A culpa não é de Gödel!

José Carlos Santos

Porto, Novembro de 2007

O Expresso de 27 de Outubro passado deu destaque à Conferência Gulbenkian 2007 e, em particular, à intervenção de George Steiner, que terá aí dito que «os famosos teoremas de Gödel dizem-nos que em qualquer sistema há proposições que não podem ser demonstradas» e que isto é uma das «três causas fundamentais» da «crise actual da ciência». Os teoremas de Gödel aos quais Steiner fez referência (conhecidos por «teoremas da incompletude») constituem uma das grandes contribuições para a lógica no século XX e têm vindo a ser cada vez mais conhecidos do grande público através de obras de divulgação científica, algumas das quais publicadas em Portugal (*Gödel, Escher, Bach — Laços eternos*, Gradiva, 2000), e outras não (por exemplo, *Gödel's theorem: An incomplete guide to its use and abuse*, A K Peters, 2005 ou *Forever undecided: A puzzle guide to Gödel*, Oxford University Press, 1987). O simples facto de terem a palavra «incompletude» no nome sugere que aqueles teoremas afirmam que o nosso conhecimento sobre um determinado assunto é necessariamente incompleto. Daí a deduzir que, em particular, o nosso conhecimento científico será sempre incompleto vai só um pequeno passo. Mas será melhor não o dar, pois os teoremas não dizem isso.

Comecemos por contextualizar a contribuição de Gödel. A matemática já há séculos tem a fama de ser uma ciência perfeitamente rigorosa, sendo os seus resultados frequentemente vistos como exemplos de certezas absolutas e inquestionáveis. No entanto, no início do século XX descobriram-se paradoxos na matemática. Estes paradoxos não eram somente resultados surpreendentes ou contra-intuitivos mas paradoxos no sentido mais estrito do termo: dois raciocínios feitos de acordo com as regras da lógica levavam a resultados contraditórios. Isto levou a uma crise epistemológica para a resolução da qual surgiram várias propostas. As que são mais importantes aqui são duas: de 1910 a 1913 os filósofos ingleses Bertrand Russell (que foi quem descobriu o primeiro dos paradoxos acima mencionados) e Alfred North Whitehead publicaram os *Principia Mathematica*, uma obra monumental em três volumes, que pretendeu reduzir toda a matemática à lógica. Na década de 1920, o matemático alemão David Hilbert, que era geralmente considerado como o maior matemático vivo, propôs que se tentasse criar uma linguagem formal, ou seja, uma linguagem artificial desprovida de ambiguidades e com regras lógicas claramente estabelecidas, na qual toda a matemática pudesse ser formulada e para a qual se pudesse provar, por métodos aceites por toda a comunidade matemática, que era consistente, ou seja, nunca daria origem a paradoxos. Além disso, essa linguagem deveria ser completa, ou seja, para qualquer proposição (afirmação matemática) que pudesse ser nela formulada, deveria ser possível provar que tal proposição é verdadeira ou então provar que é falsa.

É neste contexto que Gödel entra em cena. Tendo nascido em 1906 em Brünn (a actual cidade de Brno, na República Checa), então parte do império Austro-Húngaro, Gödel doutorou-se em Viena em 1929. Na sua tese de doutoramento, Gödel demonstrou o chamado teorema da completude, que dava algum apoio à possibilidade de se levar a cabo o programa proposto por Hilbert. Dois anos mais tarde, publicou o seu trabalho mais famoso, *Sobre proposições formalmente indecidíveis dos Principia Mathematica e sistemas relacionados*. Foi aqui que surgiram os seus famosos teoremas da incompletude. O primeiro deles afirma aproximadamente isto: qualquer linguagem formal consistente na qual se possa formular a aritmética é incompleta, ou seja, haverá proposições (mais precisamente, proposições aritméticas) para as quais não se poderá demonstrar, no âmbito dessa linguagem formal, nem que são verdadeiras nem que são falsas. O segundo teorema da incompletude afirma que uma tal linguagem formal nunca poderá demonstrar a sua própria consistência.

Estes teoremas vieram mostrar que o programa de Hilbert era irrealizável, pelo menos sob a forma originalmente proposta. Também permitiram ver que, por mais proposições que se demonstrassem no âmbito dos *Principia Mathematica*, haveria sempre outras para as quais não havia maneira nem de provar que eram verdadeiras nem de provar que eram falsas.

Nas décadas mais recentes têm surgido tentativas de aplicar os teoremas de Gödel em contextos nos quais ele não se aplica. No que se refere às aplicações à física e, mais especificamente, às limitações desta, ainda há poucos anos o físico inglês Freeman Dyson (que também esteve presente na Conferência Gulbenkian) escreveu, numa recensão de um livro de física (*A fábrica do Cosmos*, Gradiva, 2006), que nenhuma teoria física pode explicar todos os fenómenos físicos. Para tal, invocou o teorema de Gödel, afirmando que resulta dele que qualquer teoria física fornece necessariamente uma descrição incompleta de tais fenómenos. Mas, como lhe fez notar um especialista em lógica, Solomon Feferman, o teorema de Gödel só afirma, de facto, que uma tal teoria é incompleta no que se refere a proposições aritméticas e isto é compatível com ser completa quanto à descrição do mundo físico. Dyson concordou.

Seria estranho que, podendo-se tirar tais conclusões dos teoremas da incompletude, o próprio Gödel não o tenha feito. Ele interessava-se por física e os seus trabalhos científicos fora da área da lógica matemática não foram sobre outras áreas da matemática mas sim sobre teoria da relatividade. Aliás, Gödel e Einstein foram colegas no Instituto de Estudos Avançados em Princeton, nos Estados Unidos, e conversavam frequentemente. Einstein dava grande valor a essas conversas e afirmou mesmo certa vez que o que o levava a continuar a ir regularmente ao Instituto depois de se ter reformado, em 1944, era o facto de que fazendo-o tinha o privilégio de regressar a casa na companhia de Gödel.

Mas, naturalmente, poder-se-ia pensar que Gödel nunca aplicou os seus teoremas à física porque tal ideia nunca lhe ocorreu. Não é esse o caso. Um dia, o físico John Archibald Wheeler (autor da expressão «buraco negro») foi ao gabinete dele e perguntou-lhe se havia alguma ligação entre incompletude e o princípio da incerteza de Heisenberg. Gödel pô-lo fora.