

Vasco Moço Mano

# Combinatória de Sons



Departamento de Matemática Pura e Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
2007

Vasco Moço Mano

# Combinatória de Sons



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da  
Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre  
em Engenharia Matemática*

Departamento de Matemática Pura e Matemática Aplicada  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
2007

Aos meus pais, Domingos e Luisa.

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador de tese, Professor Doutor Samuel António de Sousa Dias Lopes, por ter aberto as portas à realização do meu sonho, que era trabalhar num projecto sobre Matemática e Música. Também estou grato pelo seu empenho e apoio ao longo deste ano de estudo e trabalho que culminou no presente texto.

# Resumo

Nesta tese debruçamo-nos sobre três problemas do âmbito da Teoria Musical usando ferramentas matemáticas para compreendê-los e solucioná-los.

O primeiro problema que nos propusemos analisar foi a enumeração e classificação dos possíveis tipos de acorde no contexto de uma escala bem temperada. Esta análise esteve sujeita a certos parâmetros como o número de notas da escala, o número de notas constitutivas do acorde, o número de intervalos de meio-tom que ocorrem no acorde e o intervalo mínimo admitido no acorde (capítulo 3). Para tal, estudou-se a Teoria de Contagem de Pólya com a linguagem da teoria de acções de grupo sobre conjuntos finitos (capítulo 2).

O segundo problema abordado foi a generalização do ciclo das quintas numa escala bem temperada, tendo em vista a construção de escalas genéricas mas mantendo as propriedades da escala tradicional (capítulo 4).

A tese termina com o problema do temperamento de escalas à luz da teoria das fracções contínuas (capítulo 5).

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>5</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>8</b>
1.1 Contextualização Histórica . . . . .	9
1.2 Preliminares sobre Teoria Musical . . . . .	12
1.3 O Problema Central . . . . .	15
<b>2 A Teoria de Contagem de Pólya</b>	<b>20</b>
2.1 Alguma Notação Usual . . . . .	21
2.2 Acções de Grupo . . . . .	21
2.3 Polinómio de um Grupo de Permutações . . . . .	26
2.4 O Lema de Burnside . . . . .	34
2.5 Funções e Padrões . . . . .	35
2.6 Peso de uma Função; Peso de um Padrão . . . . .	37
2.7 Loja e Inventário . . . . .	38
2.8 Inventário de uma Função . . . . .	38
2.9 Inventário de Padrões; Teorema de Pólya . . . . .	41
2.10 Generalização do Teorema de Pólya . . . . .	43
2.11 Padrões de Funções Injectivas . . . . .	45
2.12 Identificação e Anulação Completa da Identificação . . . . .	47
2.13 Número Total de Padrões . . . . .	50
<b>3 Contagem de Acordes Não Equivalentes</b>	<b>55</b>
3.1 Introdução . . . . .	55

3.2	Um Caso Particular: A Escala Cromática . . . . .	55
3.3	O Caso Geral de $m$ cores . . . . .	59
3.4	Restrições ao Problema . . . . .	59
3.4.1	Intervalo Mínimo do Acorde . . . . .	59
3.4.2	Número de Adjacências do Acorde . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Escalas Musicais e o Ciclo de Quintas Generalizado</b>	<b>65</b>
4.1	Introdução . . . . .	65
4.2	Definições e Primeiros Resultados . . . . .	65
4.3	Ciclo de Quintas Generalizado . . . . .	69
4.4	Construção de Escalas . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Escalas Temperadas e Fracções Contínuas</b>	<b>74</b>
5.1	Escalas e Aritmética . . . . .	74
5.2	Temperamento de Escalas . . . . .	75
5.3	Fracções Contínuas . . . . .	76

# Capítulo 1

## Introdução

*Os últimos trinta anos do século XIX europeu foram relativamente pacíficos e estáveis. Mas o início do século XX foi marcado por uma agitação social e uma tensão internacional crescentes, que viriam a culminar na catástrofe da Primeira Guerra Mundial. No domínio musical, a agitação e a tensão manifestaram-se através de diversas experiências radicais; esses anos puseram fim não só ao período clássico-romântico, como também às convenções em matéria de tonalidade tal como os séculos XVIII e XIX as haviam entendido.<sup>a</sup>*

---

<sup>a</sup>in [5].

O vigésimo século do calendário ocidental testemunhou o início de um caminho sinuoso da música nas trevas do desconhecimento. Assistia-se ao fim de uma era. O Romantismo tinha atingido o seu auge esplendoroso no drama musical de Wagner ou na ópera séria e nacionalista de Verdi. Nem o movimento do romantismo tardio abraçado por Mahler, Strauss e Wolf, ou as novas correntes francesas como o impressionismo de Debussy ou o anti-impressionismo de Satie conseguiram abafar a ânsia que se havia instalado de uma nova música com novas concepções. Bem pelo contrário.

Assim, ao mesmo tempo a que se assistiam aos últimos lampejos do Romantismo, alguns músicos e teóricos liderados por Schoenberg principiaram um caminho genuinamente novo no universo musical. O objectivo consistia em atingir a essência da Música, num processo de plena consciencialização dos seus fundamentos. O primeiro e inevitável passo a dar foi destruir o coração da maior parte da música desde o século XVIII até ao século XIX: a tonalidade. Das cinzas dessa morte anunciada nasceu o atonalismo, ao qual se seguiu o dodecafonismo e, mais tarde, a música serial e electrónica. Nada mais seria igual.

As correntes de Música contemporânea opõem-se às práticas passadas porque questionam as regras pelas quais o compositor se rege, por mais sólidas e aceites que possam ser. Esse cepticismo abre-se às influências das ciências, procurando legitimação e fundamentação dos processos musicais na Matemática, renegando os procedimentos convencionais da composição musical em favor de algoritmos matemáticos e de um computador que os execute.

O espírito da música contemporânea serve, assim, de inspiração ao presente texto. O objectivo desta tese é enumerar os possíveis tipos de acorde numa escala bem temperada com um certo número de tons, segundo diversos parâmetros entre os quais o número de



notas que constituem o acorde, o número de intervalos de meio-tom ou o intervalo mínimo permitido (capítulo 3). Para o fazer estudou-se a Teoria de Contagem de Pólya segundo a perspectiva da Teoria de Acções de Grupo num conjunto finito (capítulo 2). Finalizamos com o estudo dos ciclos de quintas generalizado (capítulo 4) e a teoria das fracções contínuas (capítulo 5).

## 1.1 Contextualização Histórica

*La Musique est une science qui doit avoir des regles certaines; ces regles doivent être tirées d'un principe évident, et ce principe ne peut gueres nous être connu sans le secours des Mathematiques: Aussi dois-je avouer que, nonobstant toute l'experience que je pouvois m'être acquise dans la Musique, pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des Mathematiques que mes idées se sont débrouillées, et que la lumiere y a succédé à une certaine obscurité, dont je ne m'apercevois pas auparavant.<sup>a</sup>*

---

<sup>a</sup>in [9]

Jean-Philippe Rameau (1683 - 1764), segundo [5] o mais importante músico e teórico francês do século XVIII, referia-se assim à Música no seu “Tratado da harmonia reduzida aos seus princípios naturais”, como uma ciência cujo entendimento pleno e estruturação estavam dependentes da Matemática. Esta opinião, emitida por um grande vulto da Música, encontra semelhança nas palavras de um dos matemáticos mais brilhantes seu contemporâneo:

*A Música é um exercício aritmético oculto da alma, a qual desconhece que [a música] é um processo de contagem<sup>a</sup>.*

---

<sup>a</sup>in Carta de Leibniz a Goldbach, 17 de Abril de 1712.

Uma posição deveras radical, a de Leibniz, que confia a Goldbach que para ele a Música não é mais que uma aplicação da aritmética e que as notas, os sons e os ritmos podem reduzir-se a números que, manipulados convenientemente, produzirão as sensações ou sentimentos desejados.

As primeiras reminiscências de Matemática e Música, enquanto áreas do saber distintas, encontram-se nos primórdios da humanidade. Apesar da escassez de fontes acerca das primeiras civilizações ocidentais conhecidas, o que já foi descoberto, decifrado, traduzido e estudado mostra a importância destas duas ciências no quotidiano dessas sociedades primitivas.

De facto, o conhecimento sobre a Matemática no Antigo Egipto, uma das primeiras civilizações conhecidas, mostra que esta área deixou definitivamente de ter uma base meramente intuitiva, indutiva e dedutiva e desenvolveu-se a um primeiro nível de teorização. Desde um sistema de numeração de base decimal, problemas aritméticos, passando por operações com fracções e até mesmo resolução de equações e problemas geométricos, a Matemática complexificou-se para dar resposta aos problemas decorrentes da administração de uma grande nação (tributação justa dos habitantes, construção de infra-estruturas como os diques do Nilo e as Pirâmides, etc.).

Quanto à Música, também encontramos exemplos da sua relevância nas sociedades antigas. Na Grécia Antiga acreditava-se que a Música detinha poderes mágicos: podia curar doenças, purificar o corpo e o espírito e operar milagres na natureza — dizia-se que o canto de Orfeu acompanhado pela lira estagnava rios, domesticava animais selvagens e movia pedras. Por isso, os compositores e intérpretes eram considerados deuses e semi-deuses, como Apolo, Anfião e o já citado Orfeu.

Não obstante podermos considerar clara a relação da Matemática e da Música com o próprio desenvolvimento da Humanidade, poderá ser mais difícil, ou pelo menos não imediato, estabelecer uma relação entre Matemática e Música desde os primórdios da actividade humana. Podemos conjecturar quando e como é que essas relações podem ter sido descobertas: pode ter ocorrido quando um arqueiro notou que quanto mais comprida ou menos tensa estivesse a corda do seu arco, mais grave era o som por ele produzido; ou um indivíduo ao soprar um osso pode ter reparado que podia gerar sons diferentes conforme o tamanho do osso.

Em Setembro de 1997 a revista *Scientific American* publicou um artigo que se referia à descoberta de um osso de urso nos Alpes Eslovacos dois anos antes. O osso, com idade estimada entre os 43 000 e os 82 000 anos, apresenta uma configuração de orifícios capaz de produzir intervalos musicais de tons e semitons. Provavelmente o instrumento musical mais antigo conhecido, este osso conseguia emitir esses sons com a distribuição de uma escala diatónica moderna pelo facto da distância entre o 2º e o 3º orifícios ser duas vezes a distância entre o 3º e o 4º, o que por si só poderá evidenciar preocupações matemáticas na sua construção.

É, contudo, no século VI a.C. que surgem os primeiros estudos científicos que relacionam Matemática e Música. Na Grécia Antiga os filósofos da Escola Pitagórica descobriram que os intervalos musicais podiam ser obtidos através de razões numéricas entre comprimentos de cordas vibratórias. Fazendo uso do monocórdio<sup>1</sup> descobriram que a razão 2:1 produzia uma oitava perfeita, a razão 3:2 uma quinta perfeita e que a razão 4:3 produzia uma quarta perfeita. Um tom seria a diferença entre uma quinta e uma quarta perfeitas, ou seja a razão 9:8.

Esta primeira descoberta do relacionamento entre Música e Matemática foi o ponto de partida para que desde os tempos remotos da Civilização Clássica até aos dias de hoje, se procurasse fundamento científico/matemático para a Música. Perguntas como *O que origina a consonância musical?* ou *Por que razão as escalas musicais são como as conhecemos hoje?* e *O que faz com que determinados sons produzam determinados sentimentos no ouvinte?* foram objecto de estudo e dedicação e actualmente a Matemática ajuda a dar resposta a esta e outras perguntas.

É, no entanto, logo aqui, nesta primeira incursão da Matemática na Música, que surge um problema que vai monopolizar a atenção de numerosos estudiosos ao longo de quase dois mil anos e que se prende basicamente com o temperamento dos intervalos na escala. De facto, era esperado que seis dos tons obtidos na Escola Pitagórica correspondessem a um intervalo de oitava perfeita, mas a sua sobreposição sucessiva formava um intervalo que excedia ligeiramente a oitava perfeita. Com o tempo, os intervalos foram sendo ajustados, segundo diferentes esquemas matemáticos, de forma a compensar esta discrepância intervalar. Por

---

<sup>1</sup>Um monocórdio, como o próprio nome induz, é um instrumento de uma só corda.

exemplo, o sistema usado ainda hoje na música ocidental, que se chamada de Temperamento Igual, ajusta igualmente todos os intervalos para produzir intervalos iguais entre todos os pares de notas equivalentes, isto é, relativamente ao seu posicionamento na escala.

Para além dos filósofos pitagóricos, outros pensadores estudaram associações entre Matemática e Música. No século IV a.C. Aristoxenus concebeu e descreveu um modelo para a música em termos da geometria no espaço. Em vez de um modelo aritmético e de proporções numéricas, como o usado pelos pitagóricos, este pensador descreveu os intervalos musicais como distâncias no espaço entre notas. Ptolomeu, no século II a.C., regressou aos padrões aritméticos para combater aquilo a que chamava de “imperfeição auditiva humana” na percepção dos sons.

Já no século VI d.C. Boécio empenhou-se na tentativa de coligir os conhecimentos ancestrais de Teoria Musical de concepções aritméticas, geométricas e físicas do som. Mais tardiamente, Walter Odington (séc. XIV), Franchinus Gaffurius (sécs. XV e XVI) e Gioseffo Zarlino (séc. XVI), entre outros, procuraram uma abordagem diferente: juntaram os conhecimentos sobre Música adquiridos com a sua própria experiência e prática enquanto músicos. O objectivo central era analisar certos intervalos considerados dissonantes pelos antigos e reinterpreta-los como consonâncias com base na sua utilização em composições contemporâneas e nos padrões matemáticos existentes.

Nos meados do século XVII alguns estudiosos, entre os quais Galileu Galilei, demonstraram que, ao contrário do que se pensava, não eram as razões entre comprimentos de corda que definiam os intervalos musicais, mas sim as razões entre o número de vibrações produzidas pelas cordas vibrantes que determinavam tais intervalos. No seguimento desta marcante descoberta na área, o teórico Jean-Jacques Rameau conseguiu definir (séc. XVIII) um dos intervalos base da harmonia musical — a terceira maior. Cerca de um século depois, os estudos de Hermann Helmholtz na área da Acústica Física e Fisiológica, forneceram informações detalhadas e rigorosas a nível científico acerca do ouvido humano e do seu papel na percepção e interpretação dos sons.

A partir destes estudos, a Acústica passou a ser a área central do estudo das relações entre Matemática e Música e na segunda metade do século XX este estudo encontrou um acolhimento particular na música atonal<sup>2</sup> e na música dodecafónica<sup>3</sup>. Milton Babbitt, Allen Forte, David Lewin e Robert Morris foram alguns dos compositores/teóricos que descreveram e estudaram estes estilos musicais em termos matemáticos.

Recentemente, John Clough, em colaboração com outros autores, tem-se evidenciado com os seus estudos sobre música diatónica<sup>4</sup> seguindo uma abordagem Matemática nova. Alguns dos seus resultados serão explorados e estudados ao longo deste trabalho.

---

<sup>2</sup>*Música Atonal*: Método de composição que se opõe à Música Tonal, ou seja, que não se baseia nas relações melódicas e harmónicas decorrentes da existência de uma nota mais relevante relativamente às restantes, dita o centro tonal.

<sup>3</sup>*Música Dodecafónica*: Método de composição com doze notas relacionadas exclusivamente entre si. Cada composição tem por base uma sequência ou série de doze notas (que integram a oitava) dispostas por uma ordem ao critério do compositor. Esta sequência pode ser usada com qualquer ritmo e em qualquer altura relativa e o compositor tem como única obrigação esgotar todas as doze notas da série antes de iniciar uma nova. A sequência das notas pode também ser utilizada de forma invertida, retrógrada (do fim para o início) ou de forma invertida retrógrada.

<sup>4</sup>*Música Diatónica*: um sinónimo de Música Tonal.

## 1.2 Preliminares sobre Teoria Musical

Antes de começarmos a estudar música e a estruturá-la segundo uma lógica matemática, convém abordar alguns conceitos musicais básicos e defini-los segundo aquilo que é a Teoria Musical e a respectiva prática. Assim sendo, de seguida serão definidos os conceitos mais relevantes a ter em mente ao longo do presente trabalho. Sugerimos que o leitor interessado consulte [6] para uma exposição mais detalhada e completa.

Escrevemos e lemos música nas chamadas *pautas musicais* ou *pentagramas*, que são conjuntos de cinco linhas horizontais e equidistantes juntamente com os respectivos quatro espaços entre linhas. É dentro das pautas musicais, mas também por baixo e por cima (com o auxílio de linhas adicionais acrescentáveis pelo compositor) que escrevemos música através de sinais gráficos que representam os vários sons — *as notas musicais* (ver Figura 1.1). Como é do domínio da generalidade dos leitores, as notas são sete: *dó, ré, mi, fá, sol, lá* e *si*, também geralmente identificadas pelas letras do alfabeto *C, D, E, F, G, A, B*, respectivamente. A oitava nota é novamente o *dó* que está para o primeiro *dó* a uma distância de *oitava*, como veremos daqui a pouco. Esta sequência de notas repete-se indefinidamente de forma ascendente e descendente. Relativamente às figuras propriamente ditas das notas, o leitor é convidado a consultar, por exemplo, a referência [6], já que o simbolismo usado não é relevante neste trabalho, na medida em que este tem apenas que ver com normas de escrita musical e com questões rítmicas, uma vertente que não será abordada. Bastará portanto idealizar as notas como bolas que se colocam ora nas linhas, ora nos espaços, para identificar um determinado som. Também importa salientar que este processo de identificação das posições na pauta com determinados sons se faz com o auxílio de símbolos especiais — *as claves* — que, colocadas no início de cada pentagrama, identificam uma posição do pentagrama (uma linha) com um determinado som, e depois todas as outras posições ficam determinadas à partida por relatividade (através da sequência *dó, ré, mi, fá, sol, lá, si* e *dó*). Existem várias claves diferentes, embora nem todas com a mesma utilidade, mas existem apenas três símbolos para as identificar, variando depois o seu posicionamento no pentagrama. Os três símbolos usados são a clave de *sol*, a clave de *fá* e a clave de *dó*, que estão em evidência na Figura 1.1.

Em termos musicais, um *intervalo* é a distância de entoação que separa dois sons distintos. Os intervalos podem ser *ascendentes* ou *descendentes*, dependendo de o segundo som ser mais agudo ou mais grave do que o primeiro, respectivamente (estas designações só são aplicáveis no caso de termos duas notas distintas e quando executadas em sucessão). A *notação* musical dos intervalos é uma designação numérica do número de notas sucessivas necessárias para chegar desde a primeira nota até à segunda incluindo ambas; por exemplo, o intervalo *mi* – *lá* designa-se por intervalo de *quarta* (ou 4<sup>a</sup>) ascendente visto que temos *mi* (1) – *fá* (2) – *sol* (3) – *lá* (4), quatro notas. A menor distância entre sons possível no sistema musical ocidental é chamada de *semitom* ou *meio-tom*. Este intervalo encontra-se na sucessão das notas naturais entre as notas *mi* – *fá* e *si* – *dó* na ordem ascendente e descendente entre as notas *dó* – *si* e *fá* – *mi*. Todas as restantes distâncias entre duas notas naturais sucessivas são de *um tom* (dois semitons). Dado um intervalo qualquer podemos obter a sua distância medida em tons com os instrumentos anteriores; por exemplo, o intervalo *fá* – *dó*, ao qual é associada a sucessão

$$\begin{array}{ccccccc} fá & \rightarrow & sol & \rightarrow & lá & \rightarrow & si & \rightarrow & dó \\ & & 1 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & \text{meio-tom} \end{array}$$

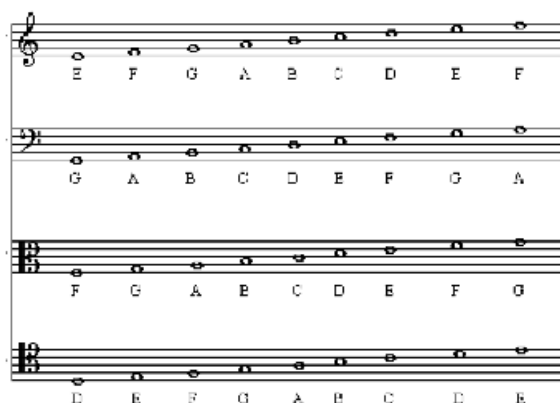


Figura 1.1: O primeiro pentagrama começa com a clave de *sol* (na 2ª linha), seguida de todas as notas que podem ser escritas sobre os espaços e as linhas. O mesmo acontece para a clave de *fá* na 4ª linha, clave de *dó* na 3ª linha e clave de *dó* na 4ª linha, no segundo, terceiro e quarto pentagramas, respectivamente.

perfaz três tons e meio e corresponde a um intervalo de quinta (5ª) ascendente.

Para além das sete notas naturais existem mais cinco notas, ditas alteradas, e que podemos considerar como sendo obtidas à custa das naturais através da utilização de certos sinais: os *sustenidos* ( $\sharp$ ) e os *bemóis* ( $\flat$ ). Os primeiros acrescentam meio-tom à altura da nota em que estão aplicados e os segundos diminuem em meio-tom a altura da nota em que estão aplicados. Por exemplo, o intervalo *dó* – *fá* é uma quarta com distância de dois tons e meio, enquanto que o intervalo *dó* – *fá* $\sharp$  é também uma quarta mas com distância de três tons.

Através destas novas definições, podemos definir dois tipos de semitons: os *semitons cromáticos*, em que o intervalo é formado por duas notas com o mesmo nome, como *dó* – *dó* $\sharp$ , e os *semitons diatónicos*, em que o intervalo é formado por duas notas com nomes diferentes, como por exemplo *si* – *dó*. Para finalizar esta parte há que contemplar o único caso, por ventura trivial, ainda não discutido: o caso em que o intervalo é composto por duas notas que representam o mesmo som, por exemplo *dó* $\sharp$  – *ré* $\flat$  ou *si* $\sharp$  – *dó*. Neste caso, diz-se que as duas notas formam *enarmonia* ou *equisonância*.

Se considerarmos duas notas quaisquer e pensarmos nas formas de que dispomos para as escrevermos numa pauta, imediatamente percebemos que há essencialmente duas hipóteses: ou escrevemos uma seguida da outra espaçadas no tempo, ou então, se desejarmos ouvir as duas notas ao mesmo tempo, escrevemo-las uma “por cima” da outra para que sejam executadas na mesma fracção de segundo. No primeiro caso o intervalo diz-se *melódico*, pelo facto de obtermos uma sequência melódica decorrente de ouvirmos primeiro uma nota e depois a outra. No segundo caso o intervalo diz-se *harmónico*, pela harmonia que decorre da execução simultânea dos dois sons. Os intervalos harmónicos não são, naturalmente, nem descendentes nem ascendentes, mas lêem-se sempre desde a nota mais grave até à nota mais aguda.

Todos os intervalos podem ser ampliados e alguns podem ser reduzidos: no primeiro caso através da substituição da nota mais aguda pela mesma nota uma ou mais oitavas acima

ou pela substituição da nota mais grave do intervalo pela mesma nota uma ou mais oitavas abaixo; no segundo caso o processo é equivalente exceptuando o facto de que em vez de se acrescentar oitavas ao intervalo, se retiram. Notamos que intervalos cuja distância seja inferior ou igual a uma oitava não podem ser reduzidos.

Existe uma classificação dos intervalos relativamente ao seu comprimento em semitons, embora essa classificação seja excessiva para o âmbito deste trabalho e possa levantar obstáculos à compreensão dos leitores menos familiarizados com a linguagem musical. Por isso ficamo-nos por dizer que os intervalos de 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, 6<sup>a</sup> e 7<sup>a</sup> se classificam em *diminutos* (d), *menores* (m), *maiores* (M) e *aumentados* (A) e os intervalos de 4<sup>a</sup>, 5<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> se classificam em *diminutos* (d), *perfeitos* (p) e *aumentados* (A). Estão escritos por ordem crescente de distância visto que os menores têm mais um semitom do que os diminutos e assim sucessivamente. Como exemplo, o intervalo *dó – ré* é uma 2<sup>a</sup> maior, *dó – mi* é uma 3<sup>a</sup> maior, *dó – fá* é uma 4<sup>a</sup> perfeita, *dó – sol* é uma 5<sup>a</sup> perfeita, *dó – lá* uma 6<sup>a</sup> maior, *dó – si* uma 7<sup>a</sup> maior e *dó – dó* (uma oitava acima) é uma 8<sup>a</sup> perfeita. A partir de cada um destes intervalos podemos classificar todos os outros simplesmente fazendo a contagem de semitons.

Todo o intervalo tem um *intervalo invertido* que lhe corresponde e que se obtém através da troca da ordem das notas: a nota inferior passa a ser superior e vice-versa. Por exemplo, a inversão do intervalo *dó – fá* (uma quarta) é o intervalo *fá – dó* (uma quinta).

Também existe uma classificação algo subjectiva dos intervalos em consonantes e dissonantes: os intervalos *consonantes* são aqueles que produzem uma “sensação de bem-estar” no ouvinte enquanto que os *dissonantes* produzem uma sensação oposta. Trata-se de uma curiosidade com alguma relevância a nível de composição mas sem grande relevância neste trabalho.

O último conjunto de definições que queremos postular antes de começar com o trabalho propriamente dito dizem respeito a uma área essencial na Teoria Musical: a tonalidade. Chamamos *tonalidade* a um conjunto de sons constitutivos de um sistema que contém um som que é mais importante do que todos os demais, a *tónica*, e que rege o funcionamento do sistema em si. Cada tonalidade é composta por sete graus (que correspondem às sete notas musicais) e cuja importância dentro da tonalidade não é a mesma<sup>5</sup>. Os graus contam-se desde a tónica e têm uma numeração fixa. Por exemplo, a tonalidade de sol é composta pelos seguintes graus<sup>6</sup>:

*sol* (I grau), *lá* (II grau), *si* (III grau), *dó* (IV grau), *ré* (V grau),  
*mi* (VI grau) e *fá* (VII grau).

Cada tonalidade pode assumir dois modos diferentes: o modo maior ou o modo menor. A diferença entre os dois modos prende-se unicamente com uma organização diferente a nível intervalar entre alguns dos graus das tonalidades, a saber: no modo maior a distância do III para o IV graus e do VII para o VIII graus é de meio-tom, e todos as restantes são de um tom; no modo menor natural<sup>7</sup> a distância do II para o III graus e do V para o VI é de um

<sup>5</sup>Depois da tónica os graus mais importantes são o quinto e o quarto grau, por esta ordem.

<sup>6</sup>O VIII grau corresponde ao I grau uma oitava a cima.

<sup>7</sup>A cada modo corresponderão *escalas* que não são mais que os sete graus tonais tocados de princípio a fim. A escala maior é equivalente ao modo maior e a escala menor natural é equivalente ao modo menor natural. Existem, contudo, outras escalas, nomeadamente outras menores, mistas e compostas, que dizem respeito a outras configurações intervalares dos graus dos modos tonais. Fica ao critério do leitor aprofundar os seus conhecimentos sobre este assunto (consultar [6]).

meio-tom e em todos os demais é de um tom. Existem tonalidades modelo para cada modo, que são assim chamadas porque todas as suas notas respectivas são naturais (não alteradas). Para o modo maior, temos a escala de *dó maior*: *dó, ré, mi, fá, sol, lá, si* e *dó*; para o modo menor natural temos a escala de *lá menor natural*: *lá, si, dó, ré, mi, fá, sol* e *lá*.

Para terminar resta-nos informar o leitor de que, partindo de qualquer nota, podemos gerar as tonalidades maior e menor respectivas utilizando simplesmente um sistema de alterações que mantenha na nossa sequência de notas escolhida as relações intervalares relativas ao modo que queremos produzir. Por exemplo, se quiser escrever a escala de *ré maior*, teremos que ter a sequência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 ré & \rightarrow & mi & \rightarrow & fá & \rightarrow & sol & \rightarrow & lá & \rightarrow & si \\
 & & 1 \text{ tom} & & 1/2 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & si & \rightarrow & dó & \rightarrow & ré & & \\
 & & & & & & 1/2 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 
 \end{array}$$

Mas como pretendemos o modo maior da tonalidade de *ré* temos que ter os dois semitons entre o III e o IV graus e entre o VII e o VIII graus. Isto pode ser conseguido aplicando sustenidos nas notas *fá* e *dó*, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 ré & \rightarrow & mi & \rightarrow & fá \sharp & \rightarrow & sol & \rightarrow & lá & \rightarrow & si \\
 & & 1 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 1/2 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & si & \rightarrow & dó \sharp & \rightarrow & ré & & \\
 & & & & & & 1 \text{ tom} & & 1/2 \text{ tom} & & 
 \end{array}$$

que é a escala de *ré maior*.

No caso da escala menor natural podemos proceder de forma inteiramente análoga. Se quisermos obter a escala de *ré menor*, precisamos de ter dois semitons apenas entre o II e o III graus e entre V e o VI graus (sendo os restantes intervalos de um tom), o que pode ser conseguido empregando um bemol na nota *si*:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 ré & \rightarrow & mi & \rightarrow & fá & \rightarrow & sol & \rightarrow & lá & \rightarrow & si \flat \\
 & & 1 \text{ tom} & & 1/2 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 1/2 \text{ tom} \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & si \flat & \rightarrow & dó & \rightarrow & ré & & \\
 & & & & & & 1 \text{ tom} & & 1 \text{ tom} & & 
 \end{array}$$

Com estas breves notas sobre Teoria Musical pretende-se que o texto seguinte não erga obstáculos desnecessários à compreensão de qualquer leitor, por muito pouco familiarizado que esteja com a Teoria Musical. Relembramos que para um estudo mais detalhado se aconselha a consulta de [6].

### 1.3 O Problema Central

O objectivo principal da primeira parte deste trabalho é fornecer uma resposta ao problema seguinte: «*Quantos acordes equivalentes, num certo sentido, existem numa escala com um dado número,  $L$ , de notas?*». A Teoria de Contagem de Pólya, a ser estudada no capítulo

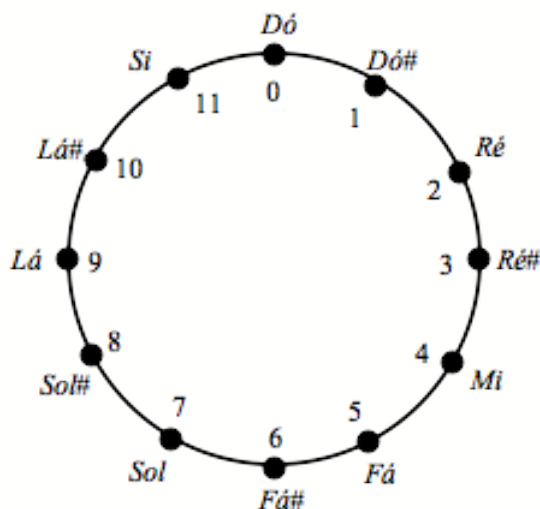


Figura 1.2: As notas da escala cromática identificadas com as classes residuais módulo 12.

seguinte, fornecerá uma solução para este problema. Antes, porém, convém expor claramente o problema em termos matemáticos.

Consideramos uma escala bem temperada de  $L$  notas, isto é, uma escala com  $L$  notas em que o intervalo entre duas notas consecutivas é constante e designado por um meio-tom. Identificamos as notas da escala com os números inteiros  $0, 1, 2, \dots, L - 1$ , ciclicamente (como as classes residuais módulo  $L$ ). Por exemplo, no caso da escala tradicional de 12 semitons ( $L = 12$ ) temos o esquema patente na Figura 1.2.

Quanto aos acordes, conjuntos de notas tocadas simultaneamente, sabemos que são determinados pela sua nota mais grave, dita a fundamental, e pelo tipo de acorde, ou seja, a sua estrutura. A estrutura de um acorde é o conjunto ordenado dos intervalos que as notas constituintes do acorde formam entre si. Por exemplo, o acorde

$$Dó(0) - Mi(4) - Sol(7)$$

é um acorde de *Dó* maior em estado fundamental porque a nota *Dó* é a fundamental do acorde e *Dó* - *Mi* é um intervalo de 3<sup>a</sup> maior e *Mi* - *Sol* é um intervalo de 3<sup>a</sup> menor.

Partindo deste princípio é fácil identificar a relação de equivalência entre acordes a ser considerada: dois acordes do mesmo tipo (com a mesma estrutura) dizem-se equivalentes, independentemente da nota fundamental de cada um. Como exemplo, considerem-se os acordes *Dó* - *Mi* - *Sol* e *Ré* - *Fá#* - *Lá*; estes dois acordes, construídos sobre notas fundamentais diferentes (*Dó* e *Ré*) são equivalentes visto terem estruturas idênticas (3<sup>a</sup> maior, 3<sup>a</sup> menor). Um acorde obtém-se do outro através de uma transposição, o que matematicamente corresponde a uma translacção no grupo aditivo dos inteiros módulo  $L$ , ou a uma rotação se fizermos uma interpretação análoga à da figura 1.2.

O intervalo de um acorde obtém-se determinando os intervalos entre as notas sucessivas desse acorde incluindo o intervalo da última nota à primeira. O intervalo do acorde  $\{a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$  é  $(a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_k - a_{k-1}, a_1 - a_k + L)$ . Em particular, a soma das componentes do intervalo é sempre igual a  $L$  (relembre-se que  $L$  é o número de notas da



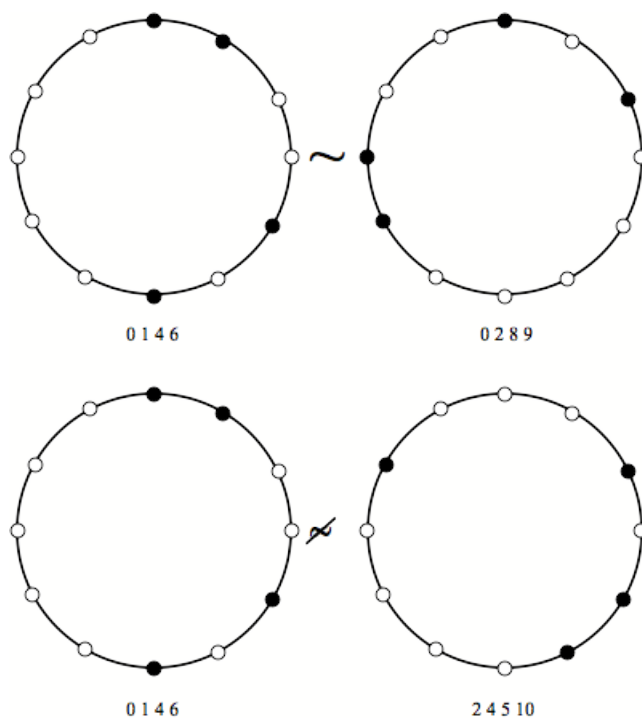


Figura 1.3: Acordes equivalentes e não equivalentes.

escala e  $k$  o número de notas do acorde).

Consideramos acordes de  $k$  notas numa escala de  $L$  notas e identificamo-los com colares de  $L$  pérolas, das quais  $k$  são pretas e correspondem às notas do acorde e  $L - k$  são brancas, correspondendo às notas da escala que não pertencem ao acorde.

Podemos, então, determinar se dois acordes são ou não equivalentes da seguinte forma:

1. Representamos cada acorde por um colar, com as respectivas notas marcadas;
2. Os acordes são equivalentes se for possível rodar o diagrama de um acorde de forma a que este coincida precisamente com o diagrama do outro.

Algebricamente este processo corresponde a escrever a lista das notas de cada acorde, escrever a sucessão dos seus intervalos como o número de semitons entre cada par de notas e verificar se coincidem, a menos de permutação cíclica.

**Exemplo 1.** A Figura 1.3 mostra um caso de um par de colares equivalentes e um caso de um par de colares não equivalentes.

<i>Acorde</i>	$0, 1, 4, 6$	$2, 4, 5, 10$	$0, 2, 8, 9$
<i>Intervalo</i>	$(1, 3, 2, 6)$	$(2, 1, 5, 4)$	$(2, 6, 1, 3)$
<i>Rotação do Intervalo</i>	-	$(1, 5, 4, 2)$	$(1, 3, 2, 6)$

Ou seja, o primeiro acorde é equivalente ao terceiro e estes não são equivalentes ao segundo.

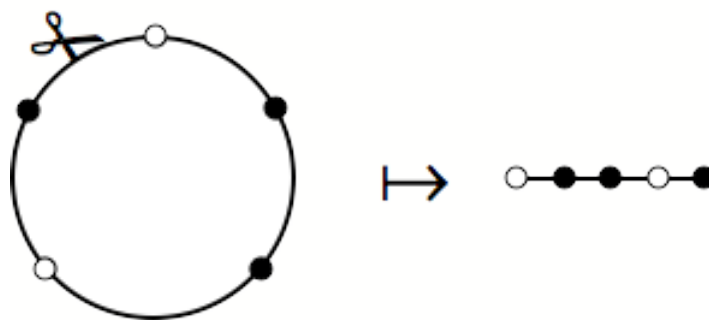


Figura 1.4: Um colar convertido numa corrente.

Se considerarmos os colares fixos podemos ordenar linearmente as pérolas, transformando o colar numa corrente (ver Figura 1.4).

Concluimos que existem  $\binom{L}{k}$  configurações distintas de correntes onde

$$\binom{L}{k} = \frac{L!}{k!(L-k)!}$$

é o número de maneiras de escolher  $k$  objectos de  $L$  objectos disponíveis.

**Exemplo 2.** A Figura 1.5 sintetiza todas as configurações possíveis para acordes de zero, uma, duas, três e quatro notas ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) no âmbito de uma escala de quatro notas ( $L = 4$ ).

*Note-se que configurações distintas originam acordes equivalentes. As classes de equivalência de acordes para esta relação correspondem às seis linhas da figura 1.5.*

Assumindo esta representação dos acordes através de colares, temos que dois colares representam dois acordes equivalentes se for possível rodar um deles de forma a que coincida com o outro. Na linguagem do próximo capítulo, a classificação de acordes não equivalentes corresponde ao estudo das órbitas da acção do grupo das rotações de colares de  $L$  pérolas no conjunto dos colares. Este grupo actuará, portanto, no conjunto dos colares, permutando ciclicamente a posição das pérolas (notas).

Vamos adoptar a notação seguinte: um colar composto por  $k$  pérolas pretas e  $L - k$  pérolas brancas é uma configuração do tipo  $(k, L - k)$ . Note-se que:

- Duas configurações serão equivalentes se existir um elemento do grupo (uma rotação) que, agindo sobre uma configuração a transforma na outra;
- Existem  $\binom{L}{k}$  configurações distintas.

Antes de iniciar a resolução deste problema vamos generaliza-lo. Assim, em vez de tratarmos de pérolas brancas e pretas, vamos considerar objectos de  $m$  tipos diferentes, com  $m \in \mathbb{Z}$  (que podem ser vistos como cores diferentes); desta forma, colares de  $k$  pérolas pretas

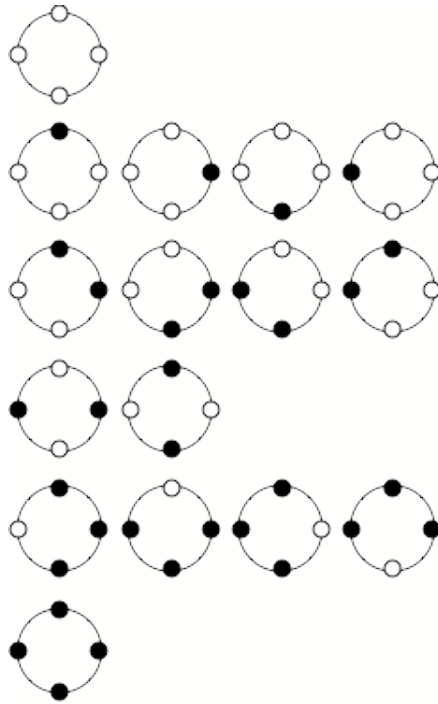


Figura 1.5: Todas as configurações possíveis para acordes de  $0 \leq k \leq 4$  notas numa escala de quatro notas.

e  $L - k$  pérolas brancas dão lugar a sequências de  $L$  objectos com  $k_1$  objectos de tipo 1,  $k_2$  objectos de tipo 2,  $\dots$ ,  $k_m$  objectos de tipo  $m$ ; as configurações de tipo  $(k, L - k)$  passam a ser configurações de tipo  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ , com  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = L$ ; finalmente passamos a considerar a equivalência de configurações por um grupo  $G$  de permutações de  $L$  objectos em vez da equivalência de configurações dada por rotações de colares de  $L$  pérolas.

O problema assim generalizado pode ser formulado do seguinte modo: «*Quantas configurações não equivalentes de tipo  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$  existem?*»

## Capítulo 2

# A Teoria de Contagem de Pólya

Uma grande parte da análise combinatória está centrada em problemas de contagem: contar o número de possibilidades, o número de soluções, o número de conjuntos de um certo tipo, etc. As dificuldades técnicas para encontrar fórmulas para a cardinalidade desses conjuntos podem, frequentemente, ser ultrapassadas pelo método das funções geradoras, que é uma ferramenta muito útil.

Contudo, muitas das dificuldades em análise combinatória são de natureza conceptual e não de natureza técnica. Isto acontece quando o processo de contagem se torna confuso devido aos diferentes objectos que devem ser igualmente considerados. Isto é o mesmo que dizer que existe uma relação de equivalência e que o problema deixa de ser a contagem dos objectos individualmente mas sim a contagem das diferentes classes de equivalência. Por exemplo, ao dizer-se que existem exactamente cinco sólidos regulares estamos a usar tacitamente uma classe de equivalência induzida por semelhança geométrica. Frequentemente, como no caso anterior, a relação de equivalência é dada pela acção de um grupo num conjunto, sendo as classes de equivalência as órbitas dessa acção. É este o cenário que iremos estudar neste capítulo.

A ligação com o *problema central* da contagem das configurações ou estruturas possíveis de acorde resulta de termos o grupo das rotações de colares a actuar no conjunto dos acordes, identificados com colares, e da relação de equivalência entre acordes se traduzir na existência de uma rotação que transforme um colar no outro.

Um terceiro tipo de dificuldade em problemas de contagem diz respeito ao facto de que não estamos sempre a contar os elementos com o mesmo peso. Por exemplo, se dissermos que toda a equação algébrica de grau  $n$  tem exactamente  $n$  raízes, estamos a atribuir a cada raiz um peso que é igual à sua multiplicidade.

Estes três aspectos da contagem — funções geradoras, relações de equivalência induzidas por grupos e pesos — encontram-se todos abrangidos por um teorema muito elegante que se deve a Pólya.

O objectivo deste capítulo é, baseando-nos no artigo de N. G. Bruijn [1], expor a teoria de contagem de Pólya, reescrevendo-a na linguagem da teoria de acções de grupo, para depois poder ser aplicada directamente ao problema da contagem de acordes.

## 2.1 Alguma Notação Usual

Se  $S$  é um conjunto finito, então  $|S|$  denota a sua cardinalidade. Se  $G$  é um grupo, então  $|G|$  é chamado de ordem do grupo. No caso de termos um grupo de permutações de um conjunto  $S$ , então  $|S|$  é chamado de grau do grupo de permutações. Dados conjuntos  $S$  e  $T$ , o conjunto de todas as funções de  $S$  em  $T$  é denotado por  $T^S$ .

## 2.2 Acções de Grupo

A teoria de contagem de Pólya será abordada sob o ponto de vista da acção de um grupo sobre um conjunto finito. Nesta secção definimos este conceito e estudamos alguns dos resultados mais relevantes da teoria das acções de grupo.

**Definição 1.** 1. Diz-se que um grupo  $G$  actua, ou age, à esquerda num conjunto  $X$  se existe uma função  $G \times X \rightarrow X$ , que se costuma denotar por  $(g, x) \mapsto g \cdot x$ , tal que para todo o  $x \in X$  e para todos os elementos  $g_1, g_2 \in G$  satisfaz:

- $e \cdot x = x$ ;
- $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ ;

onde  $e \in G$  é o elemento neutro de  $G$ .

2. Uma acção de grupo à direita é uma função  $X \times G \rightarrow X$ , que se costuma denotar por  $(x, g) \mapsto x \cdot g$ , tal que para todo o  $x \in X$  e para todos os elementos  $g_1, g_2 \in G$  satisfaz:

- $x \cdot e = x$ ;
- $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$ .

Existe uma correspondência entre acções à esquerda e à direita obtida associando à acção à direita,  $(x, g) \mapsto x \cdot g$ , a seguinte acção à esquerda:

$$(g, x) \mapsto x \cdot g^{-1}.$$

Em muitos contextos torna-se útil proceder a esta associação e considerar apenas acções à esquerda. Se nada for dito em contrário, todas as acções consideradas serão à esquerda.

**Exemplo 3.** Existe uma acção natural do grupo simétrico  $S_n$  no conjunto  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$\sigma \cdot x = \sigma(x).$$

**Exemplo 4.** Sejam  $G$  um grupo e  $H$  um subgrupo de  $G$ . Uma acção do grupo  $H$  no conjunto  $G$  é dada por  $(h, x) \mapsto hx$ , onde  $hx$  é o produto em  $G$ . Esta acção de  $H$  em  $G$  é chamada de translação (esquerda). Se  $K$  é outro subgrupo de  $G$  e  $S$  é o conjunto de todas as classes laterais esquerdas de  $K$  em  $G$ , então  $H$  actua em  $S$  pela translação:

$$(h, xK) \mapsto hxK.$$

**Exemplo 5.** Seja  $H$  um subgrupo de  $G$ . Uma acção de  $H$  em  $G$  é dada por  $(h, x) \mapsto hxh^{-1}$ ; para evitar a confusão com o produto em  $G$  esta acção será sempre denotada por  $hxh^{-1}$  e não por  $h \cdot x$ . Esta acção de  $H$  em  $G$  é chamada a conjugação por  $H$  e o elemento  $hxh^{-1}$  é dito o conjugado de  $x$  por  $h$ . Se  $K$  é um qualquer subgrupo de  $G$  e  $h \in H$ , então  $hKh^{-1}$  é um subgrupo de  $G$  isomorfo a  $K$ . Logo  $H$  actua no conjunto de todos os subgrupos de  $G$ , por conjugação:

$$(h, K) \mapsto hKh^{-1}.$$

O grupo  $hKh^{-1}$  é dito o conjugado de  $K$  por  $h$ .

Sempre que tal não comprometa a clareza do texto, passaremos a omitir o ponto na notação das acções. Assim, passaremos a escrever  $gx$  em vez de  $g \cdot x$ .

**Teorema 1.** Seja  $G$  um grupo que actua no conjunto  $X$ .

(i) A relação em  $X$  definida por

$$x \sim x' \Leftrightarrow gx = x', \text{ para algum } g \in G,$$

é uma relação de equivalência.

(ii) Para cada  $x \in X$ ,  $G_x = \{g \in G : gx = x\}$  é um subgrupo de  $G$ .

(iii) Para  $x \in X$  e  $g \in G$ ,  $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ .

*Demonstração.* (i) Há que verificar as três condições que definem uma relação de equivalência:

- $x \sim x$ , para todo o  $x \in X$  porque  $ex = x$ ;
- $(x \sim x') \Rightarrow (x' \sim x)$  para todos os  $x, x' \in X$  porque se  $x \sim x'$  então existe  $g \in G$  tal que  $gx = x'$  e se se multiplicar à esquerda ambos os membros desta equação por  $g^{-1} \in G$ , o elemento inverso de  $g$ , obtemo

$$\begin{aligned} gx = x' &\Rightarrow g^{-1}(gx) = g^{-1}x' \Leftrightarrow (g^{-1}g)x = g^{-1}x' \Leftrightarrow ex = g^{-1}x' \\ &\Leftrightarrow x = g^{-1}x' \Rightarrow x' \sim x; \end{aligned}$$

- $[(x_1 \sim x_2) \wedge (x_2 \sim x_3)] \Rightarrow (x_1 \sim x_3)$ , para todos os  $x_1, x_2, x_3 \in X$ , visto que se  $x_1 \sim x_2$  e  $x_2 \sim x_3$ , então existem elementos  $g_1, g_2 \in G$  tais que  $g_1x_1 = x_2$  e  $g_2x_2 = x_3$ ; então, temos que

$$\begin{aligned} g_1x_1 = x_2 &\Rightarrow g_2(g_1x_1) = g_2x_2 \Leftrightarrow (g_2g_1)x_1 = g_2x_2 \\ &\Leftrightarrow (g_2g_1)x_1 = x_3 \Rightarrow x_1 \sim x_3. \end{aligned}$$

Ou seja  $\sim$  é uma relação de equivalência.

(ii) Como, pela definição de  $G_x$ , temos que  $G_x \subseteq G$ , basta provar que  $e \in G_x$ , que  $G_x$  é fechado para a operação de  $G$  e que  $G_x$  é fechado para a formação de inversos, ou seja,  $g \in G_x \Rightarrow g^{-1} \in G_x$ .

Sejam  $g_1, g_2 \in G_x$ ; tem-se que  $(g_1g_2)x = g_1(g_2x) = g_1x = x$ , logo  $g_1g_2 \in G$ , ou seja,  $G_x$  é fechado para a operação de  $G$ . Além disso, pela definição de acção,  $ex = x$ , logo  $e \in G_x$ . Seja  $g \in G_x$ ;  $gx = x \Rightarrow g^{-1}(gx) = g^{-1}x \Leftrightarrow g^{-1}x = x$ , logo para cada  $g \in G_x$ , o seu inverso em  $G$  está também em  $G_x$ . Então de facto  $G_x$  é um subgrupo de  $G$ .

(iii) Seja  $h \in G_{gx}$ . Então  $h \in G$  e  $h(gx) = gx$ . Logo  $(g^{-1}hg)x = x$  e, portanto,  $g^{-1}hg \in G_x$  e  $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gG_xg^{-1}$ . Concluimos que  $G_{gx} \subseteq gG_xg^{-1}$ .

Por outro lado, seja  $h \in gG_xg^{-1}$ . Então, existe um elemento de  $G_x$ , digamos  $w$ , tal que  $h = gwg^{-1}$ . Queremos provar que  $h \in G_{gx}$ , isto é, que  $h(gx) = gx$ . Mas

$$hgx = gwg^{-1}gx = gwx = gx,$$

visto  $w \in G_x$ . Logo,  $gG_xg^{-1} \subseteq G_{gx}$  e, juntamente com o que se concluiu no parágrafo anterior,  $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ .

□

As classes de equivalência dadas na alínea (i) do Teorema 1 são chamadas de órbitas de  $G$  em  $X$ ; a órbita de  $x \in X$  é a (única) órbita que contém  $x$  e é denotada por  $\mathcal{O}_x$ . O subgrupo  $G_x$  é chamado de estabilizador de  $x$ .

**Exemplo 6.** Se um grupo  $G$  age nele próprio por conjugação, então a órbita  $\{gxg^{-1} : g \in G\}$  de  $x \in G$  é chamada a classe de conjugação de  $x$ . Se um subgrupo  $H$  age em  $G$  por conjugação, então o estabilizador

$$H_x = \{h \in H : h x h^{-1} = x\} = \{h \in H : hx = xh\}$$

é chamado o centralizador de  $x$  em  $H$ , que é denotado por  $C_H(x)$ . Se  $H$  age por conjugação no conjunto  $X$  de todos os subgrupos de  $G$ , então o estabilizador de  $K$ , mais propriamente  $\{h \in H : hKh^{-1} = K\}$ , é chamado o normalizador de  $K$  em  $H$  e denota-se por  $N_H(K)$ . O grupo  $N_G(K)$  é chamado simplesmente de normalizador de  $K$ . É claro que  $K$  é um subgrupo normal de  $N_G(K)$ ;  $K$  é normal em  $G$  se e só se  $N_G(K) = G$ .

**Teorema 2.** Se um grupo  $G$  age num conjunto  $X$ , então o cardinal da órbita de  $x \in X$  é  $[G : G_x]^1$ , o índice de  $G_x$  em  $G$ .

*Demonstração.* Sejam  $g, h \in G$ . Visto que

$$gx = hx \Leftrightarrow g^{-1}hx = x \Leftrightarrow g^{-1}h \in G_x \Leftrightarrow hG_x = gG_x,$$

segue que a função dada por  $gG_x \mapsto gx$  é uma bijecção bem definida entre o conjunto das classes laterais de  $G_x$  em  $G$  e a órbita  $\mathcal{O}_x = \{gx : g \in G\}$ . Logo  $[G : G_x] = |\mathcal{O}_x|$ . □

**Corolário 1.** Seja  $G$  um grupo finito e  $K$  um subgrupo de  $G$ . Então:

---

<sup>1</sup> $[G : G_x]$  representa o cardinal do conjunto das classes laterais esquerdas (ou direitas) de  $G_x$  em  $G$ .

(i) O número de elementos da classe de conjugação de  $x \in G$  é  $[G : C_G(x)]$ , que divide  $|G|$ .

(ii) Se  $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$  são representantes das  $n$  classes de conjugação distintas de  $G$ , então

$$|G| = \sum_{i=1}^n [G : C_G(x_i)].$$

(iii) O número de subgrupos de  $G$  conjugado de  $K$  é  $[G : N_G(K)]$ , que divide  $|G|$ .

*Demonstração.* (i) e (iii) seguem imediatamente dos exemplos 6 e 5, respectivamente, do Teorema 2 e do Teorema de Lagrange<sup>2</sup>. Como  $G$  é a união disjunta das classes de conjugação de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , (ii) segue de (i).  $\square$

**Teorema 3.** Se um grupo  $G$  age num conjunto  $X$ , então esta acção induz um homomorfismo<sup>3</sup> de grupos  $G \rightarrow S_X$ , onde  $S_X$  é o grupo de todas as permutações<sup>4</sup> de  $X$ .

*Demonstração.* Para cada  $g \in G$  defina-se a função

$$\begin{aligned} \pi_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto gx. \end{aligned}$$

Como  $x = g(g^{-1}x)$ , para todo o  $x \in X$ ,  $\pi_g$  é sobrejectiva. Da mesma forma,  $gx = gy$  implica que

$$x = g^{-1}(gx) = g^{-1}(gy) = y,$$

pelo que  $\pi_g$  é injectiva e, portanto, bijectiva (ou seja, uma permutação de  $X$ ). Como, para além disso, se tem que  $\pi_{gg'} = \pi_g \pi_{g'} : X \rightarrow X$  para todos os  $g, g' \in G$  e  $\pi_e = \text{Id}_X$ , a função

$$\begin{aligned} G &\rightarrow S_X \\ g &\mapsto \pi_g \end{aligned}$$

é um homomorfismo.  $\square$

**Observação 1.** Reciprocamente tem-se que todo o homomorfismo de grupos  $\phi : G \rightarrow S_X$  induz uma acção de  $G$  em  $X$  dada por  $gx = (\phi(g))(x)$ ,  $\forall g \in G, \forall x \in X$ .

*Demonstração.* Seja  $\phi : G \rightarrow S_X$  um homomorfismo de grupos e seja

$$\begin{aligned} f : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \phi(g)(x). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Relembre-se que o Teorema de Lagrange garante-nos que, dado um subgrupo  $H$  de um grupo finito  $G$ , o número de elementos de  $H$  divide o número de elementos de  $G$ .

<sup>3</sup>Dados os grupos  $G$  e  $H$ , um homomorfismo de grupos é uma função  $f : G \rightarrow H$ , tal que

$$f(ab) = f(a)f(b),$$

para todos os  $a, b \in G$  e  $f(e) = e$

<sup>4</sup>Uma permutação de  $X$  é uma função bijectiva de  $X$  em  $X$ .



Esta função satisfaz  $f(e, x) = x, \forall x \in X$ , porque  $\phi(e) = Id_X$  e

$$\begin{aligned} f(gh, x) &= \phi(gh)(x) = (\phi(g) \circ \phi(h))(x) = \phi(g)(\phi(h)(x)) \\ &= f(g, f(h, x)). \end{aligned}$$

Então,  $f$  é uma acção do grupo  $G$  em  $X$  induzida pelo homomorfismo  $\phi$ . □

**Corolário 2** (Cayley). *Se  $G$  é um grupo, então existe um monomorfismo<sup>5</sup>  $G \rightarrow S_G$ . Logo, todo o grupo é isomorfo a um grupo de permutações. Em particular, todo o grupo finito  $G$  é isomorfo a um subgrupo de  $S_n$ , com  $n = |G|$ . Esta acção diz-se a representação de Cayley do grupo  $G$ .*

*Demonstração.* Considere-se a acção do grupo  $G$  nele próprio por translacção, como no Exemplo 4. Aplique-se o teorema anterior para obter o homomorfismo  $\pi : G \rightarrow S_G$ . Se  $\pi(g) = \pi_g = 1_G$ , então  $gx = \pi_g(x) = x$ , para todo o  $x \in G$ . Em particular,  $ge = e$ , pelo que  $g = e$  e  $\pi$  é um monomorfismo.

Para provar a última afirmação do teorema basta notar que se  $|G| = n$ , então os grupos  $S_G$  e  $S_n$  são isomorfos<sup>6</sup>. □

Relembre-se que se  $G$  é um grupo, então o conjunto  $\text{Aut}(G)$ , dos automorfismos<sup>7</sup> de  $G$ , juntamente com a operação binária de composição de funções é um grupo.

**Corolário 3.** *Seja  $G$  um grupo.*

(i) *Para cada  $g \in G$ , a conjugação por  $g$  induz um automorfismo de  $G$ .*

(ii) *Existe um homomorfismo  $G \rightarrow \text{Aut}(G)$  cujo núcleo é igual a*

$$C(G) = \{g \in G : gx = xg, \forall x \in G\}.$$

*Demonstração.*

(i) Como  $G$  age nele próprio por conjugação então, para cada  $g \in G$ , a função

$$\begin{aligned} \pi_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gxg^{-1}, \end{aligned}$$

é uma bijecção pela prova do Teorema 3. É fácil de ver que  $\pi_g$  é também um homomorfismo e, portanto, um automorfismo.

<sup>5</sup>Um monomorfismo é um homomorfismo injectivo.

<sup>6</sup>Um isomorfismo é um homomorfismo bijectivo. Os grupos  $G$  e  $H$  dizem-se isomorfos se existir um isomorfismo entre eles.

<sup>7</sup>Um automorfismo de um grupo  $G$  é um isomorfismo de um grupo nele próprio.

(ii) Suponha-se que  $G$  actua nele próprio por conjugação. Por (i) a imagem do homomorfismo  $\pi : G \rightarrow S_G$  do teorema anterior está contida em  $\text{Aut}(G)$ . Temos então

$$g \in \ker(\pi) \Leftrightarrow \pi_g = 1_G \Leftrightarrow gxg^{-1} = \pi_g(x) = x, \forall x \in G.$$

Mas  $gxg^{-1} = x$  se e só se  $gx = xg$ , pelo que  $\ker(\pi) = C(G)$ .  $\square$

O automorfismo  $\pi_g$  deste corolário é chamado o automorfismo interno induzido por  $g$ . O subgrupo normal  $C(G) = \ker(\pi)$  é chamado o centro de  $G$ . Um elemento  $g \in G$  está em  $C(G)$  se e só se a classe de conjugação de  $g$  consiste apenas do elemento  $g$ . Logo, se  $G$  é finito e  $x \in C(G)$ , então  $[G : C_G(x)] = 1$  (Corolário 1). Consequentemente, a equação de classe de  $G$  (Corolário 1, (ii)) pode ser reescrita como

$$|G| = |C(G)| + \sum_{i=1}^m [G : C_G(x_i)],$$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_m \in G - C(G)$  são representantes das classes de conjugação distintas de  $G$  e  $[G : C_G(x_i)] > 1$ , para todo o  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

**Proposição 1.** *Seja  $H$  um subgrupo de um grupo  $G$  e suponha-se que  $G$  actua no conjunto  $X$  de todas as classes laterais esquerdas de  $H$  em  $G$  por translação à esquerda. Então, o núcleo do homomorfismo induzido  $G \rightarrow S_X$  está contido em  $H$ .*

*Demonstração.* O homomorfismo induzido  $G \rightarrow S_X$  é dado por  $g \mapsto \pi_g$ , onde  $\pi_g : X \rightarrow X$  e  $\pi_g(xH) = gxH$ . Se  $g$  está no núcleo, então  $\pi_g = 1_X$  e  $gxH = xH$  para todo o  $x \in G$ . Em particular, para  $x = e$ ,  $geH = eH = H$ , o que implica que  $g \in H$ .  $\square$

**Corolário 4.** *Se  $H$  é um subgrupo de índice  $p$  de um grupo finito  $G$ , onde  $p$  é o menor primo que divide a ordem de  $G$ , então  $H$  é normal em  $G$ .*

*Demonstração.* Seja  $X$  o conjunto de todas as classes laterais esquerdas de  $H$  em  $G$ . Então,  $S_X \cong S_p$ , visto que  $|X| = [G : H] = p$ . Se  $K$  é o núcleo do homomorfismo  $G \rightarrow S_X$  da Proposição 1, então  $K$  é normal em  $G$  e está contido em  $H$ . Para além disso,  $G/K$  é isomorfo a um subgrupo de  $S_p$ . Logo,  $|G/K|$  divide  $|S_p| = p!$ . Mas todo o divisor de  $|G/K| = [G : K]$  tem que dividir  $|G| = |K|[G : K]$ . Como nenhum número menor que  $p$  (excepto 1) pode dividir  $|G|$ , temos que ter  $|G/K| = p$  ou 1. Contudo,

$$|G/K| = [G : K] = [G : H][H : K] = p[H : K] \geq p.$$

Logo,  $|G/K| = p$  e  $[H : K] = 1$ , ou seja,  $H = K$ , que é um subgrupo normal de  $G$ .  $\square$

## 2.3 Polinómio de um Grupo de Permutações

Dada uma acção de um grupo sobre um conjunto finito, existe um polinómio que sintetiza, sob um certo ponto de vista, as propriedades dessa acção. Nesta secção vamos definir este polinómio.

Seja  $G$  um grupo finito a actuar num conjunto finito  $X$ . Para cada  $g \in G$  defina-se a função

$$\begin{aligned}\pi_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto gx,\end{aligned}$$

tal como anteriormente e, como já foi visto, esta função é uma permutação de  $X$ .

Seja  $\langle g \rangle$  o menor subgrupo de  $G$  que contém  $g$ . Então  $\langle g \rangle = \{g^i : i \in \mathbb{Z}\}$ . Seja  $m = \min\{i > 0 : g^i = e\}$ . Então  $|\langle g \rangle| = m$  e  $\langle g \rangle = \{g^i : 0 \leq i \leq m-1\}$ . A acção de  $G$  em  $X$  induz uma acção de  $\langle g \rangle$  em  $X$ , por restrição a  $\langle g \rangle \times X$  da função  $G \times X \rightarrow X$  que define a acção de  $G$  em  $X$ . Note-se que  $\pi_{g^i} = (\pi_g)^i$  para todo o  $i \in \mathbb{Z}$ .

Fixemos então  $g \in G$ . A acção de  $\langle g \rangle$  em  $X$  cria uma partição<sup>8</sup> de  $X$  em órbitas, neste caso subconjuntos (não vazios), de  $X$  que são ciclicamente permutadas por  $\pi_g$ . Se  $x \in X$  é um qualquer elemento de uma tal órbita e  $l$  for o menor inteiro positivo tal que  $g^l x = x$  (note-se que tal inteiro existe, já que  $g^m x = ex = x$ , onde  $m = |\langle g \rangle|$ ), então essa órbita consiste dos seguintes elementos de  $X$ :

$$x = \pi_g^0(x), \pi_g(x), \dots, \pi_g^{l-1}(x). \quad (2.1)$$

De facto, relativamente à acção de  $\langle g \rangle$ ,  $\mathcal{O}_x = \{g^i x : i \in \mathbb{Z}\}$ . Se  $0 \leq i \leq j \leq l-1$  e  $\pi_g^i(x) = \pi_g^j(x)$  então

$$g^i x = g^j x \Leftrightarrow g^{j-i} x = x.$$

Como  $0 \leq j-i < l$ , a minimalidade de  $l$  implica que  $j-i=0$ , ou seja,  $i=j$ . Isto porque os elementos de (2.1) são elementos distintos da órbita de  $x$  para a acção de  $\langle g \rangle$ . Além disso, é fácil de ver que se  $i \equiv j \pmod{l}$ , então  $\pi_g^i(x) = \pi_g^j(x)$ , logo (2.1) é uma lista completa sem repetições dos elementos de  $\mathcal{O}_x$  e  $|\mathcal{O}_x| = l$ .

Note-se que esta partição de  $X$  em órbitas relativamente à acção de  $\langle g \rangle$  corresponde precisamente, por construção, à decomposição da permutação  $\pi_g$  de  $X$  em ciclos disjuntos, sendo cada um desses ciclos da forma  $(x \ \pi_g(x) \ \pi_g^2(x) \ \dots \ \pi_g^{l-1}(x))$ . Logo, o número de órbitas de cardinalidade  $l$  é precisamente igual ao número de ciclos de comprimento  $l$  na decomposição de  $\pi_g$  como produto de ciclos disjuntos.

Dada  $\pi_g$  podemos particionar de forma única  $X$  em órbitas, isto é, subconjuntos de  $X$  que são ciclicamente permutados por  $\pi_g$ . Se  $l$  é a cardinalidade de uma tal órbita e se  $x$  é um qualquer elemento dessa órbita, então a órbita consiste nos seguintes elementos de  $X$ :

$$x, \pi_g(x), \pi_g^2(x), \dots, \pi_g^{l-1}(x).$$

Se  $X$  é particionado em  $b_1$  órbitas de cardinalidade 1,  $b_2$  órbitas de cardinalidade 2, etc., então dizemos que  $\pi_g$  é do tipo  $(b_1, b_2, b_3, \dots)$ . Obviamente que  $b_i = 0$  para  $i > m$ , onde  $m$  é o número de elementos de  $X$ . Para além disso temos que:

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots = m,$$

ou seja, a soma dos comprimentos dos ciclos é igual ao número total de elementos em  $X$ .

Podemos agora definir o polinómio de um grupo de permutações:

---

<sup>8</sup>Uma partição de um conjunto  $D$  é um conjunto de subconjuntos disjuntos não vazios de  $D$  e cuja reunião é o próprio  $D$ .

**Definição 2.** Dada uma acção do grupo  $G$  no conjunto finito  $X$ , com  $|X| = m$ , vamos definir um polinómio  $P_G$  nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_m$  e com coeficientes em  $\mathbb{Q}$  associado a esta acção. Para começar, a cada  $g \in G$  associamos o monómio  $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m}$ , onde  $(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots)$  é o tipo de  $\pi_g$ . Tomando a soma destes elementos e dividindo pelo número de elementos de  $G$  obtemos o polinómio

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_m) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m},$$

ao qual chamamos o polinómio da acção de  $G$  em  $X$  ou, com considerável abuso de linguagem, simplesmente o polinómio de  $G$ .

**Observação 2.** A acções diferentes de um grupo correspondem geralmente polinómios diferentes.

**Exemplo 7.** Se  $G$  age em  $X$  unicamente pela permutação identidade, então temos que  $P_G = x_1^m$ , visto que a permutação identidade é do tipo  $(m, 0, 0, \dots)$ . Como  $P_G$  depende de  $m$ , este exemplo simples ilustra o facto de que o polinómio de  $G$  depende não apenas da estrutura de  $G$  como grupo abstracto, mas também da interpretação dos seus elementos como permutações de um conjunto  $X$ .

**Exemplo 8.** Seja  $X$  o conjunto dos vértices de um cubo, pelo que  $m = 8$  e seja  $G$  o grupo das rotações do cubo, que actua naturalmente em  $X$ . Existem  $6 \times 4 = 24$  tais rotações. Estas podem ser divididas nas seguintes categorias:

- (a) A identidade;
- (b) Três rotações de  $180^\circ$  em volta das rectas que unem os centros das faces opostas;
- (c) Seis rotações de  $90^\circ$  em volta das rectas que unem os centros das faces opostas;
- (d) Seis rotações de  $180^\circ$  em volta das rectas que unem os pontos médios das arestas opostas;
- (e) Oito rotações de  $120^\circ$  em volta das rectas que unem os vértices opostos.

Como  $1 + 3 + 6 + 6 + 8 = 24$ , esta lista é exaustiva.

É fácil visualizar as órbitas de  $X$  em cada caso. Em (a) existem oito ciclos de comprimento 1; uma permutação na categoria (b) produz quatro ciclos de comprimento 2; em (c) existem dois ciclos de comprimento 4; (d) contém quatro ciclos de comprimento 2; e em (e) existem dois ciclos de comprimento 1 e dois de comprimento 3. Logo, o polinómio é:

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 9x_2^4 + 6x_4^2 + 8x_1^2 x_3^2).$$

**Exemplo 9.** Seja  $X$  o conjunto das arestas de um cubo, pelo que  $m = 12$ , e seja  $G$  o grupo das 24 permutações de  $X$  induzidas pelas rotações do cubo.

As rotações são as mesmas que no Exemplo 8. O que é necessário agora é ver o que as rotações fazem às arestas. A identidade produz a permutação do tipo  $(12, 0, 0, \dots)$ ; uma

rotação da categoria (b) produz o tipo  $(0, 6, 0, \dots)$ ; (c) fornece o tipo  $(0, 0, 0, 3, 0, \dots)$ ; (d) fornece o tipo  $(2, 5, 0, \dots)$ ; (e) fornece o tipo  $(0, 0, 4, 0, \dots)$ . Logo, temos:

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^{12} + 3x_2^6 + 6x_4^3 + 8x_1^2x_2^5 + 8x_3^4).$$

**Exemplo 10.** Debruçamo-nos novamente sobre as rotações do cubo, mas agora  $X$  é o conjunto de todas as faces. As nossas cinco categorias produzem agora os tipos  $(6, 0, \dots)$ ,  $(2, 2, 0, \dots)$ ,  $(2, 0, 0, 1, 0, \dots)$ ,  $(0, 3, 0, \dots)$ ,  $(0, 0, 2, 0, \dots)$ , respectivamente, e portanto:

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2). \quad (2.2)$$

**Exemplo 11.** Seja  $X$  um conjunto de  $m$  elementos e seja  $G = S_X$ . O seu polinómio é igual ao coeficiente de  $z^m$  no desenvolvimento de

$$\exp\left(zx_1 + \frac{z^2x_2}{2} + \frac{z^3x_3}{3} + \dots\right) \quad (2.3)$$

como série de potências de  $z$ .

Isto é uma consequência do Teorema de Pólya mas também é possível fornecer uma prova directa, da qual segue um esboço. A expressão (2.3) pode ser escrita como:

$$\sum_{b_1=0}^{+\infty} \frac{z^{b_1}x_1^{b_1}}{b_1!} \sum_{b_2=0}^{+\infty} \frac{z^{2b_2}x_2^{b_2}}{b_2!2^{b_2}} \dots$$

O coeficiente de  $z^m$  é obtido somando a expressão:

$$\frac{1}{b_1!b_2!b_3! \dots 1^{b_1}2^{b_2}3^{b_3} \dots} x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3} \dots, \quad (2.4)$$

para todos os  $b_1, b_2, \dots$  possíveis satisfazendo  $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots = m$ . Excluindo o factor  $m!$ , que é a ordem de  $G$ , o coeficiente em (2.4) é igual ao número de permutações de tipo  $(b_1, b_2, b_3, \dots)$ , o que prova a afirmação.

**Exemplo 12.** Considere-se a representação de Cayley de um grupo finito  $X$ . Vamos determinar o seu polinómio.

Se  $a \in X$  então a ordem de  $a$  é o menor inteiro positivo  $k$  tal que  $a^k = e$ , onde  $e$  representa o elemento neutro de  $X$ . Denote-se esta ordem por  $k(a)$ . A permutação  $\pi_a$  particiona  $X$  em órbitas de comprimento  $k(a)$ : se  $x \in X$ , então  $x$  pertence ao ciclo obtido por:

$$x \rightarrow ax \rightarrow a^2x \rightarrow \dots \rightarrow a^{k(a)-1}x.$$

Segue que  $k(a)$  divide  $m = |X|$  e que existem  $m/k(a)$  ciclos de comprimento  $k(a)$ . Logo obtemos o polinómio:

$$P_G = \frac{1}{m} \sum_{a \in X} [x_{k(a)}]^{m/k(a)}. \quad (2.5)$$

Esta soma pode também ser escrita como:

$$P_G = \frac{1}{m} \sum_{d|m} v(d)(x_d)^{m/d}, \quad (2.6)$$

onde  $d$  percorre os divisores de  $m$  e  $v(d)$  representa o número de elementos  $a$  de  $X$  com ordem  $d$ .

**Exemplo 13.** Tomamos agora o grupo cíclico de ordem  $m$  como um caso especial do Exemplo 12. Seja  $X$  o grupo multiplicativo de todas as  $m$ -ésimas raízes da unidade,  $e^{2\pi ij/m}$ , onde  $j = 1, \dots, m$  e  $i$  é a unidade imaginária. Se identificarmos o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos com o plano  $\mathbb{R}^2$ , temos que a transformação  $z \mapsto e^{2\pi ij/m}z$  para  $z \in \mathbb{C}$ , é uma rotação de ângulo  $\frac{2\pi j}{m}$ . O grupo multiplicativo  $X$  é isomorfo ao grupo aditivo  $G = \mathbb{Z}_m$  dos inteiros módulo  $m$ , onde  $\bar{j}$  designará a classe do inteiro  $j$  módulo  $m$ . De facto, a função

$$\begin{aligned} G &\rightarrow X \\ \bar{j} &\mapsto e^{2\pi ij/m} \end{aligned} \quad (2.7)$$

está bem definida e é um isomorfismo. Identificamos estes dois grupos por via do isomorfismo (2.7). Note-se que assim, se  $a = e^{2\pi ij/m}$ , então a rotação  $x \mapsto ax$ , definida em  $X$ , corresponde à translacção  $\bar{k} \mapsto \bar{j} + \bar{k}$  em  $G$ . A ordem do elemento  $\bar{j}$  de  $\mathbb{Z}_m$  é  $k(\bar{j}) = \frac{m}{(m, j)}$ , onde  $(m, j)$  é o máximo divisor comum entre  $m$  e  $j$ . Logo, por (2.5) o polinómio da representação de Cayley de  $G$  é

$$P_G = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (x_{m/(m, j)})^{(m, j)}.$$

Uma segunda expressão é obtida de (2.6):

$$P_G = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \phi(d) (x_d)^{m/d},$$

onde  $\phi$  é a função de Euler, ou seja,  $\phi(d)$  é o número de inteiros  $n$  com  $1 \leq n \leq d$  e  $(n, d) = 1$ . Tal decorre de se ter que o número de inteiros  $j$  tais que  $1 \leq j \leq m$  e  $k(\bar{j}) = \frac{m}{(m, j)} = d$  é precisamente  $\phi(d)$ .

A função  $\phi$  de Euler é definida para qualquer inteiro positivo  $n$  como sendo o número de inteiros menores ou iguais a  $n$  que são primos com  $n$  (ou relativamente primos<sup>9</sup>). Esta função satisfaz algumas propriedades interessantes:

1.  $\phi$  é multiplicativa, isto é, se  $(m, n) = 1$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}^+$ , então  $\phi(m \cdot n) = \phi(m)\phi(n)$ ;
2. Se  $p$  for primo, então  $\phi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$ .

Estas duas propriedades permitem escrever uma expressão para a função  $\phi$  para todos os inteiros:

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Para além disso temos que

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n,$$

onde o somatório percorre todos os divisores positivos de  $n$ . Note-se também que  $\phi(n)$  é o número das unidades do anel  $\mathbb{Z}_n$ , ou seja, dos inteiros módulo  $n$  que são invertíveis.

<sup>9</sup>Dois inteiros  $m$  e  $n$  dizem-se relativamente primos se o máximo divisor comum entre eles for a unidade, ou seja,  $(m, n) = 1$ .

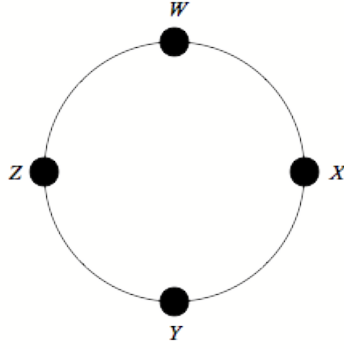


Figura 2.1: Escala genérica de quatro notas.

**Exemplo 14.** *Sejam  $G \rightarrow S_X$  uma acção de  $G$  em  $X$  e  $H \rightarrow S_Y$  uma acção de  $H$  em  $Y$ . Suponha-se que  $X \cap Y = \emptyset$ . Queremos definir uma acção do produto directo  $G \times H$  em  $X \dot{\cup} Y$ .*

*Sejam  $\sigma \in S_X$  e  $\tau \in S_Y$ . Definimos  $\sigma \times \tau \in S_{X \dot{\cup} Y}$  como sendo a permutação*

$$\sigma \times \tau: X \dot{\cup} Y \rightarrow X \dot{\cup} Y$$

$$z \mapsto \begin{cases} \sigma(z), & \text{se } z \in X \\ \tau(z), & \text{se } z \in Y \end{cases}.$$

*Observe-se que:*

$$S_X \times S_Y \rightarrow S_{X \dot{\cup} Y}$$

$$(\sigma, \tau) \mapsto \sigma \times \tau$$

*é um monomorfismo de grupos. Podemos agora definir uma acção de  $G \times H$  em  $X \dot{\cup} Y$  pela composição de homomorfismos:*

$$G \times H \rightarrow S_X \times S_Y \rightarrow S_{X \dot{\cup} Y}$$

$$(g, h) \mapsto (\pi_g, \pi_h) \mapsto \pi_g \times \pi_h.$$

*Note-se que:  $\pi_{(g,h)} = \pi_g \times \pi_h$ .*

**Exemplo 15.** *Considere-se uma escala musical contendo apenas quatro notas ( $L = 4$  na notação do capítulo 1) e sejam  $W, X, Y$  e  $Z$  essas quatro notas. Representamos as notas da escala por um colar de quatro pérolas, como no capítulo 1 (ver Figura 2.1).*

*O grupo  $G$  é o grupo das rotações de colares de quatro pérolas:*

$$G = \{g_0, g_1, g_2, g_3\},$$

*com  $g_0$  a rotação de ângulo  $0$ ,  $g_1$  a rotação de ângulo  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $g_2$  a rotação de ângulo  $-\pi$  e  $g_3$  a rotação de ângulo  $-\frac{3\pi}{2}$ . Este grupo de rotações age sobre o conjunto das nota particionando-o em ciclos de comprimento diverso. O tipo de cada uma destas rotações, que caracteriza a natureza desses ciclos, é o seguinte:*

- $g_0$  é do tipo  $(4, 0, 0, \dots)$ ;
- $g_1$  é do tipo  $(0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ ;

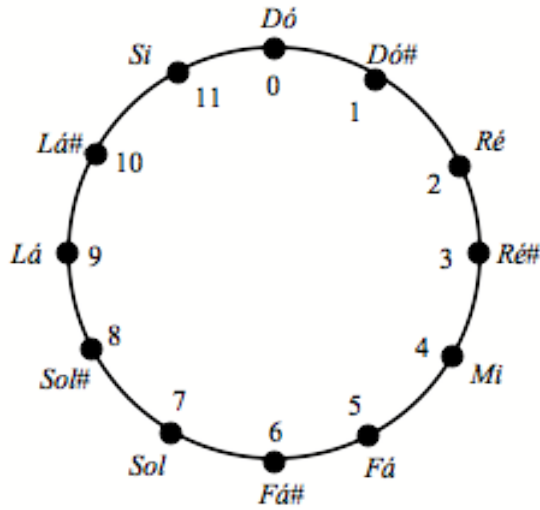


Figura 2.2: Escala cromática usual.

- $g_2$  é do tipo  $(0, 2, 0, 0, \dots)$ ;
- $g_3$  é do tipo  $(0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ .

Então,  $P_G$  será dado por

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_4 + x_2^2 + x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4).$$

**Exemplo 16.** No seguimento do exemplo anterior, queremos calcular  $P_G$  mas agora relativamente à escala cromática usual de 12 notas. Considere-se a notação habitual para a representação das notas da escala cromática (Figura 2.2).

Seja  $X$  o conjunto destas notas. O grupo  $G$  será o conjunto das rotações sobre  $X$ , ou seja,

$$G = \{g_0, g_1, g_2, \dots, g_{10}, g_{11}\},$$

com  $g_0 = id_X$

$$\begin{array}{lll}
 g_1 : & X & \rightarrow X \\
 & Dó & \mapsto Dó\sharp \\
 & Dó\sharp & \mapsto Ré \\
 & Ré & \mapsto Ré\sharp, \\
 & \dots & \\
 & Lá\sharp & \mapsto Si \\
 & Si & \mapsto Dó \\
 \\
 g_2 : & X & \rightarrow X \\
 & Dó & \mapsto Ré \\
 & Dó\sharp & \mapsto Ré\sharp \\
 & Ré & \mapsto Mi, \\
 & \dots & \\
 & Lá\sharp & \mapsto Dó \\
 & Si & \mapsto Dó\sharp \\
 \\
 g_3 : & X & \rightarrow X \\
 & Dó & \mapsto Ré\sharp \\
 & Dó\sharp & \mapsto Mi \\
 & Ré & \mapsto Fá, \\
 & \dots & \\
 & Lá\sharp & \mapsto Dó\sharp \\
 & Si & \mapsto Ré
 \end{array}$$

...



$$\begin{array}{lcl}
g_{10} : & X & \rightarrow X \\
& Dó & \mapsto Lá\sharp \\
& Dó\sharp & \mapsto Si \\
& Ré & \mapsto Dó , \\
& \dots & \\
& Lá\sharp & \mapsto Sol\sharp \\
& Si & \mapsto Lá \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
g_{11} : & X & \rightarrow X \\
& Dó & \mapsto Si \\
& Dó\sharp & \mapsto Dó \\
& Ré & \mapsto Dó\sharp . \\
& \dots & \\
& Lá\sharp & \mapsto Lá \\
& Si & \mapsto Lá\sharp
\end{array}$$

Interessa-nos saber qual é o tipo destas rotações:

- $g_0$  é, naturalmente, de tipo  $(12, 0, 0, \dots)$ ;
- $g_1, g_5, g_7$  e  $g_{11}$  dividem  $X$  num ciclo de comprimento 12, pelo que o seu tipo será  $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ ;
- $g_2$  e  $g_{10}$  dividem  $X$  em dois ciclos de comprimento 6, ou seja, são do tipo  $(0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, \dots)$ ;
- $g_3$  e  $g_9$  dividem  $X$  em três ciclos de comprimento 4, pelo que o seu tipo é  $(0, 0, 0, 3, 0, 0, \dots)$ ;
- $g_4$  e  $g_8$  dividem  $X$  em quatro ciclos de comprimento 3 sendo, portanto, de tipo  $(0, 0, 4, 0, 0, \dots)$ ;
- Finalmente  $g_6$  divide  $X$  em seis ciclos de comprimento 2, ou seja, o seu tipo é  $(0, 6, 0, 0, \dots)$ .

Estamos agora em condições de construir o polinómio  $P_G$ :

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_{12}) = \frac{1}{12}[x_1^{12} + 4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + x_2^6].$$

**Observação 3.** O tipo de uma permutação  $\pi_g$  diz-nos algo acerca da permutação e das suas potências  $\pi_g^2, \pi_g^3, \dots$ , mas diz-nos pouco acerca do tipo de um produto  $\pi_{g_1}\pi_{g_2}$ , dados os tipos dos factores. Da mesma forma, apesar do polinómio poder fornecer-nos informação sobre questões combinatórias envolvendo o grupo de permutações, não nos revela muito sobre a estrutura multiplicativa do grupo. De facto, Pólya fornece mesmo um exemplo onde exhibe dois grupos de permutação não-isomorfos e com índices de ciclo idênticos. Logo, o polinómio nem sempre determina o grupo de maneira única, mesmo que a acção seja fiel<sup>10</sup>. Pólya utilizou dois grupos não-isomorfos de ordem  $p^3$ , com  $p$  um primo maior que 2 tal que ambos os grupos têm a propriedade dos seus elementos, para além da unidade, terem todos ordem  $p$ ; a expressão (2.6) para o polinómio da representação de Cayley fornece o mesmo resultado para os dois casos.

<sup>10</sup>Uma acção  $\rho : G \rightarrow S_X$  diz-se *fiel* se  $\ker \rho = \{e\}$ . Neste caso podemos identificar o grupo abstracto  $G$  com o grupo de permutações  $\rho(G)$ .

## 2.4 O Lema de Burnside

Uma parte essencial da teoria de Pólya provém de um lema simples, que se presume ter sido publicado pela primeira vez por Burnside.

Seja  $G$  um grupo finito que actua no conjunto finito  $X$  e considere-se o homomorfismo:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow S_X \\ g &\mapsto \pi_g, \end{aligned}$$

que dá a acção. Tem-se então o seguinte resultado:

**Lema 1** (Burnside). *O número de órbitas da acção de  $G$  em  $X$  é dado pela expressão*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g)$$

onde  $|G|$  denota o número de elementos de  $G$  e, para cada  $g \in G$ ,  $\psi(g)$  denota o número de elementos de  $X$  que são invariantes por  $\pi_g$ , isto é, o número de elementos  $x \in X$  para os quais  $gx = x$ .

*Demonstração.* Consideramos todos os pares  $(g, x)$  com  $g \in G$ ,  $x \in X$  tais que  $\pi_g(x) = x$ . O número  $n$  destes pares pode ser contado de duas formas. Primeiro, para cada  $g$  fixo, podemos contar o número dos  $x$  satisfazendo  $\pi_g(x) = x$  e, portanto, o número de pares é:

$$n = \sum_{g \in G} \psi(g).$$

Por outro lado, para cada  $x \in X$ , podemos contar o número dos elementos  $g \in G$  com  $\pi_g(x) = x$ . Denotando este número por  $\eta(x)$  temos que:

$$\sum_{x \in X} \eta(x) = \sum_{g \in G} \psi(g). \quad (2.8)$$

Para  $x$  fixo, consideramos o estabilizador de  $x$ ,  $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ , que já vimos ser um subgrupo de  $G$ . A sua ordem,  $|G_x|$ , é igual a  $\eta(x)$ . Pelo Teorema 2 temos que

$$|G_x| = \frac{|G|}{|\mathcal{O}_x|}.$$

Somando com respeito a  $x$ , concluímos que a soma dos  $\eta(x)$ , para  $x$  pertencendo a uma determinada órbita de  $G$  em  $X$ , é igual a  $|G|$ . Logo, a soma de todos os  $\eta(x)$  será igual a  $|G|$  vezes o número de órbitas, ou seja:

$$\sum_{x \in X} \eta(x) = |G| |\{\text{órbitas}\}|. \quad (2.9)$$

Agora basta substituir (2.9) em (2.8) e o lema fica demonstrado.  $\square$

## 2.5 Funções e Padrões

Sejam  $D$  e  $R$  conjuntos finitos. Consideramos funções definidas em  $D$  com valores em  $R$ . O conjunto de tais funções denota-se por  $R^D$ . O número de elementos de  $R^D$  é  $|R|^{|D|}$ , visto que se quisermos construir uma função  $f$  temos, para cada elemento  $d \in D$ ,  $|R|$  escolhas possíveis para  $f(d)$  e essas escolhas são independentes.

Suponhamos que nos é dada uma acção do grupo  $G$  no conjunto  $D$ . Então podemos definir uma acção de  $G$  em  $R^D$  através da seguinte regra:

$$(g \cdot f)(d) = f(g^{-1} \cdot d), \forall f \in R^D, \forall g \in G, \forall d \in D.$$

Neste caso chamamos às órbitas padrões.

**Observação 4.** As funções  $f_1$  e  $f_2$  de  $R^D$  estão no mesmo padrão se existir um elemento  $g \in G$  tal que

$$g \cdot f_2 = f_1$$

ou seja,

$$f_2(g^{-1} \cdot d) = f_1(d), \forall d \in D,$$

ou ainda,

$$f_1(g \cdot d) = f_2(d), \forall d \in D.$$

Abreviamos esta última equação por  $f_1 g = f_2$ .

**Exemplo 17.** Suponha-se que  $D$  é o conjunto das seis faces de um cubo e seja  $G$  o grupo de todas as permutações de  $D$  que podem ser produzidas por rotações do cubo (ver Exemplo 10). Seja  $R$  o conjunto constituído pelas palavras vermelho e verde. Um elemento  $f \in R^D$  pode ser visto como uma forma de pintar o cubo tal que cada face é pintada ou de vermelho ou de verde. Se o cubo permanecer fixo, isto pode ser feito de  $2^6$  maneiras. Se dois tais cubos pintados, posicionados paralelamente, são coloridos de diferentes maneiras, pode acontecer que um deles possa ser rodado de tal forma que coincida com o outro. Nesse caso os dois cubos pertencem ao mesmo padrão.

Existem dez padrões, os quais podem ser descritos como se segue (em parênteses daremos o número de funções ou colorações em cada padrão): (a) todas as faces verdes (1); (b) cinco faces vermelhas e uma verde (6); (c) duas faces opostas verdes, as restantes vermelhas (3); (d) duas faces adjacentes verdes e as restantes vermelhas (12); (e) três faces com um vértice em comum vermelhas, as três com o vértice oposto em comum verdes (8); (f) duas faces opostas e uma das restantes vermelhas e as três restantes verdes (12); (g), (h), (i), (j) obtidas de (d), (c), (b), (a) trocando simplesmente as palavras verde e vermelho, respectivamente. Como verificação note-se que:

$$1 + 6 + 3 + 12 + 8 + 12 + 12 + 3 + 6 + 1 = 2^6.$$

**Exemplo 18.** Seja  $D$  o conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , seja  $G$  o grupo simétrico de  $D$  (isto é, o grupo das seis permutações de  $D$ ), a actuar de forma natural em  $D$  e seja  $R$  um conjunto com dois elementos  $\{x, y\}$ . Existem oito funções de  $D$  em  $R$  mas apenas quatro padrões. Estes podem ser denotados pelos símbolos  $x^3$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$  e  $y^3$ , respectivamente. Por exemplo,  $x^3$  consiste

de unicamente uma função, a que é definida por  $f(1) = f(2) = f(3) = x$ . No entanto,  $x^2y$  consiste das seguintes três funções:

$$\begin{array}{ccc} f_1: D \rightarrow R & f_2: D \rightarrow R & f_3: D \rightarrow R \\ 1 \mapsto x & 1 \mapsto x & 1 \mapsto y \\ 2 \mapsto x & 2 \mapsto y & 2 \mapsto x \\ 3 \mapsto y & 3 \mapsto x & 3 \mapsto x \end{array} .$$

Poderá haver alguma vantagem em considerar  $x$  e  $y$  como variáveis independentes que comutam e em anexar a cada  $f \in R^D$  o produto  $f(1)f(2)f(3)$ , o qual é independente da ordem dos factores. Dito de outra forma, como o grupo simétrico está a ser considerado, dizer que duas funções  $f_1$  e  $f_2$  são equivalentes significa exactamente o mesmo que dizer que os produtos  $f_1(1)f_1(2)f_1(3)$  e  $f_2(1)f_2(2)f_2(3)$  em  $\mathbb{Q}[x, y]$  são idênticos. Por isso, os padrões são caracterizados pelos valores possíveis para o produto, nomeadamente  $x^3$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$  e  $y^3$ .

**Exemplo 19.** Consideremos agora o caso da escala bem temperada com  $L$  notas, identificadas com as classes residuais módulo  $L$ :  $\{0, 1, \dots, L-1\}$ . Então, o grupo  $G$ , das rotações dos colares de  $L$  pérolas, corresponde à acção do grupo cíclico  $\mathbb{Z}_L$  no conjunto  $\{0, 1, \dots, L-1\}$  por translacção  $x \cdot k = x + k \pmod{L}$ . Desta forma, podemos identificar os colares de  $L$  pérolas, de cores preto e branco, com funções  $f: \{0, 1, \dots, L-1\} \rightarrow \{0, 1\}$ , de forma a que  $f$  é identificada com o colar cuja pérola  $i$  tem a cor branca se  $f(i) = 0$  ou preta se  $f(i) = 1$ . Temos assim  $G = \mathbb{Z}_L$ ,  $D = \mathbb{Z}_L$  e  $R = \{0, 1\}$ , sendo a representação de  $G$  em  $D$  a representação de Cayley de  $G$  (ver Exemplo 13).

A acção induzida de  $G$  em  $R^D$  corresponde exactamente à rotação de colares. Por exemplo, se  $L = 4$ ,  $f$  for a função definida por

$$\begin{array}{ccc} f: D \rightarrow R \\ 0 \mapsto 1 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 0 \\ 3 \mapsto 0 \end{array}$$

e  $g$  for a rotação de ângulo  $\frac{2\pi}{L}$ , no sentido dos ponteiros do relógio, que corresponde ao elemento  $1 \in \mathbb{Z}_L$ , então a função  $g \cdot f$  é dada por

$$\begin{array}{ccc} g \cdot f: D \rightarrow R \\ 0 \mapsto f(3) = 0 \\ 1 \mapsto f(0) = 1 \\ 2 \mapsto f(1) = 1 \\ 3 \mapsto f(2) = 0 \end{array} .$$

Em termos de colares de pérolas,  $f$  e  $g \cdot f$  encontram-se representados na Figura 2.3.

Mais geralmente, podemos identificar colares de pérolas de  $m$  tipos diferentes como elementos de  $R^D$  onde  $|R| = m$ . A acção induzida de  $G$  em  $R^D$  corresponde ainda à rotação de colares.

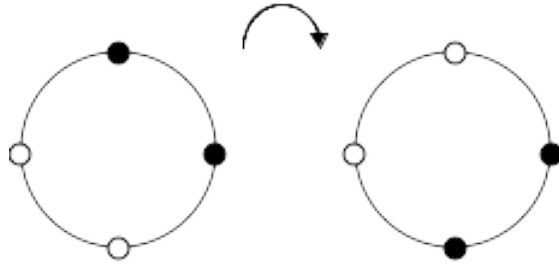


Figura 2.3: Os colares  $f$  e  $g \cdot f$ , respectivamente.

## 2.6 Peso de uma Função; Peso de um Padrão

Novamente tomaremos conjuntos finitos  $D$  e  $R$  e um grupo  $G$  a actuar em  $D$ . A cada elemento de  $R$  vamos fazer corresponder um peso. Este peso será um elemento de um anel comutativo fixado e contendo o corpo dos números racionais. Logo, podemos formar somas e produtos de pesos e múltiplos racionais de pesos, e estas operações satisfazem as propriedades associativa, comutativa e distributiva usuais. O peso associado ao elemento  $r \in R$  será denotado por  $w(r)$ .

Uma vez que estes pesos tenham sido escolhidos podemos definir o peso  $W(f)$  da função  $f \in R^D$  como sendo o produto

$$W(f) = \prod_{d \in D} w[f(d)]. \quad (2.10)$$

Se  $f_1$  e  $f_2$  são equivalentes, isto é, se representam o mesmo padrão, então têm o mesmo peso. Isto é dedução imediata do facto de que se  $f_1 g = f_2$ , com  $g \in G$ , então temos que

$$\prod_{d \in D} w[f_1(d)] = \prod_{d \in D} w[f_1(gd)] = \prod_{d \in D} w[f_2(d)],$$

visto que o primeiro e o segundo produtos têm os mesmos factores, eventualmente numa ordem diferente, e o produto de pesos é comutativo. Como todas as funções pertencendo ao mesmo padrão têm o mesmo peso, podemos definir o peso do padrão como esse valor comum. Logo, se  $F$  denotar o padrão, denotaremos o peso de  $F$  por  $W(F)$ ; usar o mesmo símbolo  $W$  para o peso de funções e para o peso de padrões não deverá causar qualquer confusão.

**Exemplo 20.** Retomamos o Exemplo 17 com o caso da coloração das faces de um cubo e formamos o anel de todos os polinómios de duas variáveis  $x$  e  $y$ , com coeficientes racionais. O conjunto  $R$  é composto pelos elementos vermelho e verde aos quais fazemos corresponder os pesos  $x$  e  $y$  respectivamente. Os dez padrões  $(a), \dots, (j)$  terão os pesos associados:

$$x^6, x^5y, x^4y^2, x^4y^2, x^3y^3, x^3y^3, x^2y^4, x^2y^4, xy^5, y^6,$$

respectivamente. Daqui podemos observar que padrões diferentes não têm necessariamente pesos diferentes.

**Exemplo 21.** No Exemplo 18,  $R$  tinha dois elementos:  $x$  e  $y$ . Se considerarmos  $x$  e  $y$  como variáveis não existe nenhuma objecção em fazer corresponder ao elemento  $x$  o peso  $x$  e ao elemento  $y$  o peso  $y$ . Agora os símbolos  $x^3$ ,  $x^2y$ ,  $xy^2$  e  $y^3$  tornam-se em pesos de padrões. Neste caso, o peso caracteriza o padrão: padrões diferentes têm pesos diferentes.

**Exemplo 22.** Se tomarmos  $w(r) = 1$  para todo o  $r \in R$ , então temos  $W(f) = 1$  para todas as funções e  $W(F) = 1$  para todos os padrões.

**Exemplo 23.** Consideramos o Exemplo 19. Se tomarmos  $w(0) = 1$  e  $w(1) = x$  então  $W(f)$  corresponde ao número de notas (pérolas pretas) do acorde (colar)  $f$ .

## 2.7 Loja e Inventário

Tal como anteriormente, teremos conjuntos finitos  $D$  e  $R$  e cada  $r \in R$  terá um peso. Pensando em  $R$  como o conjunto do qual teremos que escolher os valores das funções, vamos chamar a  $R$  *loja*. Como os pesos podem ser adicionados, existe uma soma de pesos; esta soma é chamada de *inventário* de  $R$ :

$$\text{inventário de } R = \sum_{r \in R} w(r). \quad (2.11)$$

**Exemplo 24.** A terminologia sugere que o inventário fornece uma descrição razoavelmente precisa do conteúdo de  $R$ , mas isto pode ser apenas parcialmente verdade. Seja  $R$  o conjunto que consiste de três caixas de sabão (denotadas por  $s_1, s_2$  e  $s_3$ ), dois pacotes de chá (denotados por  $c_1$  e  $c_2$ ) e quatro garrafas de vinho (denotadas por  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ ). Quando tomamos as nove variáveis  $s'_1, s'_2, s'_3, c'_1, c'_2, v'_1, v'_2, v'_3$  e  $v'_4$  e associamos a  $s_1$  o peso  $s'_1$ , a  $s_2$  o peso  $s'_2$ , etc., o inventário será:

$$s'_1 + s'_2 + s'_3 + c'_1 + c'_2 + v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4,$$

e o valor desta soma fornece informação completa sobre o loja. Um comerciante da loja utilizará um sistema mais simples, porque não está muito interessado nas distinções entre objectos da mesma categoria comercial. O comerciante utilizaria os símbolos  $s, c, v$ , representativos das noções abstractas “caixa de sabão”, “pacote de chá” e “garrafa de vinho”; associa a cada  $s_1, s_2$  e  $s_3$  o peso  $s$ ; a cada  $c_1$  e  $c_2$  o peso  $c$ ; a  $v_1$  e  $v_2$  o peso  $v$  e a  $v_3$  e  $v_4$  o peso  $v/2$  (porque  $v_3$  e  $v_4$  têm metade da capacidade de  $v_1$  e  $v_2$ , uma distinção irrelevante). O inventário será  $3s + 2c + 3v$ . Por vezes o comerciante ou o fiscal tem o particular interesse no valor da loja em euros. Se estimar que a caixa de sabão vale 3, o pacote de chá 1, a garrafa de vinho 2 e a meia garrafa de vinho 1,5, o inventário será  $9 + 2 + 4 + 3 = 18$ . Agora o inventário é apenas um número; este número não fornece informação sobre a constituição do loja, exceptuando que o seu valor total é de 18 €. Finalmente, existe a possibilidade de que o comerciante esteja a instruir o seu funcionário na contagem; então dá o peso 1 a cada objecto e o inventário torna-se simplesmente o número de objectos que é 9.

## 2.8 Inventário de uma Função

Consideramos os conjuntos  $D$  e  $R$  e o conjunto de todas as funções de  $D$  em  $R$ ,  $R^D$ . Cada  $r \in R$  tem um peso associado,  $w(r)$ ; logo, cada  $f \in R^D$  tem o peso

$$W(f) = \prod_{d \in D} w[f(d)].$$

Agora, como veremos de seguida, o inventário de  $R^D$  é simplesmente uma potência do inventário de  $R$ , sendo o expoente o número de elementos de  $D$ :

$$\text{inventário de } R^D = \sum_{f \in R^D} W(f) = \left[ \sum_{r \in R} w(r) \right]^{|D|}. \quad (2.12)$$

A igualdade (2.12) pode ser interpretada da seguinte forma: a  $|D|$ -ésima potência pode ser escrita como o produto de  $|D|$  factores. Se em cada factor seleccionarmos um único termo e se tomarmos o produto desses termos, obteremos um termo da expansão completa do produto — que consiste de  $|R|^{|D|}$  termos, de acordo com o número de escolhas que podem ser feitas. Tomamos uma correspondência bijectiva entre os  $|D|$  factores do termo da direita de (2.12) e os elementos de  $D$ ; essa correspondência permite-nos afirmar que a selecção de um termo de cada factor corresponde à descrição de uma função  $f$  de  $D$  em  $R$ . Agora, a  $f$  corresponderá o termo  $\prod_{d \in D} w[f(d)]$  da expansão completa do produto. Como este termo é exactamente  $W(f)$ , notamos que o produtório completo é igual à soma de todos os  $W(f)$ , que corresponde ao inventário de  $R^D$ .

Seguidamente vamos analisar o inventário de um certo subconjunto  $S$  de  $R^D$ . Considere-se uma partição  $\{D_1, D_2, \dots, D_k\}$  de  $D$ , com

$$|D| = |D_1| + |D_2| + \dots + |D_k|.$$

Vamos considerar o conjunto  $S$  de todas as funções  $f \in R^D$  com a propriedade de serem constantes em subconjuntos da partição;  $f$  poderá ser, embora não necessariamente, distinta em cada componente distinta. Estas funções  $f$  podem ser consideradas como funções compostas  $f = \phi\psi$ , onde  $\psi$  e  $\phi$  são definidas como se segue:  $\psi$  é a função definida em  $D$  que envia  $d$  no índice da componente à qual  $d$  pertence; desta forma temos sempre que  $d \in D_{\psi(d)}$ ;  $\phi$  é uma função definida no conjunto  $\{1, \dots, k\}$  e com valores em  $R$ . Note-se que  $\psi$  é uma função fixa e que existem  $|R|^k$  possibilidades para  $\phi$ , cada uma dando origem a uma função  $f \in R^D$  distinta.

Temos o seguinte resultado:

$$\text{inventário de } S = \prod_{i=1}^k \sum_{r \in R} [w(r)]^{|D_i|}. \quad (2.13)$$

Novamente, este resultado pode ser verificado investigando a expansão completa do produtório. Cada termo dessa expansão é obtido seleccionando um termo em cada factor de (2.13) e isto significa seleccionar uma função  $\phi$  do conjunto  $\{1, \dots, k\}$  no conjunto  $R$ . Logo, esta função  $\phi$  produz o termo

$$\{w[\phi(1)]\}^{|D_1|} \dots \{w[\phi(k)]\}^{|D_k|} = \prod_{i=1}^k \{w[\phi(i)]\}^{|D_i|}$$

Se  $\phi\psi = f$  então este termo é exactamente  $W(f)$ , porque

$$\{w[\phi(i)]\}^{|D_i|} = \prod_{d \in D_i} w\{\phi[\psi(d)]\}$$

e

$$\prod_{i=1}^k \prod_{d \in D_i} w[f(d)] = W(f).$$

Deste modo cada  $f \in S$  é obtida exactamente uma vez. Logo a soma de  $W(f)$  para todo o  $f \in S$  é igual à soma de todos os termos da expansão do produtório em (2.13) e isto prova (2.13).

**Exemplo 25.** *Queremos distribuir  $m$  fichas por três pessoas  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , com a condição de que  $P_1$  obtém o mesmo número de fichas que  $P_2$ . De quantas maneiras é que podemos fazer essa distribuição? Não estamos interessados nas fichas em si, mas apenas no número com que cada pessoa fica. Isto é, queremos ter funções  $f$  definidas no conjunto  $D = \{P_1, P_2, P_3\}$  com valores em  $R = \{0, 1, 2, \dots\}$  e com as restrições  $f(P_1) = f(P_2)$  e  $f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) = m$ . Faça-se  $\{P_1, P_2\} = D_1$  e  $\{P_3\} = D_2$ .*

Tomamos a variável  $x$  e associamos aos elementos  $0, 1, 2, 3, \dots$  de  $R$  os pesos  $1, x, x^2, x^3, \dots$ , respectivamente. Logo as funções em que estamos interessados terão peso  $x^m$ .

Por (2.13), o inventário de todas as funções constantes em cada  $D_i$  é igual a

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots). \quad (2.14)$$

O número que procuramos é o coeficiente de  $x^m$  na expansão acima. Formalmente temos

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = (1 - x^2)^{-1} \quad e \quad 1 + x + x^2 + \dots = (1 - x)^{-1}.$$

Temos ainda:

$$(1 - x^2)^{-1}(1 - x)^{-1} = \frac{1}{4}(1 + x)^{-1} + \frac{1}{2}(1 - x)^{-2} + \frac{1}{4}(1 - x)^{-1},$$

Logo, obtemos que o número de funções é:

$$\frac{1}{2}(m + 1) + \frac{1}{4}[1 + (-1)^m],$$

ou seja,  $m/2 + 1$  se  $m$  é par e  $m/2 + 1/2$  se  $m$  é ímpar. É fácil verificar directamente este resultado. Pode ser útil notar que o número pretendido também pode ser interpretado como o número de partições de  $m$  com partes 1 e 2.

O facto de a loja ser um conjunto infinito e de o inventário ser a soma de séries infinitas não nos deve perturbar. Podemos simplesmente “cortar” a loja substituindo-a por  $\{0, 1, \dots, m\}$ ; os elementos restantes não podem ser relevantes no nosso problema em virtude da restrição  $f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) = m$ . Mais geralmente, o coeficiente de  $x^m$  em (2.14) é idêntico ao coeficiente de  $x^m$  em

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2m})(1 + x + \dots + x^m).$$



## 2.9 Inventário de Padrões; Teorema de Pólya

Da mesma forma que nas secções anteriores, tomamos os conjuntos finitos  $D$  e  $R$  e consideramos o grupo  $G$  a actuar em  $D$  e a acção induzida de  $D$  em  $R^D$  definida na secção 2.5. Os elementos de  $R$  têm pesos  $w(r)$  e, de acordo com (2.10), as funções  $f \in R^D$  e os padrões  $F$  têm pesos  $W(f)$  e  $W(F)$ , respectivamente. Em vez do inventário de  $R^D$ ,  $\sum_f W(f)$ , determinado em (2.12), o nosso objectivo é determinar o inventário  $\sum_F W(F)$  do conjunto de todos os padrões. Este inventário é dado pelo seguinte resultado:

**Teorema 4** (Teorema Fundamental de Pólya). *O inventário de padrões é*

$$\sum_F W(F) = P_G \left\{ \sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} [w(r)]^2, \sum_{r \in R} [w(r)]^3, \dots \right\} \quad (2.15)$$

onde  $P_G$  é o polinómio da acção de  $G$  em  $D$ , conforme definido na secção 2.3. Em particular, se todos os pesos forem escolhidos iguais à unidade, obtemos:

$$\text{número de padrões} = P_G(|R|, |R|, |R|, \dots). \quad (2.16)$$

*Demonstração.* Seja  $\omega$  um dos possíveis valores que o peso de uma função possa assumir. Seja  $X$  o conjunto de todas as funções  $f \in R^D$  satisfazendo  $W(f) = \omega$ .

Como a acção de  $G$  em  $R^D$  se restringe a  $X$ , já que funções na mesma órbita têm o mesmo peso, temos o homomorfismo associado

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & S_X \\ g & \mapsto & \pi_g \end{array}.$$

Então, a cada  $g \in G$  corresponde uma permutação  $\pi_g$  do conjunto  $X$ . O Lema 1 mostra que o número de padrões da acção de  $G$  em  $X$  é igual a

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_\omega(g), \quad (2.17)$$

onde  $\psi_\omega(g)$  denota o número de funções  $f$  com  $W(f) = \omega$  e  $fg^{-1} = f$  (ou, o que é equivalente,  $f = fg$ ).

Os padrões contidos em  $X$  têm todos peso  $\omega$ ; por isso, se multiplicarmos (2.17) por  $\omega$  e somarmos com respeito a todos os valores possíveis para  $\omega$ , obtemos o inventário de padrões:

$$\sum W(F) = \frac{1}{|G|} \sum_{\omega} \sum_{g \in G} \psi_\omega(g) \omega.$$

Temos que

$$\sum_{\omega} \psi_\omega(g) \omega = \sum_f^{(g)} W(f),$$

onde  $\sum_f^{(g)}$  significa que o somatório percorre todos os  $f \in R^D$  que satisfazem  $f = fg$ . Segue que

$$\sum W(F) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_f^{(g)} W(f). \quad (2.18)$$

Para avaliar  $\sum_f^{(g)} W(f)$ , notamos que  $\pi_g$  é uma permutação de  $D$  e, por isso,  $D$  é dividido em ciclos que são ciclicamente permutados por  $\pi_g$ . A condição  $f = fg$  significa que

$$f(d) = f(gd) = f(g^2d) = \dots$$

Logo,  $f$  é constante em cada órbita de  $\langle g \rangle$  em  $D$ . Reciprocamente, se  $f \in R^D$  é constante em todas as órbitas de  $\langle g \rangle$  em  $D$ , automaticamente satisfaz  $fg = f$ , visto que  $gd$  pertence à mesma órbita que  $d$ . Logo, se as órbitas forem  $D_1, D_2, \dots, D_k$ , então a soma  $\sum_f^{(g)} W(f)$  é simplesmente o inventário avaliado na secção 2.8 e expresso em (2.13).

Seja  $(b_1, b_2, b_3, \dots)$  o tipo de  $\pi_g$ . Isto significa que, entre os números  $|D_1|, |D_2|, \dots, |D_k|$ , o número 1 ocorre  $b_1$  vezes, o número 2 ocorre  $b_2$  vezes, etc. Consequentemente, temos que

$$\sum_f^{(g)} W(f) = \left\{ \sum_{r \in R} w(r) \right\}^{b_1} \left\{ \sum_{r \in R} [w(r)]^2 \right\}^{b_2} \dots \quad (2.19)$$

Note-se que o número de factores é finito, de facto, não superior a  $k$ . Logo, todos os  $b_i$  são nulos para  $i$  suficientemente grande.

A expressão (2.19) pode ser obtida por substituição de:

$$x_1 = \sum_{r \in R} w(r), \quad x_2 = \sum_{r \in R} [w(r)]^2, \quad x_3 = \sum_{r \in R} [w(r)]^3, \dots,$$

no produto  $x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \dots$ , que é o termo que corresponde a  $g$  em  $|G|P_G$  (ver secção 2.3). Somando com respeito a  $g$  e dividindo por  $|G|$ , inferimos que o valor de (2.18) é obtido operando a substituição anterior em  $P_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$  e isto prova o teorema de Pólya.  $\square$

**Exemplo 26.** Consideramos o Exemplo 17.  $D$  é o conjunto das faces de um cubo,  $G$  é o grupo de substituição rotacional e  $R$  é o conjunto das duas cores: vermelho e verde. De acordo com (2.16), o número de esquemas de coloração é igual a  $P_G(2, 2, 2, \dots)$ , e  $P_G$  é dado no Exemplo 10. Obtemos:

$$\frac{1}{24}(2^6 + 3 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2) = 10,$$

como já tínhamos determinado no Exemplo 17, por via de uma análise detalhada dos padrões.

Agora propomos uma questão: quantos padrões de coloração exibem quatro faces vermelhas e duas faces verdes? Para respondermos a esta questão associaremos um peso  $x$  à cor vermelha e um peso  $y$  à cor verde e procuramos o inventário de padrões. Por (2.15) e (2.2) o inventário de padrões é:

$$\frac{1}{24} [(x+y)^6 + 3(x+y)^2(x^2+y^2)^2 + 6(x+y)^2(x^4+y^4) + 6(x^2+y^2)^3 + 8(x^3+y^3)^2].$$

Para o inventário de padrões completo obtemos facilmente:

$$x^6 + x^5y + 2x^4y^2 + 2x^3y^3 + 2x^2y^4 + xy^5 + y^6, \quad (2.20)$$

o que está em concordância com o Exemplo 20. O número de padrões de coloração com quatro faces vermelhas e duas verdes é o coeficiente de  $x^4y^2$  no inventário de padrões (2.20), que é

$$\frac{1}{24}(15 + 9 + 6 + 18 + 0) = 2.$$

De facto, existem apenas dois padrões com quatro faces vermelhas e duas faces verdes ((c) e (d) no Exemplo 17)).

**Exemplo 27.** Seja  $D$  um conjunto finito e  $G$  um grupo a actuar em  $D$ . Dois subconjuntos  $D_1$  e  $D_2$  de  $D$  dizem-se equivalentes se tivermos  $\pi_g D_1 = D_2$ , para alguma permutação  $\pi_g \in S_D$ . Isto significa que  $D_2$  é o conjunto de todos os elementos  $gd$  obtidos percorrendo  $d$  em  $D_1$ . Assim, temos uma acção de  $G$  no conjunto  $P(D)$  de todos os subconjuntos de  $D$  e pretendemos determinar o número das órbitas desta acção.

Os subconjuntos de  $D$  podem ser colocados em correspondência bijectiva, com as funções de  $D$  em  $\{0, 1\}$ . Suponha-se que  $R$  consiste nos dois elementos, 1 e 0, e associamos o peso 1 a cada um deles. Se  $f$  for uma função de  $D$  em  $R$ , então fazemos corresponder a  $f$  o subconjunto de todos os  $d \in D$  com  $f(d) = 1$ . É evidente que desta forma obteremos todos os subconjuntos de  $D$  de uma única forma e a equivalência de funções corresponde à equivalência de subconjuntos. Cada função tem peso 1, por isso o número de classes de subconjuntos é igual ao número de padrões. Pelo Teorema de Pólya, este é igual a  $P_G(2, 2, 2, \dots)$ .

Se tomarmos os pesos  $w(0) = 1$ ,  $w(1) = w$ , onde  $w$  é uma variável, então os subconjuntos de  $k$  elementos correspondem a funções  $f$  com  $W(f) = w^k$ . Então o número de padrões que consistem em subconjuntos com  $k$  elementos cada é igual ao coeficiente de  $w^k$  no inventário de padrões, que é  $P_G(1 + w, 1 + w^2, 1 + w^3, \dots)$  neste caso. Somando para todos os valores de  $k$ , obtemos novamente  $P_G(2, 2, 2, \dots)$ , visto que a soma de todos os coeficientes de um polinómio  $p(w)$  é igual a  $p(1)$ .

Um exemplo detalhado é fornecido pelo cubo colorido (ver Exemplo 26), onde os subconjuntos correspondem às faces do cubo que são coloridas de vermelho.

## 2.10 Generalização do Teorema de Pólya

Vamos considerar agora um caso mais geral do que foi visto até agora: para além de termos uma acção do grupo  $G$  em  $D$ , teremos também um grupo  $H$  a agir em  $R$ . Estas duas acções induzem uma acção do produto directo  $G \times H$  em  $R^D$  da seguinte forma:

$$((g, h) \cdot f)(d) = h \cdot f(g^{-1} \cdot d),$$

para  $f \in R^D$ ,  $d \in D$  e  $(g, h) \in G \times H$ . Por simplicidade de notação escrevemos  $hfg^{-1}$  para denotar  $(g, h) \cdot f$ .

Vamos supor que cada  $f \in R^D$  tem um certo peso,  $W(f)$ , e que estes pesos são elementos de um anel comutativo fixado. Sobre estes pesos não vamos supor que podem ser obtidos à

custa dos pesos de certos elementos de  $R$  por uma fórmula do género de (2.10); no entanto, vamos impor uma hipótese forte de que funções que pertençam à mesma órbita tenham o mesmo peso. Se  $F$  denota um padrão, definimos  $W(F)$  como sendo o valor comum de todos os  $W(f)$  com  $f \in F$ , tal como na secção 2.6. Assim sendo, temos o seguinte teorema:

**Teorema 5.** *O inventário de padrões é*

$$\sum W(F) = |G|^{-1}|H|^{-1} \sum_{g \in G} \sum_{h \in H} \sum_f^{(g,h)} W(f),$$

onde  $\sum_f^{(g,h)} W(f)$  é a soma dos pesos  $W(f)$  tal que  $f \in R^D$  satisfaz  $fg = hf$  (ou, de forma equivalente,  $hfg^{-1} = f$ ).

*Demonstração.* A prova é em tudo análoga ao que foi feito na demonstração do Teorema Fundamental de Pólya.  $\square$

**Exemplo 28.** *Este exemplo visa fornecer uma correspondência entre cada peso  $W(f)$  e cada função  $f \in R^D$  de tal forma que a hipótese imposta no início desta secção seja satisfeita, isto é, que*

$$f_1 \sim f_2 \Rightarrow W(f_1) = W(f_2). \quad (2.21)$$

*Suponha-se que partimos  $D$  em subconjuntos disjuntos  $D_1, D_2, \dots, D_l$ , tais que cada  $D_i$  é invariante por  $G$ , isto é,*

$$\pi_g(d) \in D_i, \forall g \in G, \forall d \in D_i, i = 1, \dots, l.$$

*Da mesma forma, suponha-se que o conjunto  $R$  é partido em subconjuntos  $R_1, R_2, \dots, R_k$  tais que cada  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , é invariante por  $H$ .*

*Seja  $\psi(j; n_1, \dots, n_l)$  uma função de variáveis inteiras  $j, n_1, \dots, n_l$ , com  $1 \leq j \leq k$ ,  $0 \leq n_i < +\infty$ . Supõe-se que a função assume valores num anel comutativo. Se  $f \in R^D$ ,  $1 \leq i \leq l$ ,  $r \in R$ , então  $n_i(f, r)$  denotará o número de elementos  $d \in D_i$  que satisfazem  $f(d) = r$ . Agora definimos o peso de  $f$  como o valor*

$$W(f) = \prod_{j=1}^k \prod_{r \in R_j} \psi[j; n_1(f, r), \dots, n_l(f, r)]. \quad (2.22)$$

*Para estabelecer a propriedade (2.21) é necessário notar primeiro que temos*

$$n_i(\pi_h f \pi_g^{-1}, r) = n_i(f, \pi_h^{-1} r), \forall i \in \{1, \dots, l\}, \forall g \in G, \forall h \in H, \forall r \in R, \quad (2.23)$$

*porque o número dos  $d \in D_i$  tais que  $\pi_h f \pi_g^{-1}(d) = r$  é igual ao número dos  $d \in D_i$  tais que  $\pi_h f(d) = r$ , pois  $D_i$  é invariante por  $\pi_g$ . Este número é igual ao número dos  $d \in D_i$  com  $f(d) = \pi_h^{-1} r$ . Da expressão (2.23) segue que se substituirmos  $f$  por  $\pi_h f \pi_g^{-1}$  em (2.22), então os factores do produto*

$$\prod_{r \in R_j} \psi[j; n_1(f, r), \dots, n_l(f, r)]$$

*são apenas permutados, pelo que se  $r$  percorrer  $R_j$ , então  $\pi_h^{-1} r$  percorrerá  $R_j$ . Logo, a substituição de  $f$  por  $\pi_h f \pi_g^{-1}$  não afecta o produto. Isto prova que  $W(\pi_h f \pi_g^{-1}) = W(f)$ , ou seja,  $W$  satisfaz (2.21).*

## 2.11 Padrões de Funções Injectivas

Tal como na secção anterior vamos considerar conjuntos finitos  $D$  e  $R$  sujeitos às acções dos grupos  $G$  e  $H$ , respectivamente. Vamos agora definir o peso  $W(f)$  para uma qualquer função  $f \in R^D$  por

$$W(f) = \begin{cases} 1, & \text{se } f \text{ é injectiva,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se  $g \in G$ ,  $h \in H$ , então a função  $\pi_h f \pi_g^{-1}$  é injectiva se e só se  $f$  é injectiva, e portanto,  $W$  satisfaz (2.21). O inventário  $\sum W(F)$  será o número de padrões de funções injectivas. Para determinarmos este número vamos aplicar o Teorema 5 e, nesse sentido, há que primeiramente avaliar  $\sum_f^{(g,h)} W(f)$ .

Fixem-se  $g \in G$  e  $h \in H$ . Suponhamos que  $\pi_g$  é do tipo  $(b_1, b_2, \dots)$  e  $\pi_h$  é do tipo  $(c_1, c_2, \dots)$ . Queremos determinar o número de funções injectivas  $f \in R^D$  que satisfazem  $f\pi_g = \pi_h f$ .

Seja  $f$  uma tal função e seja  $d$  um qualquer elemento de  $D$  pertencendo a uma órbita de cardinalidade  $j$  para a acção de  $\langle g \rangle$ . Esta órbita consiste dos elementos

$$d, \pi_g(d), \pi_g^2(d), \dots, \pi_g^{j-1}(d), \quad (2.24)$$

com  $\pi_g^j d = d$ . Note-se agora que  $fg = hf$  implica que

$$f\pi_g^2 = f\pi_g\pi_g = \pi_h f\pi_g = \pi_h\pi_h f = \pi_h^2 f, f\pi_g^3 = \pi_h^3 f, \text{ etc.}$$

Logo,  $f$  envia os elementos de (2.24) em

$$f(d), \pi_h f(d), \pi_h^2 f(d), \dots, \pi_h^{j-1} f(d), \quad (2.25)$$

com  $\pi_h^j f(d) = f\pi_g^j(d) = f(d)$ . Daqui segue que a cardinalidade da órbita da acção de  $\langle h \rangle$  em  $R$  à qual  $f(d)$  pertence é um divisor de  $j$ . Note-se que ainda não foi usado o facto de  $f$  ser injectiva. Daqui resulta que a sequência (2.25) não pode ter repetições, por não haver repetições em (2.24), e, portanto, a cardinalidade da órbita da acção de  $\langle h \rangle$  em  $R$  à qual  $f(d)$  pertence é igual a  $j$ . Logo, cada órbita de  $D$  é enviada por  $f$  numa órbita de  $R$  com a mesma cardinalidade. Órbitas distintas de  $D$  são enviadas em órbitas distintas de  $R$ , visto que  $f$  é injectiva.

Agora é fácil de determinar as funções injectivas  $f$  que satisfazem  $f\pi_g = \pi_h f$ . Para construirmos uma tal função  $f$ , seleccionamos para cada órbita de  $D$ , uma órbita de  $R$  que tenha a mesma cardinalidade, tendo em conta que cada órbita de  $R$  é seleccionada no máximo uma vez. Uma vez feita uma selecção, se  $j$  for a cardinalidade das órbitas envolvidas, então ainda existem  $j$  possibilidades para fixar a correspondência entre os  $j$  elementos da órbita de  $D$  e os  $j$  elementos da órbita de  $R$ . Isto resulta do seguinte facto: se  $d$  for um elemento da órbita de  $D$ , então podemos envia-lo num elemento  $r$  da órbita fixada de  $R$ , desde que façamos corresponder  $\pi_g d$  a  $\pi_h r$ ,  $\pi_g^2 d$  a  $\pi_h^2 r$ , etc.

O número de funções injectivas de um conjunto de  $b_j$  elementos num conjunto com  $c_j$  elementos é igual a

$$c_j(c_j - 1)(c_j - 2) \dots (c_j - b_j + 1), \quad (2.26)$$

que é zero se  $c_j < b_j$ . Logo, temos que o número de funções injectivas  $f : D \rightarrow R$ , sujeitas a  $f\pi_g = \pi_h f$  é dado por

$$\prod_j j^{b_j} c_j (c_j - 1)(c_j - 2) \dots (c_j - b_j + 1) \quad (2.27)$$

O produto percorre todos os  $j$  para os quais  $b_j > 0$ . Mas se interpretarmos (2.26) como sendo 1 se  $b_j = 0$ , também podemos tomar o produto sobre todos os valores de  $j = 1, 2, 3, \dots$ .

Podemos escrever o produto  $j^{b_j} c_j (c_j - 1)(c_j - 2) \dots (c_j - b_j + 1)$  como a  $b_j$ -ésima derivada de  $(1 + jz)^{c_j}$  e  $z = 0$ . Assim sendo, (2.27) pode ser escrita como o resultado de várias derivações parciais relativamente a variáveis  $z_1, z_2, \dots$ , no ponto  $z_1 = z_2 = \dots = 0$ :

$$\left. \left( \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{b_1} \left( \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{b_2} \left( \frac{\partial}{\partial z_3} \right)^{b_3} \right|_{z_1=z_2=z_3=\dots=0} \dots (1 + z_1)^{c_1} (1 + 2z_2)^{c_2} (1 + 3z_3)^{c_3} \dots \quad (2.28)$$

Até agora supusemos  $g$  e  $h$  fixos. Somando com respeito a  $g \in G$  e  $h \in H$  e dividindo pelas ordens de  $G$  e  $H$ , obtemos o inventário de padrões do Teorema 5, o que neste caso corresponde ao número de padrões de funções injectivas. O operador diferencial em (2.28) é obtido a partir de um termo do polinómio  $P_G(x_1, x_2, \dots)$  de  $G$  através da substituição  $x_1 = \partial/\partial z_1, x_2 = \partial/\partial z_2, \dots$ , e o operando em (2.28) é dado através da substituição  $x_1 = 1 + z_1, x_2 = 1 + 2z_2, \dots$ , num termo do polinómio  $P_H(x_1, x_2, \dots)$  de  $H$ . Através do somatório obtemos o resultado seguinte.

**Teorema 6.** *O número de padrões de funções injectivas de  $D$  em  $R$  é igual a*

$$P_G \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \dots \right) P_H (1 + z_1, 1 + 2z_2, 1 + 3z_3, \dots) \quad (2.29)$$

avaliado em  $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = 0$ .

A expressão (2.29) pode ser simplificada se  $|R| = |D|$  (se  $|R| < |D|$ , o número de funções injectivas é zero). Nesse caso temos então:

$$\sum_j j b_j = \sum_j j c_j,$$

pelo que em (2.28) ou temos  $b_1 = c_1, b_2 = c_2, \dots$ , ou então  $b_j > c_j$  para algum  $j$ . No segundo caso, a expressão (2.28) anula-se. Ou seja, (2.28) é sempre igual ao inteiro:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{b_1} \left( \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{b_2} \left( \frac{\partial}{\partial z_3} \right)^{b_3} \dots (z_1)^{c_1} (2z_2)^{c_2} (3z_3)^{c_3} \dots$$

Assim, estabelecemos o resultado seguinte:

**Teorema 7.** *Se as hipóteses do Teorema 6 são válidas e, para além disso,  $|R| = |D|$ , então o número de padrões de funções injectivas é igual ao inteiro*

$$P_G \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \dots \right) P_H (z_1, 2z_2, 3z_3, \dots). \quad (2.30)$$

Neste caso a situação é inteiramente simétrica: se  $|R| = |D|$ , então as funções injectivas de  $D$  em  $R$  têm como imagem  $R$  e as funções inversas são funções injectivas de  $R$  em  $D$ . De facto, podemos verificar que a expressão (2.30) é igual a

$$P_H \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \dots \right) P_G(z_1, 2z_2, 3z_3, \dots). \quad (2.31)$$

**Exemplo 29.** De quantas maneiras diferentes podemos arranjar as faces do cubo numa ordem cíclica? O que queremos saber é o número de funções injectivas na situação seguinte:  $D$  é o conjunto das faces do cubo e  $G$  é o grupo de permutações de  $D$  induzidas pelas rotações (Exemplo 10);  $R$  é o conjunto de todas as  $m$ -ésimas raízes da unidade, com  $m = 6$ , e  $H$  é o grupo de permutações induzidas pelas rotações no plano complexo de ângulo  $\frac{2\pi}{m}$  com  $m = 6$  (ver Exemplo 13).

Os polinómios respectivos são

$$P_G = \frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_2^3 + 8x_3^2 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4) \text{ e } P_H = \frac{1}{6}(x_1^6 + x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6),$$

logo, a expressão (2.30) permite concluir que

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{24}(6! + 6 \cdot 2^3 \cdot 3! + 16 \cdot 3^2 \cdot 2!) = 9$$

é o número de padrões pedido.

**Exemplo 30.** Tomamos um grupo finito  $X$  e consideramos todas as permutações de  $S_X$ . Duas permutações  $\pi_1$  e  $\pi_2$  dizem-se equivalentes se existirem elementos  $a, b \in X$  tais que  $a\pi_1b = \pi_2$ . O lado esquerdo da equação é a permutação que envia qualquer elemento  $x \in X$  em  $a\pi_1(bx)$ ; note-se que  $bx$  é o produto dos elementos  $b$  e  $x$  do grupo  $X$  e  $a\pi_1(bx)$  é o produto dos elementos  $a$  e  $\pi_1(bx)$ .

Queremos encontrar o número de classes de equivalência. Podemos verificar que só precisamos de encontrar o número de funções injectivas relativamente à situação seguinte:  $D = R = X$ ,  $G = H =$  representação de Cayley do grupo  $X$ . Por (2.5) temos:

$$P_G = P_H = m^{-1} \sum_{k|m} v(k)(x_k)^{m/k},$$

onde  $m = |X|$  e, para cada divisor  $k$  de  $m$ , o símbolo  $v(k)$  representa o número de elementos  $x \in X$  de ordem  $k$ . Por (2.30) obtemos

$$m^{-2} \sum_{k|m} [v(k)]^2 k^{m/k} \left(\frac{m}{k}\right)!$$

como o número de classes de equivalência de permutação em  $S_X$ .

## 2.12 Identificação e Anulação Completa da Identificação

Sejam  $D$  e  $R$  conjuntos finitos. Uma função  $f$  de  $D$  em  $R$  diz-se um subconjunto identificado de  $R$ . Se  $X$  for o subconjunto de  $R$  no qual  $D$  é enviado por  $f$ , ou seja, se  $X = f(D)$ , então

$X$  é o subconjunto que foi identificado e  $D$  será chamado de conjunto das etiquetas. Note-se que um subconjunto identificado de  $R$  não é um subconjunto de  $R$ . Se quisermos, poderá ser considerado como um conjunto, o conjunto dos pares  $[d, f(d)]$ , com  $d$  a variar em  $D$ . Em particular, se  $D$  for o conjunto  $\{1, 2, \dots, m\}$ , então os subconjuntos identificados serão chamados de permutações de ordem  $m$ .

Tomando o grupo  $H$  a agir no conjunto  $R$ , podemos definir órbitas de subconjuntos identificados. Estas órbitas são simplesmente os padrões de funções injectivas estudadas na secção anterior, com a especificação de que o grupo  $G$  consiste apenas do grupo trivial com um elemento. Logo teremos  $P_G = x_1^m$ , sendo  $m$  o número de elementos de  $D$  e, pelo Teorema 6, obtemos como número de padrões,

$$\left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^m P_H(1+z, 1, 1, \dots) \right]_{z=0}. \quad (2.32)$$

Se, para além disso,  $H$  for também o grupo trivial com apenas um elemento e se o número de elementos de  $R$  for  $n$ , temos

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^m P_H(1+z, 1, 1, \dots) \right]_{z=0} &= \left. \left( \frac{d}{dz} \right)^m (1+z)^m \right|_{z=0} \\ &= n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1), \end{aligned}$$

que é exactamente a fórmula para os arranjos,  $A_m^n$ , de  $m$  elementos escolhidos de um conjunto de  $n$  elementos.

No caso particular em que  $n = m$ , o Teorema 7 permite-nos simplificar (2.32) para

$$\left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^m P_H(z, 0, 0, \dots) \right]_{z=0}.$$

Se a acção de  $H$  em  $R$  for fiel<sup>11</sup>, o inteiro acima é igual a  $|H|^{-1}m!$ . Uma outra forma de o verificar é a seguinte: a partir de cada subconjunto identificado  $f$ , tomamos a classe de equivalência à qual  $f$  pertence; essa classe de equivalência corresponde ao conjunto  $\{hf : h \in H\}$ ; fixando  $f$ , todos os  $hf$  são diferentes, visto a acção de  $H$  em  $R$  ser fiel e  $f$  ser uma bijecção; logo, a classe de equivalência em causa contém exactamente  $|H|$  elementos; portanto, o número das classes de equivalência é exactamente  $|H|^{-1}m!$ , pois há  $m!$  funções injectivas de  $D$  em  $R$ .

Um exemplo é o número de configurações possíveis para um dado, ou seja, o número de maneiras distintas que temos para numerar as faces de um cubo. Neste caso,  $R$  é o conjunto das faces do cubo,  $H$  é o grupo de permutações de  $R$  induzidas por rotações do cubo e  $D = \{1, \dots, 6\}$ . O número de padrões será dado por  $6!/24 = 30$ .

Agora vamos abordar o conceito de anulação completa da identificação, isto é, introduzimos o grupo simétrico a actuar no conjunto das etiquetas e formamos os padrões relativamente a este grupo e, ao mesmo tempo, relativamente à acção de  $H$  em  $R$ . Não interessa que etiquetas estão anexadas a que elementos de  $R$ , só interessa quais os elementos de  $R$  que são etiquetados e quais os que não são. Assim sendo, o número de padrões é simplesmente o número de padrões de subconjuntos de  $R$ , sendo esse número restringido

<sup>11</sup>A acção  $\rho : H \rightarrow S_R$  é fiel se e só se  $\ker \rho = \{e\}$ , isto é,  $(h \cdot r = r, \forall r \in R) \Rightarrow h = e$ .



apenas aos subconjuntos de  $m$  elementos. De acordo com o Exemplo 27, esse número é igual ao coeficiente de  $w^m$  no polinómio

$$P_H(1 + w, 1 + w^2, 1 + w^3, \dots).$$

Podemos confirmar este resultado mostrando que também o podemos obter partindo do Teorema 6. Agora  $G$  é o grupo simétrico de grau  $m$ , pelo que  $P_G(x_1, x_2, x_3, \dots)$  é igual ao coeficiente de  $w^m$  na expansão em série de

$$\exp\left(wx_1 + \frac{1}{2}w^2x_2 + \frac{1}{3}w^3x_3 + \dots\right)$$

(ver Exemplo 11). Para avaliarmos o efeito do operador diferencial em (2.29), notamos que, pelo desenvolvimento em série de Taylor de  $f$  em  $x = a$ ,

$$\left[\exp\left(a\frac{d}{dz}\right)f(z)\right]_{z=0} = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2}f''(0) + \dots = f(a),$$

desde que  $f$  seja polinomial, visto que assim sendo a convergência da série está garantida. Então, neste caso, (2.29) fica igual ao coeficiente de  $w^m$  em

$$P_H\left[1 + w, 1 + 2\left(\frac{1}{2}w^2\right), 1 + 3\left(\frac{1}{3}w^3\right)\right],$$

que é exactamente o que foi obtido anteriormente.

No caso particular em que o grupo  $H$  age trivialmente em  $R$ , temos

$$P_H(x_1, x_2, \dots) = x_1^m,$$

pelo que o número de padrões será dado pelo coeficiente de  $w^m$  na expansão de  $(1 + w)^n$ , que é  $\binom{n}{m}$ . Neste caso, os padrões serão simplesmente os subconjuntos de  $R$  de  $m$  elementos e recuperamos a expressão conhecida por o número de combinações de  $n$ ,  $m$  a  $m$ ,  $C_m^n$ .

**Exemplo 31.** *Dispomos de seis etiquetas  $d_1, \dots, d_6$ , para anexarmos uma a cada face de um cubo. As etiquetas são coloridas:  $d_1$  é amarela;  $d_2$  é preta;  $d_3$  e  $d_4$  são ambas de cor violeta e indistinguíveis, uma vez que a numeração ficou ilegível; o mesmo se passa com  $d_5$  e  $d_6$ , ambas roxas. Para dificultar a tarefa, a etiquetagem é feita por uma pessoa que não sabe o que é roxo e o que é violeta, isto é, não sendo daltónico, não sabe dizer qual cor é qual. Para além disso também não está interessado em saber essa diferença, já que o público que vai apreciar o seu padrão de coloração das faces do cubo está nas mesmas condições do que ele próprio. Claro que etiquetagens que podem ser obtidas umas das outras por rotações do cubo devem ser identificadas. Novamente procuramos o número de padrões.*

Neste caso  $D$  é o conjunto das seis etiquetas e  $R$  o conjunto das seis faces do cubo. O grupo  $G$  consiste de 8 permutações, caracterizadas pelas condições de que  $d_1$  e  $d_2$  são fixos e que o subconjunto  $\{d_3, d_4\}$  é enviado ou nele próprio ou no subconjunto  $\{d_5, d_6\}$ . O polinómio deste grupo de permutações é:

$$P_G(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{8}(x_1^6 + 2x_1^4x_2 + 3x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_4)$$

e  $P_H$  é dado pelo lado direito da equação (2.2).

O número de padrões é dado pela expressão (2.31), o que pode ser calculado facilmente visto que, por exemplo, o operador  $(\partial/\partial z_1)^2(\partial/\partial z_2)^2$  tem um efeito não nulo apenas no termo  $z_1^2 z_2^2$ . O número de padrões será então

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24} (6! + 3 \cdot 3 \cdot 2^2 2^2 \cdot 2! + 6 \cdot 2 \cdot 2! 4 \cdot 1!) = 5.$$

Podemos confirmar este resultado descrevendo os padrões da seguinte forma:

1. Duas faces opostas têm as cores amarelo e preto e nas restantes faces as opostas têm cores iguais;
2. Duas faces opostas têm as cores amarelo e preto e nas restantes faces as opostas têm cores diferentes;
3. As cores amarelo e preto estão em faces adjacentes e nas restantes faces a face oposta à face amarela tem a mesma cor da face oposta à face preta;
4. A face de baixo é preta, a face frontal é amarela e as faces superior e esquerda têm a mesma cor;
5. A face de baixo é preta, a face frontal é amarela e as faces superior e direita têm a mesma cor.

## 2.13 Número Total de Padrões

Na linha do que foi feito anteriormente, tomamos os conjuntos finitos  $D$  e  $R$  sujeitos às acções dos grupos  $G$  e  $H$ , respectivamente, e pretendemos determinar o número de padrões de funções de  $D$  em  $R$ . Ou seja, a questão é exactamente a mesma do que na secção 2.11, exceptuando o facto de que deixamos de nos restringir a funções injectivas. Por outras palavras, o objecto da nossa busca é o inventário de padrões, tomando desta vez o peso  $W(f)$  como sendo 1 para todas as funções  $f \in R^D$ .

Aplicamos o Teorema 5 e, para determinar  $\sum_f^{(g,h)} W(f)$ , usamos a primeira parte da secção 2.11. O que aí foi argumentado mostra o seguinte: se  $f$  satisfaz  $fg = hf$ , então cada ciclo da permutação  $\pi_g$  de  $D$  é enviado num ciclo da permutação  $\pi_h$  de  $R$  com comprimento igual a um divisor do comprimento do primeiro ciclo de  $D$ . Mais precisamente, a correspondência entre ciclos é cíclica no seguinte sentido: se  $d$  é um elemento de um ciclo de  $\pi_g$  e se  $f(d) = r$ , então a função  $f$  nesse ciclo fica determinada por  $f(gd) = hr$ ,  $f(g^2d) = h^2r$ , etc.

Reciprocamente, cada função  $f$  com esta propriedade satisfaz  $fg = hf$ . Logo, podemos determinar o número de possibilidades que temos para  $f$ : em cada ciclo de  $D$  seleccionamos um elemento, ao qual chamamos elemento seleccionado. O número de possibilidades para o elemento de  $R$  que será imagem do elemento seleccionado por  $f$  é

$$\sum_{j|i} jc_j, \tag{2.33}$$

onde  $i$  é o comprimento do ciclo de  $D$  ao qual o elemento seleccionado pertence, os inteiros  $c_j$  são os elementos do tipo  $(c_1, c_2, \dots)$  de  $\pi_h$  e o somatório é tomado sobre todos os divisores  $j$  de  $i$ . Como as escolhas para os valores da função para os vários elementos seleccionados são independentes e pelo facto dessas escolhas determinarem  $f$  completamente, o número de funções  $f$  que satisfazem  $fg = hf$  é igual ao produtório de (2.33) para cada ciclo de  $\pi_g$ . Como existem  $b_i$  ciclos de comprimento  $i$ , obtemos

$$\sum_f^{(g,h)} W(f) = \prod_i \left( \sum_{j|i} j c_j \right)^{b_i} = (c_1)^{b_1} (c_1 + 2c_2)^{b_2} (c_1 + 3c_3)^{b_3} (c_1 + 2c_2 + 4c_4)^{b_4} \dots \quad (2.34)$$

Note-se que uma potência com expoente nulo tem que ser interpretada como 1, mesmo que tenha base 0.

Tal como na secção 2.11 podemos interpretar (2.34) como uma sequência de derivações parciais. Uma potência  $a^b$  pode ser escrita com a  $b$ -ésima derivada de  $e^{az}$  em  $z = 0$ ; ainda que  $a = b = 0$  obtemos  $0^0 = 1$ . Assim, a expressão (2.34) pode ser reescrita como

$$\left( \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^{b_1} \left( \frac{\partial}{\partial z_2} \right)^{b_2} \left( \frac{\partial}{\partial z_3} \right)^{b_3} \dots \exp \left( \sum_i z_i \sum_{j|i} j c_j \right),$$

avaliado em  $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = 0$ . O argumento de  $\exp()$  pode ser escrito como

$$\sum_i z_i \sum_{j|i} j c_j = \sum_j j c_j (z_j + z_{2j} + z_{3j} + \dots).$$

Agora notemos que o operador diferencial é obtido de  $x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \dots$  operando a substituição  $x_1 = \partial/\partial z_1$ ,  $x_2 = \partial/\partial z_2$ , etc., e que o operando é obtido de  $x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} \dots$  fazendo a substituição  $x_1 = e^{z_1+z_2+z_3+\dots}$ ,  $x_2 = e^{2(z_2+z_4+z_6+\dots)}$ ,  $x_3 = e^{3(z_3+z_6+z_9+\dots)}$ , etc. Logo, somando relativamente a  $g$  e  $h$  e usando o Teorema 5 obtemos o resultado seguinte.

**Teorema 8.** *O número total de padrões de funções de  $D$  em  $R$  é igual a*

$$P_G \left( \frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \dots \right) P_H \left[ e^{z_1+z_2+z_3+\dots}, e^{2(z_2+z_4+z_6+\dots)}, e^{3(z_3+z_6+z_9+\dots)}, \dots \right],$$

avaliado em  $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = 0$ .

Existe uma segunda expressão para o número de padrões, a qual poderá ser de mais simples aplicação. Observe-se que a expressão (2.34) é obtida operando a substituição  $x_1 = c_1$ ,  $x_2 = c_1 + 2c_2$ , etc., em  $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots$ . Somando relativamente a  $g$  e dividindo por  $|G|$  obtemos

$$P_G(c_1, c_1 + 2c_2, c_1 + 3c_3, c_1 + 2c_2 + 4c_4, \dots),$$

onde o  $i$ -ésimo argumento é  $\sum_{j|i} j c_j$ . Então, usando novamente o Teorema 5 obtemos

$$|H|^{-1} \sum_{h \in H} P_G(c_1, c_1 + 2c_2, c_1 + 3c_3, c_1 + 2c_2 + 4c_4, \dots), \quad (2.35)$$

onde  $(c_1, c_2, \dots)$  é o tipo de  $\pi_h$ .

Para finalizar serão apresentados alguns exemplos nos quais  $m$  e  $n$  representam o número de elementos de  $D$  e  $R$ , respectivamente ( $m = |D|$ ,  $n = |R|$ ).

**Exemplo 32.** Neste exemplo vamos estudar o caso particular em que  $G$  é o grupo trivial, com  $P_G = x_1^m$ . Então, os padrões podem ser denominados de padrões de variação com repetição, porque se escrevermos  $D$  como a sequência  $\{1, \dots, m\}$ , então para cada  $f \in R^D$  a sequência  $\{f(1), \dots, f(m)\}$  poderá conter repetições, visto estas funções  $f$  não serem necessariamente injectivas. Para o número de padrões, o Teorema 8 fornece-nos a expressão

$$\left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^m P_H(e^z, 1, 1, \dots) \right]_{z=0}. \quad (2.36)$$

Se fizermos mais uma restrição ao nosso problema e exigirmos que, tal como  $G$ ,  $H$  seja também o grupo trivial, então os padrões reduzir-se-ão a funções  $f \in R^D$ . De facto, a expressão (2.36) reduz-se a  $n^m = |R^D|$  neste caso, dado que  $P_H(e^z, 1, 1, \dots) = e^{nz}$ .

Podemos obter uma segunda especialização da expressão (2.36) através da exigência de que o conjunto  $D$  seja constituído por um só elemento, digamos  $d_1$ , com  $R$  e  $H$  quaisquer. Assim sendo, duas funções  $f_1$  e  $f_2$  são equivalentes se e só se  $f_1(d_1)$  e  $f_2(d_1)$  pertencem à mesma órbita por  $H$ . Consequentemente, o número de padrões será igual ao número de órbitas. De facto, se fizermos  $m = 1$  em (2.36) obtemos o resultado do lema de Burnside, o Lema 1, já que cada termo

$$|H|^{-1} x_1^{c_1} x_2^{c_2} x_3^{c_3} \dots$$

produzido por uma permutação  $\pi_h$  de tipo  $(c_1, c_2, c_3, \dots)$  contribui para (2.36) com  $|H|^{-1} c_1$  e  $c_1$  é o número de elementos de  $R$  que são invariantes por  $\pi_h$ .

**Exemplo 33.** Tomamos agora  $G$  como sendo o grupo simétrico de  $D$ , mantendo  $H$  geral. Ao tomarmos esta restrição estamos interessados no número de elementos de  $D$  que são enviados num dado elemento de  $R$  por uma certa função  $f$  e não nesses elementos em si. Então, os padrões podem ser descritos como padrões de funções  $\phi$  de  $R$  no conjunto  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  com a restrição  $\sum_{r \in R} \phi(r) = m$ , onde os padrões são formados relativamente à acção do grupo  $H$  em  $R$ . Então, o número de padrões pode ser obtido tanto pelo Teorema 8 como pelo Teorema 4, e mostraremos que os resultados são os mesmos em ambos os casos. O Teorema 4 pode ser aplicado dotando os elementos de  $N$  de pesos  $1, w^1, w^2, \dots$ , da forma óbvia, e calculando o número de padrões de peso  $w^m$ ; o resultado é o coeficiente de  $w^m$  na expressão

$$P_H(1 + w + w^2 + \dots, 1 + w^2 + w^4 + \dots, 1 + w^3 + w^6 + \dots, \dots).$$

Se aplicarmos o Teorema 8, temos como operador diferencial o coeficiente de  $w^m$  em

$$\exp \left( w \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1}{3} w^3 \frac{\partial}{\partial z_3} + \dots \right)$$

(ver o Exemplo 11). O efeito deste operador numa função  $\phi(z_1, z_2, \dots)$  no ponto  $z_1 = z_2 = \dots = 0$  é

$$\phi \left( w, \frac{1}{2} w^2, \frac{1}{3} w^3, \dots \right).$$

Operando a substituição  $z_1 = w, z_2 = \frac{1}{2} w^2, z_3 = \frac{1}{3} w^3, \dots$ , nos argumentos de  $P_H$  do Teorema 8 e usando a identidade formal  $w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \dots = -\ln(1 - w)$ , obtemos

$$\exp(z_1 + z_2 + z_3 + \dots) = \exp \left( w + \frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{3} w^3 + \dots \right) = (1 - w)^{-1}.$$

Analogamente,

$$\exp[2(z_2 + z_4 + z_6 + \dots)] = \exp\left(w^2 + \frac{1}{2}w^4 + \frac{1}{3}w^6 + \dots\right) = (1 - w^2)^{-1},$$

e assim sucessivamente. Ou seja, obtemos

$$P_H[(1 - w)^{-1}, (1 - w^2)^{-1}, (1 - w^3)^{-1}, \dots],$$

o que coincide com o resultado obtido pelo primeiro método.

**Exemplo 34.** Desta vez consideramos  $H$  como sendo o grupo simétrico de todas as permutações de  $R$  e  $G$  como sendo o grupo trivial. Neste caso os padrões serão as partições de  $D$  em no máximo em  $n$  partes. De facto, se  $f \in R^D$ , então  $f$  define uma partição de  $D$  cujos elementos são os subconjuntos de  $D$  da forma  $f^{-1}(r)$  com  $r \in f(D)$ .

Através da expressão (2.36) e do Exemplo 11, o número de padrões é o coeficiente de  $w^n$  em

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^m \exp\left(we^z + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 + \dots\right) \right]_{z=0} \\ &= \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^m \exp(w(e^z - 1)) \exp\left(w + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 + \dots\right) \right]_{z=0} \\ &= (1 - w)^{-1} \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^m \exp(w(e^z - 1)) \right]_{z=0}. \end{aligned}$$

Pela expansão em série de Taylor da função  $e^{w(e^z - 1)}$  no ponto  $z = 0$ , a  $m$ -ésima derivada desta função em ordem a  $z$  no ponto  $z = 0$  é igual ao coeficiente de  $z^m$  multiplicado por  $m!$  na expansão de  $e^{w(e^z - 1)}$  como série de potências em  $z$ . Logo, o número de padrões é  $m!$  vezes o coeficiente de  $w^n z^m$  na expansão de  $(1 - w)^{-1} e^{w(e^z - 1)}$ .

A partir deste resultado sobre o número de partições de um conjunto com  $m$  elementos em, no máximo,  $n$  partes, verificamos que o número de partições de um conjunto com  $m$  elementos em exactamente  $n$  partes é  $m!$  vezes o coeficiente de  $z^m w^n$  em  $e^{w(e^z - 1)}$ . Isto porque

$$\begin{aligned} & \text{coef. de } z^m w^n \text{ em } (1 - w)^{-1} e^{w(e^z - 1)} - \text{coef. de } z^m w^{n-1} \text{ em } (1 - w)^{-1} e^{w(e^z - 1)} \\ &= \text{coef. de } z^m w^n \text{ em } (1 - w)^{-1} e^{w(e^z - 1)} - w(1 - w)^{-1} e^{w(e^z - 1)} \\ &= \text{coef. de } z^m w^n \text{ em } (1 - w)(1 - w)^{-1} e^{w(e^z - 1)} \\ &= \text{coef. de } z^m w^n \text{ em } e^{w(e^z - 1)}. \end{aligned}$$

**Exemplo 35.** Tal como no exemplo anterior, seja  $H$  o grupo simétrico, mas agora  $G$  é um grupo qualquer. Obtemos padrões das partições de  $D$ . Infelizmente parece impossível simplificarmos o resultado do Teorema 8 (ou a expressão (2.35)) nesta situação ainda bastante geral.

Se especializarmos para o caso de o grupo  $G$  ser o grupo simétrico de  $D$ , então os padrões serão as partições de um conjunto de objectos não identificáveis, isto é, aquilo que passa a ser relevante é simplesmente o tamanho dos conjuntos da partição e não o seu conteúdo. Logo, neste caso os padrões correspondem às partições do número  $m$  em, no máximo,  $n$  partes. Por partição de  $m$  entenda-se uma solução  $(b_1, b_2, \dots)$  da equação

$$b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots = m,$$

com  $b_1, b_2, b_3, \dots$  inteiros não negativos. Dizemos que  $m$  foi partido em  $b_1$  1's,  $b_2$  2's,  $b_3$  3's, etc., e  $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$  é chamado o número de partes da partição.

O número de padrões pode ser obtido a partir do Exemplo 33 exigindo que  $H$  seja o grupo simétrico. Obtemos o coeficiente de  $z^m$  em

$$P_H[(1-z)^{-1}, (1-z^2)^{-1}, (1-z^3)^{-1}, \dots],$$

o que neste caso é igual ao coeficiente de  $z^m w^n$  em

$$\exp \left[ w(1-z)^{-1} + \frac{1}{2}w^2(1-z^2)^{-1} + \frac{1}{3}w^3(1-z^3)^{-1} + \dots \right],$$

e esta expressão pode ser reduzida a

$$\exp[\log(1-w)^{-1} + \log(1-wz)^{-1} + \log(1-wz^2)^{-1} + \dots] = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1-wz^k}.$$

Este resultado é conhecido para a função geradora do número de partições de um número num dado número de componentes.

## Capítulo 3

# Contagem de Acordes Não Equivalentes

### 3.1 Introdução

O estudo da Teoria de Contagem de Pólya, a que procedemos no capítulo anterior, teve como objectivo encontrar ferramentas matemáticas que permitissem solucionar o problema seguinte: «*Quantos acordes não equivalentes, num certo sentido, existem numa escala com um dado número,  $L$ , de notas?*», ou, mais geralmente, «*Quantas configurações não equivalentes de tipo  $(k_1, k_2, \dots, k_m)$  existem?*» (consultar a secção 1.3).

O objectivo deste capítulo é, portanto, fornecer uma resposta à pergunta anterior tendo em consideração diversos factores, como o número  $L$  das notas da escala, o número de notas constitutivas do acorde, o intervalo mínimo permitido nos acordes e o número das adjacências (intervalos de meio-tom) que existem em cada acorde.

### 3.2 Um Caso Particular: A Escala Cromática

O Teorema Fundamental de Pólya (Teorema 4) fornece-nos uma resposta à questão que finalizou o capítulo 1. Vejamos o seguinte caso particular.

**Exemplo 36.** *Suponhamos que  $m = 2$ , ou seja, que apenas dispomos de pérolas brancas e pretas e o grupo  $G$  consiste apenas da rotação de ângulo  $\theta$ . Queremos determinar o número de sequências de  $L$  objectos de tipo  $(k, L - k)$ .*

*Atribuimos o peso  $x$  às pérolas pretas e o peso  $y$  às pérolas brancas. O número procurado será o coeficiente de  $x^k y^{L-k}$  em*

$$P_G \left\{ \sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} [w(r)]^2, \dots, \sum_{r \in R} [w(r)]^L \right\} = P_G (x + y, x^2 + y^2, \dots, x^L + y^L)$$

*No caso em estudo, temos que*

$$P_G = \frac{1}{1} x_1^L = x_1^L,$$

logo,

$$P_G \{x + y, x^2 + y^2, \dots, x^L + y^L\} = (x + y)^L = \sum_{j=0}^L \binom{L}{j} x^j y^{L-j},$$

pelo que o número procurado é  $\binom{L}{k}$ , que já esperavamos encontrar, pois neste caso a relação de equivalência induzida é trivial e estamos, de facto, a contar correntes (ver o parágrafo que antecede o Exemplo 2 na secção 1.3).

Retomando o caso geral em que  $G$  é o grupo das  $L$  rotações de colares de  $L$  pérolas, podemos obter uma expressão simplificada para o número de acordes não equivalentes numa escala bem temperada de  $L$  notas. O Exemplo 13 fornece-nos uma expressão simplificada para o polinómio  $P_G$ , onde  $G = \mathbb{Z}_L$ :

$$P_G = \frac{1}{L} \sum_{d|L} \phi(d) (x^d + y^d)^{L/d}$$

onde  $\phi(d)$  é a função de Euler. No caso de pérolas de duas cores diferentes ( $m = 2$ ) temos que determinar o coeficiente de  $x^k y^{L-k}$  em

$$\frac{1}{L} \sum_{d|L} \phi(d) (x^d + y^d)^{L/d},$$

sendo  $x$  o peso da cor "preto" e  $y$  o peso da cor "branco". Esta expressão pode ser expandida em

$$\frac{1}{L} [\phi(1)(x + y)^L + \phi(d_1)(x^{d_1} + y^{d_1})^{L/d_1} + \dots + \phi(d_j)(x^{d_j} + y^{d_j})^{L/d_j} + \phi(L)(x^L + y^L)]$$

com  $\{1, d_1, d_2, \dots, d_j, L\}$  o conjunto dos divisores de  $L$ . Para calcular o coeficiente de  $x^k y^{L-k}$  na expressão acima, comecemos por notar que a parcela  $(x^{d_i} + y^{d_i})^{L/d_i}$  só contribuirá para esse coeficiente se  $d_i | k$  e, nesse caso, essa contribuição é

$$\binom{\frac{L}{d_i}}{\frac{k}{d_i}},$$

pela expressão do binómio  $(x^{d_i} + y^{d_i})^{L/d_i}$ . Em suma, o número de acordes não equivalentes com  $k$  notas, numa escala bem temperada de  $L$  notas, é:

$$\frac{1}{L} \sum_{d|L, k} \phi(d) \binom{L/d}{k/d}. \quad (3.1)$$

Este número será denotado por  $N(k, L - k)$ .

**Exemplo 37.** Imaginemos uma escala de quatro notas apenas com base na qual pretendemos determinar o número de acordes não equivalentes com duas notas (ver Exemplo 15). Temos, portanto, que  $L = 4$  e  $k = 2$ .

Os divisores simultâneos de 4 e 2 são 1 e 2, pelo que, aplicando a fórmula (3.1), obtemos

$$N(2, 2) = \frac{1}{4} \sum_{d|4, 2} \phi(d) \binom{4/d}{2/d} = \frac{1}{4} \left[ \phi(1) \binom{4}{2} + \phi(2) \binom{2}{1} \right] = \frac{1}{4} (1 \cdot 6 + 1 \cdot 2) = \frac{8}{4} = 2,$$



que é o número procurado conforme podemos verificar pela Figura 1.5. Vamos confirmar este resultado através do polinómio  $P_G$ , já calculado no Exemplo 15:

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4).$$

Atribuindo os pesos  $z_1$  e  $z_2$  às cores "preto" e "branco", respectivamente, temos que determinar o coeficiente de  $z_1^2 z_2^2$  em

$$\begin{aligned} P_G & (z_1 + z_2, z_1^2 + z_2^2, z_1^3 + z_2^3, z_1^4 + z_2^4) \\ &= \frac{1}{4}[(z_1 + z_2)^4 + (z_1^2 + z_2^2)^2 + 2(z_1^4 + z_2^4)] \\ &= \frac{1}{4}[z_1^4 + 4z_1^3 z_2 + 6z_1^2 z_2^2 + 4z_1 z_2^3 + z_2^4 + z_1^4 + 2z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + 2z_1^4 + 2z_2^4] \\ &= z_1^4 + z_1^3 z_2 + 2z_1^2 z_2^2 + z_1 z_2^3 + z_2^4. \end{aligned}$$

Assim, o coeficiente de  $z_1^2 z_2^2$  é 2, o que confirma o cálculo anterior.

**Exemplo 38.** Queremos, desta feita, determinar o número de acordes não equivalentes de 4 notas na escala bem temperada de 12 notas (ver Exemplo 16). Temos, então, que  $L = 12$  e  $k = 4$ . Os divisores simultâneos destes dois números são 1, 2 e 4. Aplicando a fórmula (3.1) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \sum_{d|12,4} \phi(d) \binom{12/d}{4/d} &= \frac{1}{12} \left[ \phi(1) \binom{12}{4} + \phi(2) \binom{6}{2} + \phi(4) \binom{3}{1} \right] \\ &= \frac{1}{12} (1 \cdot 495 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 3) \\ &= \frac{1}{12} 516 \\ &= 43. \end{aligned}$$

Logo, existem essencialmente 43 acordes de 4 notas distintos na escala cromática usual. Novamente, vamos confirmar este resultado através do polinómio  $P_G$ , já calculado no Exemplo 16:

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_{12}) = \frac{1}{12}[x_1^{12} + 4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + x_2^6].$$

Atribuindo os pesos  $z_1$  à cor "preto" e  $z_2$  à cor "branco" temos então:

$$\begin{aligned} P_G & (z_1 + z_2, z_1^2 + z_2^2, \dots, z_1^{12} + z_2^{12}) \\ &= \frac{1}{12}[(z_1^{12} + 12z_1^{11} z_2 + 66z_1^{10} z_2^2 + 220z_1^9 z_2^3 + 495z_1^8 z_2^4 + 792z_1^7 z_2^5 + 924z_1^6 z_2^6 + 792z_1^5 z_2^7 \\ &+ 495z_1^4 z_2^8 + 220z_1^3 z_2^9 + 66z_1^2 z_2^{10} + 12z_1 z_2^{11} + z_2^{12}) + 4(z_1^{12} + z_2^{12}) + 2(z_1^{12} + 2z_1^6 z_2^6 + z_2^{12}) \\ &+ 2(z_1^{12} + 3z_1^8 z_2^4 + 3z_1^4 z_2^8 + z_2^{12}) + 2(z_1^{12} + 4z_1^9 z_2^3 + 6z_1^6 z_2^6 + 4z_1^3 z_2^9 + z_2^{12}) + (z_1^{12} + 6z_1^{10} z_2^2) \\ &+ 15z_1^8 z_2^4 + 20z_1^6 z_2^6 + 15z_1^4 z_2^8 + 6z_1^2 z_2^{10} + z_2^{12}] \\ &= z_1^{12} + z_1^{11} z_2 + 6z_1^{10} z_2^2 + 19z_1^9 z_2^3 + 43z_1^8 z_2^4 + 66z_1^7 z_2^5 + 80z_1^6 z_2^6 + 66z_1^5 z_2^7 + 43z_1^4 z_2^8 + 19z_1^3 z_2^9 \\ &+ 6z_1^2 z_2^{10} + z_1 z_2^{11} + z_2^{12}. \end{aligned}$$

O polinómio, assim obtido, confirma o número que encontramos inicialmente através da fórmula (3.1), já que o coeficiente de  $z_1^4 z_2^8$  é 43. Também nos permite preencher a tabela

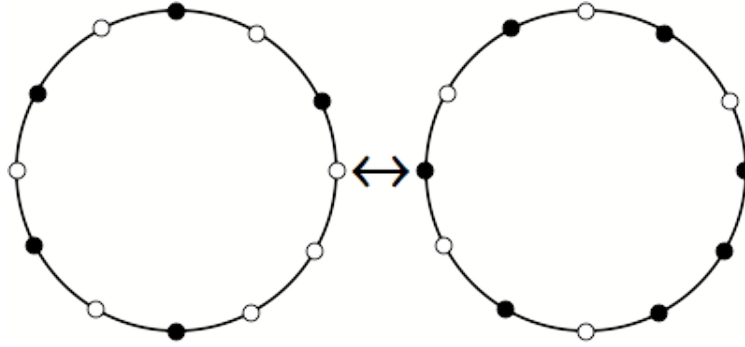


Figura 3.1: Simetria de colares.

seguinte que nos dá o número de acordes na escala cromática usual, dado o número de notas constituintes do acorde:

Nº de notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nº de acordes não equiv.	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1

A simetria da tabela é fácil de justificar como ilustra a Figura 3.1: trocando as cores "preto" e "branco", obtemos uma correspondência que preserva a equivalência entre os colares com  $k$  pérolas pretas e  $L - k$  pérolas brancas, e os colares com  $L - k$  pérolas pretas e  $k$  pérolas brancas.

Já sabemos determinar o número total de acordes de  $k$  notas essencialmente distintos no âmbito de uma escala de  $L$  notas, sendo esse número  $N(k, L - k)$ . Poderá ser interessante determinar o número total desses acordes, independentemente do número de notas. Para tal, basta somar os valores de  $N(k, L - k)$  para todos os valores possíveis para  $k$ :

$$\sum_{k=0}^L N(k, L - k) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^L \sum_{d|L, k} \phi(d) \binom{L/d}{k/d}$$

Fazendo  $j = \frac{k}{d}$ , obtemos

$$\frac{1}{L} \sum_{d|L} \phi(d) \sum_{j=0}^{L/d} \binom{L/d}{j} = \frac{1}{L} \sum_{d|L} \phi(d) 2^{L/d},$$

uma vez que  $\sum_{j=0}^{L/d} \binom{L/d}{j} = (1 + 1)^{L/d} = 2^{L/d}$ .

Por exemplo, no caso da escala cromática com  $L = 12$  semitons temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \sum_{d|12} \phi(d) 2^{12/d} &= \frac{1}{12} [\phi(1)2^{12} + \phi(2)2^6 + \phi(3)2^4 + \phi(4)2^3 + \phi(6)2^2 + \phi(12)2] \\ &= \frac{1}{12} [1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2] \\ &= \frac{1}{12} [4096 + 64 + 32 + 16 + 8 + 8] \\ &= 352, \end{aligned}$$

o que coincide precisamente com a soma das entradas da segunda linha da tabela do Exemplo 38.

Resumindo, no caso da escala cromática temos a seguinte tabela com o número de acordes não equivalentes com um número de notas menor ou igual a  $n$ :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nº acordes não eq. com $\leq n$ notas	1	2	8	27	70	136	216	282	325	344	350	351	352

### 3.3 O Caso Geral de $m$ cores

No caso geral de colares de pérolas de  $m$  cores distintas, a fórmula que fornece o número de configurações não equivalentes de tipo  $(k_1, \dots, k_m)$  é dada pelo coeficiente de  $z_1^{k_1} \dots z_m^{k_m}$  em

$$P_G(z_1 + \dots + z_m, z_1^2 + \dots + z_m^2, \dots, z_1^L + \dots + z_m^L).$$

Analogamente ao que fizemos para  $m = 2$ , podemos usar a expressão multinomial para concluir que este número é

$$N(k_1, k_2, \dots, k_m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L} \sum_{d|k_1, \dots, k_m} \phi(d) \binom{L/d}{k_1/d, k_2/d, \dots, k_m/d},$$

com  $L = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ .

### 3.4 Restrições ao Problema

Vamos agora refinar o nosso problema de contagem de acordes, a menos de equivalência, impondo restrições à estrutura dos acordes. Ou seja, não queremos apenas contar o número total de acordes não equivalentes, mas sim o número de acordes não equivalentes de um determinado tipo.

#### 3.4.1 Intervalo Mínimo do Acorde

O *intervalo mínimo* de um acorde é, como o próprio nome indica, o valor do menor intervalo que ocorre no acorde, incluindo o intervalo da última nota à primeira. Por exemplo, o intervalo mínimo do acorde *Dó – Mi – Sol – Sib*, cuja sequência de intervalos é  $(4, 3, 3, 2)$  é 2. Este parâmetro tem significado musical, na medida em que o som produzido por um acorde tem uma relação directa com os relações intervalares que as suas notas constituintes formam entre si.

Seja então  $I(L, n, m)$  o número de acordes não equivalentes com  $n$  notas e intervalo mínimo maior ou igual a  $m$ , numa escala de  $L$  notas. Podemos ver um tal acorde como um colar formado por "blocos" de dois tipos, os quais designamos por *meta-pérolas* (ver Figura 3.2)

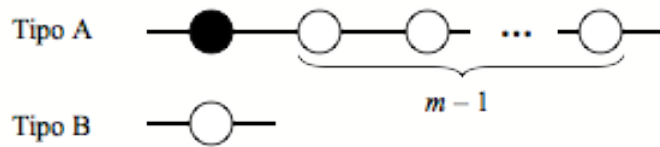


Figura 3.2: Os dois tipos de meta-pérolas num meta-colar correspondente a um acorde de  $n$  notas e intervalo mínimo maior ou igual a  $m$ .

Assim, um acorde de  $n$  notas e intervalo mínimo maior ou igual a  $m$  corresponde a um *meta-colar* com  $n$  meta-pérolas de tipo A e  $L - nm$  meta-pérolas de tipo B. O número de tais colares, a menos de equivalência, por notação é  $N(n, L - nm)$ .

Para a escala cromática temos a seguinte tabela de valores para  $I(12, n, m)$ :

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1	351
2	1	5	10	10	3	1							30
3	1	4	4	1									10
4	1	3	1										5
5	1	2											3
6	1	1											2
7-12	1												1

Em particular, podemos verificar que existem precisamente 30 acordes sem notas adjacentes (intervalos de meio-tom) e, conseqüentemente,  $351 - 30 = 321$  acordes com notas adjacentes.

### 3.4.2 Número de Adjacências do Acorde

Como acabámos de ver, a grande maioria dos acordes (cerca de 91,5% se excluirmos o acorde sem notas) tem pelo menos um par de notas adjacentes. Vamos então classificar os acordes segundo o número de pares de notas adjacentes (intervalos de meio-tom) que neles ocorrem.

O número de adjacências num acorde sofreu uma evolução ao longo da história da música, tendo aumentado consideravelmente desde o século XIX até aos nossos dias. Este estudo pode ter aplicações no âmbito da música contemporânea, nomeadamente na música electrónica gerada por computador, permitindo controlar o valor médio de adjacências na peça, bem como a sua evolução ao longo desta.

Seja  $A(L, n, a)$  o número de acordes com  $n$  notas e  $a$  adjacências, no âmbito de uma escala bem temperada de  $L$  notas. No caso de termos  $a = 1$ , podemos construir acordes com exactamente uma adjacência usando meta-pérolas de três tipos, como explicitado na Figura 3.3.

Aplicando a fórmula que obtivemos na secção 3.3 concluímos que

$$A(L, n, 1) = N(1, n - 2, L - 2n + 1) = \binom{L - n - 1}{n - 2}, \quad 2 \leq n \leq \left\lfloor \frac{L + 1}{2} \right\rfloor,$$

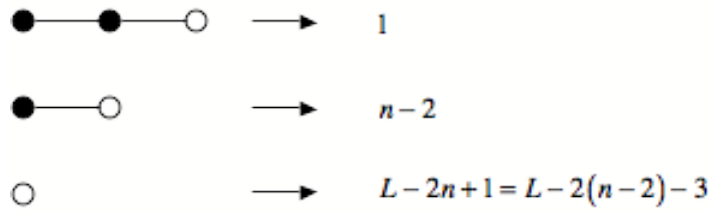


Figura 3.3: Os três tipos de meta-pérolas em acordes com exactamente uma adjacência e o número de meta-pérolas de cada tipo em cada colar.

pois

$$\begin{aligned}
 N(1, n-2, L-2n+1) &= \frac{1}{L-n} \binom{L-n}{1, n-2, L-2n+1} \\
 &= \frac{1}{L-n} \frac{(L-n)!}{1!(n-2)!(L-2n+1)!} \\
 &= \frac{(L-n-1)!}{(n-2)!(L-2n+1)!} \\
 &= \binom{L-n-1}{n-2}.
 \end{aligned}$$

Podemos agora construir a tabela que se segue que contém a sucessão do número de acordes com uma adjacência independentemente do seu número de notas, em função do número  $L$  das notas da escala. Ou seja,

$$A(L, *, 1) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 2} A(L, n, 1).$$

$L$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$A(L, *, 1)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

Parece verificar-se que a sucessão  $A(3, *, 1)$ ,  $A(4, *, 1)$ ,  $A(5, *, 1)$ , ... dada na tabela anterior coincide com a sucessão de Fibonacci, definida por

$$\begin{cases} f_0 = 1, \\ f_1 = 1, \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

De facto, como

$$\begin{aligned}
A(L, *, 1) + A(L - 1, *, 1) &= \sum_{n \geq 2} A(L, n, 1) + \sum_{n \geq 2} A(L - 1, n, 1) \\
&= \sum_{n \geq 2} \binom{L - n - 1}{n - 2} + \sum_{n \geq 2} \binom{L - n - 2}{n - 2} \\
&= \binom{L - 3}{0} + \sum_{n \geq 3} \binom{L - n - 1}{n - 2} + \sum_{n \geq 2} \binom{L - n - 2}{n - 2} \\
&= \binom{L - 3}{0} + \sum_{n \geq 3} \binom{L - n - 1}{n - 2} + \sum_{n \geq 3} \binom{L - n - 1}{n - 3} \\
&= 1 + \sum_{n \geq 3} \binom{L - n}{n - 2} \\
&= \sum_{n \geq 2} \binom{L - n}{n - 2} \\
&= A(L + 1, *, 1)
\end{aligned}$$

e  $A(3, *, 1) = 1 = A(4, *, 1)$ , decorre que  $A(L, *, 1) = f_{L-3}$ , para todo o  $L \geq 3$ . Por outras palavras, o número de acordes contendo exactamente um intervalo de meio-tom, numa escala de  $L$  notas, é  $f_{L-3}$ , o  $L$ -ésimo termo da sucessão de Fibonacci. O termo geral desta sucessão é

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right],$$

onde  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é o número (ou razão) de ouro (ver, por exemplo [10, Thm. 7.1.1]).

Podemos agora prosseguir o nosso estudo e construir uma tabela com os valores de  $A(12, *, a)$ , ou seja, para a escala cromática com  $L = 12$ , calcular o número total de acordes com  $a$  adjacências, para  $0 \leq a \leq 12$ . Para o caso  $a = 0$  já sabemos que  $A(12, *, 0) = 30$ , visto que este número é precisamente o valor de  $I(12, *, 2)$ , ou seja, é o número de acordes cujo intervalo entre cada par de notas do acorde é pelo menos 2 e este número já foi calculado na secção anterior. O caso  $a = 1$  também já está resolvido, sendo que  $A(12, *, 1) = 55$ . Para  $a \geq 2$  temos que calcular o valor de  $A(12, *, a)$ .

Para  $a = 2$  procedemos, então, de forma análoga ao caso  $a = 1$ . Os acordes nestas condições podem ser construídos através de duas vias distintas: ou possuem as duas adjacências consecutivas e, nesse caso, são construídos à custa das meta-pérolas indicadas na figura 3.4, ou então possuem as duas adjacências não consecutivas e, nesse caso, os acordes serão construídos através das meta-pérolas presentes na figura 3.5.

Assim sendo, o número total de acordes com exactamente duas adjacências,  $A(L, n, 2)$ , será dado pela soma do número de acordes de cada um dos dois tipos descritos anteriormente,

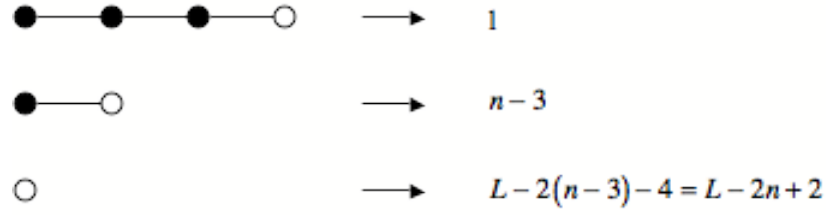


Figura 3.4: Os três tipos de meta-pérolas em acordes com exactamente duas adjacências consecutivas e o número de meta-pérolas de cada tipo em cada colar.

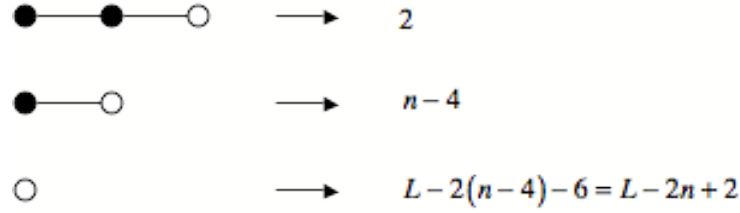


Figura 3.5: Os três tipos de meta-pérolas em acordes com exactamente duas adjacências não consecutivas e o número de meta-pérolas de cada tipo em cada colar.

ou seja,

$$\begin{aligned}
 A(L, n, 2) &= N(1, n-3, L-2n+2) + N(2, n-4, L-2n+2) \\
 &= \frac{1}{L-n} \binom{L-n}{1, n-3, L-2n+2} \\
 &+ \begin{cases} \frac{1}{L-n} \left( \binom{L-n}{2, n-4, L-2n+2} + \binom{L-n}{1, \frac{n}{2}-2, \frac{L}{2}-n+1} \right), & \text{se } n \geq 4 \text{ e } n, L \text{ pares} \\ \frac{1}{L-n} \binom{L-n}{2, n-4, L-2n+2}, & \text{se } n \geq 4 \text{ e } n \text{ ou } L \text{ ímpar} \\ 0, & \text{se } n = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Antes de procedermos ao cálculo desta expressão para  $L = 12$  e para os vários valores de  $n$ , vamos simplificar as parcelas desta soma. Assim, temos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{L-n} \binom{L-n}{1, n-3, L-2n+2} &= \frac{(L-n-1)!}{(n-3)!(L-2n+2)!} = \binom{L-n-1}{n-3}; \\
 \frac{1}{L-n} \binom{L-n}{2, n-4, L-2n+2} &= \frac{(Ln-1)!}{2(n-4)!(L-2n+2)!} = \frac{L-n-1}{2} \binom{L-n-2}{n-4}; \\
 \frac{1}{L-n} \binom{L-n}{1, \frac{n}{2}-2, \frac{L}{2}-n+1} &= \frac{1}{L-n} \frac{\left(\frac{L-n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2}-2\right)!\left(\frac{L}{2}-n+1\right)!} = \frac{1}{2} \binom{\frac{L-n-2}{2}}{\frac{n-4}{2}}.
 \end{aligned}$$

Com estas simplificações, procedemos então ao cálculo de  $A(12, *, 2)$ . Para  $n = 3$  temos

$$A(12, 3, 2) = \binom{12-3-1}{3-3} = \binom{8}{0} = 1.$$

Para  $n = 4$  temos

$$A(12, 4, 2) = \binom{7}{1} + \frac{7}{2} \binom{6}{0} + \frac{1}{2} \binom{6}{0} = 7 + 4 = 11.$$

No caso  $n = 5$  temos

$$A(12, 5, 2) = \binom{6}{2} + \frac{6}{2} \binom{5}{1} = 15 + 15 = 30.$$

No caso  $n = 6$  temos

$$A(12, 6, 2) = \binom{5}{3} + \frac{5}{2} \binom{4}{2} + \frac{1}{2} \binom{2}{1} = 10 + 15 + 1 = 26.$$

Finalmente, para  $n = 7$  temos

$$A(12, 7, 2) = \binom{4}{4} + \frac{4}{2} \binom{3}{3} = 1 + 2 = 3.$$

Para  $n \geq 8$  temos  $A(12, n, 2) = 0$ . Logo

$$A(12, *, 2) = 1 + 11 + 30 + 26 + 3 = 71.$$

Como podemos observar, os cálculos tornam-se progressivamente mais morosos com o aumento do número de adjacências. Assim, apresentamos a tabela seguinte indicativa do número de acordes com  $a$  adjacências, para cada  $0 \leq a \leq 12$ , omitindo os cálculos para  $a \geq 3$ .

$a$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A(12, *, a)$	30	55	71	67	54	34	22	9	6	1	1	0	1

Note-se que os máximos são atingidos para  $a = 2$  e  $a = 3$  e que o valor médio de adjacências por acorde é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{351} (0 \cdot 30 + 1 \cdot 55 + 2 \cdot 71 + 3 \cdot 67 + 4 \cdot 54 + 5 \cdot 34 + 6 \cdot 22 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \\ + 11 \cdot 0 + 12 \cdot 1) = \frac{1058}{351} \approx 3,01 \dots \end{aligned}$$



## Capítulo 4

# Escalas Musicais e o Ciclo de Quintas Generalizado

### 4.1 Introdução

No capítulo anterior o objectivo central era a contagem dos acordes essencialmente distintos no contexto de uma determinada escala; identificámos os acordes com colares de pérolas e os acordes eram ditos equivalentes no caso de um poder ser obtido de outro por uma rotação.

Neste capítulo queremos perceber como é que a estrutura da própria escala influencia o número de acordes diferentes dentro daqueles com uma determinada estrutura. Por outras palavras, imaginemos um teclado de um piano só com teclas brancas, e todos os acordes com uma determinada posição; a questão que se coloca é como é que a distribuição das teclas pretas sobre o teclado influencia o número de acordes distintos dentro daquela estrutura previamente definida. Este capítulo será baseado nos artigos [2] e [3].

### 4.2 Definições e Primeiros Resultados

Vamos começar por definir alguns conceitos necessários para este capítulo, alguns dos quais já abordados anteriormente.

Chamamos conjunto diatónico ao conjunto de notas

$$\{Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si\}$$

correspondente às teclas brancas do piano. O conjunto cromático é o conjunto das notas

$$\{Dó, Dó\sharp, Ré, Ré\sharp, Mi, Fá, Fá\sharp, Sol, Sol\sharp, Lá, Lá\sharp, Si\}$$

correspondente ao conjunto de todas as teclas do piano. Cada elemento destes conjuntos representa uma classe de notas.

Um acorde é um subconjunto não vazio do conjunto diatónico. Omitiremos as chavetas da notação de conjunto quando nos referirmos a acordes. Assim, por exemplo, o acorde  $\{Dó, Ré, Fá\}$  será denotado simplesmente por *Dó, Ré, Fá*.

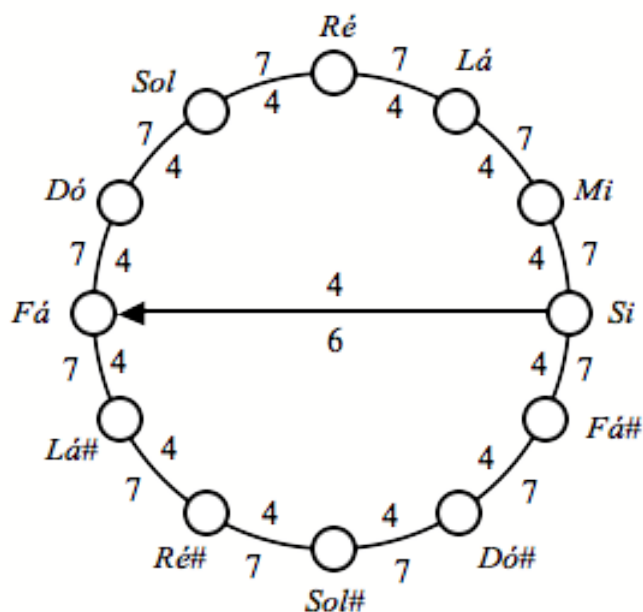


Figura 4.1: As notas da escala cromática usual dispostas segundo um ciclo de quintas. O semicírculo superior designa-se o ciclo diatônico, por conter todas as notas diatônicas. Por dentro do ciclo estão dispostos os comprimentos diatônicos entre cada par de notas, enquanto que por fora estão dispostos os respectivos comprimentos cromáticos.

Uma *linha* é uma sequência finita e não vazia de elementos distintos do conjunto diatônico. As linhas serão denotadas pelas suas notas constituintes, pela ordem correspondente, separadas por um ífen. Por exemplo a linha composta pela sequência de notas *Dó*, *Ré* e *Fá* denota-se por *Dó – Ré – Fá*.

Note-se que os acordes *Dó*, *Ré*, *Fá* e *Ré*, *Dó*, *Fá* são idênticos, mas as linhas *Dó – Ré – Fá* e *Ré – Dó – Fá* são distintas.

Dada a definição anterior, um *intervalo* será uma linha contendo apenas duas notas. Definimos agora dois tipos de medição do comprimento de um acorde, o primeiro tendo por base o conjunto diatônico e o segundo o conjunto cromático. Assim, definimos o *comprimento diatônico* de um intervalo como o número de passos no conjunto diatônico necessários para ir da primeira nota da linha até à segunda (da mais grave até à mais aguda na escala). Por outro lado, o *comprimento cromático* de um intervalo será definido como o número de passos no conjunto cromático necessários para ir da primeira nota da linha até à segunda, ou seja, é o comprimento do intervalo medido em semitons. A notação para designarmos o comprimento diatônico de um intervalo será  $D(\cdot)$ , enquanto que para o comprimento cromático será  $|\cdot|$ . Vejamos o exemplo seguinte, no qual estão determinados os comprimentos diatônicos e cromáticos de dois intervalos concretos.

**Exemplo 39.**

- |                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| 1. $D(Dó - Fá) = 3;$ | 3. $ Dó - Fá  = 5;$ |
| 2. $D(Fá - Dó) = 4;$ | 4. $ Fá - Dó  = 7.$ |

Considere-se a linha  $X_1 - X_2 - \dots - X_k$ , com  $k \geq 2$ . Relativamente a esta linha definimos:

- o vector de comprimento diatónico como

$$(D(X_1 - X_2), D(X_2 - X_3), \dots, D(X_{k-1} - X_k), D(X_k - X_1));$$

- o vector de comprimento cromático como

$$(|X_1 - X_2|, |X_2 - X_3|, \dots, |X_{k-1} - X_k|, |X_k - X_1|).$$

Dadas duas linhas, com pelo menos duas notas, diz-se que estão relacionadas por transposição no conjunto diatónico se os seus vectores de comprimento diatónico forem iguais. Esta é uma relação de equivalência e as classes de equivalência são chamadas de genera (singular genus). A notação será  $\langle \cdot \rangle$ . No exemplo seguinte mostra-se uma aplicação desta definição.

**Exemplo 40.**

$$\langle Dó - Ré - Fá \rangle = \{Dó - Ré - Fá, Ré - Mi - Sol, Mi - Fá - Lá, Fá - Sol - Si, Sol - Lá - Dó, Lá - Si - Ré, Si - Dó - Mi\}$$

Da mesma forma que definimos a relação de equivalência entre linhas no conjunto diatónico, podemos definir uma relação análoga relativamente ao conjunto cromático. De facto, dadas duas linhas no mesmo genus diz-se que estão relacionadas por transposição no conjunto cromático se os seus vectores de comprimento cromático forem iguais. Esta é uma relação de equivalência que particiona cada genus em subconjuntos que chamamos de espécies.

**Exemplo 41.**  $\langle Dó - Ré - Fá \rangle$  é particionado em três espécies (seguidas dos respectivos vectores de comprimento cromático comuns a todas as linhas da espécie):

- $\{Dó - Ré - Fá, Ré - Mi - Sol, Sol - Lá - Dó, Lá - Si - Ré\}, (2, 3, 7);$
- $\{Mi - Fá - Lá, Si - Dó - Mi\}, (1, 4, 7);$
- $\{Fá - Sol - Si\}, (2, 4, 6).$

Note-se que as linhas  $Si - Fá$  e  $Fá - Si$  têm o mesmo vector de comprimento cromático, que é  $(6, 6)$ . No entanto, o vector de comprimento diatónico de  $Si - Fá$  é  $(4, 3)$ , ao passo que o vector de comprimento diatónico de  $Fá - Si$  é  $(3, 4)$ . Logo,  $Si - Fá$  e  $Fá - Si$  não pertencem ao mesmo genus nem à mesma espécie.

O exemplo 41 evidencia um caso em que um genus que contém uma linha de três notas se particiona em três espécies. O próximo teorema mostra que isto não é uma coincidência. Uma ferramenta necessária à demonstração desse teorema é o ciclo de quintas: construímos o ciclo de quintas começando em qualquer nota e adicionando sete semitons para obter uma nova nota na escala cromática (a quinta perfeita). O ciclo termina quando o processo iterativo atinge a nota inicial (ver Figura 4.1).

**Teorema 9.** Dados  $k$ ,  $1 < k \leq 7$ , e qualquer linha de  $k$  notas, o genus contendo essa linha é constituído exactamente por  $k$  espécies.

*Demonstração.* Considere-se a linha  $X_1 - X_2 - \dots - X_k$ . Suponhamos que ela está ordenada no sentido dos ponteiros do relógio (relativamente ao ciclo das quintas). Obtemos as outras linhas do *genus* percorrendo o ciclo diatónico (a parte de cima do ciclo das quintas).

Como  $Si - Fá$  é o único intervalo no ciclo diatónico tal que  $|Si - Fá| \neq 7$ , a sua localização na linha determina a espécie dessa linha. Existem  $k$  localizações possíveis para esse intervalo: entre  $X_1$  e  $X_2, \dots, X_{k-1}$  e  $X_k$  ou  $X_k$  e  $X_1$ , logo existem  $k$  espécies diferentes, no *genus* da linha  $X_1 - X_2 - \dots - X_k$ .

Considere-se agora o caso geral, quando as notas da linha não estão necessariamente no sentido dos ponteiros do relógio. Dada a linha  $X_1 - X_2 - \dots - X_k$ , seja  $\pi$  uma das  $k$  permutações de  $\{1, \dots, k\}$  que coloca a linha em ordem, isto é,  $\pi$  é tal que as notas da linha  $X_{\pi(1)} - X_{\pi(2)} - \dots - X_{\pi(k)}$  estão ordenadas no sentido dos ponteiros do relógio.

É claro que o *genus* da linha permutada consiste das imagens das linhas no *genus* original pela permutação  $\pi$ .

Dizemos que as *genera*  $\langle X_1 - X_2 - \dots - X_k \rangle$  e  $\langle X_{\pi(1)} - X_{\pi(2)} - \dots - X_{\pi(k)} \rangle$  contêm o mesmo número de espécies. Para comprova-lo observe-se que, dados  $l$  e  $m$ ,

$$|X_{\pi(l)} - X_{\pi(m)}| = |X_{\pi(l)} - X_{\pi(l+1)}| + |X_{\pi(l+1)} + X_{\pi(l+2)}| + \dots + |X_{\pi(m)-1} - X_{\pi(m)}| \pmod{12}$$

(definimos  $X_{k+1} = X_1$  se  $\pi(l) > \pi(m)$ ).

**Exemplo 42.** Considere-se a linha  $Fá - Lá - Dó - Mi$ . Podemos permuta-la para obter  $Fá - Dó - Lá - Mi$  na ordem desejada. Temos então

$$|Fá - Dó| \equiv |Fá - Lá| + |Lá - Dó| \equiv 4 + 3 \equiv 7 \pmod{12}$$

como era suposto acontecer.

Então, o vector de comprimento cromático de uma linha determina o vector de comprimento cromático de uma permutação dessa linha. Como qualquer permutação é invertível a afirmação inversa também é verdadeira — o vector de comprimento cromático da linha permutada determina o vector de comprimento cromático da linha original.

Daqui segue que a bijecção entre as *genera*

$$\langle X_1 - X_2 - \dots - X_k \rangle \text{ e } \langle X_{\pi(1)} - X_{\pi(2)} - \dots - X_{\pi(k)} \rangle,$$

dada pela permutação  $\pi$ , transforma linhas com vectores de comprimento cromático igual em linhas com vectores de comprimento cromático igual e reciprocamente. Por outras palavras,, esta bijecção restringe-se a bijecções entre as espécies de  $\langle X_1 - X_2 - \dots - X_k \rangle$  e as espécies de  $\langle X_{\pi(1)} - X_{\pi(2)} - \dots - X_{\pi(k)} \rangle$ .

Desta forma, uma linha de  $k$  notas tem o mesmo número de espécies que uma qualquer sua reordenação no sentido dos ponteiros do relógio no ciclo de quintas. Esta, como já foi visto, tem  $k$  espécies.  $\square$

**Corolário 5.** Se uma dada linha está orientada no sentido dos ponteiros do relógio relativamente ao ciclo de quintas, então o número de linhas em cada espécie contida no *genus* dessa linha é dado pelas distâncias entre cada nota e a nota seguinte na linha. As distâncias são

*medidas em quintas no sentido dos ponteiros do relógio à volta do ciclo diatónico e incluem a distância da última nota à primeira. Em geral, os números de linhas em cada espécie contida no genus de uma dada linha são iguais àqueles de uma outra reordenação no sentido dos ponteiros do relógio dessa linha.*

### 4.3 Ciclo de Quintas Generalizado

A partir de agora trabalharemos com uma generalização dos conceitos da secção anterior: em vez do conjunto cromático habitual de doze notas, consideramos um conjunto abstracto, mas finito, com  $c$  elementos,  $c \in \mathbb{Z}$ , ditos *notas*, que ainda será designado por conjunto cromático.

Uma *escala* será um par ordenado constituído por um conjunto cromático e um seu subconjunto chamado de conjunto diatónico. O cardinal do conjunto diatónico será denotado por  $d$  e os seus elementos por  $D_0, D_1, \dots, D_{d-1}$ .

Linha, intervalo, comprimentos diatónico e cromático, *genus* e espécie são definidas de forma análoga ao já feito anteriormente. Segue-se o primeiro resultado desta secção.

**Lema 2.** *Dado  $k$ ,  $0 < k < d$ , a soma dos comprimentos cromáticos dos intervalos de comprimento diatónico  $k$  é  $ck$ .*

*Demonstração.* O número de semitons da escala cromática é, por definição,  $c$ . Como cada semitom está contido em precisamente  $k$  dos intervalos de comprimento diatónico  $k$ , fica demonstrado o que se pretendia.  $\square$

Diz-se que uma escala tem a *propriedade CV* (“Cardinalidade igual a Variedade”) se, para cada  $k$  com  $1 < k \leq d$  e para cada linha de  $k$  notas, o *genus* contendo essa linha contém exactamente  $k$  espécies. Esta propriedade é verificada na escala cromática usual de 12 semitons pelo teorema da secção anterior. Vamos determinar condições segundo as quais uma escala satisfaz a propriedade CV.

Definimos o *espectro* de um intervalo  $I$  como o conjunto de todos os comprimentos cromáticos de intervalos em  $\langle I \rangle$ .

Se uma escala tem CV então, em particular, cada intervalo tem um espectro de dois elementos.

Uma escala satisfaz *MP* (Propriedade de Myhill) se cada intervalo tem um espectro de dois elementos.

Provar-se-á que MP implica CV, construindo para qualquer escala com MP um ciclo de quintas generalizado.

Considere-se o espectro do intervalo  $D_0 - D_1$ . Se este conjunto é um conjunto de dois inteiros consecutivos dizemos que a escala é *arredondada*. Um exemplo de uma escala arredondada é a escala usual.

**Observação 5.** *Dada uma qualquer escala na qual o espectro de  $D_0 - D_1$  é um conjunto de dois elementos (por exemplo, qualquer escala com MP), existe pelo menos uma escala*

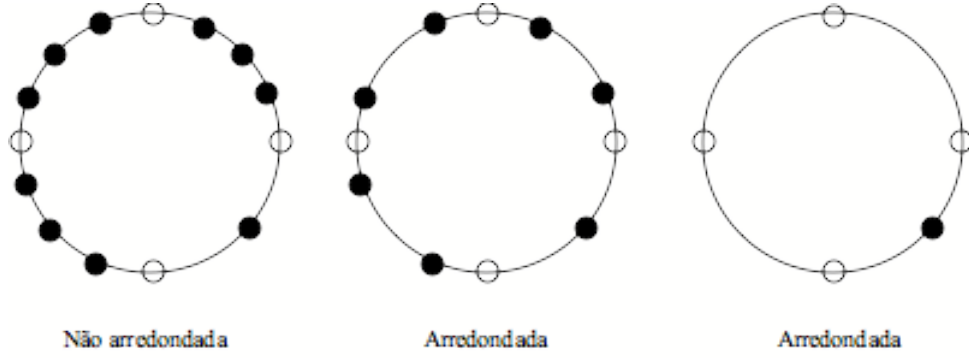


Figura 4.2: Legenda:  $\circ$  — notas diatônicas;  $\bullet$  — notas não diatônicas.

*arredondada correspondente obtida por eliminação de notas não diatônicas, preservando as genera e as espécies: ver Figura 4.2.*

Dizemos que uma escala satisfaz CP (Propriedade de Consecutividade) se cada intervalo tem um espectro que consiste de inteiros consecutivos.

Temos então os seguinte lemas:

**Lema 3.** *Toda a escala arredondada tem CP.*

*Demonstração.* Escolha-se  $k$ , com  $0 < k < d$ , e considere-se o intervalo  $D_0 - D_k$ . Se o espectro deste intervalo contem unicamente um inteiro o lema verifica-se trivialmente.

De outra forma, existem  $i$  e  $j$  com  $j - i = k$  e  $|D_i - D_j| \neq |D_{i+1} - D_{j+1}|$ , onde os índices são reduzidos módulo  $d$ , se necessário, para que pertençam ao conjunto  $\{0, 1, \dots, d-1\}$ . Mas como a escala é arredondada tem-se que:

$$|D_{i+1} - D_{j+1}|, -|D_i - D_j| = |D_j - D_{j+1}| - |D_i - D_{i+1}| = \pm 1.$$

Logo, não existem dois termos consecutivos na sequência

$$|D_0 - D_k|, |D_1 - D_{k+1}|, \dots, |D_{d-1} - D_{k-1}|$$

que difiram por mais do que uma unidade, e os elementos do espectro são, portanto, consecutivos.  $\square$

**Lema 4.** *Se uma escala arredondada de parâmetros  $c$  e  $d$  tem MP, então  $(c, d) = 1$ .*

*Demonstração.* Suponha-se o contrário, isto é, suponhamos que existe uma escala com MP tal que  $(c, d) = r > 1$ . Então  $d/r < d$ .

Considere-se o *genus*  $\langle D_0 - D_{d/r} \rangle$ . Pelo Lema 2, a soma dos comprimentos cromáticos dos  $d$  intervalos deste *genus* é  $\frac{d}{r}c$ . Então, temos  $d$  inteiros cuja soma perfaz  $\frac{c}{r}d$ , sendo  $\frac{c}{r}$  um inteiro. Os  $d$  inteiros não podem ser todos  $\frac{c}{r}$  porque, se fossem, o espectro de  $D_0 - D_{d/r}$  teria unicamente o elemento  $\frac{c}{r}$ , o que contrariaria a propriedade MP. Logo, pelo menos um dos inteiros excede  $\frac{c}{r}$  e pelo menos outro deles é excedido por  $\frac{c}{r}$ .

Pelo Lema 4,  $\frac{c}{r}$  tem que pertencer ao espectro de  $D_0 - D_{d/r}$ . Mas então o espectro deste intervalo tem pelo menos três elementos, o que contradiz MP. O absurdo resultou de se ter suposto que  $(c, d) = r > 1$ . Logo  $(c, d) = 1$ , como se pretendia demonstrar.  $\square$

Os lemas seguintes são de grande importância para a construção do ciclo de quintas generalizado.

**Lema 5.** *Suponhamos que  $(c, d) = 1$ . Então, existe um único inteiro  $c'$ ,  $0 \leq c' < d$ , tal que  $cc' \equiv -1 \pmod{d}$ .*

*Demonstração.* Pelo algoritmo da divisão de Euclides, existem inteiros  $x$  e  $y$  tais que  $1 = cx + dy$ . Logo,  $-1 = c(-x) - dy$  e assim  $c(-x) \equiv -1 \pmod{d}$ .

Seja  $c'$  o único inteiro no conjunto  $\{0, \dots, d-1\}$  tal que  $c' \equiv -x \pmod{d}$ . Então  $cc' \equiv -1 \pmod{d}$ .

Se  $c''$  for outro inteiro com  $\{0, \dots, d-1\}$  tal que  $cc'' \equiv -1 \pmod{d}$ , então  $cc'' \equiv cc' \pmod{d}$ . Multiplicando ambos os membros desta equação por  $x$  obtemos

$$xcc'' \equiv xcc' \pmod{d} \Leftrightarrow c'' \equiv c' \pmod{d},$$

pois  $cx \equiv 1 \pmod{d}$ . Logo  $d|(c'' - c')$  o que implica que  $c'' = c'$  pois  $0 \leq c', c'' \leq d-1$ .  $\square$

**Lema 6.** *Considere-se uma escala arredondada com MP e seja  $c'$  como no Lema 5. Então, com uma única exceção, os intervalos de comprimento diatônico  $c'$  têm todos comprimento cromático*

$$d' = \frac{cc' + 1}{d}.$$

*A exceção tem comprimento cromático  $d' - 1$ .*

**Observação 6.** *Para a escala usual tem-se  $c = 12$ ,  $d = 7$ ,  $c' = 4$ ,  $d' = 7$  e o intervalo exceção é a quinta diminuta  $B - F$  que tem comprimento cromático  $d' - 1 = 6$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 2, a soma dos comprimentos cromáticos dos  $d$  intervalos de comprimento diatônico  $c'$  é  $cc'$ . Por definição,  $cc' = dd' - 1$ , logo temos  $d$  inteiros cuja soma é  $dd' - 1$ . Por MP, existem exactamente dois inteiros distintos entre esses  $d$  inteiros e, pelo Lema 3, eles são consecutivos. Logo,  $d-1$  desses intervalos têm comprimento cromático  $d'$  e o outro tem comprimento cromático  $d' - 1$ .  $\square$

Podemos agora re-etiquetar o conjunto diatônico numa escala arredondada com MP de tal forma que

- $|D_0 - D_{c'}| = |D_{c'} - D_{2c'}| = \dots = |D_{(d-2)c'} - D_{(d-1)c'}| = d'$ ;
- $|D_{(d-1)c'} - D_{dc'}| = d' - 1$ ;

sendo os índices reduzidos módulo  $d$ . Assim, construímos um ciclo de quintas generalizado: ver Figura 4.3.

Temos então o teorema seguinte.

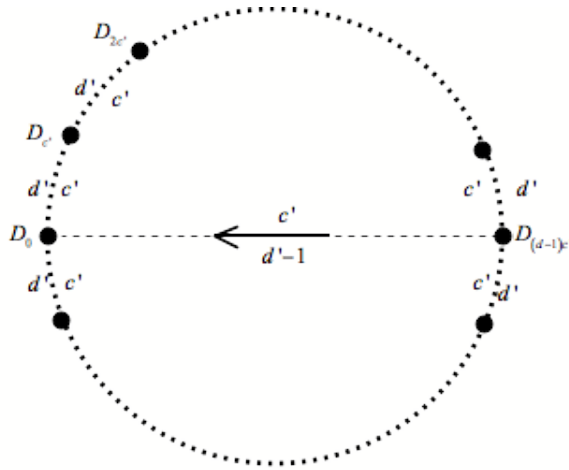


Figura 4.3: Ciclo de Quintas Generalizado.

**Teorema 10.** *MP implica CV.*

*Demonstração.* Pela observação 5, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a escala é arredondada. Logo, podemos construir um ciclo de quintas generalizado. O argumento retirado do ciclo das quintas dado para o Teorema 9 pode ser adaptado para o ciclo de quintas generalizado, provando assim este teorema.  $\square$

#### 4.4 Construção de Escalas

Vamos agora estudar a construção de escalas arredondadas com CV. Dados os parâmetros  $c$  e  $d$  com  $(c, d) = 1$ , mostrar-se-á que existe uma escala com CV com esses parâmetros e que ela é essencialmente única. Vejamos em primeiro lugar a unicidade.

**Teorema 11.** *Sejam  $S$  e  $S^*$  escalas arredondadas com CV, ambas com parâmetros  $c$  e  $d$ . Sejam  $C = \{C_0, C_1, \dots, C_{c-1}\}$  e  $C^* = \{C_0^*, C_1^*, \dots, C_{c-1}^*\}$ , respectivamente, os seus conjuntos cromáticos e sejam  $D$  e  $D^*$ , respectivamente, os seus conjuntos diatônicos. Então, existe um inteiro  $j$  tal que  $C_i \in D$  se e só se  $C_{i+j}^* \in D^*$ , onde os índices devem ser interpretados módulo  $c$ .*

*Demonstração.* Como as escalas partilham os parâmetros  $c$  e  $d$ , também partilham  $c'$  e  $d'$ . Por construção do ciclo de quintas generalizado existem notas  $C_k \in C$  e  $C_h^* \in C^*$  tais que  $D = \{C_k, C_{k+d'}, \dots, C_{k+(d-1)d'}\}$  e  $D^* = \{C_h, C_{h+d'}, \dots, C_{h+(d-1)d'}\}$ . Agora basta tomar  $j = h - k$  e tem-se o que se pretendia.  $\square$

No que diz respeito à existência de escalas arredondadas com CV e parâmetros dados, vamos primeiro mostrar como construir a escala usual. Neste caso,  $c = 12$  e  $d = 7$ . Escrevamos os múltiplos de  $\frac{c}{d} = \frac{12}{7}$ :

$$0, 1\frac{5}{7}, 3\frac{3}{7}, 5\frac{1}{7}, 6\frac{6}{7}, 8\frac{4}{7}, 10\frac{2}{7}, 12, \dots$$



Agora, tome-se a parte inteira destes números:

$$0, 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12, \dots$$

Interprete-se esta seqüência como a seqüência das posições das teclas brancas e os inteiros omitidos (2, 4, 7, 9, 11, ...) como as posições das teclas pretas. Se se identificar a posição 0 com a nota *Si*, recuperamos a escala usual (*Dó* maior):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
<i>Si</i>	<i>Dó</i>	<i>Dó♯</i>	<i>Ré</i>	<i>Ré♯</i>	<i>Mi</i>	<i>Fá</i>	<i>Fá♯</i>	<i>Sol</i>	<i>Sol♯</i>	<i>Lá</i>	<i>Lá♯</i>	<i>Si</i>	...

Provar-se-á que este processo funciona no caso geral.

**Teorema 12.** *Dados  $c$  e  $d$  com  $(c, d) = 1$  e  $c > d$ , seja  $a_k = \left[ \frac{kc}{d} \right]$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Então, os inteiros  $a_k$  são as posições das notas do conjunto diatónico na escala arredondada com CV com parâmetros  $c$  e  $d$ .*

*Demonstração.* Começemos por notar que

$$a_{k+d} = \left[ \frac{kc}{d} + c \right] = \left[ \frac{kc}{d} \right] + c = a_k + c \equiv a_k \pmod{c}$$

e que

$$a_{k+1} = \left[ \frac{kc}{d} + \frac{c}{d} \right] > \left[ \frac{kc}{d} \right] = a_k,$$

pois  $c > d$ . Logo,  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{d-1} < a_d = c$  e, portanto, os inteiros  $a_k$  determinam, de facto, uma escala com parâmetros  $c$  e  $d$ . Pelos Teoremas 10 e 11, é suficiente mostrar que a escala assim constituída é arredondada e tem MP; isto é, que para cada  $j$ ,  $1 \leq j < d$ , o conjunto  $\{a_{k+j} - a_k : k \in \mathbb{Z}\}$  é constituído por dois inteiros consecutivos. Como para todo o  $x$ , tem-se que  $x - 1 < [x] \leq x$  e como

$$a_{k+j} - a_k = \left[ \frac{(k+j)c}{d} \right] - \left[ \frac{kc}{d} \right],$$

temos que:

$$\frac{(k+j)c}{d} - 1 - \frac{kc}{d} < a_{k+j} - a_k < \frac{(k+j)c}{d} - \frac{kc}{d} + 1.$$

Então, fixado  $j$  existe um intervalo aberto (no sentido matemático do termo) de comprimento 2 contendo o espectro do intervalo (no sentido musical do termo) de comprimento diatónico  $j$ . Tal intervalo (no sentido matemático) contém, no máximo, dois inteiros consecutivos. Logo, o espectro é um conjunto de, no máximo, dois inteiros consecutivos.

Suponha-se, por redução ao absurdo, que o espectro tem apenas um elemento. Nesse caso, existe um inteiro, chamemos-lhe  $e$ , tal que, para todo o  $k$ ,  $a_{k+j} - a_k = e$ . Então,

$$de = \sum_{n=1}^d (a_{k+nj} - a_{k+(n-1)j}) = a_{k+dj} - a_k = \left[ \frac{(k+dj)c}{d} \right] - \left[ \frac{kc}{d} \right] = cj,$$

ou seja,  $d$  divide  $cj$ . Como  $(c, d) = 1$ , resulta que  $d$  divide  $j$ . Mas  $j$  é tal que  $1 \leq j < d$  por hipótese, o que é absurdo. O absurdo resultou de se ter suposto que o espectro era um conjunto com um só elemento. Logo, o espectro é um conjunto de dois elementos consecutivos, pelo que a escala tem MP e é arredondada.  $\square$

## Capítulo 5

# Escalas Temperadas e Fracções Contínuas

Neste capítulo abordamos a problemática do temperamento de escalas com o auxílio da Teoria de Fracções Contínuas. Este estudo foi baseado nos artigos [4] e [12].

### 5.1 Escalas e Aritmética

Desde os tempos mais remotos que a construção de escalas musicais tem sido descrita em termos aritméticos. Começar-se-á por delinear esta vocação numérica da Teoria Musical; em particular, o estudo irá centrar-se nos sons que correspondem (em termos físicos) a uma onda sonora periódica relativamente ao tempo, tendo, portanto, uma frequência. Estes sons serão chamados de notas.

É do conhecimento empírico que a altura de uma nota está relacionada com a sua frequência de forma directamente proporcional, isto é, à medida que a altura de um som aumenta, também aumenta a sua frequência e vice-versa.

O intervalo entre duas notas pode ser interpretado como a distância entre elas. Ora, resulta que o intervalo entre duas notas é determinado pela razão entre as frequências dessas notas. Os dois intervalos mais importantes na construção de uma escala são a quinta e a oitava perfeitas. A oitava, que é o intervalo natural que divide a voz feminina da masculina, pode ser ouvida tocando ao piano uma nota qualquer, por exemplo a nota *Dó*, e a nota *Dó* seguinte no teclado. Quanto à quinta, é o intervalo existente entre duas cordas consecutivas de um violino, por exemplo. As razões entre as frequências correspondendo a uma oitava e a uma quinta são  $2 : 1$  e  $3 : 2$ , respectivamente. A oitava e a quinta são dois dos poucos intervalos que têm nomes comuns. O facto de a maioria dos intervalos não ser nomeado pode ser resolvido descrevendo cada intervalo em termos de cêntimos (*cents*). Um cêntimo é  $\frac{1}{1200}$  de oitava, isto é, corresponde a uma razão de frequências de  $2^{1/1200}$ . Assim,  $\frac{m}{n}$  cêntimos correspondem a uma razão de frequências de  $2^{m/1200n}$ . Inversamente, se  $r$  for a razão de frequências o número correspondente de cêntimos será dado por  $1200 \log_2 r$ .

É verdadeiramente surpreendente que usando unicamente a oitava e a quinta possamos

construir uma escala muito próxima daquela obtida tocando as teclas brancas do piano. Para descrever esta construção mantemos a convenção de que duas notas separadas por uma oitava são indistinguíveis. Com esta convenção podemos construir uma escala pitagórica como se segue: escolha-se uma nota qualquer e “suba-se” seis quintas; as seis notas resultantes fornecem a nossa escala. Por exemplo, começando com a nota *Dó*, obtemos:

$$Dó \rightarrow Sol \rightarrow Ré \rightarrow Lá \rightarrow Mi \rightarrow Si \rightarrow Fá.$$

Se reduzirmos estas notas a uma só oitava, tendo como nota mais grave da oitava a nossa nota inicial, e as ordenarmos de forma crescente, obtemos a seguinte sequência de frequências relativas:

- 1;
- $\frac{3}{2}$ ;
- $\frac{9}{4} \sim \frac{9}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$ ;
- $\frac{9}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$ ;
- $\frac{27}{16} \times \frac{3}{2} = \frac{81}{32} \sim \frac{81}{64}$ ;
- $\frac{81}{64} \times \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$ ;
- $\frac{243}{128} \times \frac{3}{2} = \frac{729}{256} \sim \frac{729}{512}$ ;

onde  $\sim$  é a relação de equivalência em  $\mathbb{Q}$  definida por:

$$r \sim s \Leftrightarrow s = 2^k r,$$

para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . A relação de equivalência nas notas dada por identificação, a menos de oitavas, corresponde, ao nível das frequências, à relação  $\sim$ .

Esta escala, com a ordem subjacente, é comumente apelidada de Modo Lídio e corresponde aproximadamente às notas *Fá*, *Sol*, *Lá*, *Si*, *Dó*, *Ré*, *Mi* no piano.

## 5.2 Temperamento de Escalas

O Teorema Fundamental da Aritmética permite deduzir que não existe nenhuma potência inteira de  $\frac{3}{2}$  que seja uma potência inteira de 2, ou seja, não existem números inteiros  $a$  e  $b$  tais que  $a$  quintas equivalem a  $b$  oitavas. Daqui segue que se quisermos esticar a nossa escala pitagórica teremos que ter tantas notas diferentes quanto o número de notas que a nossa escala estendida tiver. Este facto constitui um problema real para os músicos, por exemplo, no que diz respeito à construção de instrumentos musicais.

Este problema é solúvel “temperando” o intervalo de quinta perfeita: se  $k$  quintas são iguais a aproximadamente  $l$  oitavas, a quinta é modificada para que  $k$  dessas quintas temperadas sejam iguais a  $l$  oitavas. A escala estendida tem  $k$  notas distintas e quando elas são reduzidas ao intervalo de uma oitava e reorganizadas em ordem crescente, dividem a

oitava em  $k$  partes iguais. Se usarmos a nossa quinta temperada acima descrita podemos dizer que  $k$  quintas formam  $l$  oitavas de tal forma que temos um ciclo de quintas em vez de uma espiral de quintas.

Existem duas medidas de erro associadas ao temperamento da escala:

- O erro associado à espiral de quintas está na diferença entre  $k$  quintas não temperadas e  $l$  oitavas. Esse intervalo é dado em cêntimos por:

$$1200 \left| \log_2 \frac{(3/2)^k}{2^l} \right| = 1200 \left| k \log_2 \left( \frac{3}{2} \right) - l \right|;$$

- O erro por quinta é a diferença entre a quinta verdadeira e a quinta temperada e é dado por:

$$1200 \left| \log_2 \frac{(3/2)}{2^{l/k}} \right| = 1200 \left| \log_2 \frac{3}{2} - \frac{l}{k} \right| \text{ cêntimos.}$$

### 5.3 Fracções Contínuas

Mostrar-se-á agora como a Teoria das Fracções Contínuas pode ser aplicada à Teoria Musical tendo em vista encontrar os melhores (num certo sentido) valores de  $k$  e  $l$  para temperar a escala.

Dizer que  $k$  quintas é aproximadamente igual a  $l$  oitavas é equivalente a dizer que  $(\frac{3}{2})^k$  é aproximadamente  $2^l$  ou ainda a dizer que, aplicando o logaritmo de base 2 a ambos os membros,  $l/k$  é aproximadamente  $\log_2(3/2)$ . Denotar-se-á de agora avante  $\log_2(3/2)$  por  $\rho$ .

Uma aproximação racional de  $\rho$ , que é precisamente o que  $l/k$  pretende ser, pode ser encontrada expandindo  $\rho$  numa fracção contínua. Uma fracção contínua<sup>1</sup> é uma expressão da forma:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}},$$

com  $a_0, a_1, a_2, \dots$  inteiros. Denotamos esta fracção contínua infinita por  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ . Se considerarmos apenas os primeiros  $N + 1$  termos desta fracção contínua, temos uma fracção contínua finita, à qual chamamos de  $N$ -ésima convergente da fracção contínua original:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + a_N}}}},$$

a qual é denotada por  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_N]$ . Esta fracção é um número racional que escrevemos, em forma reduzida, como

$$c_N = \frac{p_N}{q_N}.$$

<sup>1</sup>Para um estudo mais detalhado acerca da Teoria de Fracções Contínuas consultar, por exemplo, [11, Chap. 7].

O valor de uma fracção contínua infinita é definido como o limite das suas convergentes:

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = \lim_{N \rightarrow +\infty} c_N.$$

Os teoremas seguintes mostram que, de facto, a expansão de um irracional sob a forma de fracção contínua é uma aproximação desse irracional.

**Teorema 13.** [11, Thm. 7.11] *Seja  $x$  um número irracional,  $n > 1$  e seja  $p_n/q_n$  a  $n$ -ésima convergente da expansão de  $x$  sob a forma de fracção contínua. Então*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

**Teorema 14.** [11, Thm. 7.12] *Seja  $x$  um número irracional e considere-se a sua expansão em fracção contínua. Então*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|.$$

Para além disso, temos a desigualdade mais forte  $|xq_n - p_n| < |xq_{n-1} - p_{n-1}|$ .

Ou seja, as convergentes  $p_n/q_n$  são sucessivamente mais próximas do irracional  $x$ , pelo que estes teoremas implicam que a expansão em fracção contínua converge, de facto, para o número irracional que é suposto aproximar. Outro resultado pertinente é o que nos garante que a  $n$ -ésima convergente fornece a melhor aproximação do número  $x$  relativamente a todas as fracções cujo denominador é menor ou igual a  $q_n$ . Temos então o teorema seguinte:

**Teorema 15.** [11, Thm. 7.13] *Seja  $x$  um número irracional,  $n > 1$  e seja  $p_n/q_n$  a  $n$ -ésima convergente da expansão de  $x$  sob a forma de fracção contínua. Se  $0 < q \leq q_n$  e  $p/q \neq p_n/q_n$  com  $p, q$  inteiros, então*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

Voltando ao nosso problema, considere-se a  $n$ -ésima convergente  $\frac{p_n}{q_n}$  da expansão em fracção contínua de  $\rho$ . Valores para  $a_n$ ,  $p_n$  e  $q_n$ , para  $n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , são dados na Tabela 5.1, assim como uma expansão decimal de  $\frac{p_n}{q_n} - \rho$ .

Tomando a quinta convergente da expansão em fracção contínua de  $\rho = \log_2(3/2)$  temos que

$$\frac{3}{2} \approx 2^{\frac{7}{12}},$$

ou seja, obtemos uma aproximação da quinta perfeita dividindo a oitava em doze intervalos iguais e usando apenas sete deles no teclado do piano. Dada a convergente  $p_n/q_n$  temos que o denominador,  $q_n$ , é o número de quintas que aproxima  $p_n$  oitavas. Também podemos interpretar musicalmente cada convergente da seguinte forma: se *Dó* for a nota em que começamos, então a segunda, terceira e quarta convergentes fornecem as aproximações das notas *Sol*, *Ré* e *Si*, respectivamente, relativamente à nota inicial *Dó*.

A quinta convergente corresponde ao temperamento usado hoje em dia na música ocidental. Contudo, outras escalas podem ser obtidas através da divisão da oitava num número diferente de notas. Por curiosidade, os chineses antigos usaram escalas construídas com

$n$	$a_n$	$p_n$	$q_n$	$p_n/q_n - \rho$
0	0	0	1	$-5.850 \times 10^{-1}$
1	1	1	1	$4.150 \times 10^{-1}$
2	1	1	2	$-8.496 \times 10^{-2}$
3	2	3	5	$1.504 \times 10^{-2}$
4	2	7	12	$-1.629 \times 10^{-3}$
5	3	24	41	$4.034 \times 10^{-4}$
6	1	31	53	$-5.684 \times 10^{-5}$
7	5	179	306	$4.820 \times 10^{-6}$
8	2	389	665	$-9.470 \times 10^{-8}$
9	23	9126	15601	$1.683 \times 10^{-9}$

Tabela 5.1: Valores para  $n$ ,  $a_n$ ,  $p_n$ ,  $q_n$  e  $p_n/q_n - \rho$ .

base na quarta, sexta e sétima convergentes, dividindo a oitava em cinco, quarenta e uma e cinquenta e três partes, respectivamente. Actualmente, escalas com cinco notas (ditas *pentatónicas*) encontram-se não apenas na música tradicional chinesa como também na música ocidental de caris folclórico. No entanto, estas escalas pentatónicas não são afinadas em cinco partes iguais.

De seguida apresentamos uma comparação entre a escala tradicional de 12 notas, a escala pentatónica de 5 notas e a escala de 41 notas:

- Numa escala de 12 notas temos:
  - A quinta perfeita é  $12 \log_2(3/2) \approx 7.0196 \approx 7$  intervalos básicos (semitons);
  - A quarta perfeita é  $12 \log_2(4/3) \approx 4.9804 \approx 5$  intervalos básicos (semitons);
  - A terceira maior é  $12 \log_2(5/4) \approx 3.8631 \approx 4$  intervalos básicos (semitons);
  - A terceira menor é  $12 \log_2(6/5) \approx 3.1564 \approx 3$  intervalos básicos (semitons).

Note-se que os arredondamentos para os intervalos de terceira maior e menor são mais grosseiros do que aqueles feitos para os intervalos de quinta e quarta.

- Numa escala de 5 notas temos:
  - A quinta perfeita é  $5 \log_2(3/2) \approx 2.9248 \approx 3$  intervalos básicos;
  - A quarta perfeita é  $5 \log_2(4/3) \approx 2.0752 \approx 2$  intervalos básicos;
  - A terceira maior é  $5 \log_2(5/4) \approx 1.6096 \approx 2$  intervalos básicos;
  - A terceira menor é  $5 \log_2(6/5) \approx 1.3152 \approx 1$  intervalo básico.

Note-se novamente que os arredondamentos para os intervalos de terceira maior e menor são bastante imprecisos. Também reparamos que os intervalos de terceira maior e de quarta perfeita seriam indistinguíveis num temperamento da escala em cinco partes iguais.

- Numa escala de 41 notas temos:
  - A quinta perfeita é  $41 \log_2(3/2) \approx 23.9835 \approx 24$  intervalos básicos;

- A quarta perfeita é  $41 \log_2(4/3) \approx 17.0165 \approx 17$  intervalos básicos;
- A terceira maior é  $41 \log_2(5/4) \approx 13.1991 \approx 13$  intervalos básicos;
- A terceira menor é  $41 \log_2(6/5) \approx 10.7844 \approx 11$  intervalos básicos.

Os arredondamentos para a terceira maior e terceira menor são, novamente, pouco precisos.

A escala de quarenta e uma notas é diferente da escala tradicional no que diz respeito à distinção auditiva entre cada par de notas. Podemos imaginar que, se utilizássemos usualmente este tipo de escala, o nosso ouvido seria capaz de distinguir duas notas consecutivas cuja distância é  $\frac{1200}{41} \approx 29.3$  centímetros.

# Bibliografia

- [1] De Bruijn, N. G., *Pólya's Theory of Counting*, Applied Combinatorial Mathematics, John Wiley & Sons (1964) págs. 144–184.
- [2] Clough, J. e Myerson, G., *Musical Scales and the Generalized Circle of Fifths*, The American Mathematical Monthly, Vol. 93, N° 9 (1996) págs. 695–701.
- [3] Silverman, D. e Wiseman, J., *Noting the Difference: Musical Scales and Permutations*, The American Mathematical Monthly, Vol. 113, N° 7 (2006) págs. 648–651.
- [4] Schechter, M., *Tempered Scales and Continued Fractions*, The American Mathematical Monthly, Vol. 87, N° 1 (1980) págs. 40–42.
- [5] Grout, D. e Palisca, C., *História da Música Ocidental*, Gradiva, 1994.
- [6] Zamacois, J., *Teoria de la Música*, Span Press Universitaria, 1997.
- [7] Estrada, M., Sá, C., Queiró, J., Silva, M. e Costa, M., *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.
- [8] Abdounur, O. J., *Matemática e Música, O pensamento analógico na construção de significados*, Escrituras, 2003.
- [9] Rameau, J. P., *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels*, Ballard, Paris, 1722.
- [10] Brualdi, R. A., *Introductory Combinatorics*, Prentice Hall, 1999.
- [11] Niven, I. H. e Zuckerman, H., *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, 1965.
- [12] Dunne, E. e McConnell, M. *Pianos and Continued Fractions*, In: Mathematics Magazine, Vol. 72, N° 2 (1999) págs. 104–115.