GEOMETRIA PROJETIVA

PETER GOTHEN

1. Introdução

Estas são notas de aula para o curso sobre geometria projetiva da Escola de Verão em Matemática de 2018.

Seguimos, parcialmente, a abordagem de Jennings [2]. Veja também Cederberg [1].

Comentários, correções e sugestões para melhoria são muito bem-vindos.

2. Geometria Euclidiana

2.1. **Noções elementares.** Vamos designar a reta euclidiana por $\mathbb{E}^1$, o plano euclidiano por $\mathbb{E}^2$ e o espaço euclidiano por $\mathbb{E}^3$. Vamos designar qualquer uma destas entidades geométricas pelo símbolo $\mathbb{E}^n$, sendo $n = 1, 2, 3$ *a dimensão de* $\mathbb{E}^n$.

Os objetos básicos da geometria euclidiana são pontos, retas e planos, objetos esses, que gozam de uma série de propriedades bem conhecidas. Por exemplo, por quaisquer dois pontos distintos P e Q passa uma e uma só reta PQ, e duas retas l e m num plano, distintas e não paralelas, têm um único ponto de interseção $l \cdot m$.

Um aspeto essencial da geometria euclidiana é a existência de uma função distância: a cada par de pontos P e Q podemos associar a distância $d(P, Q) \in \mathbb{R}$, que goza de algumas propriedades fundamentais:

(1) para quaisquer dois pontos P e Q, temos $d(P, Q) = d(Q, P)$;
(2) para quaisquer dois pontos P e Q, temos $d(P, Q) \geqslant 0$ com igualdade se e só se $P = Q$;
(3) para quaisquer três pontos P, Q e R temos $d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R)$ com igualdade se e só se os três pontos são colineares e Q está entre P e R.

Seja l uma reta. Escolhendo um ponto de origem e uma orientação em l podemos identficá-la com o eixo dos números reais $\mathbb{R}$ usando a função distância.

Usando estes conceitos base podemos definir mais objetos como semireta e o ângulo formado por duas semiretas com a mesma origem. De modo análogo à função distância, podemos medir ângulos (orientados).

Mais alguns conceitos e objetos fundamentais da geometria euclidiana são as seguintes:

(1) segmento de reta $\overline{AB}$;
(2) vetor (classe de segmentos $\vec{AB}$ orientados);
(3) triângulo (e, mais geralmente, polígono);
(4) circunferência;
(5) área de uma figura;
(6) paralelismo entre duas retas;

Partially supported by CMUP (UID/MAT/00144/2013) and the project PTDC/MAT-GEO/2823/2014, funded by FCT (Portugal) with national and where applicable European structural funds through the programme FEDER, under the partnership agreement PT2020.

As transformações da geometria euclidiana são aquelas que preservam a distância entre pontos, chamadas *isometrias.* Chamamos *congruentes* a figuras que podem ser transformadas uma na outra por uma isometria. As isometrias do plano euclidiano $\mathbb{E}^2$ são bem conhecidas:

(1) reflexões (num eixo);
(2) rotações (em torno de um ponto);
(3) translações (segundo um vetor);
(4) reflexões deslizantes (a composta de uma reflexão com uma translação numa direção paralela)

É sabido que qualquer isometria é a composta de reflexões (e bastam, no máximo, 3).

De acordo com F. Klein, a geometria euclidiana pode ser vista como o estudo das figuras em $\mathbb{E}^n$ que são invariantes por isometrias. Com efeito, verifica-se que todas as propriedades listadas acima são invariantes por isometrias.

Um exemplo de uma noção que não é preservada por todas as isometrias é a orientação de figuras em $\mathbb{E}^2$. No entanto, podemos escolher uma orientação em $\mathbb{E}^2$ e passar a exigir que seja preservada. Isto corresponde a reduzir a classe de isometrias às rotações e translações, às vezes chamadas *transformações rígidas.*

Uma ideia fundamental é a introdução de coordenadas cartesianas na geometria euclidiana. Escolhendo um referencial apropriado podemos representar pontos em $\mathbb{E}^n$ por n coordenadas reais; por exemplo, introduzindo um referencial ortonormado xOy em $\mathbb{E}^2$, temos uma correspondência

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^2 &\leftrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P &\leftrightarrow (x, y), \end{aligned}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ são as coordenadas de P no referencial dado. Frequentemente esta identificação entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{E}^2$ é feita tacitamente e falamos no ponto $P = (x, y)$.

Às vezes é útil considerar a noção de *semelhança.* Isto corresponde a alargar a classe de isometrias com *homotetias.* Uma homotetia do plano $\mathbb{E}^2$ é dada pelo seu centro e pela sua razão. Escolhendo a origem do referencial como centro, ela pode ser convenientemente representada algébricamente como uma transformação da forma

$$(x, y) \mapsto (ax, ay)$$

onde o número real a é a razão. A geometria correspondente pode ser visto como a geometria euclidiana sem a sua escala universal de comprimento, e chama-se *geometria de semelhança.* Note-se que qualquer noção da geometria de semelhança também é uma noção da geometria euclidiana, mas o recíproco não é verdade; por exemplo, na geometria de semelhança não podemos medir a distância entre dois pontos — mas a razão dos comprimentos entre dois segmentos continua a fazer sentido.

2.2. **Posições relativas de retas e planos na geometria euclidiana.** Tomamos por bem conhecidos os seguintes factos sobre a geometria de $\mathbb{E}^3$:

- Duas retas distintas que estão no mesmo plano (dizem-se *complanares*) intersetam-se num único ponto ou são paralelas.
- Dois planos distintos em $\mathbb{E}^3$ intersetam-se numa única reta ou são paralelos.
- Um plano e uma reta que não está contida nesse plano intersetam-se num único ponto ou são paralelos.
- Se duas retas distintas se intersetam então são complanares (e o plano gerado por elas é único).

Retas distintas e não complanares que não se intersetam dizem se *enviesadas* (e não se consideram paralelas).

3. O plano projetivo

3.1. **Perspetiva e geometria projetiva.** Imaginemos um pintor que, a partir de um *ponto de vista*, pretende representar uma cena (ou um objeto, ou uma figura geométrica) numa tela plana, *o plano de visão*. O procedimento é intersetar com o plano de visão a reta que passa por cada ponto da cena e pelo ponto de vista. Por outras palavras, fazemos uma *projeção central* do espaço (exceto o ponto de vista) para o plano de visão.

Uma *transformação projetiva* é a transformação sofrida pelo plano de visão quando se muda a sua posição. A *geometria projetiva (plana)* pode ser caraterizada como o estudo das propriedades das figuras que são preservadas pelas transformações projetivas. Evidentemente uma reflexão é uma transformação projetiva. Portanto, todas as transformações da geometria euclidiana são projetivas. O mesmo é verdade para as transformações da geometria de semelhança (porquê?).

Alguns exemplos de conceitos da geometria projetiva são as seguintes:

(1) a propriedade de ser um ponto ou uma reta;
(2) *incidência* (isto é, um ponto estar numa reta ou uma reta passar por um ponto);
(3) a propriedade de pontos serem colineares;
(4) a propriedade de retas serem concorrentes;
(5) a propriedade de uma figura ser uma secção cónica.

Por outro lado, nenhuma das propriedades da geometria euclidiana mencionadas atrás são propriedades da geometria projetiva.

3.2. **Reta projetiva, plano projetivo e pontos no infinito.** Fixemos um ponto de vista O no espaço euclidiano $\mathbb{E}^3$ e um plano de visão (que não contém O). A cada ponto P do plano de visão corresponde a reta OP (que podemos imaginar como sendo a linha de visão do pintor). Se mudarmos a posição do plano de visão, o ponto correspondente à linha de visão OP é o ponto de interseção entre l e o plano de visão na sua nova posição (que só por acaso será o P). Isto indica que na geometria projetiva as retas por O são mais fundamentais do que os seus pontos de interseção com um plano de visão arbitrariamente escolhido. Esta consideração motiva a seguinte definição.

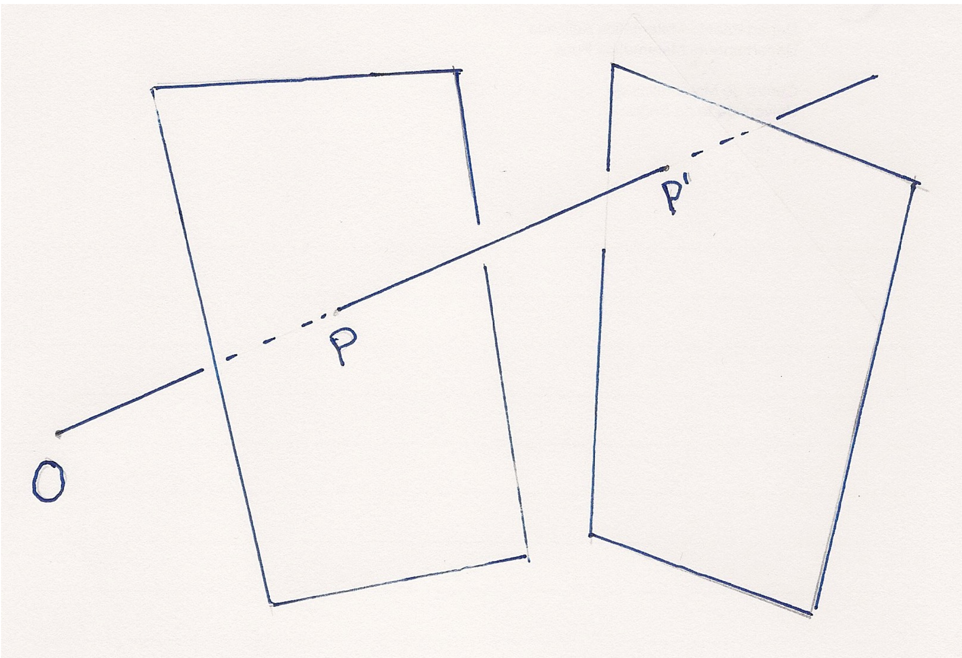

Figura 1. Linha de visão

Definição 3.1. O *plano projetivo* $\mathbb{P}^2$ é o conjunto das retas em $\mathbb{E}^3$ que passam por O.

Assim, um *ponto* de $\mathbb{P}^2$ é uma reta em $\mathbb{E}^3$ que passa por O. Para distinguir pontos da geometria de pontos da geometria euclidiana chamaremos às vezes **p**-*pontos* aos pontos de $\mathbb{P}^2$.

De modo análogo, fixando um ponto de vista O num plano euclidiano fazemos a seguinte definição:

Definição 3.2. A *reta projetiva* $\mathbb{P}^1$ associado a um plano euclidiano com um ponto de vista fixo O é o conjunto das retas nesse plano que passam por O.

Assim, a cada plano euclidiano em $\mathbb{E}^3$ por O corresponde uma reta projetiva, constituída pelos **p**-pontos por O que estão contidos nesse plano. Para não confundir com retas euclideanas chamaremos às vezes a essa reta uma **p**-reta em $\mathbb{P}^2$. O resultado seguinte deve ser evidente.

Proposição 3.3. *Quaisquer duas* **p***-retas distintas em* $\mathbb{P}^2$ *intersetam-se num único* **p***-ponto.*

Demonstração. Quaisquer dois planos distintos por O em $\mathbb{E}^3$ intersetam-se numa única reta por O. □

Para visualizar melhor estas definições, escolhamos novamente um plano de visão $\mathbb{V}^2$ em $\mathbb{E}^3$. Já vimos que os pontos P de $\mathbb{V}^2$ correspondem a **p**-pontos OP. Além disso, a cada reta l em $\mathbb{V}^2$ corresponde uma **p**-reta $\bar{l}$ em $\mathbb{P}^2$ constituída por

- todos os **p**-pontos OP com P em l e
- o **p**-ponto ∞_l que é a reta por O paralela a l.

Chamamos a ∞_l o *ponto no infinito* de $\bar{l}$.

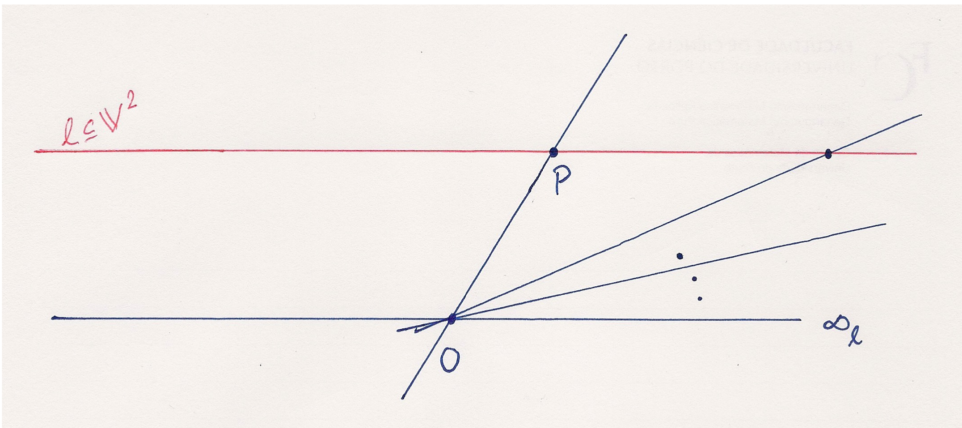

FIGURA 2. Ponto no infinito de uma reta projetiva

Proposição 3.4. *Duas* **p***-retas distintas* $\bar{l}$ *e* $\bar{m}$ *têm o mesmo ponto no infinito se e só se as retas euclidianas* l *e* m *são paralelas no plano de visão* $\mathbb{V}^2$.

Demonstração. Evidente. □

Notemos também que todos os pontos no infinito do plano de visão – correspondentes às retas por O paralelas ao plano de visão – formam uma **p**-reta, chamada *a reta no infinito* (correspondente ao plano por O paralelo ao plano de visão).

Dispensamos a partir deste momento do prefixo **p**- para pontos e retas em $\mathbb{P}^2$ quando não existir risco de confusão.

Pelo que foi dito podemos considerar $\mathbb{P}^2$ como o *completamento projetivo* do plano de visão $\mathbb{E}^2$, com as seguintes propriedades:

- Todos os pontos de $\mathbb{E}^2$ são também pontos de $\mathbb{P}^2$.
- A cada reta l em $\mathbb{E}^2$ corresponde um **ponto no infinito** ∞_l em $\mathbb{P}^2$; a duas retas corresponde o mesmo ponto no infinito se e só se estas duas retas forem paralelas: $\infty_l = \infty_m \iff l \parallel m$.
- Para cada reta l em $\mathbb{E}^2$ existe uma reta $\bar{l}$ em $\mathbb{P}^2$ que passa por todos os pontos de l e pelo ponto no infinito ∞_l.
- Além disso, existe uma **reta no infinito** l_∞ em $\mathbb{P}^2$ que passa por todos os pontos no infinito (e mais nenhum).

Chamamos a atenção para o facto de a noção de ser ponto (ou reta) no infinito não é intrínseca ao plano projetivo, antes pelo contrário, depende da escolha do plano de visão. De facto, dada qualquer **p**-reta $\bar{l}$ em $\mathbb{P}^2$, correspondente a um plano por O, podemos escolher um plano de visão paralelo a esse plano, fazendo com que $\bar{l}$ seja a reta no infinito.

Nota 3.5. O espaço projetivo $\mathbb{P}^3$ pode ser definido de forma análoga como o completamento projetivo do espaço euclidiano $\mathbb{E}^3$, juntando-lhe um plano no infinito, constituído por um ponto no infinito para cada direção em $\mathbb{E}^3$, o ponto de interseção comum de todas as retas paralelas em $\mathbb{E}^3$ a uma dada.

4. Desenho em perspetiva: pontos de fuga e linha do horizonte

Seja O em $\mathbb{E}^3$ um ponto de vista e escolhamos um plano de visão $\mathbb{V}^2$ em $\mathbb{E}^3$. Como já dissemos, o desenho em perspetiva pode ser visto como uma projeção central (com centro O) de uma cena no plano de visão $\mathbb{V}^2$. A projeção de cada ponto P da cena é a interseção da reta OP com $\mathbb{V}^2$.

Notemos que esta projeção pode ser estendida aos pontos no infinito de $\mathbb{P}^3$, completamento projetivo de $\mathbb{E}^3$. Com efeito, a cada ponto P_∞ no infinito corresponde uma direção, e a reta OP_∞ é a reta por O com essa direção. Como atrás, a projeção de P_∞ é a interseção de OP_∞ com o plano de visão.

Definição 4.1. Um *ponto de fuga* é a projeção no plano de visão $\mathbb{V}^2$ de um ponto no infinito de $\mathbb{P}^3$.

A projeção de uma reta l (que não contém O) da cena é uma reta no plano de visão. De facto, a reta da cena corresponde a uma **p**-reta, nomeadamente o plano gerado por l e O, e a reta imagem é a interseção deste plano com o plano de visão. Notemos os seguintes factos:

- Os pontos no infinito de duas retas $\bar{l}$ e $\bar{m}$ em $\mathbb{P}^3$ projetam-se no mesmo ponto de fuga em $\mathbb{V}^2$ se e só se l e m são paralelas em $\mathbb{E}^3$.
- O ponto no infinito de uma reta l (que não passa por O) projeta-se num ponto de fuga do plano de visão $\mathbb{V}^2$ se e só se l não é paralela $\mathbb{V}^2$. Se l for paralela a $\mathbb{V}^2$ então o ponto de fuga está no infinito de $\mathbb{V}^2$.
- Sejam l e m retas paralelas em $\mathbb{E}^3$. Então as projeções de l e m em $\mathbb{V}^2$ intersetam-se no seu ponto de fuga comum. Em particular, as projeções são paralelas em $\mathbb{V}^2$ (ou seja, intersetam-se no infinito de $\mathbb{V}^2$) se e só se l e m são paralelas a $\mathbb{V}^2$.

Dado um plano em $\mathbb{E}^3$ podemos considerar as projeções dos seus pontos no infinito, ou seja, a projeção da sua reta no infinito. Fazemos a seguinte definição.

Definição 4.2. A *linha de horizonte* de um plano em $\mathbb{E}^3$ é a projeção da sua reta no infinito no plano de visão.

Notemos o seguinte facto:

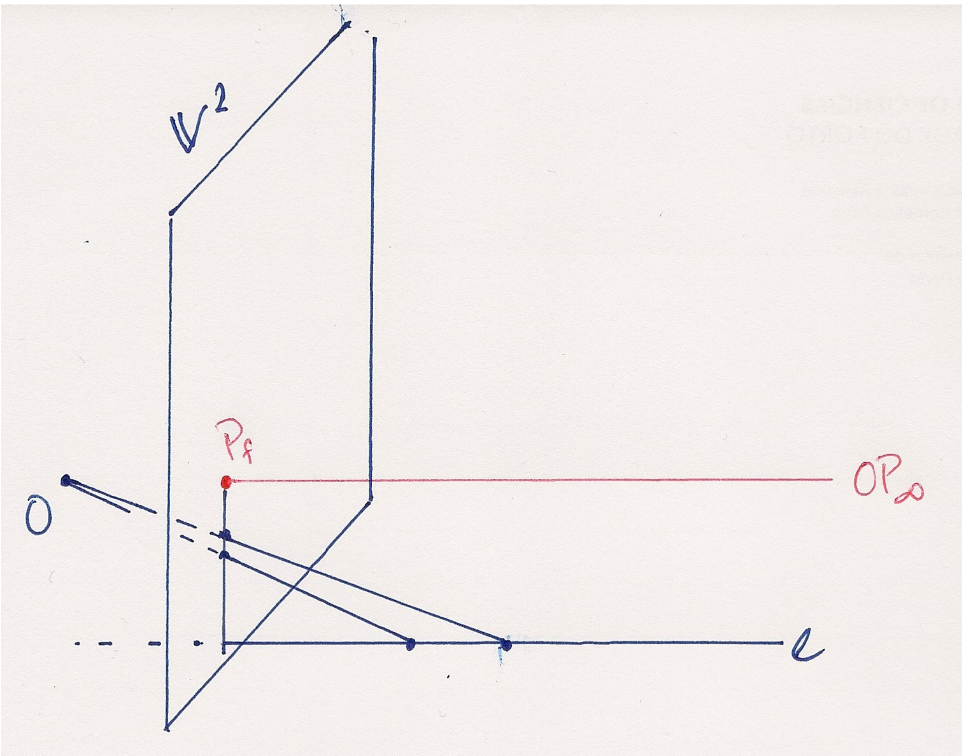

Figura 3. Projeção de uma reta l e ponto de fuga P_f

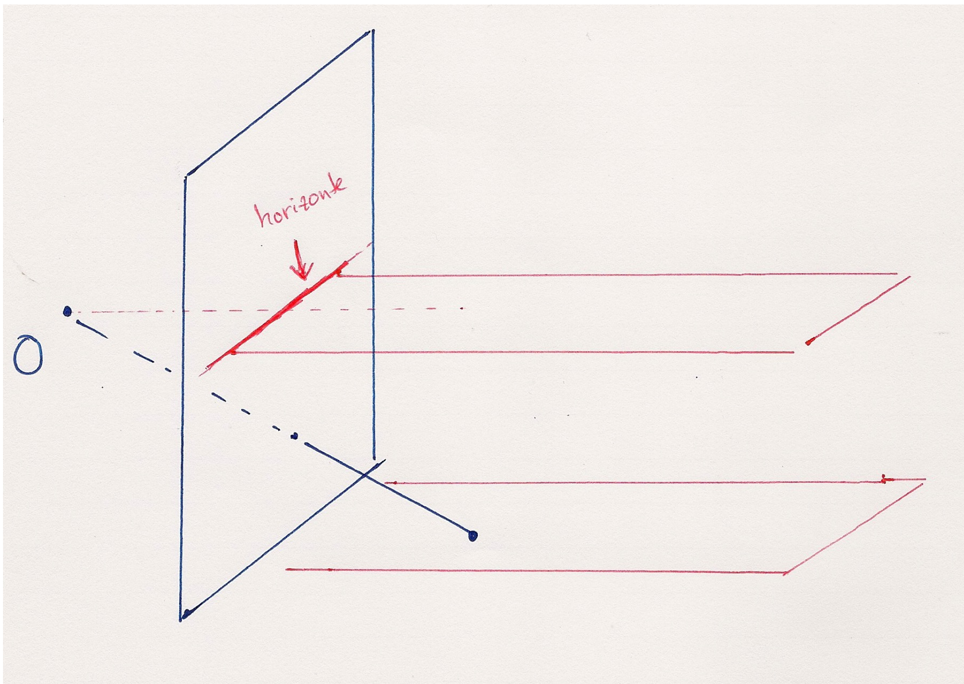

Figura 4. Linha de horizonte

- Seja h o horizonte no plano de visão $\mathbb{V}^2$ de um plano Π em $\mathbb{E}^3$. O ponto de fuga de uma reta l em Π está em h. Além disso, retas paralelas em Π têm o mesmo ponto de fuga em $\mathbb{V}^2$.

Perspetiva de um, dois e três pontos. Consideremos agora um desenho em perspetiva de uma caixa (paralelepípedo retângulo). Cada uma das três direções dos lados da caixa pode corresponder a um ponto de fuga em $\mathbb{V}^2$ ou a um ponto de fuga no infinito de $\mathbb{V}^2$.

Conforme existem um, dois ou três pontos de fuga em $\mathbb{V}^2$ correspondentes às três direções dos lados da caixa dizemos que *a perspetiva é de um ponto, dois pontos e três pontos*, respetivamente.

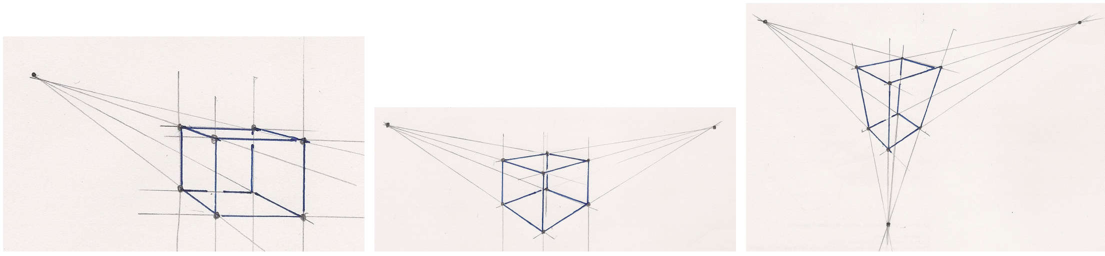

FIGURA 5. Perspetiva de um, dois e três pontos

Evidentemente não é possível ter uma perspetiva de zero pontos numa projeção central. No entanto, podemos fazer o ponto de vista tender para o infinito e no limite obtemos uma *projeção paralela* em que as imagens de retas paralelas são paralela:

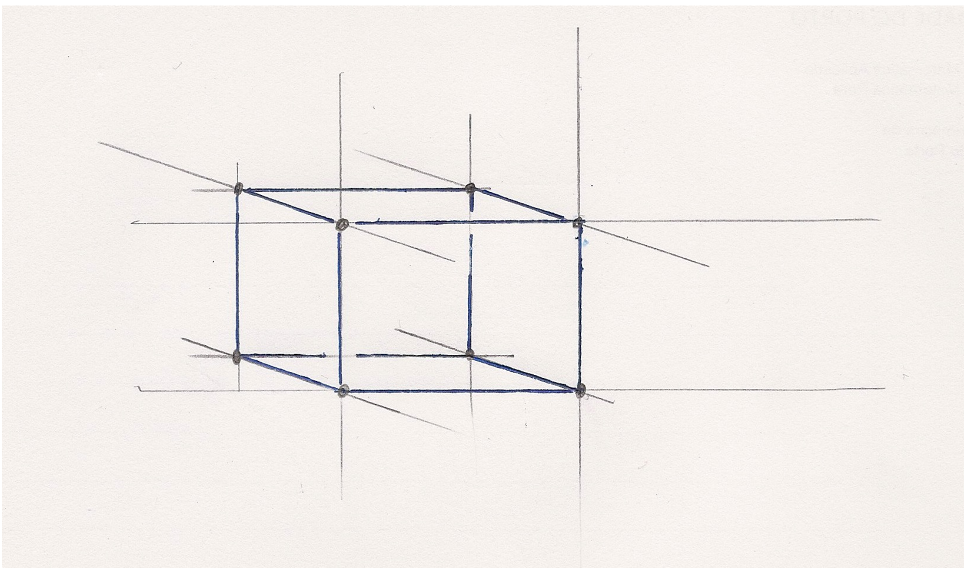

FIGURA 6. Projeção paralela

Desenho de pontos igualmente espaçados. Podemos aplicar estas ideias para fazer um desenho em perspetiva de pontos igualmente espaçados na cena. Imaginemos que queremos desenhar em perspetiva um caminho pavimentado por pedras retangulares iguais. Escolhamos um plano de visão paralelo às juntas entre as pedras e tal que os lados (paralelos) do caminho são projetados num ponto de fuga F_1: O problema é como desenhar as juntas seguintes de forma a que sejam projeções de juntas. A solução está em notar que as diagonais das pedras são paralelas. Portanto essas diagonais intersetam-se no infinito de $\mathbb{P}^3$ e o ponto de interseção é projetado num ponto de fuga F_2 no plano de visão. Assim podemos encontrar a diagonal da segunda pedra, construir a segunda junta, etc. Notemos que a reta F_1F_2 é a linha do horizonte do plano do caminho, que pode ser paralela às juntas ou não.

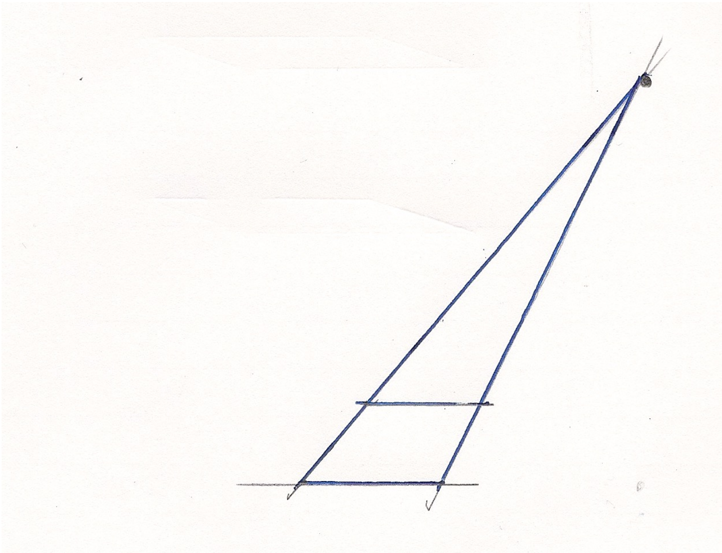

Figura 7. Projeção dos lados e primeira junta

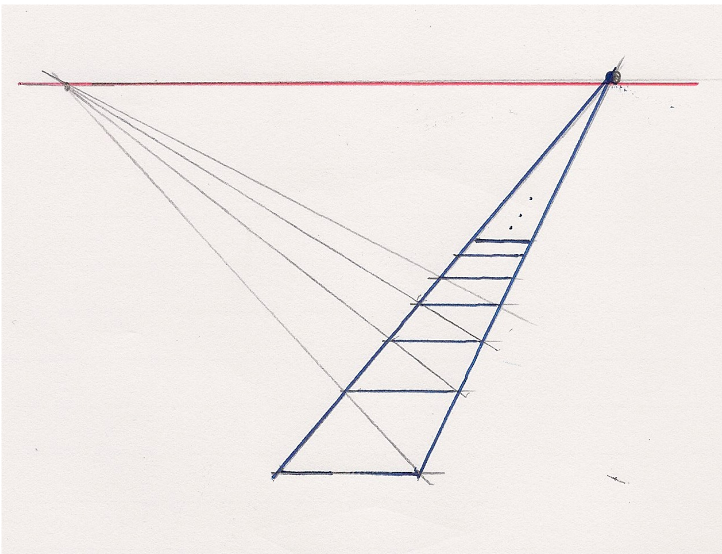

Figura 8. O caminho

5. Algumas propriedades de natureza topológica

Seja

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

a superfície esférica de raio 1 no espaço. Então cada reta em $\mathbb{R}^3$ por O interseta S^2 em exatamente dois pontos antípodas. Assim podemos identificar $\mathbb{P}^2$ com S^2 com pontos antípodas identificados, ou seja (x, y, z) representa o mesmo ponto como $(-x, -y, -z)$ em $\mathbb{P}^2$. Considerando a Figura 9 fica claro que o plano projetivo não é orientável.

Uma tentativa de representar os pontos de $\mathbb{P}^2$ pelos seus representantes no hemisfério sul e fazendo a "colagem" exigida pela identificação de pontos diametralmente opostos no equador conduz à representação da Figura 10.

Notemos que:

- Esta representação não é *geométrica* porque os objetos geométricos (como por exemplo as retas) são torcidos. No entanto, ela é *topológica*, uma vez que pontos próximos continuam próximos.

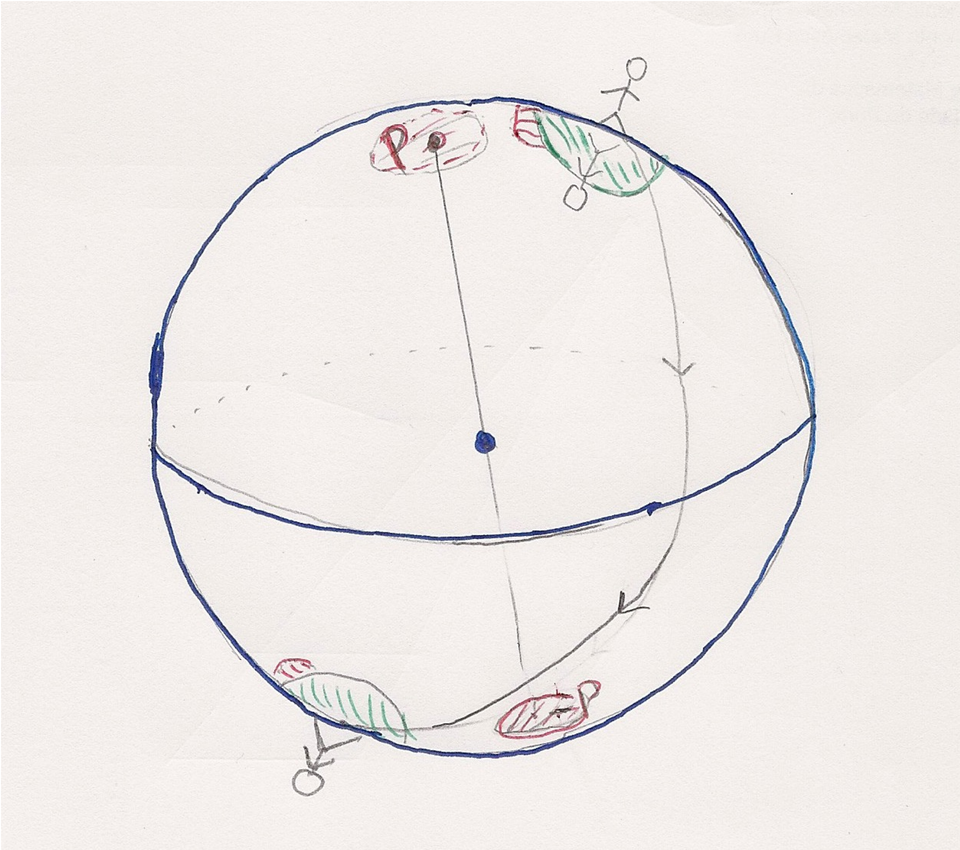

Figura 9. Representação de $\mathbb{P}^2$ usando S^2

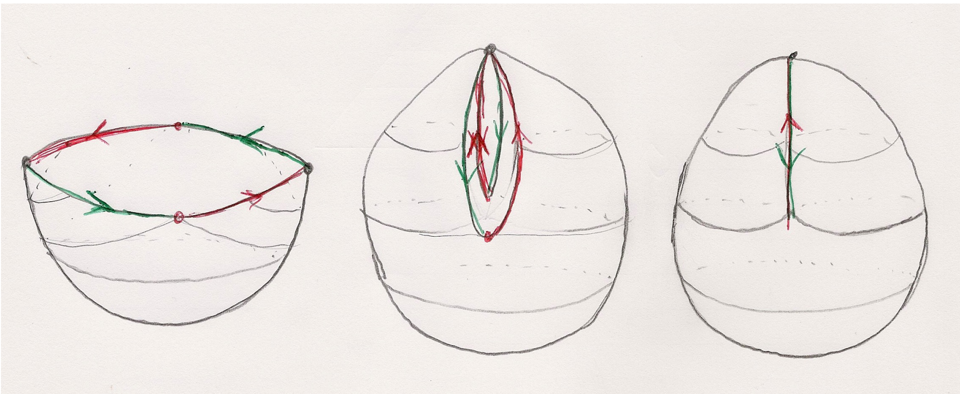

Figura 10. Representação topológica de $\mathbb{P}^2$

- A autointerseção é apenas aparente. Pode provar-se que não existe nenhum "mergulho topológico" da superfície $\mathbb{P}^2$ em $\mathbb{R}^3$, o que explica a existência desta falha na representação.

6. Um primeiro teorema da geometria projetiva: o Teorema de Desargues

Como o plano euclidiano está incluído no plano projetivo, qualquer teorema da geometria projetiva também é um teorema da geometria euclidiana, mas o recíproco não se verifica. Por exemplo, considere o seguinte "teorema" da geometria projetiva:

Proposição 6.1. *Sejam L e M retas distintas em $\mathbb{P}^2$. Então L e M intersetam-se num único ponto.*

Deste teorema podemos *deduzir* o seguinte "teorema" da geometria euclidiana:

Proposição 6.2. *Sejam l e m duas retas distintas em $\mathbb{E}^2$. Então l e m intersetam-se, exceto se são paralelas.*

Note-se que a exceção do teorema euclidiano corresponde ao ponto de interseção no plano projetivo estar no infinito.

Por outro lado, considere o seguinte teorema euclidiano:

Teorema 6.3. *Seja ΔABC um triângulo retângulo com catetos a e b e hipotenusa c. Então $c^2 = a^2 + b^2$.*

Este teorema evidentemente não é um teorema da geometria projetiva. De facto há uma dificuldade mesmo com a definição de um triângulo! O problema é que a noção de segmento de reta determinado por dois pontos distintos A e B em $\mathbb{P}^2$ não faz sentido, já que há duas maneiras de passar de A para B.

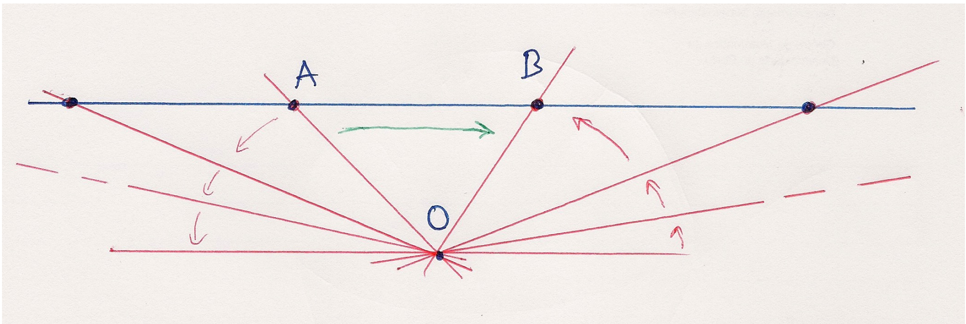

FIGURA 11. Reta projetiva

Definição 6.4. Um *triângulo ΔABC em $\mathbb{P}^2$* é a figura formada por três pontos distintos A, B e C, chamados *vértices*. As *arestas* de ΔABC são as retas $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$

Normalmente consideramos triângulos *não degenerados*, o que quer dizer que A, B e C não são colineares.

Definição 6.5. Os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ estão em *perspetiva central* se as retas AA', BB' e CC' são concorrentes.

Os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ estão em *perspetiva axial* se os pontos $a \cdot a'$, $b \cdot b'$ e $c \cdot c'$ são colineares.

Teorema 6.6 (Desargues no plano)**.** *Suponha que o par de triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ em $\mathbb{P}^2$ estão em perspetiva central. Então estão em perspetiva axial. A implicação recíproca também se verifica.*

Demonstração. Seja $a = BC$ o lado oposto do vértice A etc. Seja L a reta projetiva pelos pontos $b \cdot b'$ e $c \cdot c'$, e seja $\mathbb{E}^2 \subset \mathbb{P}^3$ o plano afim que tem L como reta no infinito. Isto significa que $b \parallel b'$ e $c \parallel c'$. Além disso, ΔABC e $\Delta A'B'C'$ estão em perspetiva axial se e só se $a \cdot a'$ está na reta no infinito L, ou seja, $a \parallel a'$.

Seja $O = BB' \cdot CC'$. Então os dois triângulos estão em perspetiva central se e só se C' está em OC. E é evidente que isto acontece se e só se $a \parallel a'$. (Uma prova do último facto pode ser feita usando uma homotetia com centro O.) $\square$

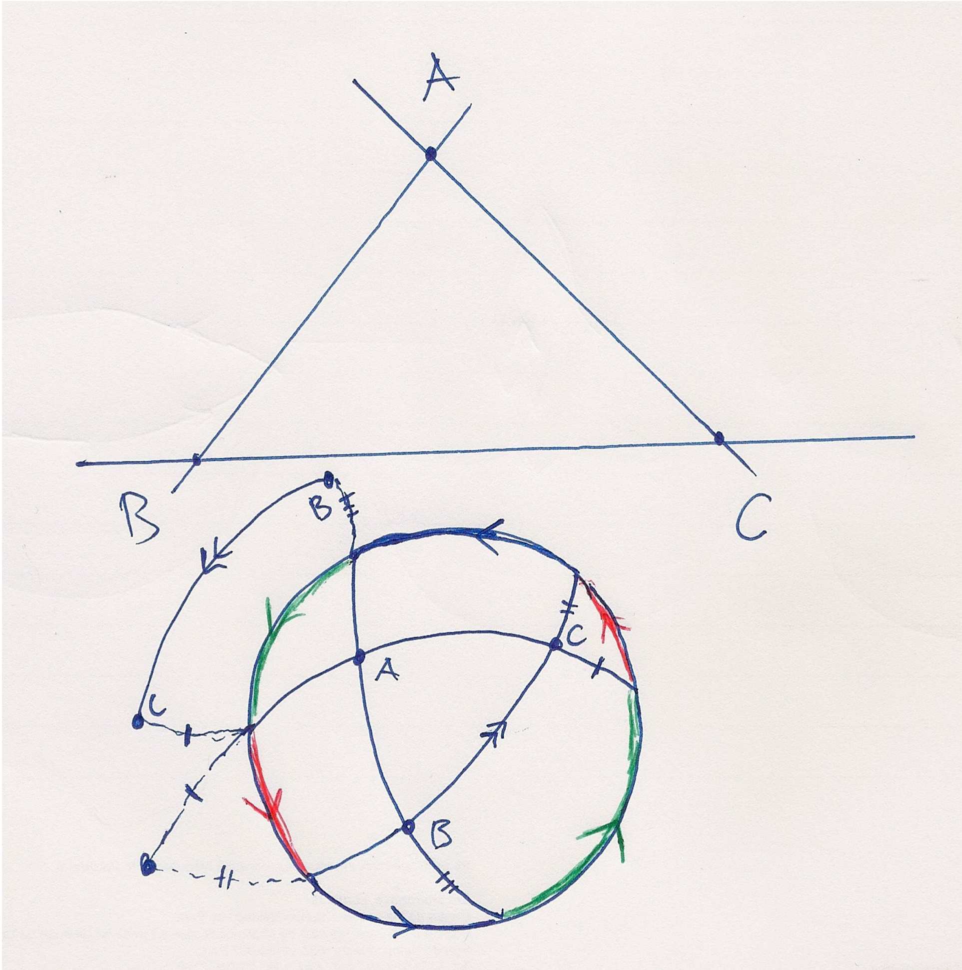

FIGURA 12. Triângulo no plano projetivo

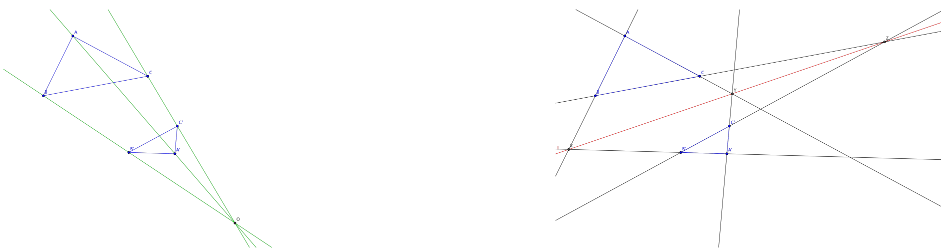

FIGURA 13. Triângulos em perspetiva central e axial

Teorema 6.7 (Desargues no espaço)**.** *Suponha que o par de triângulos* ΔABC *e* $\Delta A'B'C'$ *em* $\mathbb{P}^3$ *estão em perspetiva central. Então estão em perspetiva axial.*

Demonstração. Tendo em conta que já temos o pretendido no plano falta considerar o caso em que ΔABC e $\Delta A'B'C'$ não são complanares.

Suponhamos que ΔABC e $\Delta A'B'C'$ estão em perspetiva central com centro O.

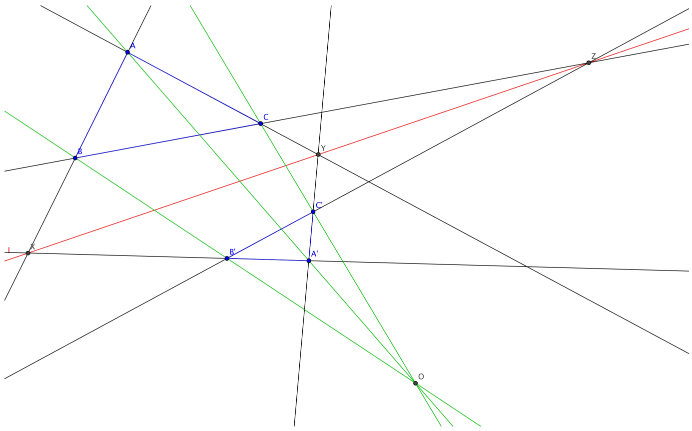

Figura 14. Teorema de Desargues

Primeiro mostramos que de facto as retas $a = BC$ e $a' = B'C'$ se intersetam. Mas isso é claro porque $a = BC$ está no plano OBC e $a' = B'C'$ está no plano $OB'C'$, e estes dois planos coincidem já que $OB' = OB$ e $OC = OC'$.

Em segundo lugar notemos que as retas $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ estão no plano do triângulo ΔABC e que as retas $a' = B'C'$, $b' = A'C'$ e $c' = A'B'$ estão no plano do triângulo $\Delta A'B'C'$. Portanto os respetivos pontos de interseção $a \cdot a'$, $b \cdot b'$ e $c \cdot c'$ estão na interseção dos dois planos referidos, que é uma reta. Assim estes pontos são colineares e a prova está concluída. $\square$

7. Coordenadas homogéneas e dualidade

7.1. **Coordenadas homogéneas.** Para introduzir coordenadas no plano projetivo $\mathbb{P}^2$ vamos fazer em primeiro lugar a identificação $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3$ usando coordenadas cartesianas. Então uma reta por O em $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3$ é determinada por um ponto $P = (x, y, z) \neq O$.

Definição 7.1. Seja $P = (x, y, z) \neq O \in \mathbb{E}^3$. As *coordenadas homogéneas* do ponto $OP \in \mathbb{P}^2$ são $[x : y : z]$.

A notação $[x : y : z]$ indica que é a razão entre x, y e z que determina o ponto em $\mathbb{P}^2$. Com efeito:

$$[x : y : z] = [x' : y' : z'] \iff (x, y, z) = (tx, ty, tz) \quad \text{para algum } t \in \mathbb{R} \text{ com } t \neq 0.$$

Considere agora um plano de visão $\mathbb{V}^2$ em $\mathbb{E}^3$ que não passa por O, e consideremos como habitualmente $\mathbb{P}^2$ como o completamento projetivo de $\mathbb{V}^2$. Suponha-se que $\mathbb{V}^2$ é definido pela equação $z = 1$. Podemos então usar as coordenadas (x, y) para o ponto $(x, y, 1)$ em $\mathbb{V}^2$, e obtemos uma inclusão

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^2 &\hookrightarrow \mathbb{P}^2, \\ (x, y) &\mapsto [x : y : 1]. \end{aligned}$$

Reciprocamente, para qualquer ponto $[x : y : z]$ em $\mathbb{P}^2$ com $z \neq 0$ temos

$$[x : y : z] = [x/z : y/z : 1] \leftrightarrow (x/z, y/z) \in \mathbb{V}^2.$$

Por outro lado, os pontos no infinito de $\mathbb{P}^2$ (relativamente a $\mathbb{V}^2$) são exatamente aqueles para os $[x : y : z]$ com $z = 0$, ou seja são da forma $[x : y : 0]$. Podemos então dizer que a reta no infinito é dada pela equação $z = 0$.

7.2. **A equação de uma reta em $\mathbb{P}^2$.** Um plano Π por O em $\mathbb{R}^3$ é definida por uma equação da forma

$$ax + by + cz = 0, \tag{7.1}$$

para um vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ não nulo, que corresponde a um *vetor normal* a Π.

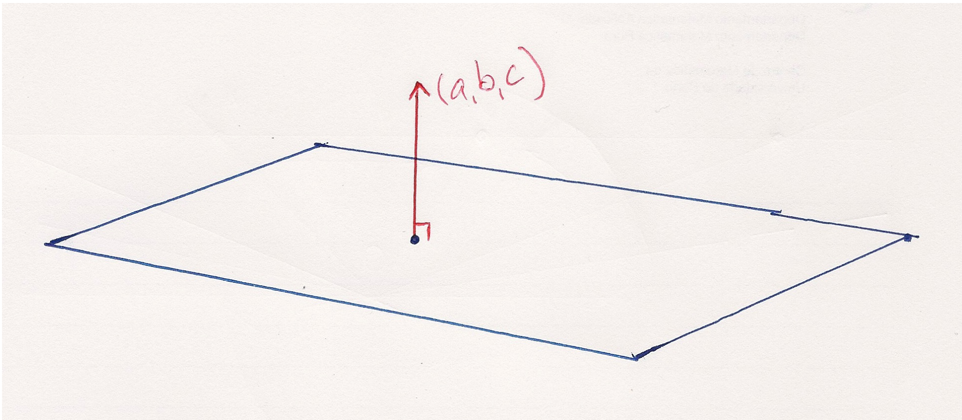

Figura 15. Plano e vetor normal

Recordando que tais planos são exatamente as retas em $\mathbb{P}^2$, vemos que uma reta em $\mathbb{P}^2$ pode ser caraterizada como o conjunto

$$L = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid ax + by + cz = 0\}$$

de solução de uma equação homogénea linear. Dizemos que L é dada pela equação (7.1). Notemos que

- L está bem definida porque (x, y, z) é solução de (7.1) se e só se (tx, ty, tz) é solução de (7.1) e

Exercício 7.2. Encontre as coordenadas homogéneas do ponto no infinito (relativamente ao plano de visão $z = 1$ em $\mathbb{E}^3$) da reta em $\mathbb{P}^2$ com equação $ax + by + cz = 0$.

7.3. **Dualidade.** Como acabámos de ver, uma reta projetiva em $\mathbb{P}^2$ com coordenadas homogéneas $[x : y : z]$ é dada por uma equação linear homogénea da forma

$$ax + by + cz = 0$$

onde (a, b, c) é o vetor normal ao plano em $\mathbb{E}^3$ que corresponde à reta em $\mathbb{P}^2$. Como vetores (não nulos) (a, b, c) e (a', b', c') são paralelos se e só se $(a', b', c') = (ta, tb, tc)$ para algum $t \neq 0$. Assim temos o seguinte resultado:

Proposição 7.3. *Dois pontos (a, b, c) e (a', b', c') em $\mathbb{R}^3$ definem a mesma reta projetiva se e só se $(a', b', c') = (ta, tb, tc)$ para algum $t \neq 0$.*

Chamamos por isso a $[a : b : c]$ as *coordenadas homogéneas* da reta projetiva de equação $ax + by + cz = 0$. Deve agora ser claro que o conjunto das retas em $\mathbb{P}^2$ também forma um plano projetivo, agora com coordenadas homogéneas $[a : b : c]$. Chamamos a este plano projetivo o plano projetivo dual e designámo-lo por $(\mathbb{P}^2)^*$. Temos então uma *correspondência de dualidade* que identifica $\mathbb{P}^2$ e $(\mathbb{P}^2)^*$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 &\leftrightarrow (\mathbb{P}^2)^* \\ [x:y:z] &\leftrightarrow [x:y:z]. \end{aligned}$$

Em palavras, identificamos o ponto $[x:y:z] \in \mathbb{P}^2$ com a reta com as mesmas coordenadas homogéneas $[x:y:z] \in (\mathbb{P}^2)^*$. É importante notar que temos a seguinte equivalência:

Proposição 7.4. *O ponto $[x:y:z]$ de $\mathbb{P}^2$ está na reta $[a:b:c]$ de $(\mathbb{P}^2)^*$ se e só se a reta $[x:y:z]$ de $(\mathbb{P}^2)^*$ passa pelo ponto $[a:b:c]$ de $\mathbb{P}^2$.*

Demonstração. Ambas as afirmações são equivalents à equação $ax+by+cz=0$! □

Seja (P) uma proposição sobre o plano projetivo. A *proposição dual* $(P)^*$ é obtido de P pelas seguintes operações:

- trocar "reta" por "ponto" e vice-versa;
- trocar "estar em" por "passar por".

Exemplo 7.5. A proposição dual de

(P) Por quaisquer dois pontos distintos passa uma única reta.

é a proposição

$(P)^*$ Quaisquer duas retas distintas intersetam-se num único ponto.

Não é por acaso que no exemplo anterior as duas proposições são ambas verdadeiras: de facto, podemos deduzir a segunda da primeira usando a correspondência de dualidade e Proposição 7.4 (e vice-versa). O mesmo raciocínio estabelece o seguinte:

Princípio de dualidade da geometria projetiva plana. *Uma proposição (P) sobre a geometria projetiva plana é verdadeira se e só se a proposição dual $(P)^*$ é verdadeira.*

Exemplo 7.6. Como uma primeira aplicação do princípio de dualidade, considere o Teorema de Desargues: no plano o teorema dual também é o recíproco. Ou seja era suficiente mostrarmos uma das implicações.

7.4. O Teorema de Pappus.

Teorema 7.7 (Pappus)**.** *Sejam A, B e C pontos distintos na reta l e sejam A', B', C' pontos distintos na reta l'. Então os pontos*

$$P = AB' \cdot A'B, \quad Q = AC' \cdot A'C, \quad R = BC' \cdot B'C$$

são colineares.

O dual do Teorema de Pappus é o seguinte:

Teorema 7.8. *Sejam a, b e c retas distintas que passam pelo ponto L e sejam a', b', c' retas distintas que passam pelo ponto L'. Então as retas*

$$p = (a \cdot b')(a' \cdot b), \quad q = (a \cdot c')(a' \cdot c), \quad r = (b \cdot c')(b' \cdot c)$$

são concorrentes.

Pelo princípio de dualidade basta então provar qualquer um destes teoremas para se verificar também o dual.

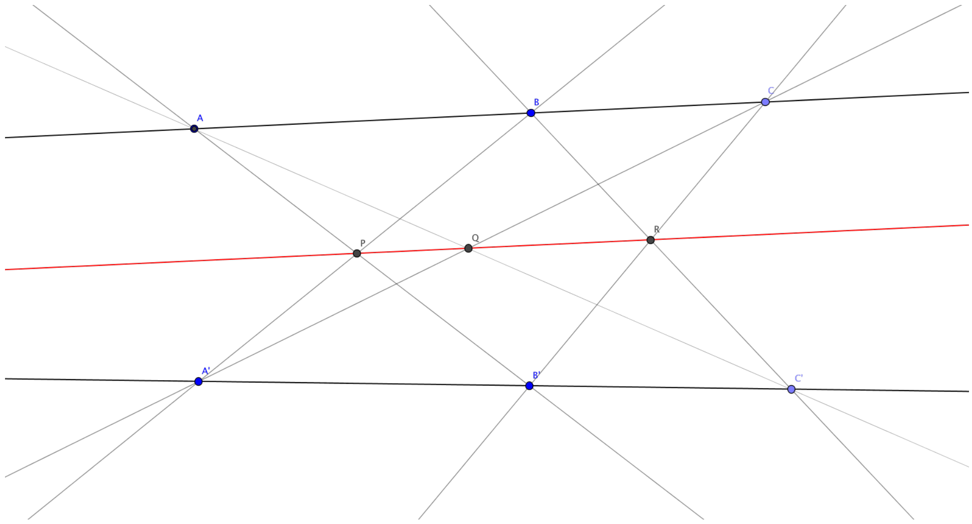

FIGURA 16. Teorema de Pappus

Demonstração do dual do Teorema de Pappus. Podemos supor que a reta LL' é a reta no infinito. Então no plano euclidiano $\mathbb{E}^2 = \mathbb{P}^2 - LL'$ as retas a, b e c são paralelas (porque elas se intersetam no infinito) e o mesmo é verdade para as retas a', b' e c'. A demonstração conclui-se com o seguinte exercício: Usando coordenadas cartesianas em $\mathbb{E}^2$, mostre que p, q e r são concorrentes. Em alternativa, pode-se usar uma transformação projetiva de forma a que $a \perp a'$ etc. □

Exercício 7.9. Faça um esboço de uma configuração como em Teorema 7.8.

8. Cónicas

Um *cone reto* em $\mathbb{E}^3$ com centro O e eixo L é o lugar geométrico das retas por O que formam um ângulo de 45 graus com L. Se escolhermos coordenadas cartesianas em $\mathbb{E}^3$ tais que O é a origem $(0,0,0)$ e L é o eixo dos zz então o cone tem equação cartesiana

$$z^2 = x^2 + y^2. \tag{8.1}$$

Mais geralmente, um cone (não degenerado) em $\mathbb{E}^3$ é uma figura que nalgum referencial (não necessariamente ortonormado) tem uma equação da forma (8.1).

Será conveniente representar o cone dado por (8.1) também noutras coordenadas. Se escolhermos coordenadas em $\mathbb{E}^3$ tais que O é a origem $(0,0,0)$ e L é a reta no plano xOy de equação $x = y$ então o cone tem equação cartesiana

$$z^2 = 2xy. \tag{8.2}$$

Notemos que estas equações fazem sentido em coordenadas homogéneas: se (x,y,z) satisfaz a equação então (tx,ty,tz) também o satisfaz. Assim podemos considerar cónicas projetivas:

Definição 8.1. Uma *cónica* em $\mathbb{P}^2$ é a projetivização de um cone não degenerado em $\mathbb{E}^3$.

Por outras palavras, os **p**-pontos da cónica são as retas por O que geram o cone.

Nota 8.2. Pode provar-se que todas as cónicas projetivas são equivalentes: dadas duas cónicas existe uma transformação projetiva de $\mathbb{P}^2$ que leva uma noutra.

Vamos em seguida analisar algumas projeções num plano de visão de uma conica projetiva.

Hipérbole. Considere a cónica projetiva dada pela equação (8.2). Escolhamos como plano de visão $\mathbb{V}^2$ o plano de equação $z = 1$. Podemos então usar (x, y) como coordenadas dos pontos em $\mathbb{V}^2$, através da correspondência

$$(x, y, 1) \leftrightarrow (x, y).$$

Então a projeção do cone projetivo é a curva cuja equação é obtida substituindo $z = 1$ na equação (8.2):

$$1 = 2xy.$$

Como é bem conhecido, esta é a equação de uma hipérbole.

Exercício 8.3. Encontre os pontos no infinito da hipérbole.

Parábola. Considere novamente a cónica projetiva dada pela equação (8.2). Escolhamos agora como plano de visão $\mathbb{V}^2$ o plano de equação $x = 1$. Podemos então usar (y, z) como coordenadas dos pontos em $\mathbb{V}^2$ e a projeção do cone projetivo é a curva cuja equação é obtida substituindo $x = 1$ na equação (8.2):

$$2y = z^2.$$

Como é bem conhecido, esta é a equação de uma parábola.

Exercício 8.4. Encontre os pontos no infinito da parábola.

Circunferência. Considere por fim a cónica projetiva dada pela equação (8.1). Escolhamos desta vez como plano de visão $\mathbb{V}^2$ o plano de equação $z = 1$. Podemos então usar (x, y) como coordenadas dos pontos em $\mathbb{V}^2$ e a projeção do cone projetivo é a curva cuja equação é obtida substituindo $z = 1$ na equação (8.1):

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Esta é a equação de uma circunferência.

Exercício 8.5. Encontre os pontos no infinito da circunferência.

Com mais trabalho podem verificar-se os seguintes factos:

- A projeção do cone reto num plano de visão que faz um ângulo menor que 45 graus com o eixo do cone é uma hipérbole.
- A projeção do cone reto num plano de visão que faz um ângulo igual a 45 graus com o eixo do cone é uma parábola.
- A projeção do cone reto num plano de visão que faz um ângulo maior que 45 graus com o eixo do cone é uma elipse.

9. O Teorema de Pascal

As demonstrações desta secção são omitidas por falta de tempo e espaço.

Definição 9.1. Um *hexágono* em $\mathbb{P}^2$ é a figura formada por seis pontos distintos A, B, C, D, E, F (por esta ordem) chamados *vértices.* Os *lados* do hexágono $ABCDEF$ são as retas AB, BC, CD, DE, EF e FA. Os três pares de lados AB e DE, BC e EF e CD e FA dizem-se pares de *lados opostos.*

Um hexágono $ABCDEF$ diz-se *inscrito* numa cónica $\mathcal{K}$ em $\mathbb{P}^2$ se os seis pontos A, B, C, D, E e F estão em $\mathcal{K}$.

Teorema 9.2 (Pascal)**.** *Seja $ABCDEF$ um hexágono inscrito numa cónica $\mathcal{K}$. Então os três pontos de interseção de pares de lados opostos*

$$AB \cdot DE,\ BC \cdot EF \text{ e } CD \cdot FA$$

são colineares. □

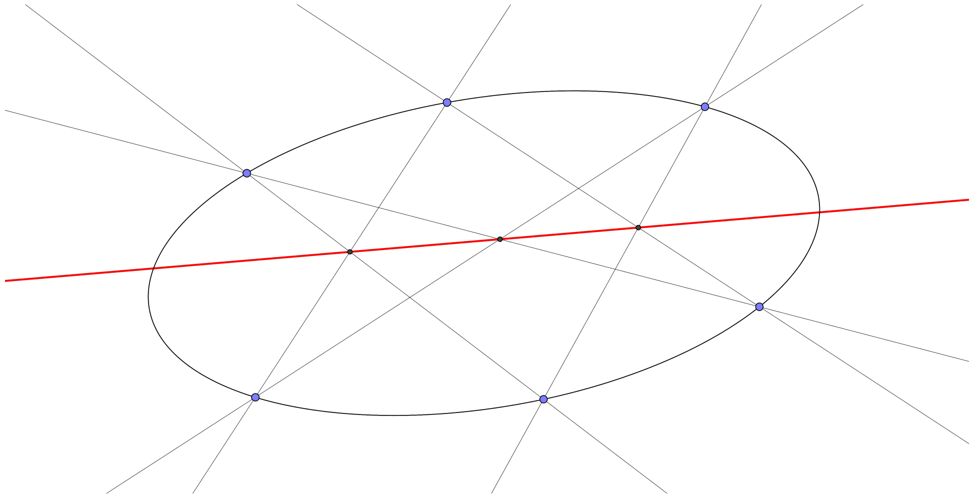

FIGURA 17. Teorema de Pascal

Nota 9.3. O recíproco do Teorema de Pascal também se verifica.

Um plano por O em $\mathbb{E}^3$ interseta um cone reto com centro em O em 0, 1 ou 2 retas por O. Por outras palavras, no plano projetivo $\mathbb{P}^2$ uma reta e uma cónica intersetam-se em 0, 1 ou 2 pontos.

Definição 9.4. Seja $\mathcal{K}$ uma cónica em $\mathbb{P}^2$. Uma reta l diz-se *tangente* a $\mathcal{K}$ no ponto P se l e $\mathcal{K}$ se intersetam num único ponto $P \in \mathcal{K}$.

Nota 9.5. O teorema de Pascal também se verifica para *hexágonos degenerados* (em que dois vértices adjacentes podem coincidir), desde que se interprete o lado pelos dois vértices coincidentes como sendo a tangente à conica nesse ponto.

Finalmente enunciamos o seguinte resultado:

Teorema 9.6. *Sejam $P_1, \ldots, P_5$ cinco pontos distintos em $\mathbb{P}^2$ tais que que nenhuns 3 deles são colineares. Então passa uma única cónica por $P_1, \ldots, P_5$.*

Ideia da demonstração. Uma cónica é dada por uma equação quadrática homogénea:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fxy = 0.$$

Assim, os 5 pontos impõem 5 equações lineares sobre os coeficientes (a, b, c, d, e, f) que dão origem a uma única solução $[a : b : c : d : e : f]$. □

Terminámos por dar duas aplicações do Teorema de Pascal.

Construção de uma cónica por cinco pontos. Esta construção usa o recíproco do Teorema de Pascal.

Sejam dados cinco pontos A, B, C, D e E nenhuns três dos quais são colineares. Vamos construir o ponto F tal que

$$AB \cdot DE,\ BC \cdot EF \text{ e } CD \cdot FA$$

são colineares; chamamos *reta de Pascal* à reta em que estão.

1. seja $P = AB \cdot DE$ (então P está na reta de Pascal);
2. trace uma reta x por A ($x = AF$ vai ser o lado oposto de CD);
3. seja $Q = x \cdot CD$ (x e CD são lados opostos do hexágono, pelo que Q está na reta de Pascal);
4. trace a reta de Pascal $l = PQ$;

(5) Seja $R = l \cdot BC$ (R é o ponto de interseção dos lados opostos BC e EF, que tem de estar em l);
(6) trace a reta $m = RE$ (que é o lado oposto EF de BC);
(7) o ponto F obtém-se como $F = m \cdot x$.

Exercício 9.7. Faça esta construção num sistema de software de geometria dinâmica.

Construção de uma tangente a uma cónica. Seja $\mathcal{K}$ a cónica pelos cinco pontos A, B, C, D e E. Vamos construir a reta tangente a $\mathcal{K}$ em A recorrendo ao hexágono degenerado $ABCDEF$ onde $F = A$:

(1) sejam $P = (AB) \cdot (DE)$ e $Q = (BC) \cdot (EF)$ (onde $F = A$; P e Q estão na reta de Pascal);
(2) trace a reta de Pascal $l = PQ$;
(3) seja $R = (CD) \cdot l$ (R é o ponto de interseção do lado CD com a reta de Pascal);
(4) trace RA, a tangente a $\mathcal{K}$ por A (é o lado oposto de CD).

Outra construção interessante é a construção de uma tangente a uma cónica $\mathcal{K}$ por um ponto O exterior a $\mathcal{K}$ (ver Jennings [2, Exercise 4.10.1]).

10. Nota final

Por razões pedagógicas, nestes apontamentos considerámos sempre o espaço euclidiano com a sua métrica. No entanto tal não é necessário para desenvolver a geometria projetiva. Não fizemos nenhum uso importante da métrica euclidiana, exceto na nossa abordagem de dualidade, onde fizemos corresponder um plano (**p**-reta) ao seu vetor normal (**p**-ponto) e vice-versa. De facto, a dualidade no plano projetivo depende de uma escolha de uma estrutura adicional, que pode ser uma métrica euclidiana ou uma escolha de uma cónica em $\mathbb{P}^2$.

Bibliografia

[1] Judith N. Cederberg, *A Course in Modern Geometries*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2001.
[2] George A. Jennings, *Modern Geometry with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1994.

Centro de Matemática da Universidade do Porto, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Rua do Campo Alegre, s/n, 4169-007 Porto, Portugal
E-mail address: pbgothen@fc.up.pt