

APLICAÇÃO DA REDUÇÃO À VARIEDADE CENTRAL PARA  
INVESTIGAÇÃO DE BIFURCAÇÕES  
15 de Fevereiro de 2008

Paulo Ricardo Ferreira Pinto

Orientadora: Professora Doutora Isabel S. Labouriau.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA 2007  
FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DO PORTO

## CONTEÚDO

1. Introdução	4
2. Resultados preliminares e exemplos	6
2.1. Variedade central e exemplos com equações diferenciais ordinárias	6
2.2. Redução à variedade central para equações diferenciais parciais	9
2.3. Importância das simetrias	11
2.4. Forma normal	12
3. Problema concreto	14
3.1. Aproximação de Boussinesq	14
3.2. O grupo das simetrias	16
3.3. Forma normal da variedade central	18
3.4. Coeficientes da forma normal	19
4. Sumário das bifurcações no sistema reduzido	20
4.1. Solução trivial $S_0$	20
4.2. Ramo primário $S_1$	20
4.3. Ramo secundário $S_2$	22
4.4. Ramo periódico $P_1$	24
4.5. Ramo de soluções mais complexas; $P_2$ e $C_1$	24
5. Conclusões	26
6. Possibilidades para investigações futuras	28
7. Apêndice	29
7.1. Algoritmo	29
Referências	33

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha orientadora Professora Isabel Labouriau pela sua dedicação, paciência, encorajamento e pela sua amizade ao longo dos últimos anos.

Agradeço também a todos os meus professores relativos à parte curricular do mestrado pelo empenho e profissionalismo. Um especial agradecimento à Professora Margarida Brito e ao Professor Sílvio Gama pelo incentivo à prática da investigação.

Um obrigado ao Centro de Matemática da Universidade do Porto pela sua disponibilidade em ajudar sempre que necessitei.

Agradeço à Doutora Olga Podvigina por primeiro ter possibilitado a criação deste trabalho e em segundo pela sua disponibilidade em discutir-lo.

Agradeço ao aluno Pós Doutoral Roman Chertovskikh pela sua disponibilidade em tirar dúvidas.

Agradeço à minha Mãe pelo seu amor e pela sua luta constate em dar o melhor para os seus filhos.

Agradeço ao meu Padrinho pelo seus bons conselhos e pela boa educação que sempre recebi e com a qual me identifico.

Quero também agradecer à minha irmã pela amizade e pelo seu apoio incondicional, adoro-te mana.

Por fim mas com a mesma importância queria agradecer a todos os meus amigos pelo apoio ao longo desta aventura. Sem eles isto não era possível.

## 1. INTRODUÇÃO

O objectivo deste texto é mostrar como se pode simplificar o estudo de um problema de dinâmica de fluidos (estudado em [5] e [6]) por redução a uma variedade de dimensão finita, chamada variedade central.

Começo por falar na secção 2 sobre a existência da variedade central e da sua utilidade para se conhecer toda a dinâmica de um dado sistema. Com um exemplo simples chega-se à conclusão de que a variedade central não é fácil de calcular e assim sendo falarei brevemente sobre uma forma de obter informação na variedade central mas sem a calcular explicitamente ou aproximadamente. Essa forma de obter informação na variedade central vai consistir essencialmente no conhecimento de simetrias do sistema.

É introduzido na secção 3 o problema concreto a estudar, chamado aproximação de Boussinesq, que descreve através de uma equação diferencial parcial a dinâmica de um fluido 3-dimensional, em um cubo unitário, sujeito a diferenças de temperatura e com condições de fronteira específicas. Supõe-se que o comportamento do fluido se repete periodicamente no espaço, isto é em cada cubo unitário temos o mesmo comportamento por parte do fluido. O objectivo é obter a forma normal da variedade central supondo-a de dimensão 12 e estou interessado em estudar as bifurcações nesse espaço.

O estudo das bifurcações em uma variedade central de dimensão 8 foi feito em [6]. O artigo [5] apresenta resultados da integração numérica da equação diferencial parcial mas nem todos os tipos de bifurcação encontrados em [5] foram encontrados em [6]. Tentarei, com o aumento de dimensão da variedade central, encontrar todo o diagrama de bifurcação descrito em [5].

Na secção 4 apresento os resultados obtidos e o diagrama de bifurcação onde depois comparo-o com os já conhecidos em [5] e [6]. A maior parte do estudo das bifurcações é feito numericamente onde utilizo o software Matlab como apoio. No final faço uma pequena referência a possíveis direcções de investigação após este trabalho.

À minha Mãe  
e  
Padrinho.

## 2. RESULTADOS PRELIMINARES E EXEMPLOS

## 2.1. Variedade central e exemplos com equações diferenciais ordinárias.

Começo por falar sobre o conceito de variedade central e apresentar o *Teorema da existência da variedade central* [4] que proporcionará uma redução de dimensão do espaço de estados (por vezes de uma dimensão infinita para uma dimensão finita) e que terá uma extrema importância no estudo de bifurcações em qualquer tipo de sistema dinâmico.

Suponha um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$(1) \quad \dot{x} = f(x),$$

onde  $x \in \mathbf{R}^n$ . Suponha também que  $\bar{x}$  é ponto de equilíbrio de (1), ou seja  $f(\bar{x}) = 0$ .

Seja  $A$  a matriz que representa a linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$ , ou seja  $A = Df(\bar{x})$  onde  $Df$  representa a matriz Jacobiana de  $f$ . Dividindo os espaços próprios generalizados de  $A$  em três classes obtenho uma decomposição de  $\mathbf{R}^n$  em soma directa

$$\mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

onde  $E^s$  é a soma dos espaços próprios generalizados associados aos valores próprios cuja parte real é negativa,  $E^u$  é a soma dos espaços próprios generalizados associados aos valores próprios cuja parte real é positiva e  $E^c$  é a soma dos espaços próprios generalizados associados aos valores próprios cuja parte real é nula. Os espaços  $E^s$ ,  $E^u$  e  $E^c$  são chamados *espaços próprios estável, instável e central*, respectivamente.

As *variedades estável e instável locais* de um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  são variedades invariantes pelo fluxo local de  $f$ , tangentes aos espaços  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente, tais que

$$W_{loc}^s(\bar{x}) = \{x \in U \mid \phi_t(x) \in U \forall t \geq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = \bar{x}\},$$

$$W_{loc}^u(\bar{x}) = \{x \in U \mid \phi_t(x) \in U \forall t \leq 0, \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = \bar{x}\},$$

onde  $U$  é uma vizinhança aberta de  $\bar{x}$  e  $\phi_t(x) = \phi(x, t)$  é o fluxo local de (1), ou seja

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(x, t))|_{t=\tau} = f(\phi(x, \tau)), \quad \phi(x, 0) = x,$$

para  $\tau \in \mathbf{R}$ ,  $\tau$  próximo de zero.

A definição global destas variedades pode ser escrita como

$$W^s(\bar{x}) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(W_{loc}^s(\bar{x})),$$

$$W^u(\bar{x}) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(W_{loc}^u(\bar{x})).$$

Para simplificação tome-se  $\bar{x} = 0$ . Se  $A = Df(0)$  tiver somente valores próprios com parte real diferente de zero então o *Teorema de Hartman-Grobman*[4] diz-nos que a equação diferencial

$$(2) \quad \dot{x} = Ax$$

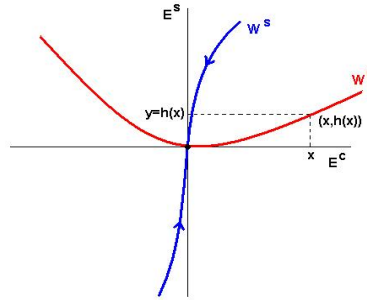


FIGURA 1. Variedade central e variedade estável.

é topologicamente equivalente à original  $\dot{x} = f(x)$  perto da origem, isto é existe um homeomorfismo  $h$  definido numa vizinhança  $V$  de  $0 \in \mathbf{R}^n$ ,  $h : V \rightarrow \mathbf{R}^n$ , tal que  $h$  tranforma trajetórias de (1) em trajetórias de (2), preservando orientação. Se  $A$  tiver valores próprios com parte real igual a zero, então é um pouco mais complicado tirar conclusões sobre a dinâmica do sistema perto do ponto de equilíbrio. Para esses casos apresento o seguinte teorema:

**Teorema 2.1.** *Seja  $f$  um campo de vectores de classe  $C^k$  em  $\mathbf{R}^n$  tal que  $f(0) = 0$  e seja  $A = Df(0)$ . Divide-se o espectro de  $A$  em três partes,  $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$ , com*

$$\mathbf{Re}(\lambda) \begin{cases} < 0 & \lambda \in \sigma_s, \\ = 0 & \lambda \in \sigma_c, \\ > 0 & \lambda \in \sigma_u. \end{cases}$$

*Sejam  $E^s, E^c$  e  $E^u$  os espaços próprios generalizados de  $\sigma_s, \sigma_c$  e  $\sigma_u$ , respectivamente. Então existem variedades invariantes (estável e instável) de classe  $C^k$ ,  $W^s(0)$  e  $W^u(0)$ , tangentes a  $E^s$  e  $E^u$  em 0, respectivamente, e existe uma variedade central de classe  $C^{k-1}$ ,  $W^c(0)$ , tangente a  $E^c$  em 0. As variedades estável e instável são únicas mas a central não tem de ser.*

*Demonstração.* Consultar [4], capítulo 3.3. □

A figura 1 ilustra de forma clara o que se acaba de enunciar (neste caso a existência de  $W^c(0)$  e  $W^s(0)$ ). O mesmo resultado vale para dimensão infinita mas com hipóteses adicionais.

O exemplo seguinte mostra como calcular a expressão que representa a variedade central e, por simplicidade, considero trivial a variedade instável (como na figura 1) e considero o seguinte sistema de dimensão finita e com a parte linear diagonal por blocos:

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Bx + f(x, y), \\ \dot{y} &= Cy + g(x, y), \end{aligned}$$

onde  $(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes com as dimensões apropriadas que têm valores próprios com parte real zero e negativa, respectivamente. Suponho também que  $Df(0, 0) = 0$  e  $Dg(0, 0) = 0$ . Aqui,  $E^c = \mathbf{R}^n$ ,  $E^s = \mathbf{R}^m$  e  $E^u = \{0\}$ .

Como a variedade central é tangente a  $E^c$  então é possível representar  $W^c$  como o gráfico (local) de uma aplicação  $h$ :

$$W^c = \{(x, y) \mid y = h(x)\}$$

com  $h(0) = 0$  e  $Dh(0) = 0$  onde  $h : U \mapsto \mathbf{R}^m$  é definida numa vizinhança  $U \subset \mathbf{R}^n$  da origem. Considero agora a restrição do campo de vectores à variedade central, parametrizada por  $x \in E^c$ :

$$\dot{x} = Bx + f(x, h(x)).$$

Para estudar esta equação precisamos de conhecer a função  $h$ . O gráfico de  $h$  é invariante pelo fluxo de (3) se e somente se  $\dot{y} = Dh(x)\dot{x}$  em todo o ponto  $(x, y)$  de  $W^c$ . Substituindo  $y = h(x)$  na segunda equação de (3) e, usando a regra da cadeia para a derivação, obtem-se

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x} = Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] = Ch(x) + g(x, h(x)),$$

ou  $\Omega(h(x)) = 0$  onde  $\Omega$  é definido como sendo

$$\Omega(h(x)) = Dh(x)[Bx + f(x, h(x))] - Ch(x) - g(x, h(x)),$$

com a condição de fronteira  $h(0) = 0$  e  $Dh(0) = 0$ .

Esta equação diferencial, na maior parte dos casos, não pode ser resolvida de forma exacta mas pode-se calcular uma solução, arbitrariamente próxima da exacta, como expansão de Taylor em  $x = 0$ :

**Teorema 2.2.** (Henry, Carr)[4] *Se existir uma função  $\phi(x)$  com  $\phi(0) = 0$  e  $D\phi(0) = 0$  tal que  $\Omega(\phi(x)) = O(|x|^p)$  para algum  $p > 1$  quando  $|x| \rightarrow 0$  então segue que*

$$h(x) = \phi(x) + O(|x|^p)$$

quando  $|x| \rightarrow 0$ , onde  $h(x)$  satisfaz  $\Omega(h(x)) = 0$ .

*Demonstração.* Consultar [4], capítulo 3.3. □

O próximo exemplo ilustra o uso do teorema anterior. Considere o sistema

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x+y)^2 - \beta(xy+y^2), \\ \dot{y} &= -y - \alpha(x+y)^2 + \beta(xy+y^2). \end{aligned}$$

Uma vez que tanto  $E^c$  como  $E^s$  têm dimensão 1 então  $h(x)$  vai ser uma função real de variável real e tem-se a seguinte condição para a determinar:

$$\begin{aligned} \Omega(h(x)) &= h'(x)[\alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x) + h(x)^2)] + \\ &+ h(x) + \alpha(x+h(x))^2 - \beta(xh(x) + h(x)^2) = 0, \end{aligned}$$

com  $h(0) = h'(0) = 0$ .

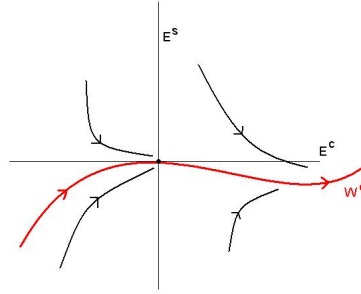
Usando o teorema 2.2 escrevo  $h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4)$  e substituindo em  $\Omega$  obtem-se os coeficientes  $a, b$ . Assim

$$h(x) = -\alpha x^2 + \alpha(4\alpha - \beta)x^3 + O(x^4)$$

e obtem-se a aproximação da equação reduzida à variedade central:

$$\dot{x} = \alpha(x^2 + (\beta - 2\alpha)x^3 + (9\alpha^2 - 7\alpha\beta + \beta^2)x^4) + O(x^5)$$



FIGURA 2. Dinâmica de (4) para valores de  $\alpha$  positivos.

Toda a dinâmica do exemplo anterior, para valores de  $\alpha$  positivos, pode então ser ilustrada na figura 2.

**2.2. Redução à variedade central para equações diferenciais parciais.** A redução à variedade central que foi descrita na secção 2.1 para equações diferenciais ordinárias (EDO's) pode ser também aplicada a equações diferenciais parciais (EDP's). Para isso interpreta-se a EDP como uma equação ordinária em um espaço de funções de dimensão infinita. O processo pode ser explicado em um exemplo simples: o problema de fronteira para uma equação em derivadas parciais

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + N(y) \\ y(t, 0) + \frac{\partial y}{\partial x}(t, 0) = 0 \\ y(t, 1) = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito como uma equação diferencial ordinária

$$(6) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = F(y)$$

onde  $F : V_k \rightarrow W_{k-2}$  é o operador  $F(y) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + N(y)$ . Os espaços de fase  $V_k$  e  $W_{k-2}$  vão ser

$$V_k = \{ y : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, y \in C^k \mid y(0) + y'(0) = 0, y(1) = 0 \},$$

$$W_{k-2} = \{ y : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, y \in C^{k-2} \},$$

para  $k > 2$ . Observe-se que  $V_k$  é um subespaço vectorial de  $W_{k-2}$ . Conclusão: vamos ver uma EDP como uma EDO em um espaço de funções, cuja solução  $y(t)$  é, para cada  $t$ , uma função de  $V_k$ .

Em  $V_k$  e  $W_{k-2}$  defina-se as normas

$$|y|_2 = \sup\{|y| + |y'| + |y''| : x \in [0, 1]\}$$

e

$$|y|_0 = \sup\{|y| : x \in [0, 1]\},$$

respectivamente, e assim tem-se que ambos os espaços são de Banach.

Vou supor que  $N : V_k \rightarrow W_{k-2}$  é um operador não linear com  $N(0) = 0$ . Por exemplo, seja  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função  $C^{k-2}$  tal que  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 0$  e seja  $N(y)$

o operador dado por  $N(y)(x) = f(y(x))$ . Como  $N(0) = 0$  então a função constante nula é um ponto de equilíbrio de (6).

Quero linearizar a equação (6) em torno da função constante nula. Para isso necessito do conceito de derivada de um operador:

Sejam  $V$  e  $W$  espaços de Banach e  $F : V \rightarrow W$ . Se existir um operador linear contínuo  $L : V \rightarrow W$  tal que

$$(7) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{F(y + sz) - F(y) - L(sz)\} = 0,$$

para  $s \in \mathbf{R}$  e para todo o  $z \in V$  e tal que o limite exista então  $\delta_y F(z) = L(z)$  é chamada *derivada de Gâteaux de  $F$  em  $y \in V$  na direcção de  $z \in V$* .

Para  $f(y)$  nas condições acima a derivada de Gâteaux de  $F$  em  $y = 0$ , na direcção de  $z \in V_k$  é

$$\delta_0 F(z) = L(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

porque, para  $s \neq 0 \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \{F(0 + sz) - F(0) - L(sz)\} = \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{\partial^2(0 + sz)}{\partial x^2} + f(0 + sz) - \frac{\partial^2 0}{\partial x^2} - f(0) - \frac{\partial^2 sz}{\partial x^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{s} \left\{ \frac{\partial^2 sz}{\partial x^2} + f(sz) - f(0) - \frac{\partial^2 sz}{\partial x^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{s} \{f(sz) - f(0)\}, \end{aligned}$$

logo

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \{f(sz) - f(0)\} = 0 = f'(0).$$

O operador linear  $L$  é contínuo uma vez que as normas em  $V_k$  e  $W_{k-2}$  foram definidas de forma a que isso acontecesse.

Assim, em torno da solução  $y = 0$  o operador linear  $L$  é exactamente  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . A equação linearizada vai ter a forma

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Ly = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Vou procurar as funções próprias associadas aos valores próprios do operador linear  $L$ , isto é, soluções  $Y \in V_k$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ , do problema

$$LY(x) = \lambda Y(x).$$

As funções próprias correspondentes aos valores próprios positivos, negativos e zero geram os espaços próprios  $E^u$ ,  $E^s$  e  $E^c$ , respectivamente.

Como estou interessado em calcular o  $E^c$  então tomo  $\lambda = 0$  e tenho que  $Y(x)$  vai ser da forma  $Y(x) = c_1 + c_2 x$  onde  $c_1, c_2$  são constantes. Usando as condições de fronteira obtém-se  $Y(x) = c(1 - x)$ . Assim

$$E^c = \{ r(1 - x) \mid r \in \mathbf{R} \} \cong \mathbf{R}$$

e

$$W^c = \{ r(1-x) + h(r) \mid r \in E^c, h(r) \in E^H, h : E^c \cong \mathbf{R} \rightarrow E^H \}$$

onde  $E^H$  é o complementar de  $E^c$ , no espaço de fase, invariante pela linearização (caso exista).

Voltando à equação original não linear tenho que para cada  $t \in \mathbf{R}$  fixado obtemos uma solução de (5)  $y(t)$  em  $W^c$  parametrizada por  $r(t)$ , ou seja  $t \rightarrow y(t) \in W^c$ . Dada uma condição inicial  $y(0)$ , que é uma função de  $x$ , procuro  $y(t, x) = r(t)(1-x) + h(r(t))(x)$ . Derivo em ordem ao tempo a solução  $y(t, x)$  e obtenho

$$\dot{y} = \dot{r}(1-x) + D(h(r)(x))\dot{r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(h(r)(x)) + N(h(r)(x)),$$

que é a equação para calcular  $h(x)$ . Esta equação não é trivial de se resolver e os casos em que se consegue resolver explicitamente, de forma a determinar a expressão de  $h(x)$ , são poucos e por isso é conveniente encontrar outra forma de obter a informação de  $h(x)$  mas sem a determinar explicitamente. É aqui que entra a informação que temos sobre as simetrias do sistema.

**2.3. Importância das simetrias.** Nesta secção é ilustrada a importância das simetrias num dado sistema para evitar o cálculo da função  $h(x)$  que, como visto na secção anterior, nem sempre é fácil de encontrar.

Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando num espaço vectorial  $V$  e seja  $\gamma$  um elemento de  $\Gamma$ . Seja  $F$  uma aplicação  $F : V \rightarrow V$ . Diz-se que  $F$  é  $\Gamma$ -equivariante se  $F(\gamma \cdot x) = \gamma \cdot F(x) \forall \gamma \in \Gamma$ .

Considero, por exemplo, a equação em derivadas parciais

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F(y),$$

com  $F(y)$   $Z_2$ -equivariante, onde  $Z_2 = \{\gamma, I\}$  com  $\gamma \cdot x = -x$ . Como a equação é  $Z_2$ -equivariante então a variedade central é  $Z_2$ -invariante. Assim, a restrição à variedade central é  $Z_2$ -invariante, isto é, se  $V$  tiver dimensão 1 então  $h(x)$  é uma função par.

Exemplo:

$$F(y) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y + y^3,$$

com as condições de fronteira  $y(t, -\pi) = y(t, \pi) = 0$ .

$F : V_k \rightarrow W_{k-2}$  onde

$$V_k = \{ y : [-\pi, \pi] \rightarrow R, y \in C^k \mid y(-\pi) = y(\pi) = 0 \},$$

$$W_{k-2} = \{ y : [-\pi, \pi] \rightarrow R, y \in C^{k-2} \}.$$

Calculando a derivada de Gâteaux de  $F$  em  $y = 0$  obtém-se o operador linear  $L = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y$ . O núcleo de  $L$  em  $V_k$  dá origem ao espaço central

$$E^c = \{ r \sin x \mid r \in R \}$$

e conclui-se que a acção de  $Z_2$  em  $E^c$  é a acção usual de  $Z_2$  em  $R$ .

**2.4. Forma normal.** Os resultados desta secção são um resumo do capítulo XII, secção 4 e 5 de [3]. Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando num espaço vectorial  $V$ . Diz-se que  $g : V \rightarrow \mathbf{R}$  é invariante por  $\Gamma$  ou  $\Gamma$  - *invariante* se  $g(\gamma x) = g(x) \forall \gamma \in \Gamma$ . Denota-se o anel dos polinómios invariantes por  $P(\Gamma)$ . Uma *base de Hilbert* é um subconjunto de polinómios invariantes por  $\Gamma$  tal que qualquer  $p \in P(\Gamma)$  se escreve como função polinomial dos elementos dessa base.

Exemplo:

$\Gamma = Z_2 = \{\gamma, I\}$ ,  $V = \mathbf{R}$ . Então  $P(\Gamma)$  constituído pelos polinómios pares.

Base de Hilbert =  $\{x^2\}$ .

**Teorema 2.3.** (*Hilbert-Weyl*) *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto. Então existe uma base de Hilbert finita para o anel  $P(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Consultar [3], capítulo 7.4. □

O *germe* em  $x \in V$  de uma aplicação  $g : V \rightarrow W$  é a classe de equivalência de todas as aplicações definidas em torno de  $x$  e que coincidem com  $g$  em alguma vizinhança de  $x$ . Denota-se por  $G(\Gamma)$  o anel dos germes na origem de aplicações  $f : V \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^k$  e invariantes por  $\Gamma$ .

**Teorema 2.4.** (*Schwarz*) *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto e seja  $u_1, \dots, u_s$  a base de Hilbert para  $P(\Gamma)$ . Seja  $f \in G(\Gamma)$ . Então existe um germe,  $h \in G_s$ , tal que*

$$f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x)),$$

onde  $G_s$  é o anel dos germes de  $\mathbf{R}^s \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $C^\infty$ .

*Demonstração.* Consultar [3], capítulo 7.4. □

Resumindo, o teorema 2.3 diz que existe uma base de Hilbert finita para cada  $P(\Gamma)$  e em seguida o teorema 3.2.2 faz a ligação dessa base com o espaço  $G(\Gamma)$ .

Seja agora  $\vec{P}(\Gamma)$  o espaço das aplicações polinomiais  $\Gamma$  - *equivariantes* de  $V$  em  $V$  e seja  $\vec{G}(\Gamma)$  o espaço dos germes na origem de classe  $C^\infty$   $\Gamma$  - *equivariantes* de  $V$  em  $V$ . É possível provar que  $\vec{P}(\Gamma)$  é um módulo sobre o anel dos polinómios invariantes  $P(\Gamma)$  e  $\vec{G}(\Gamma)$  é um módulo sobre o anel das aplicações invariantes (germes)  $C^\infty G(\Gamma)$  (consultar [3]). Diz-se que os polinómios  $\Gamma$  - *equivariantes*  $g_1, \dots, g_r$  geram o módulo  $\vec{P}(\Gamma)$  sobre o anel  $P(\Gamma)$  se toda a aplicação  $g$   $\Gamma$  - *equivariante* se pode escrever como

$$g = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r$$

onde cada  $f_i \in P(\Gamma)$ . A esta representação chamo *forma normal*. Uma definição análoga pode ser feita para  $\vec{G}(\Gamma)$ .

Em seguida são enunciados resultados análogos aos dos teoremas 2.3 e 2.4 mas agora direccionados para  $\vec{P}(\Gamma)$  e  $\vec{G}(\Gamma)$ .

**Teorema 2.5.** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto. Então existe um conjunto finito de polinómios  $\Gamma$  – equivariantes que geram o módulo  $\vec{P}(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Consultar [3], capítulo 7.5. □

**Teorema 2.6.** *(Poénaru) Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto e suponha que  $g_1, \dots, g_r$  geram o módulo  $\vec{P}(\Gamma)$  sobre o anel  $P(\Gamma)$ . Então  $g_1, \dots, g_r$  geram o módulo  $\vec{G}(\Gamma)$  sobre o anel  $G(\Gamma)$ .*

*Demonstração.* Consultar [3], capítulo 7.5. □

Para que melhor se perceba as implicações dos teoremas anteriores apresento o seguinte exemplo:

Seja  $\Gamma = S^1$  na sua acção standard em  $V = \mathbf{C}$ . Vou provar que toda a aplicação  $g \in \vec{G}(S^1)$  tem a forma

$$g(z) = p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})iz$$

onde  $p, q$  são funções de valor real invariantes por  $S^1$ .

Seja  $g \in \vec{P}(S^1)$ . Nas coordenadas  $z, \bar{z}$ , por  $S^1$  a função  $g$  tem a forma

$$g = \sum b_{jk} z^j \bar{z}^k$$

onde  $b_{jk} \in \mathbf{C}$ .

A condição de equivariância pode ser interpretada como condição de invariância da seguinte forma

$$g(x) = \gamma^{-1}g(\gamma x).$$

Então tem-se

$$g = e^{-i\theta} \sum b_{jk} e^{(j-k)i\theta} z^j \bar{z}^k = \sum b_{jk} e^{(j-k-1)i\theta} z^j \bar{z}^k.$$

Assim  $b_{jk} = 0$  a não ser que  $j = k + 1$ . Logo

$$g(z) = \sum b_{k+1,k} (z^k \bar{z}^k) z.$$

Agora é só aplicar o teorema 2.6.

## 3. PROBLEMA CONCRETO

**3.1. Aproximação de Boussinesq.** Esta secção é um resumo de alguns resultados de [2], [5] e [6].

A aproximação de Boussinesq consiste na equação de um fluido num cubo unitário sujeito a uma diferença de temperatura. O fluxo velocidade  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  é governado pela equação de Navier-Stokes

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + P(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{v} + PR\theta e_z - \nabla p$$

com a condição de incompressibilidade

$$(9) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

onde  $p$  significa pressão,  $P$  o número de Prandtl,  $R$  o número de Rayleigh e  $\theta$  está associado à variação da temperatura dentro do cubo que obedece à equação

$$(10) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta + v_z + (\nabla \cdot \nabla)\theta.$$

São assumidas nos limites horizontais, ou seja em  $z = 0$  e  $z = 1$ , as seguintes condições de fronteira para o fluxo e temperatura:

$$(11) \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = v_z = 0$$

e

$$(12) \quad \theta = 0.$$

Vou considerar que o fluxo é periódico no quadrado  $(x, y)$ , ou seja, para um  $L > 0$  temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z) &= \mathbf{v}(x + pL, y + qL, z), \\ \theta(x, y, z) &= \theta(x + pL, y + qL, z) \end{aligned}$$

para todo o  $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ .

O sistema de equações (8)-(12) admite a solução trivial  $\mathbf{v} = 0$  e  $\theta = 0$ . Linearizando em torno desse estado tem-se que

$$(13) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = P(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{v} + PR\theta e_z - \nabla p,$$

$$(14) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$(15) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - v_z = (\nabla \cdot \nabla)\theta.$$

Aplicando duas vezes o rotacional sobre a equação (13), usando (14) e olhando só para a componente  $z$  de  $\mathbf{v}$  obtemos

$$(16) \quad \frac{\partial(\nabla \cdot \nabla)w}{\partial t} = RP(\nabla \cdot \nabla)_1\theta + P(\nabla \cdot \nabla)^2w,$$

onde  $(\nabla \cdot \nabla)_1$  denota-se como sendo o Laplaciano horizontal e  $w = v_z$ .

Usando (15), elimina-se  $\theta$  da expressão (16) e finalmente tem-se:

$$(17) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla \right) \left( \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla \right) \nabla \cdot \nabla w = R(\nabla \cdot \nabla)_1 w.$$

Para calcular os valores e vectores próprios da equação linearizada supõem-se separáveis as variáveis, escrevendo  $\theta = T(z)f(x,y)e^{st}$  e  $w = W(z)f(x,y)e^{st}$ , onde  $s$  é a variável que determina a estabilidade temporal da solução. Considero  $f$  como sendo função própria do problema

$$(18) \quad (\nabla \cdot \nabla)_1 f = -a^2 f,$$

onde  $-a^2$  é o valor próprio associado a  $f$ . Identifico  $a$  como sendo o *número de onda horizontal*.

De novo usando (15) juntamente com (16), (17) e (18) chega-se ao problema

$$(19) \quad (D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s)(D^2 - a^2 - s/P)W = -a^2 RW$$

com as condições de fronteira  $W = D^2 W = T = 0$  para  $z = 0, 1$ , onde  $D = \frac{\partial}{\partial z}$  e  $T = (a^2 R)^{-1}(D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - s/P)W$ .

Este é um problema de valor próprio que determina as características da estabilidade temporal tanto de  $\theta$  como de  $w$ . Conclui-se então que se  $R < 0$  temos  $\mathbf{Re}(s) < 0$ , onde  $s$  é a variável que determina a estabilidade da solução constante (solução em torno da qual se linearizou). Se  $R > 0$  temos  $\mathbf{Im}(s) = 0$ .

É possível verificar que  $W = W_n = \sin n\pi z$  e  $s = s_n$  são soluções para o problema (19) onde  $s_n$  satisfaz

$$(n^2\pi^2 + a^2)(n^2\pi^2 + a^2 - s_n)(n^2\pi^2 + a^2 - s_n/P) = a^2 R.$$

Tomando  $s_n = 0$ , da equação anterior tem-se

$$R_n(a) = (n^2\pi^2 + a^2)^3 a^{-2}$$

onde  $a$  é o número de onda horizontal e  $n \in N$ .

Neste momento é possível considerar uma infinidade de valores próprios nulos. O que se faz é procurar valores de  $R$  e de  $a$  de forma a se obter um número finito de valores de  $n$  para os quais  $s_n = 0$ . Para  $n = 1$  diz-se que o estado estável torna-se instável a perturbações com número de onda  $a$  na direcção do vector próprio

$$V_1(a) = \begin{pmatrix} -\pi a^{-1} \cos \pi z \sin ax \\ 0 \\ \sin \pi z \cos ax \\ q_1(P, R) \sin \pi z \cos ax \end{pmatrix}.$$

Calculando o mínimo para todos os números de onda em  $R_1(a)$  foi obtido em [6] o valor  $27\pi^4/4$ , onde o valor crítico de onda, para o qual se perde estabilidade temporal, é  $a_1 = \pi/\sqrt{2}$ . Para valores acima deste valor crítico de  $R_1(a)$  podemos encontrar valores de  $a$  para os quais  $s_1 = 0$ .

São considerados mais dois vectores próprios associados a valores próprios nulos

$$V_2(a) = \begin{pmatrix} -\pi a^{-1} \cos \pi z \sin(ax + ay) \\ -\pi a^{-1} \cos \pi z \sin(ax + ay) \\ \sin \pi z \cos(ax + ay) \\ q_2(P, R) \sin \pi z \cos(ax + ay) \end{pmatrix},$$

$$V_3(a) = \begin{pmatrix} -\pi(2a)^{-1} \cos \pi z \sin 2ax \\ 0 \\ \sin \pi z \cos 2ax \\ q_3(P, R) \sin \pi z \cos 2ax \end{pmatrix}.$$

Note-se que nestas direcções considera-se uma perda de estabilidade simultânea por parte destes vectores. Para mais pormenores consultar [2] e [6].

### 3.2. O grupo das simetrias.

3.2.1. *Simetrias no nosso problema.* O grupo das simetrias do sistema de equações (8)-(12) pode ser expresso como  $D_4 \times T^2 \times Z_2$  [5]. O grupo das simetrias do quadrado,  $D_4$ , actua no plano  $(x, y)$  fixando a coordenada  $z$ . Este grupo tem como elementos as rotações em torno da origem de ângulos  $-\pi/2$ ,  $\pi$  e  $\pi/2$  ( $s_1 : -\pi/2$ ,  $s_2 : \pi$ ,  $s_3 : \pi/2$ ), as reflexões que fixam as rectas  $\{x\}$ ,  $\{y\}$ ,  $\{x = y\}$  e  $\{x = -y\}$  ( $s_4$  fixa  $\{x\}$ ,  $s_5$  fixa  $\{y\}$ ,  $s_6$  fixa  $\{x = y\}$ ,  $s_7$  fixa  $\{x = -y\}$ ) e a identidade ( $s_0 = e$ ).

O grupo  $T^2 = T_x \times T_y$  é composto pelas translações em  $x$ , translações em  $y$  e translações sobre a diagonal ( $\gamma_\alpha^x$ ,  $\gamma_\alpha^y$  e  $\gamma_\alpha^{xy}$ , respectivamente). Note-se que  $0 \leq \alpha \leq L$  e que  $\gamma_L^x = \gamma_L^y = \gamma_L^{xy} = e$ .

O grupo  $Z_2$  é gerado pela reflexão sobre o plano horizontal médio ( $z = 1/2$ ), isto é,

$$r : (x, y, z) \rightarrow (x, y, 1 - z).$$

3.2.2. *Simetrias na variedade central de dimensão 12.* Começo por definir a acção como sendo a acção física de  $\Gamma$  (grupo de Lie compacto) em aplicações: para uma aplicação  $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  e para  $\delta \in \Gamma$  defina-se

$$(\delta \cdot f)(x, y, z) = \delta' f(\delta^{-1}(x, y, z)),$$

onde  $\delta'$  actua da seguinte forma:

- Se  $\delta$  for uma translação então  $\delta' = I$ ,
- Se  $\delta$  for uma reflexão então  $\delta'(x, y, z) = (x, y, -z)$ ,
- Para os restantes casos  $\delta' = \delta$ .

Esta interpretação está relacionada com o facto de se estar a identificar simetrias no espaço das velocidades. É fácil verificar que, por exemplo, para a reflexão, se se considerar um vector velocidade num ponto perto de  $z = 0$  e com componente segundo  $z$  positiva, então a sua reflexão será um vector num ponto perto de  $z = 1$  mas com componente negativa. Se fosse considerado  $\delta' = \delta$  chegaria-se a uma contradição uma vez que a trajectória sairia fora do cubo unitário (ver figura 3).

Considero o espaço central gerado pelas funções próprias  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  da secção 3.1



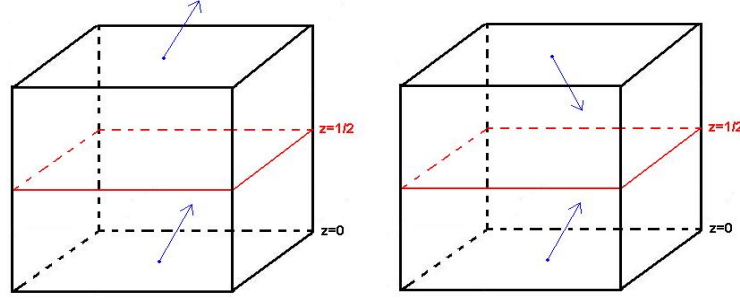


FIGURA 3. Absurdo para o caso do lado esquerdo; simetria para o caso do lado direito.

e pelas suas imagens simétricas:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= V_1, & Y_1 &= \gamma_{L/4}^x \cdot V_1, \\
 X_2 &= s_6 \cdot V_1, & Y_2 &= \gamma_{L/4}^y \cdot s_6 \cdot V_1, \\
 X_3 &= V_2, & Y_3 &= \gamma_{L/4}^x \cdot V_2, \\
 X_4 &= s_4 \cdot V_2, & Y_4 &= \gamma_{L/4}^x \cdot s_4 \cdot V_2, \\
 X_5 &= V_3, & Y_5 &= \gamma_{L/8}^x \cdot V_3, \\
 X_6 &= s_6 \cdot V_3, & Y_6 &= \gamma_{L/8}^y \cdot s_6 \cdot V_3.
 \end{aligned}$$

As coordenadas  $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in \mathbf{C}^6$  na variedade central podem ser introduzidas como projecções nas direcções  $X_i$  e  $Y_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Estou interessado em saber de que forma as simetrias do sistema transformam estas coordenadas.

As imagens simétricas de  $X_1, Y_1, X_2$  e  $Y_2$  pertencem ao espaço gerado por estes quatro vectores e por isso as simetrias transformam o espaço  $\mathbf{C}^2 \times \{0\} \times \{0\}$  em si mesmo. Em geral as simetrias actuam independentemente em  $\mathbf{C}^2 \times \{0\} \times \{0\}$ , em  $\{0\} \times \mathbf{C}^2 \times \{0\}$  e em  $\{0\} \times \{0\} \times \mathbf{C}^2$ .

Escolho uma simetria, digamos  $s_1$  e uma vez que as simetrias actuam independentemente em  $\mathbf{C}^2 \times \{0\} \times \{0\}$ , em  $\{0\} \times \mathbf{C}^2 \times \{0\}$  e em  $\{0\} \times \{0\} \times \mathbf{C}^2$  então começo por considerar o ponto  $P_1 = (z_1, z_2)$  onde  $z_j = x_j + iy_j$ . O ponto  $P_1$  pode ser escrito como combinação da base da variedade central, isto é,

$$P_1 = x_1 X_1 + y_1 Y_1 + x_2 X_2 + y_2 Y_2 = (z_1, z_2)$$

e assim basta ver como é a acção de  $s_1$  nos vectores da base

$$s_1 \cdot X_1 = s_1 \cdot \begin{pmatrix} -\pi k^{-1} \cos \pi z \sin kx \\ 0 \\ \sin \pi z \cos kx \\ (k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos kx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi k^{-1} \cos \pi z \sin -ky \\ \sin \pi z \cos -ky \\ (k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos -ky \end{pmatrix} = s_6 \cdot V_1 = X_2,$$

$$\begin{aligned}
s_1 \cdot Y_1 &= s_1 \cdot \begin{pmatrix} -\pi k^{-1} \cos \pi z \sin k(x - L/4) \\ 0 \\ \sin \pi z \cos k(x - L/4) \\ (k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos k(x - L/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi k^{-1} \cos \pi z \sin k(-y - L/4) \\ \sin \pi z \cos k(-y - L/4) \\ (k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos k(-y - L/4) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \pi k^{-1} \cos \pi z \sin k(y - L/4) \\ -\sin \pi z \cos k(y - L/4) \\ -(k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos k(y - L/4) \end{pmatrix} = -Y_2, \\
s_1 \cdot X_2 &= s_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi k^{-1} \cos \pi z \sin ky \\ \sin \pi z \cos ky \\ (k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi k^{-1} \cos \pi z \sin kx \\ 0 \\ \sin \pi z \cos kx \\ (k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos kx \end{pmatrix} = X_1, \\
s_1 \cdot Y_2 &= s_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi k^{-1} \cos \pi z \sin k(y - L/4) \\ \sin \pi z \cos k(y - L/4) \\ (k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos k(y - L/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi k^{-1} \cos \pi z \sin k(x - L/4) \\ \pi k^{-1} \cos \pi z \sin k(x - L/4) \\ \sin \pi z \cos k(x - L/4) \\ (k^2 + \pi^2) \sin \pi z \cos k(x - L/4) \end{pmatrix} = Y_1.
\end{aligned}$$

Conclui-se então que  $s_1 \cdot P_1 = Q_1 = x_1 X_2 - y_1 Y_2 + x_2 X_1 + y_2 Y_1 = (z_2, \bar{z}_1)$  e portanto,  $z_1$  é transformado em  $z_2$  e  $z_2$  é transformado em  $\bar{z}_1$  pela acção de  $s_1$ . Desta forma constrói-se um dicionário das simetrias da variedade central, em  $\mathbf{C}^6$ :

$$\begin{aligned}
s_1 &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_4, z_3, z_6, \bar{z}_5), \\
s_2 &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4, \bar{z}_5, \bar{z}_6), \\
s_3 &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (\bar{z}_2, z_1, z_4, \bar{z}_3, \bar{z}_6, z_5), \\
s_4 &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (z_1, \bar{z}_2, z_4, z_3, z_5, \bar{z}_6), \\
s_5 &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (\bar{z}_1, z_2, \bar{z}_4, \bar{z}_3, \bar{z}_5, z_6), \\
s_6 &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (z_2, z_1, z_3, \bar{z}_4, z_6, z_5), \\
s_7 &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (\bar{z}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_3, z_4, \bar{z}_6, \bar{z}_5), \\
\gamma_\alpha^x &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (e^{i\alpha} z_1, z_2, e^{i\alpha} z_3, e^{i\alpha} z_4, e^{2i\alpha} z_5, z_6), \\
\gamma_\alpha^y &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (z_1, e^{i\alpha} z_2, e^{i\alpha} z_3, e^{-i\alpha} z_4, z_5, e^{2i\alpha} z_6), \\
r &: (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (-z_1, -z_2, -z_3, -z_4, -z_5, -z_6).
\end{aligned}$$

**3.3. Forma normal da variedade central.** A forma normal definida na secção 2.4 foi calculada em [7] (são análogos aos cálculos efectuados em [6]) para um campo de vectores em  $\mathbf{R}^{12}$  equivariante para a acção de  $D_4 \times T^2 \times Z_2$  e é a seguinte:

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + z_1(A_1 \|z_1\|^2 + A_2 \|z_2\|^2 + B_1(\|z_3\|^2 + \|z_4\|^2) + C_1 \|z_5\|^2 + C_2 \|z_6\|^2) + B_2 \bar{z}_1 z_3 z_4 + E_1(z_2 z_3 \bar{z}_6 + \bar{z}_2 z_4 z_6) + E_2(z_2 \bar{z}_3 z_5 + \bar{z}_2 \bar{z}_4 z_5),$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_1 z_2 + z_2(A_1 \|z_2\|^2 + A_2 \|z_1\|^2 + B_1(\|z_3\|^2 + \|z_4\|^2) + C_1 \|z_6\|^2 + C_2 \|z_5\|^2) + B_2 \bar{z}_2 z_3 \bar{z}_4 + E_1(z_1 z_3 \bar{z}_5 + \bar{z}_1 \bar{z}_4 z_5) + E_2(z_1 \bar{z}_3 z_6 + \bar{z}_1 z_4 z_6),$$

$$\dot{z}_3 = \lambda_2 z_3 + z_3(A_3 \|z_3\|^2 + A_4 \|z_4\|^2 + B_3(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2) + D_1(\|z_5\|^2 + \|z_6\|^2)) + B_4(z_2^2 z_4 + z_1^2 \bar{z}_4) + D_2 \bar{z}_3 z_5 z_6 + E_3(\bar{z}_1 z_2 z_5 + z_1 \bar{z}_2 z_6),$$

$$\dot{z}_4 = \lambda_2 z_4 + z_4(A_3 \|z_4\|^2 + A_4 \|z_3\|^2 + B_3(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2) + D_1(\|z_5\|^2 + \|z_6\|^2)) + B_4(\bar{z}_2^2 z_3 + z_2^2 \bar{z}_3) + D_2 \bar{z}_4 z_5 \bar{z}_6 + E_3(\bar{z}_1 \bar{z}_2 z_5 + z_1 z_2 \bar{z}_6),$$

$$\dot{z}_5 = \lambda_3 z_5 + z_5(A_5 \|z_5\|^2 + A_6 \|z_6\|^2 + C_3 \|z_1\|^2 + C_4 \|z_2\|^2 + D_3(\|z_3\|^2 + \|z_4\|^2)) + D_4(z_4^2 z_6 + z_3^2 \bar{z}_6 + E_4(z_1 \bar{z}_2 z_3 + z_1 z_2 z_4)),$$

$$\dot{z}_6 = \lambda_3 z_6 + z_6(A_1 \|z_6\|^2 + A_2 \|z_5\|^2 + C_3 \|z_2\|^2 + C_4 \|z_1\|^2 + D_3(\|z_3\|^2 + \|z_4\|^2)) + D_4(\bar{z}_4^2 z_5 + z_3^2 \bar{z}_5 + E_4(\bar{z}_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 \bar{z}_4)).$$

Os coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  e  $\lambda$ 's, são números reais que caracterizam o problema. Temos assim uma redução na dimensão do sistema. Interessa-me agora descrever a sua dinâmica.

**3.4. Coeficientes da forma normal.** Seja  $d = R - R_m$  o parâmetro de bifurcação. Os coeficientes lineares da forma normal da secção 3.3 podem ser calculados numa vizinhança de  $d = 0$  (ver apêndice A de [7]):

$$\lambda_1 = \lambda_{1,1}d + O(d^2),$$

$$\lambda_2 = \lambda_{2,0} + \lambda_{2,1}d + O(d^2),$$

$$\lambda_3 = \lambda_{3,0} + \lambda_{3,1}d + O(d^2),$$

onde  $\lambda_{1,1} = 0.0081057$ ,  $\lambda_{2,0} = 1.1226$ ,  $\lambda_{2,1} = 0.010464$ ,  $\lambda_{3,0} = -0.11635$ ,  $\lambda_{3,1} = 0.012816$ .

Os outros coeficientes da forma normal podem ser calculados analiticamente (ver apêndice B de [7]):

$$\begin{aligned} A_1 &= -0.0625, & A_2 &= -0.1166, & A_3 &= -0.0625, & A_4 &= -0.1155, & A_5 &= -0.062128, \\ A_6 &= -0.10938, & B_1 &= 0.020779, & B_2 &= -0.32498, & B_3 &= -0.44342, & B_4 &= 0.20486, \\ C_1 &= -0.073095, & C_2 &= -0.097732, & C_3 &= -0.50467, & C_4 &= -0.24979, & D_1 &= -0.032511, \\ D_2 &= -0.23927, & D_3 &= -0.29337, & D_4 &= 0.06366, & E_1 &= -0.089941, & E_2 &= -0.056272, \\ E_3 &= -0.22446, & E_4 &= 0.02544. \end{aligned}$$

#### 4. SUMÁRIO DAS BIFURCAÇÕES NO SISTEMA REDUZIDO

Nesta secção vou investigar as bifurcações da forma normal da secção 3.3, variando o número de Rayleigh  $R$ . O número de Prandtl é considerado como sendo  $P = 1$ . Este tipo de estudo numérico é efectuado em [6] mas considerando a redução à variedade central de dimensão 8. O artigo [5] apresenta resultados da integração numérica da EDP mas nem todos os tipos de soluções encontradas em [5] foram encontradas em [6]. Aqui o objectivo é encontrar todo o diagrama de bifurcação de [6] e tentar encontrar novas soluções que não foram encontradas em [6], ou seja tentar com que o aumento de dimensão nos traga nova informação sobre a dinâmica na variedade central.

A forma normal apresentada na secção 3.3 é implementada num algoritmo Matlab onde utilizo a toolbox *ode45* (Runge-Kutta (4,5)) para integrar numericamente as soluções (ver apêndice). Todos os resultados numéricos que apresento nesta secção são obtidos através do software Matlab.

Aqui  $\Gamma$  é sempre considerado um grupo de Lie compacto atuando em um espaço vectorial  $V$  e para o sistema da secção 3.3 tem-se  $\Gamma = D_4 \times T^2 \times Z_2$  actuando com a acção em  $\mathbf{R}^{12}$  definida em 3.2.2.

##### 4.1. Solução trivial $S_0$ .

**Definição 4.1.** *Um problema de bifurcação com grupo de simetria  $\Gamma$  é um germe  $g \in G_{x,\lambda}(\Gamma)$  satisfazendo  $g(0,0) = 0$  e  $(dg)_{0,0} = 0$ .*

Aqui  $g$  é uma aplicação  $C^\infty$  da forma  $g : V \times \mathbf{R} \rightarrow V$  satisfazendo  $g(\gamma x, \lambda) = \gamma g(x, \lambda)$  para  $\forall \gamma \in \Gamma$ . A aplicação  $dg$  é a derivada em ordem a  $x$ . Neste caso  $(dg)_{0,0}$  é a derivada em ordem a  $x$  no ponto  $(x, \lambda) = (0, 0)$ .

O parâmetro  $\lambda$  é chamado parâmetro de bifurcação. Para o problema da secção 3.3 com as considerações da secção 3.4 o parâmetro  $d$  tem o mesmo significado de  $\lambda$ .

Para valores de  $d$  abaixo de  $-107$  ( $R < 654$ ) é observado que todas as soluções tendem para a origem, o ponto de equilíbrio trivial. Chamo a este tipo de solução *solução trivial* e denoto-a por  $S_0$ .

**4.2. Ramo primário  $S_1$ .** Quando o parâmetro de bifurcação  $d$  aumenta, acima de  $d = -107$  a solução trivial  $S_0$  perde a estabilidade e aparece um ramo de soluções que tem menos simetria e que será discutido a seguir. A esse ramo de soluções vou chamar de *ramo primário* e denoto este tipo de solução por  $S_1$ . Para já introduzo algumas definições e resultados para usar posteriormente.

**Definição 4.2.** *Chama-se subgrupo de isotropia de  $x \in V$  ao subgrupo  $\Sigma_x \subset \Gamma$  tal que*

$$\Sigma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}.$$

**Definição 4.3.** *Seja  $\Sigma \subset \Gamma$  um subgrupo. O fixado de  $\Sigma$  é definido como sendo*

$$Fix(\Sigma) = \{x \in V : \sigma x = x \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

**Definição 4.4.** *Seja  $\Sigma \subset \Gamma$  um subgrupo e seja  $\gamma \in \Gamma$ . Então*

$$\gamma\Sigma\gamma^{-1} = \{\gamma\sigma\gamma^{-1} : \sigma \in \Sigma\}$$

*é subgrupo de  $\Gamma$  dito conjugado de  $\Sigma$ .*

**Lema 4.1.** *Seja  $\Sigma \subset \Gamma$  um subgrupo. Então  $Fix(\gamma\Sigma\gamma^{-1}) = \gamma Fix(\Sigma) \forall \gamma \in \Gamma$ .*

*Demonstração.* Um ponto  $x$  está em  $Fix(\gamma\Sigma\gamma^{-1})$  se e só se para todo o  $\sigma \in \Sigma$  tem-se  $\gamma\sigma\gamma^{-1}x = x$ . Aplicando devidamente  $\gamma^{-1}$  em ambos os lados da equação conclui-se que esta é equivalente a  $\sigma\gamma^{-1}x = \gamma^{-1}x$  o que significa que  $\gamma^{-1}x \in Fix(\Sigma)$ , ou seja, que  $x \in \gamma Fix(\Sigma)$ .  $\square$

**Lema 4.2.** *Seja  $\Sigma \subset \Gamma$  um subgrupo. Se  $F : V \rightarrow V$  é  $\Gamma$ -equivariante então temos que  $F(Fix(\Sigma)) \subset Fix(\Sigma)$  e portanto  $Fix(\Sigma)$  é invariante por  $F$ .*

*Demonstração.* Ver [3], capítulo 7.2.  $\square$

Para valores de  $d$  contidos no intervalo  $] -107, -32[$  ( $654 < R < 729$ ) tem-se que as soluções tendem para um ponto de equilíbrio fora da origem (ver figura 4). O subgrupo de isotropia é dado por

$$\Sigma = D_2 \times T \times Z_2$$

e o seu fixado por

$$Fix(\Sigma) = \{z = (0, 0, x, 0, 0, 0) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{C}^6.$$

É possível observar na figura 4 que para diferentes condições iniciais existem diferentes pontos de equilíbrio e que nem todas as soluções tendem para o  $Fix(\Sigma)$ . Esta observação é facilmente justificada a partir dos lemas 4.1 e 4.2. Assim conclui-se que os diferentes pontos de equilíbrio que aparecem para estes valores de  $d$  estão em subespaços conjugados a  $Fix(\Sigma)$ . Condições iniciais contidas em  $Fix(\Sigma)$  fazem com que as soluções permaneçam em  $Fix(\Sigma)$ , para todos os tempos em que estão definidas. Neste caso observa-se que, de todos os elementos de  $\Gamma$ , somente os elementos  $s_1, s_3, s_4, s_5, \gamma_\alpha^x$  e  $\gamma_\alpha^y$  modificam a forma do  $Fix(\Sigma)$  e a maior parte deles modifica de maneira equivalente. Assim os conjugados vão ser da forma

$$\{(0, 0, sz_0, 0, 0, 0), s \in \mathbf{R}\}$$

ou

$$\{(0, 0, 0, sz_0, 0, 0), s \in \mathbf{R}\}$$

para algum  $z_0 \in \mathbf{C}$  fixo, que são os espaços contendo as soluções observadas na figura 4.

Voltando à bifurcação  $S_0 \rightarrow S_1$ , mesmo antes de verificar numericamente a sua existência já era sabido que ela existia uma vez que o *Equivariant Branching Lemma*[3] diz-nos exactamente isso:

**Teorema 4.1.** *Seja  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto actuando sobre um espaço vectorial  $V$ . Assumindo que*

- (1)  $Fix(\Gamma) = \{0\}$ ,
- (2)  $\Sigma \subset \Gamma$  é um subgrupo de isotropia onde  $Dim(Fix(\Sigma)) = 1$ ,

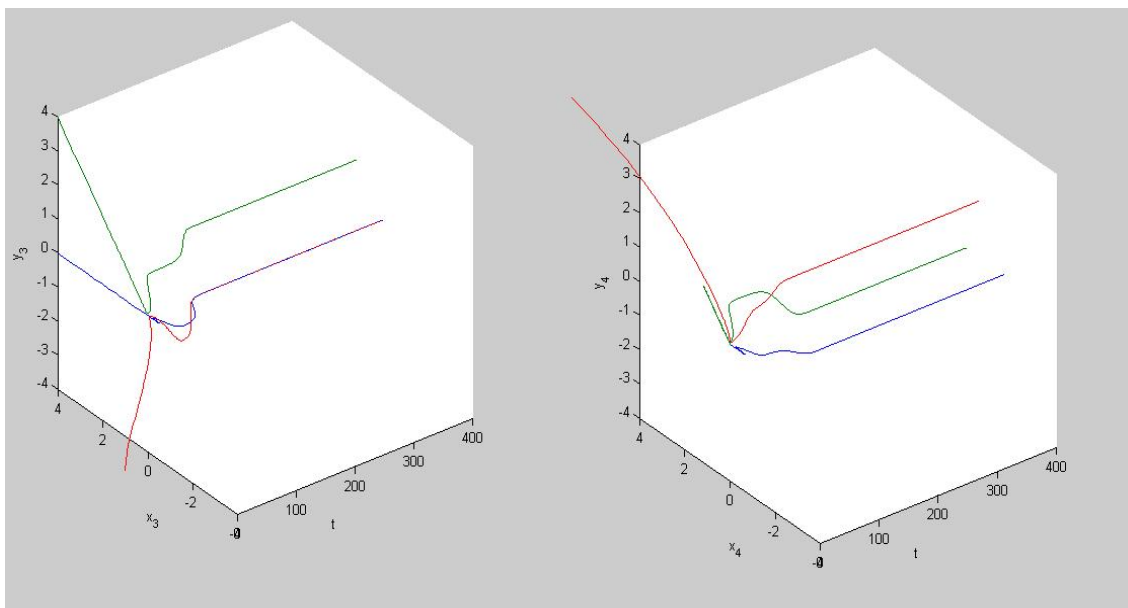


FIGURA 4. Evolução temporal das variáveis  $z_3$  e  $z_4$  para diferentes condições iniciais, onde  $d = -90$  ( $R = 671$ ). As restantes componentes tendem para zero. Azul: condição inicial  $(7, 0, 7, 0, 5, 0, 0, 0, 6, 0, 6, 0)$ ; Verde: condição inicial  $(10, 10, 10, 0, 4, 4, 0, 0, 0, -3, -3, 0)$ ; Vermelho: condição inicial  $(-12, 3, 7, 8, 1, -5, 7, 4, -2, 5, 15, -1)$ .

- (3)  $g : V \times \mathbf{R} \rightarrow V$  é um problema de bifurcação (definição 4.1) com grupo de simetria  $\Gamma$  satisfazendo

$$(dg_\lambda)_{0,0}(v_0) \neq 0$$

onde  $(dg_\lambda)_{0,0}$  é a derivada de  $dg$  em ordem a  $\lambda$  e  $v_0 \in \text{Fix}(\Sigma)$  é não nulo.

Então existe um ramo de soluções  $(sv_0, \lambda(s))$ ,  $s \in \mathbf{R}$  pequeno, para a equação  $g(s, \lambda) = 0$  contido em  $\text{Fix}(\Sigma)$ .

*Demonstração.* Consultar [3], capítulo 8.3. □

É fácil verificar que o problema da secção 3.3 está nas condições do teorema. As condições (1) e (2) são triviais de se verificar. A condição (3) diz que a aplicação  $(dg_\lambda)_{0,0} : T_0V \times T_0\mathbf{R} \rightarrow T_0V$  é não nula para todo o ponto não nulo pertencente ao  $\text{Fix}(\Sigma)$  e de facto no problema da secção 3.3 observa-se que esta aplicação é constante igual à identidade e portanto a condição (3) é verificada.

**4.3. Ramo secundário  $S_2$ .** O ramo que bifurca por perda de estabilidade do ramo primário  $S_1$  vai ser chamado de *ramo secundário* denotado por  $S_2$ . Esta perda de estabilidade por parte de  $S_1$  vai acontecer para valores de  $d$  próximos de  $-32$ . Para valores de  $d$  contidos no intervalo  $] -32, 23[$  ( $729 < R < 784$ ) tem-se que as soluções tendem para um ponto de equilíbrio fora da origem mas agora com menos simetria que em  $S_1$  (ver figura 5). O subgrupo de isotropia é dado por

$$\Sigma = D_2$$

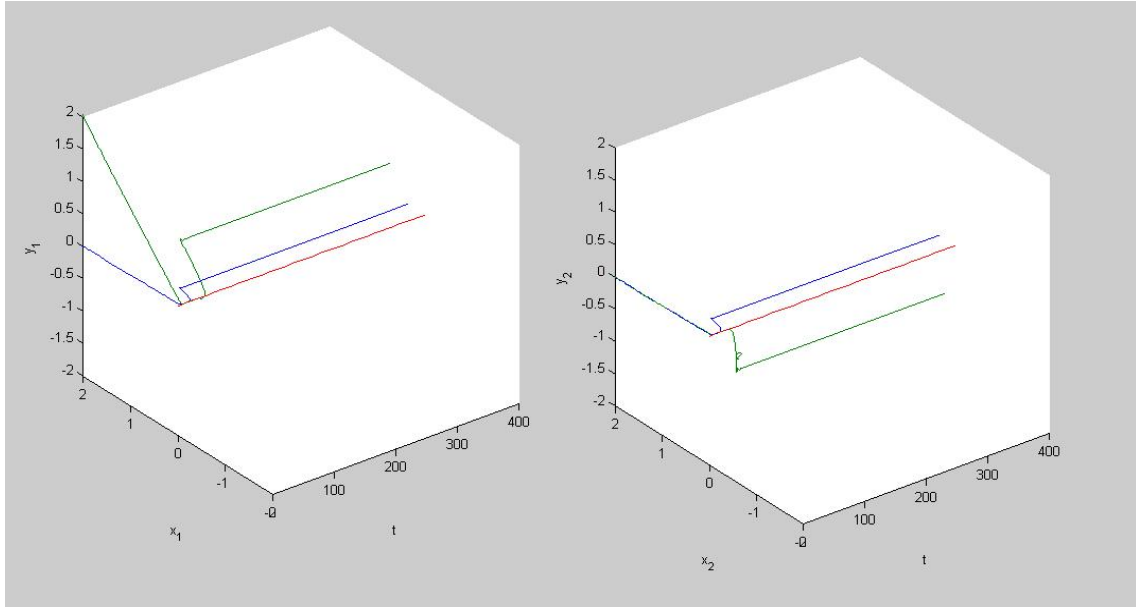


FIGURA 5. Evolução temporal das variáveis  $z_1$  e  $z_2$  para diferentes condições iniciais, onde  $d = 0$  ( $R = 761$ ). Azul: condição inicial  $(2, 0, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 3, 0, 3, 0)$ ; Verde: condição inicial  $(4, 4, 4, 0, 3, 3, 0, 0, 0, -2, -2, 0)$ ; Vermelho: condição inicial  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

e o seu fixado por

$$Fix(\Sigma) = \{z = (x_1, x_1, x_3, 0, x_5, x_5) : x_i \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{C}^6.$$

Mais uma vez podemos observar na figura 5 que para diferentes condições iniciais existem diferentes pontos de equilíbrio e que nem todas as soluções tendem para o  $Fix(\Sigma)$ . Estes pontos de equilíbrio estão em subespaços conjugados a  $Fix(\Sigma)$  e vão ser da seguinte forma:

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  números reais tomando valores no intervalo  $]0, 2\pi[$ . Para as simetrias  $s_1, \dots, s_8$  os subespaços conjugados a  $Fix(\Sigma)$  são

$$\{(sx_1, sx_1, 0, sx_3, sx_5, sx_5), s \in \mathbf{R}\}$$

para  $x_i \in \mathbf{R}$  fixos.

Para  $\gamma_\alpha^x$  e  $\gamma_\beta^y$  os subespaços conjugados a  $Fix(\Sigma)$  são

$$\{(se^{i\alpha}, se^{i\beta}, te^{i\alpha}, 0, ue^{2i\alpha}, ue^{2i\beta}), s, t, u \in \mathbf{R}\}$$

para  $z_i \in \mathbf{C}$  fixos.

No geral temos que os subespaços conjugados a  $Fix(\Sigma)$  são da forma

$$\{(se^{i\alpha}, se^{i\beta}, te^{i\alpha}, 0, ue^{2i\alpha}, ue^{2i\beta}), s, t, u \in \mathbf{R}\}$$

ou

$$\{(se^{i\alpha}, se^{i\beta}, 0, te^{-i\alpha}, ue^{2i\alpha}, ue^{2i\beta}), s, t, u \in \mathbf{R}\}$$

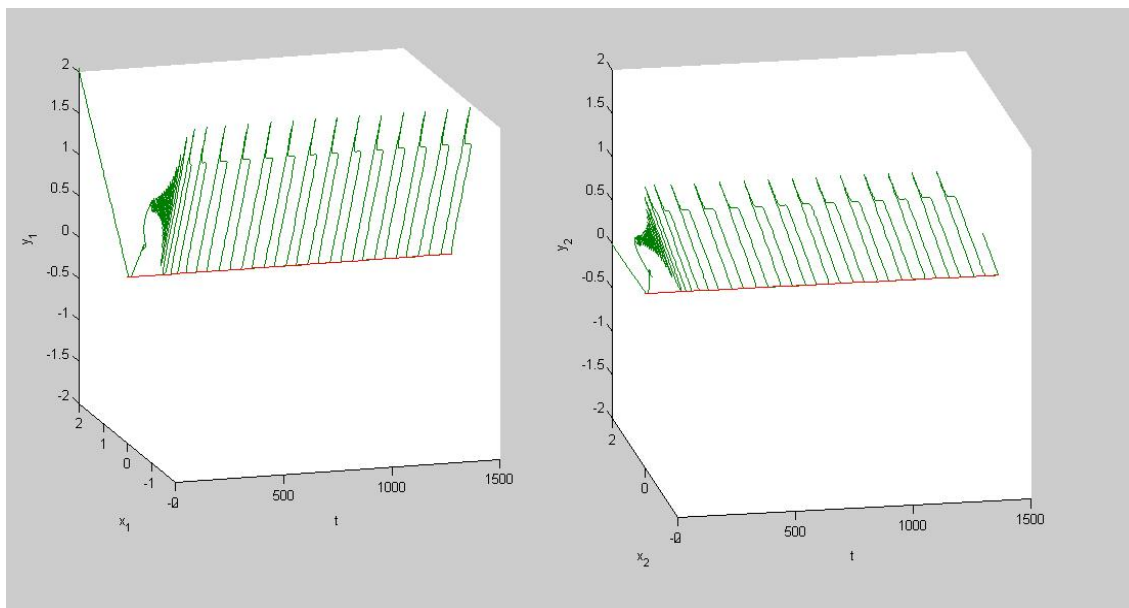


FIGURA 6. Evolução temporal das variáveis  $z_1$  e  $z_2$  onde  $d = 25$  ( $R = 786$ ). Condição inicial  $(4, 4, 4, 0, 3, 3, 0, 0, 0, -2, -2, 0)$ .

para  $\alpha$  e  $\beta$  fixos.

Na figura 5 é possível observar o comportamento da solução ao longo do tempo para uma condição inicial no  $Fix(\Sigma)$  e uma outra num conjugado do mesmo.

**4.4. Ramo periódico  $P_1$ .** Quando o valor de  $d$  ultrapassa 23 é observado que as soluções do tipo  $S_2$  dão origem a soluções oscilantes simples (ver figura 6), ou seja estamos perante uma possível bifurcação de Hopf. Assim para valores de  $d$  contidos no intervalo  $]23, 27[$  ( $784 < R < 788$ ) tem-se que as soluções são oscilantes, aparecendo como bifurcações de  $S_2$ . Pode-se então conjecturar que estas soluções são periódicas e que estamos perante uma bifurcação de Hopf que bifurca de  $S_2$ .

Este tipo de ramo de soluções vai ser chamado de *ramo periódico* denotado por  $P_1$ .

O subgrupo de isotropia é dado por

$$\Sigma = Z_2$$

e o seu fixado por

$$Fix(\Sigma) = \{z = (z_1, z_1, z_3, x_4, z_5, z_5) : x_4 \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{C}^6.$$

Novamente quase sempre são observadas soluções que tendem para subespaços conjugados a  $Fix(\Sigma)$ .

**4.5. Ramo de soluções mais complexas;  $P_2$  e  $C_1$ .** Para finalizar o sumário das bifurcações vou falar da parte do diagrama de bifurcação que é mais difícil de se avaliar. Para  $d$  perto de 27 há soluções oscilatórias que parecem alternar entre duas



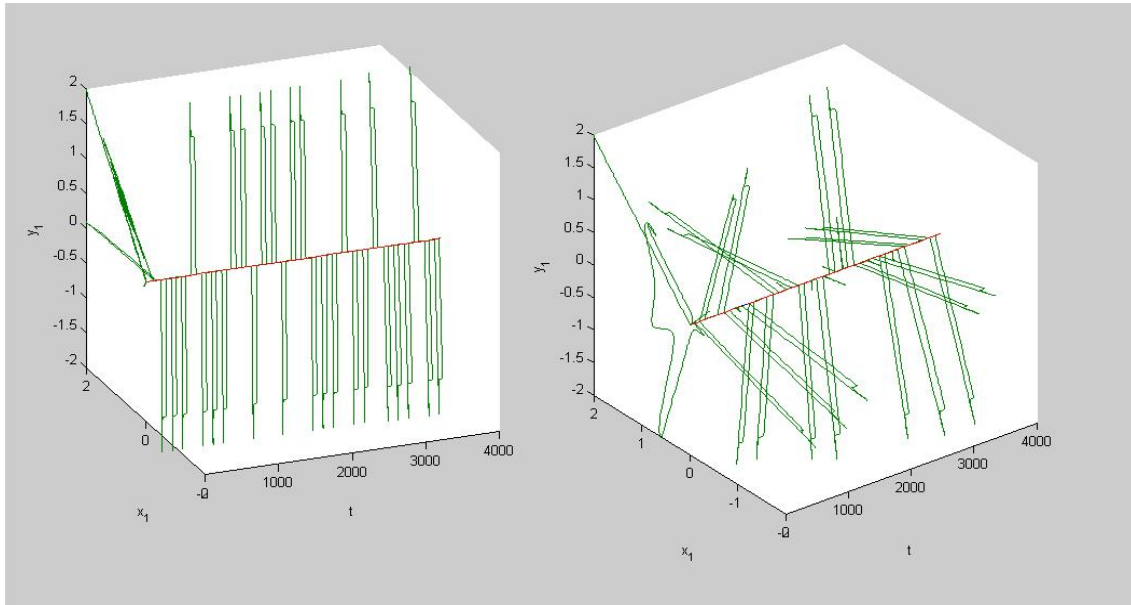


FIGURA 7. Evolução temporal da variável  $z_1$  para diferentes valores de  $d$ , com a mesma condição inicial. Condição inicial:  $(4, 4, 4, 0, 3, 3, 0, 0, 0, -2, -2, 0)$ . Lado esquerdo:  $d = 30$ . Lado direito:  $d = 40$ .

direcções diferentes (ver figura 7). Vou chamar a este ramo de soluções de *ramo quase periódico* e denoto-o por  $P_2$ .

Posteriormente a este comportamento podem ser observadas soluções que apresentam comportamento mais complexo, com oscilações em muitas direcções diferentes e cujo comportamento parece imprevisível (ver figura 7). A este ramo de soluções chamo de *ramo caótico* e denoto-o por  $C_1$ . É então razoável conjecturar que existe um intervalo de  $d$  para o qual o sistema é caótico.

No artigo [6] é referida a existência de um ciclo heteroclínico perto dos valores onde conjecturo a existência de caoticidade. No artigo [1] é estudada a dinâmica perto destes ciclos heteroclínicos que, em certas condições, é a dinâmica da suspensão de uma ferradura. A partir destes dois trabalhos penso ser possível formalizar uma prova da existência de caos perto do ciclo heteroclínico.

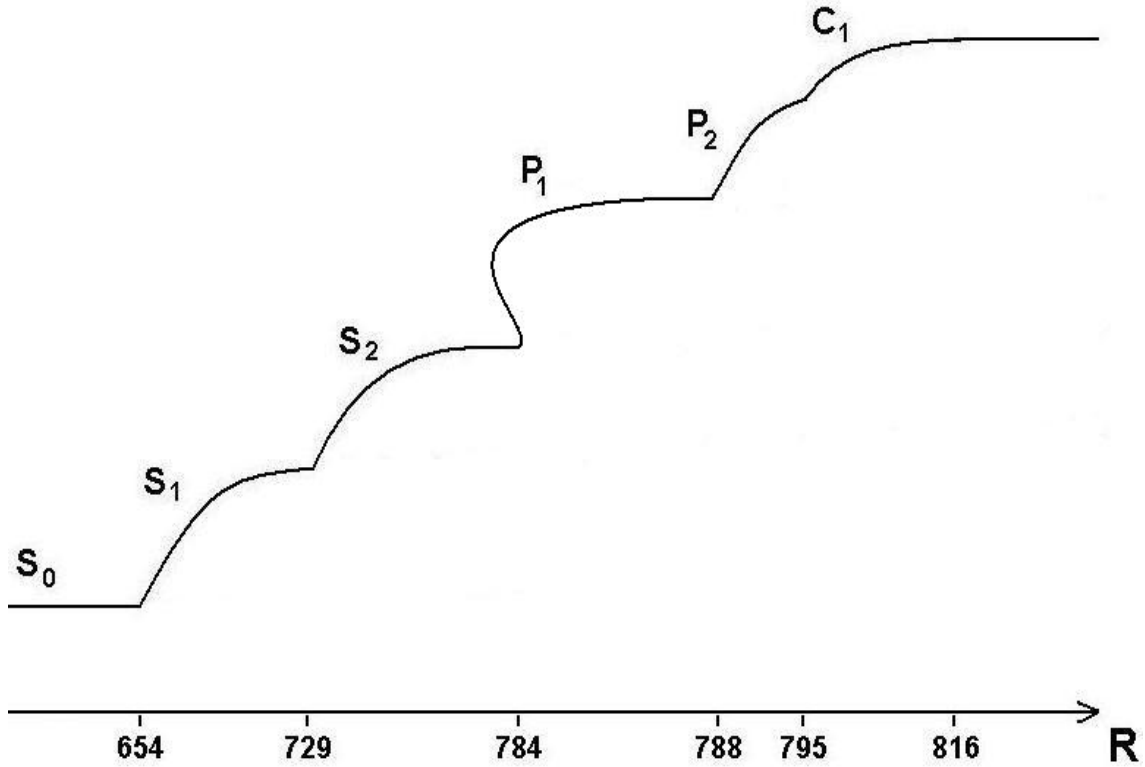


FIGURA 8. Diagrama de bifurcação dos atratores da forma normal reduzida à variedade central.

## 5. CONCLUSÕES

Rayleigh	Nome	Not.	Subg. isotropia	Geradores	Fixado
$R < 654$	solução trivial	$S_0$	$D_4 \times T^2 \times Z_2$	-	-
$654 < R < 729$	ramo primário	$S_1$	$D_2 \times T \times Z_2$	$\{s_2, s_6, \gamma_\pi^x \gamma_\pi^y, \gamma_\alpha^x \gamma_{-\alpha}^x\}$	$\{(0, 0, x, 0, 0, 0) : x \in \mathbf{R}\}$
$729 < R < 784$	ramo secundário	$S_2$	$D_2$	$\{s_2, s_6\}$	$\{(x_1, x_1, x_3, 0, x_5, x_5) : x_i \in \mathbf{R}\}$
$784 < R < 788$	ramo periódico	$P_1$	$Z_2$	$\{s_6\}$	$\{(z_1, z_1, z_3, x_4, z_5, z_5) : x_4 \in \mathbf{R}\}$
$788 < R < 795$	quase periódico	$P_2$	$I$	-	-
$795 < R < 816$	ramo caótico	$C_1$	$I$	-	-
$R > 816$	solução trivial	$S_0$	$D_4 \times T^2 \times Z_2$	-	-

A dinâmica da redução do problema (8)-(12) a uma variedade central de dimensão 12, dada pelo sistema da secção 3.3, foi estudada numericamente, com as parâmetros descritos na secção 3.4. Os resultados, discutidos na secção 4, são apresentados em forma de diagrama de bifurcação na figura 8., para valores de  $d$  no intervalo  $] - 120, 60[$ .

No artigo [6], figura 4, é apresentado um diagrama de bifurcação, da forma normal da variedade central de dimensão 8, tanto para os ramos de soluções atractoras como para repulsoras. Neste trabalho só foram estudados os ramos de soluções atractoras.

A primeira observação relevante diz respeito ao intervalo de valores de  $R$  para os quais foi encontrado um ramo de soluções periódicas. Em [6] o intervalo é bastante menor.

Também não foram encontradas em [6] soluções caóticas (ou aparentemente caóticas).

Em contrapartida não foi possível, na análise numérica, detectar um ciclo heteroclínico como é provado em [6].

Por fim, a partir da figura 10 de [5], verifica-se que foi possível detectar quase todo o diagrama, para a variação de  $R$  no intervalo  $] - 641, 821[$ , exceptuando o ramo  $P_5$  (notação em [5]) que representa o ciclo heteroclínico.

## 6. POSSIBILIDADES PARA INVESTIGAÇÕES FUTURAS

São várias as possibilidades e direcções para continuar um trabalho de investigação a partir do trabalho desenvolvido. Vou falar somente das que, no meu ponto de vista, são mais relevantes:

- Fazer o estudo para vários tipos de números de Prandtl, nomeadamente  $P = 0.5$ ,  $P = 0.3$ ,  $P = 0.1$  e  $P = 2$ , de forma a, mais uma vez, comparar os resultados com [6], aproveitando o aumento de dimensão da variedade central para procurar nova informação dinâmica.
- Fazer a redução à variedade central em torno de outros pontos no espaço de parâmetros. A vantagem seria em considerar um novo valor de  $R_m$  mais próximo do lugar onde se quer saber com é a dinâmica e tentar alargar o diagrama o diagrama de bifurcação para mais valores de  $R$ .
- Provar analiticamente algumas conjecturas aqui expostas, nomeadamente a da existência de uma bifurcação de Hopf e a da existência de caoticidade entre o ramo  $P_2$  e o ciclo heteroclínico encontrado em [6], descritas na secção 4.4 e na secção 4.5, respectivamente.

## 7. APÊNDICE

7.1. **Algoritmo.** Apresento integralmente o código do M-file utilizado para efectuar os cálculos numéricos através do software Matlab. Em seguida apresento o código da função *sis* que é utilizada no M-file e que corresponde ao sistema da secção 3.3. O parâmetro de bifurcação  $d$  corresponde à variável de input *epsilon*. As condições iniciais correspondem às variáveis *xzero*, *xbzero* e *xczero*.

M-file:

```
function [] = twelveeq(epsilon)

tspan=[0 400];

xzero=[7;0;7;0;5;0;0;0;6;0;6;0];
xbzero=[10;10;10;0;4;4;0;0;0;-3;-3;0];
xczero=[-12;3;7;8;1;-5;7;4;-2;5;15;-1];

a=epsilon;

p1=0.0081057*a;
p2=1.1226+0.010464*a;
p3=-0.11635+0.012816*a;

A1=-0.0625;A2=-0.1166;A3=-0.0625;A4=-0.1155;A5=-0.062128;A6=-0.10938;
B1=0.020779;B2=-0.32498;B3=-0.44342;B4=0.20486;
C1=-0.073095;C2=-0.097732;C3=-0.50467;C4=-0.24979;
D1=-0.032511;D2=-0.23927;D3=-0.29337;D4=0.06366;
E1=-0.089941;E2=-0.056272;E3=-0.22446;E4=0.02544;

options=odeset('AbsTol',1e-7,'RelTol',1e-4);

[ta,xa]=ode45(@sis,tspan,xzero,options,p1,p2,p3,A1,A2,A3,A4,A5,...);
[tb,xb]=ode45(@sis,tspan,xbzero,options,p1,p2,p3,A1,A2,A3,A4,A5,...);
[tc,xc]=ode45(@sis,tspan,xczero,options,p1,p2,p3,A1,A2,A3,A4,A5,...);

subplot(231),
plot3(ta,xa(:,1),xa(:,2),tb,xb(:,1),xb(:,2),tc,xc(:,1),xc(:,2))
axis([0 400 -4 4 -4 4])
xlabel t, ylabel x_1, zlabel y_1

subplot(232),
plot3(ta,xa(:,3),xa(:,4),tb,xb(:,3),xb(:,4),tc,xc(:,3),xc(:,4))
axis([0 400 -4 4 -4 4])
xlabel t, ylabel x_2, zlabel y_2
```

```

subplot(233),
plot3(ta,xa(:,5),xa(:,6),tb,xb(:,5),xb(:,6),tc,xc(:,5),xc(:,6))
axis([0 400 -4 4 -4 4])
xlabel t, ylabel x_3, zlabel y_3

subplot(234),
plot3(ta,xa(:,7),xa(:,8),tb,xb(:,7),xb(:,8),tc,xc(:,7),xc(:,8))
axis([0 400 -4 4 -4 4])
xlabel t, ylabel x_4, zlabel y_4

subplot(235),
plot3(ta,xa(:,9),xa(:,10),tb,xb(:,9),xb(:,10),tc,xc(:,9),xc(:,10))
axis([0 400 -1 1 -1 1])
xlabel t, ylabel x_5, zlabel y_5

subplot(236),
plot3(ta,xa(:,11),xa(:,12),tb,xb(:,11),xb(:,12),tc,xc(:,11),xc(:,12))
axis([0 400 -1 1 -1 1])
xlabel t, ylabel x_6, zlabel y_6

```

Função *sis*:

```

function xprime=sis(t,x,p1,p2,p3,A1,A2,A3,A4,A5,A6,B1,B2,B3,B4,...)

xprime=
[A1*x(1)*x(2)^2+x(1)*C2*x(12)^2+A1*x(1)^3+B2*x(1)*x(5)*x(7)+x(1)*A2*
x(3)^2+x(1)*A2*x(4)^2+x(1)*B1*x(5)^2+x(1)*B1*x(6)^2+x(1)*B1*x(7)^2+
x(1)*B1*x(8)^2+x(1)*C1*x(9)^2+x(1)*C1*x(10)^2+x(1)*C2*x(11)^2+E1*
x(3)*x(7)*x(11)+E1*x(3)*x(5)*x(11)-B2*x(1)*x(6)*x(8)+B2*x(2)*x(5)*
x(8)+B2*x(2)*x(6)*x(7)-E2*x(4)*x(5)*x(10)+E2*x(3)*x(7)*x(9)+E2*x(3)*
x(5)*x(9)+E2*x(4)*x(7)*x(10)-E2*x(4)*x(8)*x(9)+E1*x(3)*x(6)*x(12)+
E1*x(4)*x(5)*x(12)-E1*x(4)*x(6)*x(11)-E1*x(3)*x(8)*x(12)+E1*x(4)*
x(7)*x(12)+E1*x(4)*x(8)*x(11)+p1*x(1)+E2*x(3)*x(6)*x(10)+E2*x(4)*
x(6)*x(9)+E2*x(3)*x(8)*x(10);A1*x(2)^3+p1*x(2)+A1*x(2)*x(1)^2+E2*
x(4)*x(5)*x(9)+B2*x(1)*x(6)*x(7)-E2*x(4)*x(8)*x(10)+E1*x(3)*x(6)*
x(11)+E1*x(4)*x(5)*x(11)+E1*x(3)*x(7)*x(12)+E1*x(3)*x(8)*x(11)+x(2)*
A2*x(3)^2+x(2)*A2*x(4)^2+x(2)*B1*x(5)^2+x(2)*B1*x(6)^2+x(2)*B1*
x(7)^2+x(2)*B1*x(8)^2+x(2)*C1*x(9)^2+x(2)*C1*x(10)^2+x(2)*C2*x(11)^2+
x(2)*C2*x(12)^2+B2*x(1)*x(5)*x(8)-E1*x(3)*x(5)*x(12)+E1*x(4)*x(6)*
x(12)-E1*x(4)*x(7)*x(11)+E1*x(4)*x(8)*x(12)-B2*x(2)*x(5)*x(7)+B2*
x(2)*x(6)*x(8)+E2*x(3)*x(5)*x(10)+E2*x(3)*x(7)*x(10)-E2*x(3)*x(6)*
x(9)+E2*x(4)*x(6)*x(10)-E2*x(3)*x(8)*x(9)-E2*x(4)*x(7)*x(9);x(3)*B1*
x(8)^2+x(3)*A2*x(2)^2+x(3)*A1*x(4)^2+x(3)*B1*x(6)^2+x(3)*B1*x(5)^2+
x(3)*B1*x(7)^2+B2*x(3)*x(5)*x(7)+x(3)*A2*x(1)^2+x(3)*C1*x(11)^2+x(3)*

```

$$\begin{aligned}
& C1*x(12)^2+x(3)*C2*x(9)^2+x(3)*C2*x(10)^2+p1*x(3)+A1*x(3)^3+E1*x(1)* \\
& x(5)*x(9)+E1*x(1)*x(7)*x(9)+E2*x(1)*x(5)*x(11)+E2*x(1)*x(7)*x(11)+B2* \\
& x(3)*x(6)*x(8)-B2*x(4)*x(5)*x(8)+B2*x(4)*x(6)*x(7)+E1*x(1)*x(6)* \\
& x(10)+E1*x(2)*x(5)*x(10)-E1*x(2)*x(6)*x(9)+E1*x(1)*x(8)*x(10)+E1* \\
& x(2)*x(7)*x(10)-E1*x(2)*x(8)*x(9)+E2*x(1)*x(6)*x(12)-E2*x(2)*x(5)* \\
& x(12)+E2*x(2)*x(6)*x(11)-E2*x(1)*x(8)*x(12)+E2*x(2)*x(7)*x(12)+E2* \\
& x(2)*x(8)*x(11); x(4)*A1*x(3)^2+x(4)*A2*x(1)^2+x(4)*A2*x(2)^2+x(4)* \\
& B1*x(5)^2+x(4)*B1*x(6)^2+x(4)*B1*x(7)^2+x(4)*B1*x(8)^2+x(4)*C1* \\
& x(11)^2+x(4)*C1*x(12)^2+x(4)*C2*x(9)^2+x(4)*C2*x(10)^2-B2*x(3)* \\
& x(5)*x(8)+B2*x(3)*x(6)*x(7)-B2*x(4)*x(5)*x(7)-B2*x(4)*x(6)*x(8)-E1* \\
& x(1)*x(5)*x(10)+E1*x(1)*x(6)*x(9)+E1*x(2)*x(5)*x(9)+E1*x(2)*x(6)* \\
& x(10)+E1*x(1)*x(7)*x(10)-E1*x(1)*x(8)*x(9)-E1*x(2)*x(7)*x(9)-E1*x(2)* \\
& x(8)*x(10)+E2*x(1)*x(5)*x(12)-E2*x(1)*x(6)*x(11)+E2*x(2)*x(5)*x(11)+ \\
& E2*x(2)*x(6)*x(12)+E2*x(1)*x(7)*x(12)+E2*x(1)*x(8)*x(11)-E2*x(2)* \\
& x(7)*x(11)+E2*x(2)*x(8)*x(12)+x(4)^3*A1+p1*x(4); x(5)*A4*x(8)^2+x(5)* \\
& B3*x(1)^2+x(5)*B3*x(2)^2+x(5)*B3*x(3)^2+x(5)*D1*x(9)^2+x(5)*D1* \\
& x(10)^2+x(5)*D1*x(11)^2+x(5)*D1*x(12)^2+x(5)*A3*x(6)^2+p2*x(5)+2*B4* \\
& x(1)*x(2)*x(8)+D2*x(5)*x(9)*x(11)+E3*x(1)*x(3)*x(11)+E3*x(1)*x(3)* \\
& x(9)+A3*x(5)^3+B4*x(3)^2*x(7)-B4*x(4)^2*x(7)-B4*x(2)^2*x(7)+B4* \\
& x(1)^2*x(7)-D2*x(5)*x(10)*x(12)+D2*x(6)*x(9)*x(12)+D2*x(6)*x(10)* \\
& x(11)-E3*x(1)*x(4)*x(10)+E3*x(2)*x(3)*x(10)+E3*x(2)*x(4)*x(9)+E3* \\
& x(1)*x(4)*x(12)-E3*x(2)*x(3)*x(12)+x(5)*B3*x(4)^2+x(5)*A4*x(7)^2+ \\
& E3*x(2)*x(4)*x(11)-2*B4*x(3)*x(4)*x(8); x(6)*A4*x(8)^2+x(6)*B3* \\
& x(1)^2+x(6)*B3*x(2)^2+x(6)*B3*x(3)^2+x(6)*B3*x(4)^2+x(6)*D1*x(9)^2+ \\
& x(6)^3*A3+D2*x(5)*x(10)*x(11)+E3*x(1)*x(3)*x(10)+E3*x(1)*x(4)*x(9)+ \\
& E3*x(1)*x(3)*x(12)+E3*x(2)*x(3)*x(11)-D2*x(6)*x(9)*x(11)+D2*x(6)* \\
& x(10)*x(12)-E3*x(2)*x(3)*x(9)+E3*x(2)*x(4)*x(10)-E3*x(1)*x(4)* \\
& x(11)+E3*x(2)*x(4)*x(12)+2*B4*x(3)*x(4)*x(7)+2*B4*x(1)*x(2)*x(7)+ \\
& p2*x(6)+x(6)*D1*x(10)^2+x(6)*D1*x(11)^2+x(6)*D1*x(12)^2+B4*x(3)^2* \\
& x(8)-B4*x(4)^2*x(8)-B4*x(1)^2*x(8)+B4*x(2)^2*x(8)+D2*x(5)*x(9)* \\
& x(12)+x(6)*A3*x(5)^2+x(6)*A4*x(7)^2; D2*x(7)*x(9)*x(11)+E3*x(1)*x(3)* \\
& x(9)+E3*x(1)*x(3)*x(11)+p2*x(7)+x(7)*A3*x(8)^2+x(7)*A4*x(5)^2+x(7)* \\
& A4*x(6)^2+x(7)*B3*x(1)^2+x(7)*B3*x(2)^2+x(7)*B3*x(3)^2+x(7)*B3* \\
& x(4)^2+x(7)*D1*x(9)^2+x(7)*D1*x(10)^2+x(7)*D1*x(11)^2+x(7)*D1* \\
& x(12)^2+A3*x(7)^3+B4*x(3)^2*x(5)+B4*x(1)^2*x(5)-B4*x(4)^2*x(5)-B4* \\
& x(2)^2*x(5)+2*B4*x(3)*x(4)*x(6)+2*B4*x(1)*x(2)*x(6)+D2*x(7)*x(10)* \\
& x(12)-D2*x(8)*x(9)*x(12)+D2*x(8)*x(10)*x(11)+E3*x(1)*x(4)*x(10)+E3* \\
& x(2)*x(3)*x(10)-E3*x(2)*x(4)*x(9)+E3*x(1)*x(4)*x(12)+E3*x(2)*x(3)* \\
& x(12)-E3*x(2)*x(4)*x(11); p2*x(8)+x(8)^3*A3-2*B4*x(3)*x(4)*x(5)+2*B4* \\
& x(1)*x(2)*x(5)-D2*x(7)*x(9)*x(12)+D2*x(7)*x(10)*x(11)-D2*x(8)*x(9)* \\
& x(11)-D2*x(8)*x(10)*x(12)+E3*x(1)*x(3)*x(10)-E3*x(1)*x(4)*x(9)-E3* \\
& x(2)*x(3)*x(9)-E3*x(2)*x(4)*x(10)-E3*x(1)*x(3)*x(12)+E3*x(1)*x(4)* \\
& x(11)+E3*x(2)*x(3)*x(11)+E3*x(2)*x(4)*x(12)+x(8)*A3*x(7)^2+x(8)*A4* \\
& x(5)^2+x(8)*A4*x(6)^2+x(8)*B3*x(1)^2+x(8)*B3*x(2)^2+x(8)*B3*x(3)^2+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x(8) * B3 * x(4)^2 + x(8) * D1 * x(9)^2 + x(8) * D1 * x(10)^2 + x(8) * D1 * x(11)^2 + x(8) * \\
& D1 * x(12)^2 + B4 * x(3)^2 * x(6) - B4 * x(4)^2 * x(6) - B4 * x(1)^2 * x(6) + B4 * x(2)^2 * \\
& x(6) ; x(9) * A6 * x(12)^2 - D4 * x(6)^2 * x(11) + D4 * x(5)^2 * x(11) + x(9) * C3 * x(2)^2 + \\
& x(9) * C4 * x(4)^2 + x(9) * C4 * x(3)^2 - D4 * x(8)^2 * x(11) + x(9) * A6 * x(11)^2 + x(9) * \\
& C3 * x(1)^2 + x(9) * A5 * x(10)^2 + x(9) * D3 * x(8)^2 + x(9) * D3 * x(5)^2 + x(9) * D3 * \\
& x(6)^2 + x(9) * D3 * x(7)^2 + E4 * x(1) * x(3) * x(5) + E4 * x(1) * x(3) * x(7) - 2 * D4 * x(7) * \\
& x(8) * x(12) + 2 * D4 * x(5) * x(6) * x(12) + E4 * x(1) * x(4) * x(6) - E4 * x(2) * x(3) * x(6) + \\
& E4 * x(2) * x(4) * x(5) - E4 * x(1) * x(4) * x(8) - E4 * x(2) * x(3) * x(8) - E4 * x(2) * x(4) * \\
& x(7) + p3 * x(9) + A5 * x(9)^3 + D4 * x(7)^2 * x(11) ; x(10) * A5 * x(9)^2 + x(10) * A6 * \\
& x(12)^2 + D4 * x(6)^2 * x(12) + x(10) * D3 * x(5)^2 - E4 * x(2) * x(4) * x(8) + x(10) * A6 * \\
& x(11)^2 + x(10) * C3 * x(1)^2 + x(10) * C3 * x(2)^2 + x(10) * C4 * x(3)^2 + x(10) * C4 * \\
& x(4)^2 + x(10) * D3 * x(6)^2 + x(10) * D3 * x(7)^2 + x(10) * D3 * x(8)^2 + D4 * x(7)^2 * \\
& x(12) - D4 * x(8)^2 * x(12) - D4 * x(5)^2 * x(12) + 2 * D4 * x(7) * x(8) * x(11) + 2 * D4 * x(5) * \\
& x(6) * x(11) + E4 * x(1) * x(3) * x(6) - E4 * x(1) * x(4) * x(5) + E4 * x(2) * x(3) * x(5) + E4 * \\
& x(2) * x(4) * x(6) + E4 * x(1) * x(3) * x(8) + E4 * x(1) * x(4) * x(7) + E4 * x(2) * x(3) * x(7) + \\
& p3 * x(10) + x(10)^3 * A5 ; -D4 * x(6)^2 * x(9) - D4 * x(8)^2 * x(9) + x(11) * C4 * x(1)^2 + \\
& D4 * x(5)^2 * x(9) + x(11) * C3 * x(4)^2 + x(11) * D3 * x(5)^2 + x(11) * C4 * x(2)^2 + x(11) * \\
& A1 * x(12)^2 + E4 * x(1) * x(3) * x(5) + E4 * x(1) * x(3) * x(7) - E4 * x(1) * x(4) * x(6) + E4 * \\
& x(2) * x(3) * x(6) + E4 * x(2) * x(4) * x(5) + E4 * x(1) * x(4) * x(8) + E4 * x(2) * x(3) * x(8) - \\
& E4 * x(2) * x(4) * x(7) + 2 * D4 * x(7) * x(8) * x(10) + 2 * D4 * x(5) * x(6) * x(10) + p3 * x(11) + \\
& A1 * x(11)^3 + x(11) * A2 * x(9)^2 + x(11) * A2 * x(10)^2 + x(11) * C3 * x(3)^2 + x(11) * D3 * \\
& x(6)^2 + x(11) * D3 * x(7)^2 + x(11) * D3 * x(8)^2 + D4 * x(7)^2 * x(9) ; x(12) * D3 * \\
& x(8)^2 + E4 * x(2) * x(4) * x(8) + E4 * x(1) * x(3) * x(6) + E4 * x(1) * x(4) * x(5) - E4 * x(2) * \\
& x(3) * x(5) + E4 * x(2) * x(4) * x(6) - E4 * x(1) * x(3) * x(8) + E4 * x(1) * x(4) * x(7) + E4 * \\
& x(2) * x(3) * x(7) + 2 * D4 * x(5) * x(6) * x(9) + x(12) * D3 * x(7)^2 + x(12) * A1 * x(11)^2 + \\
& x(12) * A2 * x(9)^2 + x(12) * A2 * x(10)^2 + x(12) * C3 * x(3)^2 + x(12) * C3 * x(4)^2 + \\
& x(12) * C4 * x(1)^2 + x(12) * C4 * x(2)^2 + x(12) * D3 * x(5)^2 + x(12) * D3 * x(6)^2 + D4 * \\
& x(7)^2 * x(10) - D4 * x(8)^2 * x(10) - D4 * x(5)^2 * x(10) + D4 * x(6)^2 * x(10) + p3 * x(12) + \\
& x(12)^3 * A1 - 2 * D4 * x(7) * x(8) * x(9) ] ;
\end{aligned}$$



## REFERÊNCIAS

- [1] Manuela A. D. Aguiar, Sofia B. S. D. Castro and Isabel S. Labouriau, 2004, *Dynamics near a heteroclinic network*, Nonlinearity 18 (2005) 124.
- [2] P.G. Drazin, 2002, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press
- [3] M. Golubitsky, I. Stewart and D. G. Schaeffer, 1988, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory V2*, Springer-Verlag
- [4] J. Guckenheimer and P. Holmes, 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag
- [5] O. Podvigina, 2006, *Magnetic field generation by convective flows in a plane layer: the dependence on the Prandtl numbers*, submetido em GAFD (2007).
- [6] O. Podvigina and P. Ashwin, 2007, *The  $1:\sqrt{2}$  mode interaction and homoclinic networks in Boussinesq convection*, aceite para publicação em Physica D
- [7] O. Podvigina and Isabel S. Labouriau, 2007, *Application of the center manifold reduction for investigation of bifurcations of convective flows*, Em preparação.