uma vizinhança de b . Se V for uma vizinhança de $f(b)$, existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $V \supset]f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon[$. Então tem-se:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &\supset f^{-1}(]f(b) - \varepsilon, f(b) + \varepsilon[) \\ &= f^{-1}(] -\infty, f(b) + \varepsilon[\cap]f(b) - \varepsilon, +\infty[) \\ &= f^{-1}(] -\infty, f(b) + \varepsilon[) \cap f^{-1}(]f(b) - \varepsilon, +\infty[). \end{aligned}$$

Este conjunto é um aberto, pois é a intersecção de dois abertos, e contém b . Logo, é uma vizinhança de b , pelo que $f^{-1}(V)$ também o é.

2. Suponha-se que χ_A é uma função semi-contínua superiormente. Então, em particular, $\chi_A^{-1}(] - \infty, 1[)$ é um aberto de \mathbb{R} . Mas

$$\chi_A^{-1}(] - \infty, 1[) = A^C.$$

pelo que A é fechado.

Suponha-se agora que A é fechado. Pretende-se mostrar que, para cada $a \in \mathbb{R}$, o conjunto $\chi_A^{-1}(] - \infty, a[)$ é um aberto de \mathbb{R} . Mas tem-se:

$$\chi_A^{-1}(] - \infty, a[) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } a > 1 \\ A^C & \text{se } 0 < a \leq 1 \\ \emptyset & \text{se } a \leq 0 \end{cases}$$

e os conjuntos \mathbb{R} , A^C e \emptyset são abertos de \mathbb{R} .

3. Tem-se:

$$\begin{aligned} f \text{ semi-contínua superiormente} &\iff \\ &\iff (\forall a \in \mathbb{R}) : f^{-1}(] - \infty, a[) \text{ é um aberto} \\ &\iff (\forall a \in \mathbb{R}) : (-f)^{-1}(] - a, +\infty[) \text{ é um aberto} \\ &\iff (\forall a \in \mathbb{R}) : (-f)^{-1}(] a, +\infty[) \text{ é um aberto} \\ &\iff -f \text{ semi-contínua inferiormente.} \end{aligned}$$

4. Suponha-se que, para cada $\lambda \in \Lambda$, f_λ é semi-contínua superiormente; pretende-se demonstrar que $\inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ é semi-contínua superiormente, ou seja, que, para cada $a \in \mathbb{R}$, $(\inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda)^{-1}(] - \infty, a[)$ é um aberto de \mathbb{R} . Observe-se que, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in \left(\inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \right)^{-1}(] - \infty, a[) &\iff \inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) < a \\ &\iff (\exists \lambda \in \Lambda) : f_\lambda(x) < a \end{aligned}$$

e, portanto, que se tem:

$$\left(\inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda \right)^{-1}(] - \infty, a[) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda^{-1}(] - \infty, a[).$$

Este conjunto é claramente um aberto.

Exercício nº24

Seja $x \in M$. Tem-se então $f(x)\mathcal{R}x$ (por 2.), mas

$$\begin{aligned}
 f(x)\mathcal{R}x &\implies g(f(x))\mathcal{R}g(x) \text{ (por 3.)} \\
 &\iff \psi(x)\mathcal{R}g(x) \\
 &\implies g(\psi(x))\mathcal{R}g(g(x)) \text{ (por 3.)} \\
 &\iff g(\psi(x))\mathcal{R}g(x) \text{ (por 1.)} \\
 &\implies f(g(\psi(x)))\mathcal{R}f(g(x)) \text{ (por 3.)} \\
 &\iff (\psi \circ \psi)(x)\mathcal{R}\psi(x). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se $x\mathcal{R}g(x)$ (por 2.), mas

$$\begin{aligned}
 x\mathcal{R}g(x) &\implies f(x)\mathcal{R}g(f(x)) \text{ (por 3.)} \\
 &\iff f(x)\mathcal{R}\psi(x) \\
 &\implies f(f(x))\mathcal{R}\psi(f(x)) \text{ (por 3.)} \\
 &\iff f(x)\mathcal{R}\psi(f(x)) \text{ (por 1.)}
 \end{aligned}$$

Como isto acontece para cada $x \in M$ então, em particular, tem-se

$$f(g(x))\mathcal{R}\psi(f(g(x))) \iff \psi(x)\mathcal{R}(\psi \circ \psi)(x) \tag{12}$$

para cada $x \in M$. Então, uma vez que \mathcal{R} é anti-simétrica, deduz-se de (11) e de (12) que $\psi = \psi \circ \psi$. Mostra-se de maneira análoga que $\varphi = \varphi \circ \varphi$.

Se X é um espaço topológico, então sejam $M = \mathcal{P}(X)$, \mathcal{R} a relação «inclusão» e f e g as funções de M em M definidas por $f(A) = \overset{\circ}{A}$ e por $g(A) = \overline{A}$. Então \mathcal{R} , f e g satisfazem as condições da primeira parte do exercício.

Exercício nº28

1. Se $A \subset B$, então $\alpha(B) = \alpha(A \cup (B \setminus A)) = \alpha(A) \cup \alpha(B \setminus A) \supset \alpha(B)$.

2. Se $A \subset B$ e $B \in \mathcal{F}$, então, pela primeira alínea e pela definição de \mathcal{F} , $\alpha(A) \subset \alpha(B) = B$. Está então provado que, para qualquer $B \in \mathcal{F}$ que contenha A , $\alpha(A) \subset B$. Como $\alpha(A) \in \mathcal{F}$ (pois $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$) e como $\alpha(A) \supset A$, isto prova que $\alpha(A)$ é o menor elemento de \mathcal{F} (relativamente à inclusão) que contém A .

3. Basta ver que \mathcal{F} satisfaz as condições do exercício 5. Visto que por hipótese, $\alpha(\emptyset) = \emptyset$, é claro que $\emptyset \in \mathcal{F}$. Como $X \subset \alpha(X) \subset X$, tem-se que $\alpha(X) = X$ e, portanto, $X \in \mathcal{F}$. Se $(A_j)_{j \in J}$ for uma família de

elementos de \mathcal{F} , então, para cada $i \in J$, $\bigcap_{j \in J} A_j \subset A_i$, pelo que

$$\alpha \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \subset \alpha(A_i) = A_i.$$

Como isto tem lugar para cada $i \in J$,

$$\alpha \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \subset \bigcap_{j \in J} A_j \quad (13)$$

e então, como a inclusão inversa tem sempre lugar, a inclusão (13) é, de facto, uma igualdade, ou seja, $\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{F}$. Finalmente, resulta da última condição do enunciado que se $n \in \mathbb{N}$ e se $A_1, \dots, A_n \in X$, então

$$\alpha(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \alpha(A_1) \cup \dots \cup \alpha(A_n).$$

Resulta desta igualdade que se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{F}$.

4. Se $A \subset X$ então, pela proposição 1.3.1, \bar{A} é o menor elemento de \mathcal{F} que contém A . Pela segunda alínea, o menor elemento de \mathcal{F} que contém A é $\alpha(A)$.

Exercício nº34

1. Se f fosse um homeomorfismo, então, em particular, se V fosse uma vizinhança de 0 , $f(V)$ seria uma vizinhança de $f(0) = (0, 0)$. Considera-se a vizinhança $] - 1, 1[$ de 0 . Se $x \in] - 1, 1[\setminus \{0\}$, então $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ é negativo e $\frac{2x}{x^2+1}$ tem o mesmo sinal que x , pelo que $f(x)$ está no quarto quadrante (se $x > 0$) ou no segundo (se $x < 0$). Por outro lado, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (0, 0),$$

pelo qualquer vizinhança de $(0, 0)$ possui elementos da forma $f(x)$ com $x > 1$. Mas se $x > 1$, então $f(x)$ pertence ao primeiro quadrante, pelo que $f(x) \notin f(] - 1, 1[)$; logo, $f(] - 1, 1[)$ não é uma vizinhança de $(0, 0)$.

2. A função

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \setminus \{(0, 1)\} \\ x &\rightsquigarrow \left(\frac{2x}{x^2-1}, \frac{x^2-1}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

é um homeomorfismo cuja inversa é

$$\begin{aligned} S^1 \setminus \{(0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightsquigarrow \frac{x}{1-y}. \end{aligned}$$

Deduz-se então que se $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ é tal que

$$(u, v) = f(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)$$

para algum $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $(u, v/u) = \varphi(x)$, pelo que

$$x = \frac{u}{1 - v/u} = \frac{u^2}{u - v}.$$

Isto mostra que a função inversa de $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ é a função:

$$\begin{aligned} L \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (u, v) &\rightsquigarrow \frac{u^2}{u - v}. \end{aligned}$$

Visto que esta função é claramente contínua, $f|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ é um homeomorfismo.

3. Considere-se a função:

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \begin{cases} x^{-1} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

É claro que h é descontínua relativamente à topologia usual. Seja h_L a função $f \circ h \circ f^{-1}$; pretende-se mostrar que h_L é contínua. Se $(u, v) \in L$, então $(u, v) = f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$, pelo que se tem, quando $(u, v) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} h_L(u, v) &= f(h(x)) \\ &= f(1/x) \\ &= \frac{2/x}{(1/x)^2 + 1} \left(1, \frac{(1/x)^2 - 1}{(1/x)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} \left(1, -\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \\ &= (u, -v). \end{aligned}$$

A igualdade $h_L(u, v) = (u, -v)$ é também válida quando $(u, v) = (0, 0)$. Logo, h_L é contínua.

4. Considere-se a função:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightsquigarrow \min\{1, |x|\}. \end{aligned}$$

Esta função é claramente contínua relativamente à topologia usual. Afirmar que g é descontínua relativamente à topologia \mathcal{T} é o mesmo que afirmar que

$$g_L = f \circ g \circ f^{-1}: L \longrightarrow L$$

é descontínua relativamente à topologia usual em L . Cálculos simples mostram que:

$$(\forall (u, v) \in L) : g_L(u, v) = \begin{cases} (u, v) & \text{se } u \geq 0 \text{ e } v \leq 0 \\ (-u, -v) & \text{se } u \leq 0 \text{ e } v \geq 0 \\ (1, 0) & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

Esta função é descontínua pois, por um lado, $g_L(0, 0) = (0, 0)$ e, por outro, lado qualquer vizinhança de $(0, 0)$ contém pontos da forma (u, v) com $u, v > 0$, pontos estes que são enviados por g_L em $(1, 0)$.

Exercício nº38

Se \mathbb{Q} fosse topologicamente completo então, pelo teorema de Baire, qualquer intersecção de uma família numerável de abertos densos de \mathbb{Q} teria intersecção densa. Mas a família $(\mathbb{Q} \setminus \{q\})_{q \in \mathbb{Q}}$ é uma família numerável de abertos densos de \mathbb{Q} com intersecção vazia.

Exercício nº47

Considere-se a função

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow \frac{x}{1+|x|}.$$

Pela definição de d tem-se que $(\forall x, y \in \mathbb{R}) : d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ pelo que, se $I = f(\mathbb{R})$, f é uma bijecção de (\mathbb{R}, d) em I (relativamente à topologia usual em I). É claro que $I \subset]-1, 1[$, pois se $x \in \mathbb{R}$, então $|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$. Por outro lado, se $y \in]-1, 1[$, então $y = f\left(\frac{y}{1-|y|}\right)$. Isto mostra que $I =]-1, 1[$ e que f é uma bijecção de \mathbb{R} em $]-1, 1[$ cuja inversa é

$$f^{-1}:]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \rightsquigarrow \frac{x}{1-|x|}.$$

Está então visto que f é uma isometria de (\mathbb{R}, d) em $]-1, 1[$. Como este último espaço não é completo, (\mathbb{R}, d) também não é completo.

Para ver que a topologia induzida por d é a usual basta provar que a função $\text{id}: \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, d)$ é um homeomorfismo se se considerar no

domínio a topologia usual. Visto que f é um homeomorfismo de (\mathbb{R}, d) em $] - 1, 1[$, isto é o mesmo que provar que $f \circ \text{id}$ é um homeomorfismo de \mathbb{R} em $] - 1, 1[$, ambos munidos da topologia usual. Mas isto é óbvio, pois f é contínua e f^{-1} também.

Exercício nº49

A primeira condição do enunciado significa que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\exists p \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N}) : m, n \geq p \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad (14)$$

enquanto que a segunda condição significa que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\exists \delta \in \mathbb{R}_+^*)(\forall m, n \in \mathbb{N}) : \left| \frac{m}{1+m} - \frac{n}{1+n} \right| < \delta \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon. \quad (15)$$

Logo, basta provar que, para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, as condições (14) e (15) são equivalentes. Seja então $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Convém observar que a sucessão $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente e converge para 1.

Se se tiver (14), ou seja, se existir algum $p \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq p \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon$, seja

$$\delta = \inf \left\{ \left| \frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1} \right| \mid m \neq n \wedge (m < p \vee n < p) \right\}.$$

Como a sucessão $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente,

$$\delta = \frac{p}{p+1} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p^2+p} \neq 0.$$

Se $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $\left| \frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1} \right| < \delta$ então, pela definição de δ , $m = n$ ou $m, n \geq p$. Em qualquer dos casos, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Se se tiver (15), ou seja, se existir algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que, para cada $m, n \in \mathbb{N}$, se $\left| \frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1} \right| < \delta$, então $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $1 - \delta < \frac{p}{p+1}$. Se $m, n \in \mathbb{N}$ forem tais que $m, n \geq p$, então os números $\frac{m}{m+1}$ e $\frac{n}{n+1}$ estão em $\left[\frac{p}{p+1}, 1[\subset] 1 - \delta, 1[$. Logo, $\left| \frac{m}{m+1} - \frac{n}{n+1} \right| < \delta$ e, portanto, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Exercício nº53

Vai-se mostrar que o complementar do gráfico de f , ou seja, o conjunto $A = \{ (x, y) \in E^2 \mid y \neq f(x) \}$ é um aberto de E^2 . Seja $(x, y) \in A$;

vai-se mostrar que A é vizinhança de (x, y) . Resultará daqui que A é aberto, pois é vizinhança de todos os seus pontos.

Como $(x, y) \in A$, $y \neq f(x)$. Logo, como E é separado, existem abertos $A_{f(x)}$ e A_y de E tais que $f(x) \in A_{f(x)}$, $y \in A_y$ e $A_{f(x)} \cap A_y = \emptyset$. Seja $A_x = f^{-1}(A_{f(x)})$. Então $x \in A_x$ e, como f é contínua, A_x é um aberto de E , pelo que $A_x \times A_y$ é um aberto de E^2 . Se $(z, w) \in A_x \times A_y$, então $w \neq f(z)$, pois $z \in A_x \implies f(z) \in A_{f(x)}$ e então, como $w \in A_y$ e $A_{f(x)}$ e A_y não se intersectam, $w \neq f(z)$, ou seja, $(z, w) \in A$. Está então provado que A contém um aberto que contém (x, y) , nomeadamente $A_x \times A_y$.

Exercício nº63

1. Sejam

$$\begin{aligned} Y_+ &= \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \mid x \in]0, +\infty[\}; \\ Y_- &= \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \mid x \in]-\infty, 0[\}; \\ Y_0 &= \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1 \}. \end{aligned}$$

Vai-se mostrar que $Y_0 \subset \overline{Y_+}$. De facto, seja $(0, y) \in Y_0$. Sabe-se que a equação $\operatorname{sen}(x) = y$ possui alguma solução x_0 e que todos os números reais da forma $x_0 + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) são soluções da equação. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq k \implies x_0 + 2n\pi > 0$; então a sucessão

$$\left(\frac{1}{x_0 + 2n\pi}, \operatorname{sen}(x_0 + 2n\pi) \right)_{n \geq k} = \left(\frac{1}{x_0 + 2n\pi}, y \right)_{n \geq k}$$

é uma sucessão de elementos de Y_+ que converge para $(0, y)$, pelo que $(0, y) \in \overline{Y_+}$. Deduz-se então que $Y_+ \subset Y_0 \cup Y_+ \subset \overline{Y_+}$, pelo que $Y_0 \cup Y_+$ é conexo, pela proposição 2.4.2. Analogamente, pode-se mostrar que $Y_0 \cup Y_-$ é conexo, pelo que Y é a reunião de dois conexos (nomeadamente, $Y_0 \cup Y_+$ e $Y_0 \cup Y_-$) cuja intersecção não é vazia, pelo que Y é conexo.

2. Nesta resolução, a única topologia que se vai considerar em subconjuntos de \mathbb{R} ou de \mathbb{R}^2 é a topologia usual.

Vai-se mostrar que Y_+ , Y_0 e Y_- são componentes conexas por arcos de Y . Que cada um é conexo por arcos é óbvio, pois Y_0 é homeomorfo ao intervalo $[-1, 1]$, a função

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & Y_+ \\ x & \rightsquigarrow & (x, \operatorname{sen}(1/x)) \end{array}$$

é um homeomorfismo de $]0, +\infty[$ em Y_+ e de maneira análoga, $] - \infty, 0[$ é homeomorfo a Y_- .

Vai-se agora mostrar que não existe nenhuma função contínua f de $[0, 1]$ em Y tal que $f(0) \in Y_0$ e $f(1) \in Y_+$. Suponha-se, por redução ao absurdo, que uma tal função f existe. Seja $A = \{t \in [0, 1] \mid f(t) \in Y_0\}$ e seja $s = \sup A$; a definição de s faz sentido pois A não é vazio, visto que $0 \in A$. É claro que $s \in [0, 1]$ e que $s \in \bar{A}$; mas então, visto que $f(A) \subset Y_0$, $f(s) \in f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{Y_0} = Y_0$, pois Y_0 é fechado. Deduz-se da definição de s que $f(]s, 1]) \cap Y_0 = \emptyset$; de facto, $f(]s, 1]) \subset Y_+$, pois que $f(1) \in Y_+$ e $f(]s, 1])$ é uma parte conexa de $Y_+ \cup Y_-$. Seja agora V uma vizinhança de $f(s)$ que não contenha nenhum ponto de \mathbb{R}^2 da forma $(x, 1)$ (naturalmente, não será possível encontrar uma tal vizinhança se $f(s) = (0, 1)$, mas nesse caso bastará considerar uma vizinhança de $f(s)$ que não contenha nenhum ponto de \mathbb{R}^2 da forma $(x, -1)$ e proceder de maneira análoga). Visto que f é contínua em s , existe algum intervalo aberto U tal que $s \in U \subset [0, 1]$ e tal que $f(U) \subset V$. Seja $t \in]s, 1] \cap U$; então $f(t) = (x, \text{sen}(1/x))$ para algum $x \in]0, +\infty[$. Seja $y \in]0, x[$ tal que $\text{sen}(1/y) = 1$. Sabe-se que $(y, \text{sen}(1/y)) \notin V$, pelo que $f(U)$ contém pelo menos um elemento de Y com primeira coordenada nula (por exemplo, $f(s)$) e pelo menos um elemento de Y com primeira coordenada maior do que y (por exemplo, $f(t)$), mas não contém nenhum elemento cuja primeira coordenada seja igual a y . Logo $f(U)$ não é conexo, o que é absurdo, pois U é conexo e f é contínua.

Pode-se mostrar de maneira análoga que não existe nenhuma função contínua $f: [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $f(0) \in Y_0$ e $f(1) \in Y_+$. Finalmente, se existisse alguma função $f: [0, 1] \rightarrow Y$ contínua tal que $f(0) \in Y_-$ e $f(1) \in Y_+$, então, pelo teorema dos valores intermédios, existiria algum $t_0 \in]0, 1[$ tal que a primeira coordenada de $f(t_0)$ seria nula, pelo que se teria $f(t_0) \in Y_0$. Mas então a função

$$g: [0, 1] \longrightarrow Y \\ t \longmapsto f(t_0 + t(1 - t_0))$$

seria contínua e ter-se-ia $g(0) = f(t_0) \in Y_0$ e $g(1) = f(1) \in Y_+$, o que é absurdo, conforme já foi visto.

Exercício nº72 (alíneas 1., 2., 3. e 4.)

1. Se A for um aberto de E , então $A \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E pois é igual a A . Caso contrário, $E \setminus (A \setminus \{\infty\}) = A^c$, que é compacto e, portanto, uma vez que E é separado, é um fechado de E , pela proposição 2.5.2. Logo, $A \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E .

2. É claro que $\emptyset \in \mathcal{T}$ (pois $\emptyset \subset E$ e é um aberto de E) e que $\bar{E} \in \mathcal{T}$ (pois $\infty \in \bar{E}$ e $\bar{E}^c = \emptyset$, que é um compacto).

Se $(A_j)_{j \in I}$ for uma família de elementos de \mathcal{T} , quer-se provar que $\bigcup_{j \in I} A_j \in \mathcal{T}$. Caso ∞ não pertença a nenhum A_j ($j \in I$), então tem-se uma família de abertos de E e, portanto, a sua reunião é um aberto de E , pelo que pertence a \mathcal{T} . Caso contrário, seja $i \in I$ tal que $\infty \in A_i$. Então $\infty \in \bigcup_{j \in I} A_j$ e, por outro lado, A_i^c é um compacto de E . Mas então

$$\left(\bigcup_{j \in I} A_j \right)^c = \bigcap_{j \in I} A_j^c \subset A_i^c.$$

Como $\infty \notin A_i^c$, $\bigcap_{j \in I} A_j^c = \bigcap_{j \in I} (A_j^c \setminus \{\infty\})$. Mas cada conjunto do tipo $A_j^c \setminus \{\infty\}$ ($j \in I$) é um fechado de E , pois $E \setminus (A_j^c \setminus \{\infty\}) = A_j \setminus \{\infty\}$ e, pela primeira alínea, $A_j \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E . Logo, $\bigcap_{j \in I} (A_j^c \setminus \{\infty\})$ é um fechado do compacto A_i^c e, portanto, é compacto, pela proposição 2.5.1. Está então provado que o conjunto $\bigcup_{j \in I} A_j$ contém ∞ e que o seu complementar é compacto, pelo que pertence a \mathcal{T} .

Finalmente, seja $(A_j)_{j \in I}$ uma família finita de elementos de \mathcal{T} ; quer-se mostrar que $\bigcap_{j \in I} A_j \in \mathcal{T}$. Se ∞ pertencer a todos os A_j ($j \in I$), então também pertence à intersecção e

$$\left(\bigcap_{j \in I} A_j \right)^c = \bigcup_{j \in I} A_j^c.$$

Como cada A_j^c ($j \in I$) é compacto e I é finito, a reunião anterior é compacta, pelo exercício 69. Logo, pertence a \mathcal{T} . Caso ∞ não pertença a A_i , para algum $i \in I$, então ∞ não pertence à intersecção e

$$\bigcap_{j \in I} A_j = \bigcap_{j \in I} (A_j \setminus \{\infty\}). \quad (16)$$

Pela primeira alínea, cada conjunto da forma $A_j \setminus \{\infty\}$ ($j \in I$) é um aberto de E . Portanto, o membro da direita de (16) é um aberto de E , por I ser finito.

3. Quer-se provar que, se $A \subset E$, então A é um aberto de E se e só se $A = A^* \cap E$ para algum $A^* \in \mathcal{T}$. Caso A seja um aberto de E , basta tomar $A^* = A$. Reciprocamente, seja $A^* \in \mathcal{T}$. Então $A^* \cap E = A \setminus \{\infty\}$ e já foi visto que $A \setminus \{\infty\}$ é um aberto de E .

4. Primeira resolução: Seja $(A_j)_{j \in I}$ uma cobertura aberta de \bar{E} ; quer-se mostrar que tem alguma sub-cobertura finita. Existe algum

$i_0 \in I$ tal que $\infty \in A_{i_0}$ e então $A_{i_0}^c$ é compacto. Como $A_{i_0}^c \subset \bar{E} = \bigcup_{j \in I} A_j$, $(A_{i_0}^c \cap A_j)_{j \in I}$ é uma cobertura aberta de $A_{i_0}^c$. Mas então, uma vez que $A_{i_0}^c$ é compacto, existe uma parte finita F de I tal que $A_{i_0}^c \subset \bigcup_{j \in F} (A_j \cap A_{i_0}^c)$ e, portanto,

$$\bar{E} = A_{i_0} \cup A_{i_0}^c = A_{i_0} \cup \bigcup_{j \in F} A_j = \bigcup_{j \in F \cup \{i_0\}} A_j.$$

Segunda resolução: Pode-se mostrar que \bar{E} é compacto recorrendo à proposição 2.5.4. Seja então \mathcal{F} uma família de partes não vazias de \bar{E} tal que a intersecção de qualquer número finito de elementos de \mathcal{F} contenha algum elemento de \mathcal{F} ; quer-se mostrar que algum elemento de \bar{E} adere a todos os elementos de \mathcal{F} .

Comece-se por supor que existe algum sub-espaço compacto K de E que contenha algum $F_0 \in \mathcal{F}$. Então seja $\mathcal{F}_K = \{F \cap K \mid F \in \mathcal{F}\}$. Se $F \in \mathcal{F}_K$ então $F \neq \emptyset$, pois $F = F^* \cap K$, para algum $F^* \in \mathcal{F}$, $F^* \cap K \supset F^* \cap F_0$ e este último conjunto não é vazio, pois contém algum elemento de \mathcal{F} . Por outro lado, se $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{F}_K$ ($n \in \mathbb{N}$), então, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, $F_j = F_j^* \cap K$, para algum $F_j^* \in \mathcal{F}$. Então

$$\bigcap_{j=1}^n F_j = \bigcap_{j=1}^n (F_j^* \cap K) \supset \bigcap_{j=1}^n F_j^*$$

e este último conjunto é uma parte de K que contém algum elemento de \mathcal{F} ; logo, contém algum elemento de \mathcal{F}_K . Sendo assim, visto que K é compacto, a proposição 2.5.4 garante que algum elemento de K adere a todos os elementos de \mathcal{F}_K ; logo, adere a todos os elementos de \mathcal{F} .

Suponha-se agora que nenhum sub-espaço compacto de E contém um elemento de \mathcal{F} . Vai-se ver que, neste caso, ∞ adere todos os elementos de \mathcal{F} . Seja V uma vizinhança de ∞ . Então V contém algum $A \in \mathcal{T}$ tal que $\infty \in A$, pelo que A^c é um sub-espaço compacto de E . Por hipótese, A^c não contém nenhum elemento de \mathcal{F} , pelo que A intersecta todos os elementos de \mathcal{F} e, por maioria de razão, V intersecta todos os elementos de \mathcal{F} , o que é o mesmo que dizer que ∞ adere a todos os elementos de \mathcal{F} .

Exercício nº75

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sucessão de elementos de E definida na sugestão. Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \neq n$, então tem-se, para cada $k \in \mathbb{N}$, que

$$|x(m)_k - x(n)_k| = \begin{cases} 1 & \text{se } k = m \text{ ou } k = n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

pelo que $d(x(m), x(n)) = 1$. Sendo assim, nenhuma sub-sucessão de $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ pode ser de Cauchy, pelo que $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ não tem sub-sucessões convergentes. Logo, (E, d_∞) não é compacto, pelo teorema 2.5.5.

Exercício nº77

1. \Rightarrow 2. Seja ι uma função que preserva as distâncias de (E, d) num espaço métrico completo (F, d') . Como ι preserva as distâncias e L é totalmente limitado, $\iota(L)$ também é totalmente limitado. Seja $K = \overline{\iota(L)}$. Então K é totalmente limitado. Como também é fechado e (F, d') é completo, K é compacto. Visto que K também é totalmente limitado, é compacto.

2. \Rightarrow 1. Se existir uma isometria f naquelas condições, então $\overline{f(L)}$ é totalmente limitada, pois é compacta. Logo, $f(L)$ é totalmente limitado, por ser um subconjunto do anterior. Como f preserva as distâncias, L também é totalmente limitado.

Capítulo 3

Exercício nº5

Quem examinar a demonstração do teorema de Stone-Weierstrass apercebe-se de que a única passagem onde poderá ser necessário usar a condição do enunciado com λ real mas não necessariamente racional é a passagem na qual se usa implicitamente que se f pertence a uma álgebra de funções \mathcal{F} e P é uma função polinomial de \mathbb{R} em \mathbb{R} , então $P \circ f$ também pertence a \mathcal{F} . No entanto, as funções polinomiais que surgem no decorrer da demonstração são as que resultam de se aplicar o teorema de Weierstrass a uma restrição da função módulo. Mas sabe-se, pela terceira alínea do exercício 42 do capítulo 1, que o teorema de Weierstrass continua válido se se considerarem apenas os polinómios com coeficientes racionais.