

Alguns resultados de Análise Real

José Carlos Santos

2 de Junho de 2001

Conteúdo

1	Teoremas fundamentais	1
1.1	O teorema de Rolle	1
1.2	O teorema de Lagrange	2
2	Algumas consequências	3

1 Teoremas fundamentais

1.1 O teorema de Rolle

Teorema 1 (Teorema de Rolle) *Seja $[a, b]$ um intervalo fechado de \mathbb{R} e seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f|_{]a, b[}$ é derivável. Se $f(a) = f(b) = 0$, então, para algum $c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Se a função f for constante, então pode-se tomar para c qualquer elemento de $]a, b[$. Suponha-se agora que f não é constante. Então $\sup f > 0$ ou $\inf f < 0$. Se se estiver no primeiro caso, então tome-se para c algum elemento de $]a, b[$ tal que $f(c) = \sup f$; um tal c existe, pelo teorema de Weierstrass. Para cada $x \in [a, b]$ tem-se $f(x) \leq f(c)$, pelo que, se $x \neq c$, $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ se $x > c$ e $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ se $x < c$. Visto que, por hipótese, f é derivável no ponto c e que

$$f'(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

vê-se que $f'(c) = 0$.

O caso em que $\inf f < 0$ é análogo. ■

Observe-se que o enunciado do teorema de Rolle é ilustrado pela figura 1.

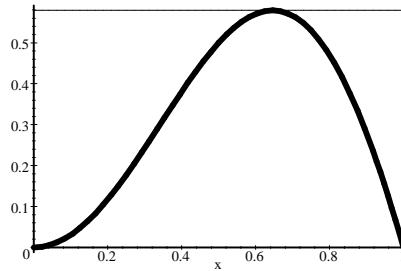


Figura 1: Ilustração do teorema de Rolle

1.2 O teorema de Lagrange

Teorema 2 (Teorema de Lagrange) *Seja $[a, b]$ um intervalo fechado de \mathbb{R} e seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f|_{]a, b[}$ é derivável. Então, para algum $c \in]a, b[$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Demonstração: Basta aplicar o teorema de Rolle à função

$$\begin{aligned} [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a). \end{aligned}$$

para obter o resultado. ■

As demonstrações destes teoremas são feitas em [1, cap. VII] com mais detalhe.

Veja-se a figura 2 para compreender o significado geométrico do teorema de Lagrange

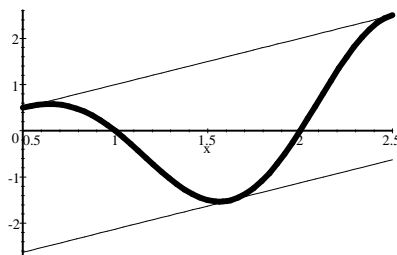


Figura 2: Ilustração do teorema de Lagrange

2 Algumas consequências

Corolário 1 *Se $[a, b]$ for um intervalo fechado de \mathbb{R} e se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função derivável com derivada nula em todos os pontos, então f é constante.*

Demonstração: Sejam x e y elementos distintos de $[a, b]$, com $x < y$; quer-se mostrar que $f(x) = f(y)$. Pelo teorema de Lagrange, existe algum $c \in]x, y[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x};$$

visto que, por hipótese, $f'(c) = 0$, tem-se $f(x) = f(y)$. ■

Corolário 2 *Se $[a, b]$ for um intervalo fechado de \mathbb{R} , se f e g forem funções deriváveis de $[a, b]$ em \mathbb{R} e se $f' \equiv g'$, então f e g diferem por uma constante.*

Demonstração: Basta aplicar o corolário 1 à função $f - g$. ■

Referências

[1] M. Spivak, *Calculus*, Publish or Perish