Análise Complexa – Resolução de alguns exercícios do capítulo 1

Exercício nº1

1. Tem-se:

$$i^2 = (0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) = -1.$$

2. $\overline{i} = \overline{(0,1)} = (0,-1) = -i$.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então

$$\overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi.$$

4. A conjugação é uma bijecção pois, pela alínea anterior, a composta da conjugação consigo própria é a identidade. Agora basta observar que:

1. se $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}\overline{(a+bi)+(c+di)} &= \overline{a+c+(b+d)i}\\ &= a+c-(b+d)i\\ &= (a-bi)+(c-di)\\ &= \overline{a+bi}+\overline{c+di};\end{aligned}$$

2. se $a+bi, c+di \in \mathbb{C}$, então

$$\overline{(a+bi).(c+di)} = \overline{ac-bd+(ad+bc)i} = ac-bd-(ad+bc)i$$

e

$$\left(\overline{a+bi}\right)\left(\overline{c+di}\right) = (a-bi).(c-di) = ac-bd-(ad+bc)i.$$

5. Se $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}a+bi = \overline{a+bi} &\iff a+bi = a-bi\\ &\iff b=0\\ &\iff a+bi = a\\ &\iff a+bi \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $z \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}\overline{(z+\overline{z})/2} &= (\overline{z}+\overline{\overline{z}})\Big/\overline{2} \quad \text{(pela alínea anterior)}\\ &= (z+\overline{z})/2\end{aligned}$$

pela alínea 3 e porque $2 \in \mathbb{R}$. Logo, $(z+\overline{z})/2 \in \mathbb{R}$. Analogamente,

$$\begin{aligned}\overline{(z-\overline{z})/(2i)} &= (\overline{z}-\overline{\overline{z}})/\overline{2i}\\ &= -(z-\overline{z})/(-2i) \text{ (pela alínea 2)}\\ &= (z-\overline{z})/(2i),\end{aligned}$$

pelo que $(z-\overline{z})/(2i) \in \mathbb{R}$.

6. Se $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{a+bi+\overline{a-bi}}{2} = \frac{(a+bi)+(a-bi)}{2} = a = \operatorname{Re}(a+bi)$$

e

$$\frac{a+bi-\overline{a-bi}}{2i} = \frac{(a+bi)-(a-bi)}{2i} = b = \operatorname{Im}(a+bi).$$

7. Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a+bi|^2 = a^2+b^2 = (\operatorname{Re}(a+bi))^2 + (\operatorname{Im}(a+bi))^2$.

Exercício nº2

2. Sabe-se, pelo exercício 1.7, que $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$, pelo que $(\operatorname{Re} z)^2, (\operatorname{Im} z)^2 \leq |z|^2$, o que implica que $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

3. Tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(z+w) &= \frac{z+w+\overline{z+w}}{2} \text{ (exercício 1.6)}\\
&= \frac{z+w+\overline{z}+\overline{w}}{2} \text{ (exercício 1.4)}\\
&= \frac{z+\overline{z}}{2} + \frac{w+\overline{w}}{2}\\
&= \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w);
\end{aligned}$$

a segunda metade da alínea faz-se de maneira análoga

4. Tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\lambda.z) &= \frac{\lambda.z+\overline{\lambda.z}}{2} \text{ (exercício 1.6)}\\
&= \frac{\lambda.z+\overline{\lambda}.\overline{z}}{2} \text{ (exercício 1.4)}\\
&= \frac{\lambda.z+\lambda.\overline{z}}{2} \text{ (exercício 1.5)}\\
&= \lambda \cdot \frac{z+\overline{z}}{2}\\
&= \lambda. \operatorname{Re} z;
\end{aligned}$$

a segunda metade da alínea faz-se de maneira análoga

5. Tem-se

$$\begin{aligned}
|z|^2 &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \text{ (exercício 1.7)}\\
&= \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 \text{ (exercício 1.6)}\\
&= \frac{z^2+\overline{z}^2+2z.\overline{z}}{4} + \frac{z^2+\overline{z}^2-2z.\overline{z}}{-4} \text{ (exercício 1.1)}\\
&= z.\overline{z}.
\end{aligned}$$

6. Visto que $|z+w|, |z|+|w| \in \mathbb{R}_+$, tem-se:[1]

$$\begin{aligned}
&|z+w| \leq |z|+|w| \iff\\
&\iff |z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2\\
&\iff (z+w).\overline{(z+w)} \leq |z|^2+|w|^2+2.|z|.|w| \text{ (pela alínea anterior)}\\
&\iff (z+w).\left(\overline{z}+\overline{w}\right) \leq |z|^2+|w|^2+2.|z|.|w| \text{ (exercício 1.4)}\\
&\iff |z|^2+z.\overline{w}+\overline{z}.w+|w|^2 \leq |z|^2+|w|^2+2.|z|.|w| \text{ (pela alínea anterior)}\\
&\iff z.\overline{w}+\overline{z}.w \leq 2.|z|.|w|\\
&\Longleftarrow\ (z.\overline{w}+\overline{z}.w)^2 \leq 4.|z|^2.|w|^2 \text{ (pois } 2.|z|.|w| \in \mathbb{R}_+\text{)}\\
&\iff (z.\overline{w})^2+(\overline{z}.w)^2+2.z.\overline{w}.\overline{z}.w \leq 4.z.\overline{z}.w.\overline{w} \text{ (pela alínea anterior)}
\end{aligned}$$

[1]Observe-se que todas as desigualdades que se seguem são desigualdades entre números reais.

$$\begin{aligned}
&\iff (z.\overline{w} - \overline{z}.w)^2 \leq 0\\
&\iff (z.\overline{w} - \overline{z.\overline{w}})^2 \leq 0 \text{ (exercícios 1.3 e 1.4)}\\
&\iff \left(\frac{z.\overline{w} - \overline{z.\overline{w}}}{2i}\right)^2 \geq 0 \text{ (exercício 1.1)}\\
&\iff (\operatorname{Im}(z.\overline{w}))^2 \geq 0
\end{aligned}$$

pelo exercício 1.6.

7. Pela alínea anterior, sabe-se que se tem

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|,$$

ou seja, $|z - w| \geq |z| - |w|$. Mostra-se de maneira análoga que $|z - w| \geq |w| - |z|$. Como, $||z| - |w|| = \pm(|z| - |w|)$, $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

8. Visto que $|z.w|, |z|.|w| \in \mathbb{R}_+$, tem-se

$$\begin{aligned}
|z.w| = |z|.|w| &\iff |z.w|^2 = |z|^2.|w|^2\\
&\iff z.w.\overline{z.w} = z.\overline{z}.w.\overline{w} \text{ (pela alínea 5)}\\
&\iff z.w.\overline{z}.\overline{w} = z.\overline{z}.w.\overline{w}
\end{aligned}$$

pelo exercício 1.4.

9. Tem-se

$$\begin{aligned}
|\overline{z}|^2 &= \overline{z}.\overline{\overline{z}} \text{ (pela alínea 5)}\\
&= \overline{z}.z \text{ (exercício 1.3)}\\
&= |z|^2.
\end{aligned}$$

Exercício nº5

1. Sejam $b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a = b + ci$; quer-se mostrar que existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x + yi)^2 = b + ci. \tag{1}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
(1) &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = b\\ 2xy = c \end{cases}\\
&\implies \begin{cases} x^2 - y^2 = b\\ 4x^2y^2 = c^2 \end{cases} \qquad (2)\\
&\iff \begin{cases} x^2 = y^2 + b\\ 4y^4 + 4by^2 = c^2 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2 = y^2 + b\\ y^2 = \left(-b \pm \sqrt{b^2 + c^2}\right)/2 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2 = y^2 + b\\ y = \pm\sqrt{\left(-b + \sqrt{b^2 + c^2}\right)/2} \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\left(b + \sqrt{b^2 + c^2}\right)/2}\\ y = \pm\sqrt{\left(-b + \sqrt{b^2 + c^2}\right)/2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Está então resolvido o sistema (2) e é claro que uma solução (x, y) deste sistema é solução de (1) se e só os números c e $x.y$ forem ambos maiores ou iguais a 0 ou ambos menores ou iguais a 0. Logo, as soluções de (1) são

$$x + yi = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\left(b+\sqrt{b^2+c^2}\right)/2} + \sqrt{\left(-b+\sqrt{b^2+c^2}\right)/2}\, i\right) & \text{se } c \geq 0 \\ \pm\left(\sqrt{\left(b+\sqrt{b^2+c^2}\right)/2} - \sqrt{\left(-b+\sqrt{b^2+c^2}\right)/2}\, i\right) & \text{se } c \leq 0. \end{cases}$$

2. Para cada $z \in \mathbb{C}$, seja $P(z) = i\left(\overline{b}(z+i)^n - b(z-i)^n\right)$. A função P é polinomial de grau menor ou igual a n. De facto, o grau é igual a n pois o coeficiente de z^n é $i\left(\overline{b} - b\right)$ e

$$i\left(\overline{b} - b\right) = 0 \iff b = \overline{b} \iff b \in \mathbb{R} \implies a \in \mathbb{R}_+,$$

mas $|a| = 1$, o único elemento de $\mathbb{R}_+$ com módulo 1 é o número 1 e $a \neq 1$ por hipótese.

Tem-se, para cada $z \in \mathbb{R}$,

$$\overline{P(z)} = \overline{i\left(\overline{b}(z+i)^n - b(z-i)^n\right)} = (-i)\left(b(z-i)^n - \overline{b}(z+i)^n\right) = P(z). \tag{3}$$

Logo, se $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ forem tais que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

então deduz-se de (3) que $(\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}) : a_k = \overline{a_k}$, ou seja, que os coeficientes de P são reais. Como P tem grau ímpar, tem algum zero $\lambda \in \mathbb{R}$. Mas

$$P(\lambda) = 0 \iff \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i}\right)^n = \frac{b}{\overline{b}} \left(= \frac{b^2}{|b|^2} = a\right).$$

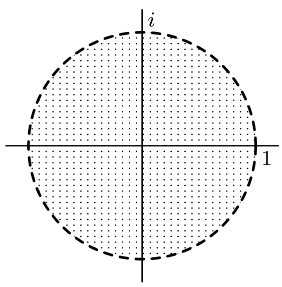
3. Seja q um número natural ímpar. Vai-se mostrar por indução que, se $p \in \mathbb{Z}_+$, então as equações da forma $z^n = a$ têm solução quando $n = 2^p q$; como qualquer $n \in \mathbb{N}$ pode ser escrito sob esta forma, isto basta para resolver o exercício.

Se $p = 0$, quer-se provar que as equação da forma $z^q = a$ têm solução. Isto é trivial se $a = 0$. Caso $a \neq 0$, seja $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que ${z_1}^q = a/|a|$ (um tal z_1 existe pela alínea anterior, caso $a/|a| \neq 1$) e seja $z_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tal que ${z_2}^q = |a|$; então $z_1.z_2$ é solução da equação $z^q = a$.

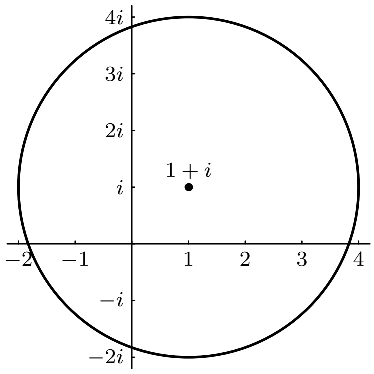
Suponha-se agora que, para um certo $p \in \mathbb{Z}_+$, já está provado que as equações da forma $z^n = a$ têm solução quando $n = 2^p q$; quer-se provar que se $m = 2^{p+1}q$ então as equações da forma $z^m = a$ têm solução. Fixado $a \in \mathbb{C}$, se z_0 for uma solução da equação $z^n = a$ e se z_1 for tal que ${z_1}^2 = z_0$, então ${z_1}^m = {z_1}^{2n} = \left({z_1}^2\right)^n = {z_0}^n = a$.

Exercício nº7

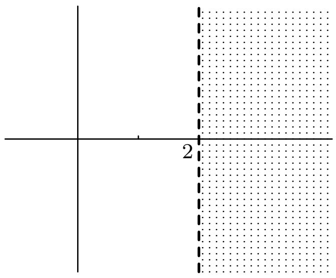
1. É o disco aberto de centro 0 e raio 1:



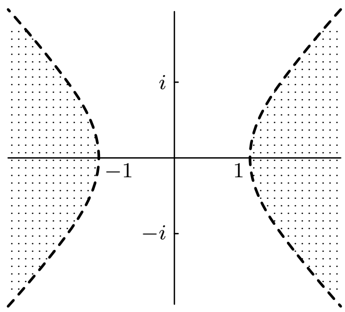
2. É a circunferência de centro $1+i$ e raio 3:



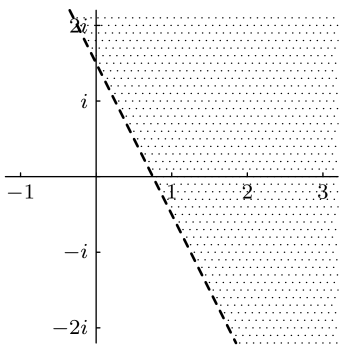
3. É o semiplano aberto formado pelos pontos à direita da recta vertical que pasa por 2:



4. Se $z=a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$, então $\operatorname{Re}(z^2)=a^2-b^2$, pelo que a figura em questão é formada pelos pontos $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ tais que $|a|>1$ e $-\sqrt{a^2-1}<b<\sqrt{a^2-1}$:

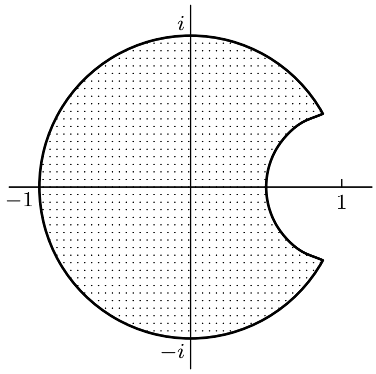


5. É o semiplano formado pelos pontos do plano que estão mais próximos de 2 do que de $-i$:



Este semiplano é limitado pela mediatriz do segmento de recta que une $-i$ a 2.

6. É o conjunto dos pontos do disco fechado de centro 0 e raio 1 cuja distância a 1 é maior ou igual a 1/2:



Destes seis conjuntos, aqueles que são limitados são o primeiro, o segundo e o sexto.

Exercício nº8

Se $|z| = 1$, então

$$\begin{aligned} \alpha \neq z &\iff \overline{\alpha} \neq \overline{z} \text{ (exercício 1.4)} \\ &\iff \overline{\alpha}.z \neq \overline{z}.z \text{ (pois } |z| = 1 \Longrightarrow z \neq 0) \\ &\iff \overline{\alpha}.z \neq 1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|1 - \overline{\alpha}z| = |\overline{z}z - \overline{\alpha}z| = |\overline{z - \alpha}|\,.|z| = |z - \alpha|,$$

pelo que

$$\left|\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}\right| = 1.$$

Exercício nº10

Se a primeira condição se verificar e se a e b forem como no enunciado da condição, sejam $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ tais que $z_j = a + bt_j$, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. Então

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(a + bt_3) - (a + bt_1)}{(a + bt_2) - (a + bt_1)} = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} \in \mathbb{R}.$$

Suponha-se agora que se verifica a segunda condição e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda \iff (\lambda - 1)z_1 - \lambda z_2 + z_3 = 0.$$

Então, se se definir $p = \lambda - 1$, $q = -\lambda$ e $r = 1$, é claro que p, q e r estão nas condições da terceira alínea.

Finalmente, suponha-se que se verifica o enunciado da terceira alínea. Sejam então p, q e r como no enunciado e suponha-se que $r \neq 0$ (os casos em que $p \neq 0$ ou em que $q \neq 0$ são análogos). Então a recta $\{z_1 + (z_2 - z_1)t : t \in \mathbb{R}\}$ contém z_1, z_2 e z_3, pois

$$z_1 = z_1 + (z_2 - z_1)0,\ z_2 = z_1 + (z_2 - z_1)1 \text{ e } z_3 = -\frac{p}{r}z_1 - \frac{q}{r}z_2 = z_1 + (z_2 - z_1)\left(-\frac{q}{r}\right).$$

Exercício nº11

Sejam x, y e z números complexos tais que $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$. Tem-se:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \iff x^2 - x(y + z) + y^2 + z^2 - yz = 0.$$

Vai-se aplicar a fórmula resolvente de equações de segundo grau. Seja $r \in \mathbb{C}$ uma raiz quadrada de $(y + z)^2 - 4(y^2 + z^2 - yz) = -3(y - z)^2$. Então $r = \pm\sqrt{3}i(y - z)$, pelo que se tem:

$$\begin{aligned}
&x^2 - x(y + z) + y^2 + z^2 - yz = 0 \iff \\
&\iff x = \left((y + z) \pm \sqrt{3}i(y - z)\right)/2 \\
&\iff x - y = (y - z)\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)/2 \wedge x - z = (y - z)\left(1 \pm \sqrt{3}i\right)/2 \\
&\implies |x - y| = |x - z| = |y - z|
\end{aligned}$$

ou seja, x, y e z são vértices de um triângulo equilátero do plano complexo.

Reciprocamente, suponha-se agora que x, y e z são três números complexos tais que $|x-y| = |x - z| = |y - z|$. Pode-se supor que $|x - y|$, $|x - z|$ e $|y - z|$ são diferentes de 0, pois caso contrário $x = y = z$ e então é óbvio que $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$. Considerem-se os números $\alpha = (x - y)/(y - z)$ e $\beta = (x - z)/(y - z)$; são ambos números complexos de módulo 1 e a sua diferença é igual a -1. Então $0 = \operatorname{Im}(\alpha - \beta) = \operatorname{Im}\alpha - \operatorname{Im}\beta$, pelo que $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$; deduz-se que $|\operatorname{Re}\alpha| = \sqrt{1 - |\operatorname{Im}\alpha|^2} = \sqrt{1 - |\operatorname{Im}\beta|^2} = |\operatorname{Re}\beta|$, pelo que $\operatorname{Re}\alpha = \pm\operatorname{Re}\beta$. Se se tivesse $\operatorname{Re}\alpha = \operatorname{Re}\beta$ então ter-se-ia $\operatorname{Re}(\alpha - \beta) = 0$. Mas já se sabe que $\alpha - \beta = -1$, pelo que $\operatorname{Re}\alpha = -\operatorname{Re}\beta = -1/2$ e, portanto, $\operatorname{Im}\alpha = \pm\sqrt{3}i/2$ e $\operatorname{Im}\beta = \pm\sqrt{3}i/2$, ou seja $\alpha = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ e $\beta = (1 \pm \sqrt{3}i)/2$. Já foi visto que estas duas igualdades são equivalentes a $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$.

Exercício nº14

1. Se se tivesse $\overline{b}z + \overline{a} = 0$, então tinha-se

$$|a| = |\overline{a}| = \left|-\overline{b}z\right| = |b|.|z| < |b|,$$

a não ser que $z = 0$ ou que $b = 0$, caso em que se teria $|a| = |b|$. Mas isto não é possível, pois $|a| = \sqrt{1 + |b|^2} > |b|$. Por outro lado, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}} \in D(0, 1) &\iff \left|\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}}\right| < 1 \\
&\iff |az + b|^2 < \left|\overline{b}z + \overline{a}\right|^2 \\
&\iff (az + b).\left(\overline{az} + \overline{b}\right) < \left(\overline{b}z + \overline{a}\right).(b\overline{z} + a) \\
&\iff |a|^2|z|^2 + a\overline{b}z + \overline{a}b\overline{z} + |b|^2 < |b|^2|z|^2 + a\overline{b}z + \overline{a}b\overline{z} + |a|^2 \\
&\iff |a|^2\left(|z|^2 - 1\right) < |b|^2\left(|z|^2 - 1\right) \\
&\iff \left(|a|^2 - |b|^2\right).\left(|z|^2 - 1\right) < 0 \\
&\iff |z|^2 < 1.
\end{aligned}$$

2. A maneira mais simples de mostrar que se trata de uma bijecção consiste em encontrar a função inversa. Para tal, resolve-se a equação $f_{a,b}(z) = w$. Tem-se então

$$\frac{az + b}{\overline{b}z + \overline{a}} = w \iff az + b = \overline{b}zw + \overline{a}w \iff z = \frac{\overline{a}w - b}{-\overline{b}w + a} \iff z = f_{\overline{a},-b}(w).$$

Isto sugere que $f_{\overline{a},-b}$ é a inversa de $f_{a,b}$ e mostra que $f_{a,b} \circ f_{\overline{a},-b}$ é a identidade em $D(0,1)$. Mas como isto tem lugar sempre que a e b são tais que $|a|^2 - |b|^2 = 1$, então, trocando a por $\overline{a}$ e b por $-b$, obtém-se que $f_{\overline{a},-b} \circ f_{a,b}$ também é a identidade, o que mostra que efectivamente a função $f_{a,b}$ é uma bijecção e que, além disso, a sua inversa é $f_{\overline{a},-b}$.

3. Visto que se trata de um subconjunto do grupo das bijecções de $D(0,1)$ em $D(0,1)$, que contém a identidade ($= f_{1,0}$) e que, pela alínea anterior, contém o inverso de cada um dos seus elementos, só falta ver que é estável para a composição. Sejam então $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que $|a|^2 - |b|^2 = 1$ e que $|c|^2 - |d|^2 = 1$. Se $z \in D(0,1)$, tem-se

$$f_{a,b}\left(f_{c,d}(z)\right) = \frac{a \cdot \frac{cz+d}{\overline{d}z+\overline{c}} + b}{\overline{b} \cdot \frac{cz+d}{\overline{d}z+\overline{c}} + \overline{a}} = \frac{\left(ac + b\overline{d}\right) z + ad + b\overline{c}}{\overline{(ad + b\overline{c})} z + \overline{ad + b\overline{c}}} = f_{ac+b\overline{d},ad+b\overline{c}}(z).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left|ac + b\overline{d}\right|^2 - |ad + b\overline{c}|^2 &= \left(ac + b\overline{d}\right) . \left(\overline{ac} + \overline{b}d\right) - (ad + b\overline{c}) . \left(\overline{a}\overline{d} + \overline{b}c\right) \\ &= |a|^2|c|^2 + |b|^2|d|^2 - |a|^2|d|^2 - |b|^2|c|^2 \\ &= \left(|a|^2 - |b|^2\right) . \left(|c|^2 - |d|^2\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

4. Comece-se por ver que $f_{a,b}(0) = z_0 \iff b/\overline{a} = z_0 \iff b = z_0\overline{a}$. Sejam então $a \in \mathbb{C}$ e $b = z_0\overline{a}$; quer-se mostrar que é possível escolher a de modo a ter-se $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Mas

$$|a|^2 - |b|^2 = 1 \iff |a|^2 \left(1 - |z_0|\right)^2 = 1 \iff |a| = 1 \Big/ \sqrt{1 - |z_0|^2}\,.$$

Basta então tomar, por exemplo, $a = 1 \Big/ \sqrt{1 - |z_0|^2}$.

Exercício nº15

1. Como $|i/2| = 1/2 < 1$, a sucessão converge para 0.

2. Como $|1 + i| = \sqrt{2} > 1$, a sucessão diverge.

3. Como $(\forall n \in \mathbb{N}) : |n/i^n| = n$, a sucessão não é limitada e, portanto, diverge.

4. A sucessão converge para -1, pois

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1 - ni}{1 + ni} = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1/n - i}{1/n + i} = \frac{\lim_{n\in\mathbb{N}} 1/n - i}{\lim_{n\in\mathbb{N}} 1/n + i} = \frac{-i}{i} = -1.$$

Exercício nº19

Se $z, w \in \mathbb{C}$, então $|\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w| = |\operatorname{Re}(z - w)| \leq |z - w|$. Logo, se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ e se se tomar $\delta = \varepsilon$, tem-se

$$(\forall z, w \in \mathbb{C}) : |z - w| < \delta \iff |z - w| < \varepsilon \implies |\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w| < \varepsilon.$$

No caso da função Im faz-se da mesma maneira.

Exercício nº23

Seja U um subconjunto de B que seja simultaneamente um aberto de B e um fechado de B; quer-se mostrar que $U = B$ ou que $U = \emptyset$.

Caso U contenha algum elemento de A então, uma vez que $U \cap A$ é simultaneamente um aberto de A e um fechado de A e, além disso, não é vazio, $U \cap A = A (\Longleftrightarrow U \supset A)$, pois A é conexo. Se existisse algum $z \in B \setminus U$ então, uma vez que $B \setminus U$ é um aberto de B, haveria algum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $D(z, \varepsilon) \cap B \subset B \setminus U$. Em particular, uma vez que $U \supset A$, $D(z, \varepsilon) \cap B$ não conteria elementos de A, o que é absurdo, pois $z \in B \subset \overline{A}$. Logo, $U = B$.

Caso U não contenha qualquer elemento de A, aplica-se o argumento anterior a $B \setminus U$ e deduz-se que $B \setminus U = B$, ou seja, que $U = \emptyset$.

Exercício nº24

Seja A uma parte de $\bigcup_{i \in I} A_i$ que seja simultaneamente um aberto e um fechado de $\bigcup_{i \in I} A_i$; quer-se mostrar que A é vazio ou igual a $\bigcup_{i \in I} A_i$. Suponha-se então que $A \neq \emptyset$ e seja $z \in A$. Seja $j \in I$ tal que $z \in A_j$. Então $A \cap A_j$ é simultaneamente um aberto e um fechado de A_j; como, além disso, $A \cap A_j \neq \emptyset$ (pois $z \in A \cap A_j$) e A_j é conexo, $A \cap A_j = A_j$, ou seja $A \supset A_j$. Seja agora $i \in I$. Como $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ e $A \supset A_j$ então $A \cap A_i \neq \emptyset$. Mas então pode-se provar que $A \supset A_i$ da mesma maneira que se provou que $A \supset A_j$. Como isto tem lugar para cada $i \in I$ e como $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, está provado que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Exercício nº26

1. Tem-se:

$$\begin{aligned} P(z_0 + bt) &= P(z_0) + ab^k t^k + Q(z_0 + bt) b^{k+1} t^{k+1} \\ &= P(z_0) - P(z_0) t^k + Q(z_0 + bt) b^{k+1} t^{k+1} \end{aligned}$$

pelo que se tem, para $t \in]0, 1]$,

$$|P(z_0 + bt)| \leq |P(z_0)|(1 - t^k) + |Q(z_0 + bt) b^{k+1}| t^{k+1}.$$

Como a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |Q(z_0 + bt) b^{k+1}| t \end{array}$$

é contínua e toma o valor 0 no ponto 0, existe algum $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall t \in \mathbb{R}) : |t| < \delta \Longrightarrow \Big| |Q(z_0 + bt) b^{k+1}| t \Big| < |P(z_0)|/2.$$

Para cada $t \in]0, \inf\{1, \delta\}[$, tem-se:

$$|P(z_0 + bt)| \leq |P(z_0)|(1 - t^k) + |P(z_0)| t^k/2 = |P(z_0)|(1 - t^k/2) < |P(z_0)|.$$

2. Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tais que $a_n \neq 0$ e que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Para cada $z \in \mathbb{C}^*$ tem-se

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n|.|z|^n - |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0| \\ &\geq |a_n|.|z|^n - |a_{n-1}|.|z|^{n-1} - \cdots - |a_0| \\ &= |a_n|.|z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right). \end{aligned}$$

Se $|z|$ for suficientemente grande, $\dfrac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \dfrac{|a_0|}{|z|^n} < \dfrac{1}{2}$, pelo que $|P(z)| \geq |a_n|.|z|^n/2$. É então claro que, para algum $R \in \mathbb{R}_+^*$, se tem

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : |z| > R \Longrightarrow |P(z)| > |P(0)|.$$

3. Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z_0)|$ seja o mínimo da restrição da função $|P|$ a $\overline{D(0,R)}$, onde R é como na alínea anterior; um tal z_0 existe, pois $\overline{D(0,R)}$ é um compacto. Então, para cada $z \in \mathbb{C}$,

- se $|z| \leq R$, $|P(z_0)| \leq |P(z)|$, pela definição de z_0;
- se $|z| > R$, então $|P(z_0)| \leq |P(0)| < |P(z)|$.

Está então visto que $|P(z_0)|$ é o mínimo de $|P|$. Se não se tivesse $P(z_0) = 0$, então, pela primeira alínea, existiria algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z)| < |P(z_0)|$, o que é absurdo.

Exercício nº27

Vai-se começar por mostrar que os enunciados de ambas as alíneas são válidos no caso de funções polinomiais de grau 1. Basta ver que se $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$ são tais que $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = az + b$ então, se se definir $c = a$ e $z_1 = -b/a$, tem-se $c \neq 0$ e $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = c(z - z_1)$. Além disso, se $a, b \in \mathbb{R}$, P é uma função polinomial de primeiro grau com coeficientes reais.

Seja agora $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e suponha-se que já se demonstrou, para cada número natural $n < m$, que os enunciados de ambas as alíneas são válidos para funções polinomiais de grau n. Se $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ for uma função polinomial de grau m, seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $P(w) = 0$; um tal w existe pelo exercício anterior. Então existe alguma função polinomial $Q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de grau $m - 1$ tal $(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = (z - w)Q(z)$. Por hipótese, existem $c, z_1, \ldots, z_{m-1} \in \mathbb{C}$, com $c \neq 0$, tais que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : Q(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_{m-1}),$$

pelo que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = c(z - w)(z - z_1) \cdots (z - z_{m-1}).$$

Suponha-se agora que os coeficientes de P são reais. Se w for real, então os coeficientes de Q são reais pelo que Q se pode escrever como produto de funções polinomiais de primeiro e de segundo grau com coeficientes reais; logo, P também pode ser escrito daquele modo. Finalmente, se w não for real então sabe-se, pelo exercício 4, que $P(\overline{w}) = 0$. Existe então alguma função polinomial $R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : P(z) = (z - w)(z - \overline{w})R(z) = \left(z^2 - 2\operatorname{Re}(w)z + |w|^2\right) R(z).$$

Como $-2\operatorname{Re}(w), |w|^2 \in \mathbb{R}$, R é uma função polinomial com coeficientes reais, pelo que é produto de funções polinomiais de primeiro e segundo grau com coeficientes reais. Consequentemente, P também tem essa propriedade.

Exercício nº29

Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$ tais que o disco $D(z_0, r)$ contenha as imagens de todas as funções f_n. Então para cada $z \in U$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$|f_n(z)| \leq |f_n(z) - z_0| + |z_0| < r + |z_0|,$$

pelo que, se se tomar $M = r + |z_0|$,

$$|f(z)| = \left|\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(z)\right| = \lim_{n \in \mathbb{N}} |f_n(z)| \leq M.$$

Exercício nº30

Um exemplo consiste em tomar $U = D(0,1)$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $z \in U$, definir $f_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função f_n é limitada, pois

$$(\forall z \in U) : |f_n(z)| = |1 + z + z^2 + \cdots + z^n| \leq n + 1.$$

Por outro lado

$$(\forall z \in U) : \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(z) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} \cdot$$

Logo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplesmente para a função $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = 1/(1 - z)$, mas esta função não é limitada, pois

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = n.$$

Outra possibilidade consiste em tomar $U = \mathbb{C}$ e definir, para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $z \in U$, $f_n(z) = \min\{n, |z|\}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n|$ é majorada por n. Por outro lado, a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplesmente para a função módulo, a qual não é majorada.

Exercício nº32

1. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(\forall z \in U) : m, n \geq p \Longrightarrow |f_m(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

visto que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, se $m, n \geq p$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\lim_{z\to a} f_m(z) - \lim_{z\to a} f_n(z)\right| &= \left|\lim_{z\to a} (f_m(z) - f_n(z))\right| \\
&= \lim_{z\to a} |f_m(z) - f_n(z)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

2. Seja $f = \lim_n f$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $l_n = \lim_{z\to a} f_n(z)$. Tem-se, para cada $w \in A$ e para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|f(w) - \lim_n l_n\right| \leq |f(w) - f_n(w)| + |f_n(w) - l_n| + \left|l_n - \lim_n l_n\right|. \tag{4}$$

Fixe-se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Seja $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e se $n \geq p_1$, então

$$(\forall w \in A) : |f(w) - f_n(w)| < \frac{\varepsilon}{3}; \tag{5}$$

seja $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e se $n \geq p_1$, então

$$\left|l_n - \lim_n l_n\right| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \tag{6}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$; então, pela definição de l_n, existe algum $\delta_n \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$(\forall w \in A) : |w - a| < \delta_n \Longrightarrow |f_n(w) - l_n| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \tag{7}$$

Decorre então de (4), (5), (6) e (7) que se se tomar $n = \sup\{p_1, p_2\}$ (ou, mais geralmente, algum $n \in \mathbb{N}$ que seja simultaneamente maior ou igual a p_1 e maior ou igual a p_2), se tem

$$(\forall w \in A) : |w - a| < \delta_n \Longrightarrow \left|f(w) - \lim_n l_n\right| < \varepsilon.$$