

Complementos de Geometria – M3004

06/06/2022

Peter Gothen

Conteúdo

Capítulo 1. A geometria euclidiana em dimensão n	1
1. Espaços métricos	1
2. Geometria euclidiana e isometrias de \mathbb{R}^n	5
3. O conceito de k -plano em \mathbb{E}^n	8
4. Pontos em posição geral	9
5. A mediatriz de dois pontos	9
6. Reflexões	11
7. Decomposição de isometrias em reflexões	13
8. Classificação geométrica das isometrias do plano e do espaço	15
Exercícios	19
Capítulo 2. Geometria Esférica	21
1. Conceitos básicos da geometria esférica	21
2. Ângulos em geometria esférica	25
3. Trigonometria esférica	26
4. Mediatrizes, reflexões e isometrias em geometria esférica	28
5. A área de um triângulo esférico	31
6. O triângulo polar	32
7. A projeção estereográfica	34
Exercícios	38
Capítulo 3. Geometria inversiva e transformações de Möbius	41
1. A esfera de Riemann e coordenadas homogêneas	41
2. Inversão em esferas	44
3. Projeção estereográfica preserva ângulos	47
4. Isometrias da esfera e transformações de Möbius	49
Exercícios	53
Capítulo 4. Geometria hiperbólica	55
1. Geometria de Lorentz	55
2. Geometria hiperbólica: o modelo do hiperboloide	64
3. Geometria hiperbólica básica	67
4. Plano tangente e ângulos em geometria hiperbólica	68
5. A soma dos ângulos internos de um triângulo	70
6. Isometrias do plano hiperbólico e a sua classificação	71
Exercícios	72
Bibliografia	75

CAPÍTULO 1

A geometria euclidiana em dimensão n

1. Espaços métricos

Vamos basear o nosso estudo de geometria no conceito de **distância**: a distância entre dois pontos será um número real positivo. Fica, assim, à nossa disposição a compreensão da natureza do contínuo alcançada no século XIX e as poderosas ferramentas associadas.

Formalizamos as propriedades da função distância no conceito de um **espaço métrico**. Este conceito vai-nos fornecer um enquadramento de algumas ideias importantes que são comuns às três geometrias métricas que vamos considerar: a geometria euclidiana, a geometria esférica e a geometria hiperbólica. No entanto, não vamos precisar de nenhum resultado sofisticado da teoria dos espaços métricos.

DEFINIÇÃO 1.1. Um *espaço métrico* é um conjunto M equipado com uma *função distância* ou *métrica*

$$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} d(P, Q) &\geq 0 && (d \text{ é positiva}); \\ d(P, Q) = 0 &\iff P = Q && (d \text{ é não degenerada}); \\ d(P, Q) &= d(Q, P) && (d \text{ é simétrica}); \\ d(P, R) &\leq d(P, Q) + d(Q, R) && (\text{desigualdade triangular}). \end{aligned}$$

Chamamos frequentemente *pontos* aos elementos $P \in M$ e, quando não há dúvida sobre qual a métrica d considerada, falamos frequentemente simplesmente do **espaço métrico** M .

O espaço \mathbb{R}^n como espaço métrico. Consideramos o conjunto \mathbb{R}^n cujos elementos são n -tuplos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ de números reais. Chamamos frequentemente *pontos* ou *vetores* a estes elementos. A *origem* de \mathbb{R}^n é o ponto $O = (0, \dots, 0)$

Como é bem conhecido da álgebra linear, \mathbb{R}^n tem uma estrutura de espaço vectorial de dimensão n com origem O e o *produto escalar euclidiano* é definido por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

para $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. A *norma euclidiana* de um vetor \mathbf{x} é

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

e a *distância euclidiana* entre dois pontos \mathbf{x} e \mathbf{y} é

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Por exemplo, em \mathbb{R} temos

$$d(x, y) = |x - y|,$$

e em \mathbb{R}^2 temos

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

É claro que a função d satisfaz as três primeiras propriedades de uma métrica. Para ver que d também satisfaz a desigualdade triangular, vamos fazer uma revisão de alguns resultados da álgebra linear de \mathbb{R}^n .

Começamos por notar que o produto escalar pode ser recuperado da norma através da *identidade de polarização*

$$(1.1) \quad 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$$

como se vê do cálculo

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

PROPOSIÇÃO 1.2 (Desigualdade de Cauchy–Schwartz). *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

com igualdade se e só se \mathbf{x} e \mathbf{y} são linearmente dependentes.

DEMONSTRAÇÃO. Decorre do cálculo

$$0 \leq ||\mathbf{y}\mathbf{x} \pm |\mathbf{x}||\mathbf{y}||^2 = 2|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 \pm 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

□

NOTA 1.3. Em particular temos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ e a igualdade $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ dá-se exatamente quando $\mathbf{x} = t\mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} = t\mathbf{x}$ para algum $t \geq 0$, ou seja, quando *os vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} têm o mesmo sentido*.

Podemos agora concluir a prova que \mathbb{R}^n com a distância euclidiana é um espaço métrico.

PROPOSIÇÃO 1.4 (Desigualdade triangular). *Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

Além disso, a igualdade verifica-se na desigualdade triangular se e só se \mathbf{x} e \mathbf{y} têm o mesmo sentido.

DEMONSTRAÇÃO. Decorre de

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \\ &\leq |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \\ &= (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2, \end{aligned}$$

usando a desigualdade de Cauchy–Schwartz na segunda linha. □

É habitual exprimir a segunda parte do enunciado da desigualdade triangular, sobre as condições em que se verifica a igualdade, dizendo que em \mathbb{R}^n se verifica *a desigualdade triangular estrita*.

EXERCÍCIO 1.5. (a) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Mostre que

$$x \leq y \leq z \iff |x - z| = |x - y| + |y - z|.$$

(b) Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Deduza da Proposição 1.4 que

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$$

com igualdade se e só se \mathbf{y} está no segmento $\overline{\mathbf{x}\mathbf{z}} = \{\lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{x} \mid \lambda \in [0, 1]\}$ que une \mathbf{x} a \mathbf{z} .

Métrica induzida. Se (M, d) é um espaço métrico então podemos restringir a métrica d a qualquer subconjunto $N \subset M$ e obtemos assim um novo espaço métrico¹ (N, d) , onde a distância entre pontos é a distância medida em M . Esta métrica chama-se a *métrica induzida* em N (pela métrica em M).

EXEMPLO 1.6. Considere $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana. Seja $N = \{(x, y) \mid y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ o eixo dos xx . Então a distância entre dois pontos em N na métrica induzida é a distância usual entre os dois pontos no eixo dos xx (identificando-o com \mathbb{R}).

EXEMPLO 1.7. Consideramos $M = \mathbb{R}^3$ com a métrica euclidiana. Seja $N = S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ a superfície esférica unitária centrada em O com a métrica induzida. Então temos uma métrica induzida em que a distância entre dois pontos é medida ao longo da corda que os une.

Ângulos e distância na esfera medida ao longo de círculos máximos. Como qualquer habitante do planeta Terra sabe, a distância medida ao longo de uma corda não é o conceito mais útil na prática: é melhor viajar ao longo de um círculo máximo do que cavar um túnel em linha reta.

Definimos o *ângulo* (não orientado) $\theta \in [0, \pi]$ entre dois vetores não nulos \mathbf{x} e \mathbf{y} em \mathbb{R}^n através da fórmula

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|}.$$

Podemos então definir uma métrica em S^2 medindo a distância ao longo do arco de círculo máximo mais curto em S^1 entre dois pontos; mais precisamente, se \mathbf{x} e \mathbf{y} estão em S^2 , podemos definir

$$(1.2) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle) \in [0, \pi].$$

Veremos mais tarde no nosso estudo da geometria esférica que d é de facto uma função distância (apenas a desigualdade triangular não é óbvia).

Note-se que podemos fazer a mesma definição na superfície esférica unitária

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |\mathbf{x}|^2 = 1\}.$$

em qualquer dimensão. Em particular, no caso $n = 1$, medimos a distância entre dois pontos na circunferência unitária S^1 ao longo do arco mais curto que os une.

Aplicações que preservam a distância e isometrias. Depois de definir o conceito de espaço métrico vamos agora introduzir as aplicações entre espaços métricos que preservam a função distância.

DEFINIÇÃO 1.8. Sejam (M_1, d_1) e (M_2, d_2) espaços métricos. Uma aplicação $f: M_1 \rightarrow M_2$ preserva distâncias se

$$d_2(f(P), f(Q)) = d_1(P, Q) \quad \forall P, Q \in M_1.$$

EXERCÍCIO 1.9. Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário e seja $P_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto. Mostre que a aplicação $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\alpha(t) = P_0 + t\mathbf{v}$ preserva distâncias.

EXEMPLO 1.10. Considere o intervalo $]0, \pi[$ com a função distância usual induzida de \mathbb{R} : $d(s, t) = |t - s|$. A aplicação $\alpha:]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ **não** preserva distâncias.

DEFINIÇÃO 1.11. Uma *isometria* entre dois espaços métricos (M_1, d_1) e (M_2, d_2) é uma bijeção $f: M_1 \rightarrow M_2$ que preserva distâncias. Dois espaços métricos (M_1, d_1) e (M_2, d_2) dizem-se *isométricos* se existe uma isometria entre eles.

¹Abusamos de notação, usando o símbolo d para a restrição $d|_{N \times N}$

A seguinte observação é óbvia mas fundamental:

A composta de isometrias é uma isometria.

Assim, a operação de composição dá ao conjunto das isometrias de M uma estrutura natural de grupo². Denotamos o grupo das isometrias de M por

$$\text{Isom}(M) = \{f: M \rightarrow M \mid f \text{ é uma isometria}\}.$$

EXERCÍCIO 1.12. Mostre que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma isometria se e só se f tem a forma $f(x) = \pm x + b$ para algum $b \in \mathbb{R}$.

NOTA 1.13. Seja $f: M \rightarrow N$ uma isometria. Considere a métrica induzida em $f(M) \subseteq N$. Então $f: M \rightarrow f(M)$ é uma isometria (porquê?).

EXEMPLO 1.14. Considere $N = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (onde $(a, b) \neq (0, 0)$). Então podemos parametrizar N como no Exercício 1.9 por uma aplicação que preserva distâncias. Concluímos que N com a métrica induzida de \mathbb{R}^2 é isométrica a \mathbb{R} .

EXEMPLO 1.15. Mais geralmente, se $V \subset \mathbb{R}^n$ é um sub-espço afim de dimensão k , então V com a métrica induzida de \mathbb{R}^n é isométrico a \mathbb{R}^k . Por exemplo, se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ são distintos, então o sub-espço afim de dimensão um

$$\{\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

é isométrica a \mathbb{R} , fazendo $\lambda = t/|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ para $t \in \mathbb{R}$.

EXERCÍCIO 1.16. Na situação descrita no exemplo anterior, construa explicitamente uma isometria $f: \mathbb{R}^k \rightarrow V$.

Sugestão: Recorde-se que um sub-espço afim de \mathbb{R}^n de dimensão k é da forma $V = V_0 + \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $V_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ é um sub-espço vetorial de dimensão k , e escolha uma base ortonormada u_1, \dots, u_k de V_0 .

Retas em espaços métricos. Para fazer geometria vamos precisar de um conceito de reta. Este conceito pode ser formulado em geral em espaços métricos.

DEFINIÇÃO 1.17. Uma *reta parametrizada* num espaço métrico M é uma aplicação $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ que preserva distâncias. Chamamos *reta* à imagem $l = \gamma(\mathbb{R}) \subset M$ de uma reta parametrizada γ .

NOTA 1.18. Uma reta $l = \gamma(\mathbb{R}) \subseteq M$ num espaço métrico M é isométrica a \mathbb{R} , como decorre da Nota 1.13.

EXEMPLO 1.19. Podemos agora reformular o Exemplo 1.14 dizendo que subconjunto $N = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (onde $(a, b) \neq (0, 0)$) é uma reta no sentido da Definição 1.17.

Para terminar, vamos ver que já encontrámos todas as retas de \mathbb{R}^n (como seria de esperar!).

PROPOSIÇÃO 1.20. *Sejam P e Q dois pontos distintos de \mathbb{R}^n . Então passa uma e uma só reta por P e Q .*

DEMONSTRAÇÃO. Por aquilo que já observámos, provar a existencia da reta por P e Q não é difícil. Com efeito,

$$(1.3) \quad \gamma(t) = \frac{Q - P}{|Q - P|}t + P$$

é uma reta parametrizada por P e Q . A unicidade decorre da desigualdade triangular estrita. Mais precisamente, seja N uma reta por P e Q , então N é isométrica a \mathbb{R} . Logo, se R é um ponto de N temos uma das seguintes alternativas:

²A noção de grupo abstrato tem a sua origem do estudo das transformações geométricas.

- $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$,
- $d(P, R) = d(R, Q) + d(Q, R)$, ou
- $d(R, Q) = d(R, P) + d(P, Q)$.

Em cada um destes casos a desigualdade triangular estrita implica que P , Q e R são co-lineares, no sentido de estarem num subespaço afim de dimensão um em \mathbb{R}^n (ver o Ex. 1.5). \square

Podemos definir o segmento que une dois pontos distintos P e Q por

$$\overline{PQ} = \{R \in \mathbb{R}^n \mid d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)\}$$

e, tendo em conta a desigualdade triangular estrita (como na prova que acabamos de fazer), temos

$$\overline{PQ} = \{\lambda Q + (1 - \lambda)P \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

De modo análogo, definimos a semi-reta por P e Q com origem em P por

$$\begin{aligned} \{R \in \mathbb{R}^n \mid d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q) \text{ ou } d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)\} \\ = \{\lambda Q + (1 - \lambda)P \mid \lambda \in [0, \infty[\}. \end{aligned}$$

Geodésicas em espaços métricos. Como veremos mais a frente, o caminho mais curto entre dois pontos na superfície esférica S^2 é ao longo de um arco de círculo máximo. Podemos parametrizar um círculo máximo pelo comprimento de arco, por exemplo

$$(1.4) \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Então, com efeito,

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s|, \quad \text{se } |t - s| \leq \pi.$$

No entanto, isto não se verifica em geral (considere $s = 0$ e $t = 2\pi$!). Por isso, γ **não** é uma aplicação que preserva distâncias. No entanto, γ satisfaz a condição da seguinte definição.

DEFINIÇÃO 1.21. Uma *geodésica parametrizada* num espaço métrico M é uma aplicação $\gamma:]a, b[\rightarrow M$ que *preserva distâncias localmente*: para cada $t_0 \in]a, b[$ existe um intervalo aberto $I \subseteq]a, b[$ contendo t_0 tal que $\gamma|_I: I \rightarrow M$ preserva distâncias. Uma geodésica γ cujo domínio é $] - \infty, \infty[= \mathbb{R}$ diz-se *completa*.

Por exemplo, $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow S^2$ definida por (1.4) é uma geodésica completa em S^2 .

2. Geometria euclidiana e isometrias de \mathbb{R}^n

Quando identificamos \mathbb{R}^n com o espaço euclidiano de dimensão n estamos implicitamente a assumir uma escolha de uma origem e um referencial ortonormado, ou seja, a escolha de um sistema de coordenadas. No entanto, **a geometria euclidiana deve servir para descrever o mundo à nossa volta e, portanto, os conceitos geométricos não deverão depender da escolha do sistema de coordenadas**, mas apenas da noção de distância. Fazemos, por isso, a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.1. Um *espaço euclidiano de dimensão n* é um espaço métrico (\mathbb{E}^n, d) que é isométrico a \mathbb{R}^n com a métrica euclidiana.

Por outras palavras, (\mathbb{E}^n, d) é um espaço euclidiano de dimensão n se e só se existir uma bijeção $\phi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$|\phi(P) - \phi(Q)| = d(P, Q) \quad \forall P, Q \in \mathbb{E}^n.$$

Chamamos a uma tal isometria ϕ um *sistema de coordenadas euclidiano em \mathbb{E}^n* e a $(x_1, \dots, x_n) = \phi(P)$ as *coordenadas do ponto $P \in \mathbb{E}^n$ no sistema de coordenadas ϕ* .

EXEMPLO 2.2. O exemplo fundamental é $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$ com o sistema de coordenadas $\phi = \text{Id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Recordamos que uma isometria de \mathbb{R}^n é uma transformação³ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias:

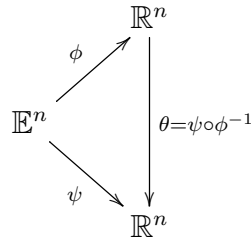
$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Por outras palavras, f é uma isometria se e só se

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$.

EXERCÍCIO 2.3. Sejam (\mathbb{E}^n, d) um espaço euclidiano de dimensão n e $\phi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas euclidiano. Mostre que $\psi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas euclidiano se e só se a mudança de coordenadas $\theta = \psi \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria.



Tendo em conta o resultado do exercício anterior, uma forma natural de exprimir a ideia da independência da escolha dos sistema de coordenadas é dizer que

A geometria euclidiana n -dimensional é o estudo das propriedades de \mathbb{R}^n que são invariantes por isometrias.

EXERCÍCIO 2.4. O objetivo deste exercício é provar que as isometrias de \mathbb{R}^n são as transformações da forma

$$(2.1) \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

onde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor e A é uma matriz $n \times n$ que é *ortogonal*, ou seja ${}^tAA = I$, onde tA é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade.

Mais geralmente vamos ver que uma aplicação $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva distâncias é da forma (2.1), onde A é uma matriz $n \times k$ que satisfaz ${}^tAA = I$, isto é, cujas colunas formam um conjunto de vetores ortonormados em \mathbb{R}^n .

- (a) Seja $\mathbf{b} = f(0)$. Mostre que f preserva distâncias se (e só se) $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}$ o faz, e conclua que basta considerar o caso em que $f(0) = 0$.

Suponha a partir de agora que $f(0) = 0$.

- (b) Utilize a identidade de polarização (1.1) para mostrar que

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k.$$

- (c) Seja (e_1, \dots, e_k) uma base ortonormada de \mathbb{R}^k . Defina $u_i = f(e_i)$ e mostre que $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ (o δ de Kronecker) para $i, j = 1, \dots, k$. Deduza que os vetores u_1, \dots, u_k formam um conjunto de vetores ortonormados em \mathbb{R}^n .

- (d) Para $\mathbf{x} = x_1e_1 + \dots + x_k e_k \in \mathbb{R}^k$ mostre que

$$\langle f(\mathbf{x}), u_i \rangle = x_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Deduza que

$$f(\mathbf{x}) = x_1u_1 + \dots + x_k u_k$$

e conclua que f é linear.

³Entendemos por *transformação* uma aplicação bijetiva.

- (e) Mostre que uma aplicação linear $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ preserva distâncias se e só se a matriz A satisfaz ${}^tAA = I$.

As transformações $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ chamam-se *ortogonais* e as transformações $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ são *translações*.

NOTA 2.5. As transformações ortogonais de \mathbb{R}^n formam um grupo, tal como as translações. (Porquê?)

Seja $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ uma aplicação. A expressão de f no sistema de coordenadas $\phi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação $\tilde{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, como ilustrado no diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{E}^n \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

O diagrama diz-se *comutativo* porque os dois caminhos possíveis do canto superior esquerdo ao canto inferior direito são a mesma aplicação: $\phi \circ f = \tilde{f} \circ \phi$.

NOTA 2.6. Se uma aplicação $f: M \rightarrow M$ é uma isometria então a sua expressão num sistema de coordenadas é uma isometria, e vice-versa.

Seja agora $\psi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ outro sistema de coordenadas euclidiano e seja $\theta = \psi \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a mudança de coordenadas como acima. Então a expressão local de f no sistema de coordenadas ψ é

$$\psi \circ f \circ \psi^{-1} = \theta \circ \tilde{f} \circ \theta^{-1}$$

como vemos do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^n \\ \uparrow \phi & & \uparrow \phi \\ \mathbb{E}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{E}^n \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\theta \circ \tilde{f} \circ \theta^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Translações e estrutura afim de \mathbb{E}^n . Uma aplicação $\theta: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma $\theta(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ (onde A é qualquer matriz, não necessariamente ortogonal ou invertível) chama-se uma *aplicação afim*, e se é invertível θ diz-se uma *transformação afim* (neste caso, necessariamente $k = n$).

Notemos que compostas de aplicações afins são aplicações afins e que a inversa de uma transformação afim também é uma transformação afim. Portanto, as transformações afins formam um grupo.

Notemos ainda que uma transformação afim é linear se e só se $\theta(0) = 0 \iff \mathbf{b} = 0$. Pelo Exercício 2.4 sabemos que uma isometria de \mathbb{R}^n é uma transformação afim.

PROPOSIÇÃO 2.7. *Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma translação e seja $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação afim. Então*

$$\theta \circ f \circ \theta^{-1}$$

também é uma translação.

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ e $\theta(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$. Então $\theta^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})$ e logo

$$\begin{aligned}\theta \circ f \circ \theta^{-1}(\mathbf{x}) &= \theta(A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \mathbf{c}) \\ &= A(A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \mathbf{c}) + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x} + A\mathbf{c},\end{aligned}$$

o que mostra o pretendido. \square

A importância desta proposição é a seguinte: se a expressão de uma transformação $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ **nalgum** sistema de coordenadas euclidiano é uma translação, então a expressão de f em **qualquer** sistema de coordenadas euclidiano é uma translação. Portanto, a seguinte definição faz sentido.

DEFINIÇÃO 2.8. Uma *translação* de \mathbb{E}^n é uma transformação cuja expressão num sistema de coordenadas euclidiano é uma translação de \mathbb{R}^n .

Note-se que as translações de \mathbb{E}^n formam um grupo, denotado

$$\mathcal{T}(\mathbb{E}^n) = \{f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n \mid f \text{ é uma translação}\}.$$

As translações de \mathbb{R}^n são identificados com o próprio \mathbb{R}^n , identificando a translação $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ com o *vetor de translação* \mathbf{c} . Mais geralmente, um sistema de coordenadas euclidiano $\phi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dá-nos uma identificação

$$(2.2) \quad \begin{aligned}\mathcal{T}(\mathbb{E}^n) &\xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n, \\ f &\mapsto \mathbf{c},\end{aligned}$$

onde \mathbf{c} é o vetor de translação da expressão de f no sistema de coordenadas ϕ , isto é, $\tilde{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ é dado por $\tilde{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$. Além disso, se $\theta(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ é uma mudança de coordenadas, então o cálculo da prova da Proposição 2.7 mostra que no novo sistema de coordenadas, o vetor de translação é $A\mathbf{c}$. Como A representa uma transformação linear segue que a identificação (2.2) define uma estrutura de espaço vectorial em $\mathcal{T}(\mathbb{E}^n)$ que **não depende da escolha do sistema de coordenadas**. Podemos, assim, falar no *espaço vectorial* $\mathcal{T}(\mathbb{E}^n)$ *das translações de* \mathbb{E}^n .

Por fim, notamos que, dados dois pontos P e Q em \mathbb{R}^n existe uma única translação f tal que $f(P) = Q$, nomeadamente $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (Q - P)$. Através da identificação $\mathcal{T}(\mathbb{E}^n) \cong \mathbb{R}^n$ vemos que o mesmo se verifica em \mathbb{E}^n : dados dois pontos P e Q em \mathbb{E}^n existe uma única translação $f \in \mathcal{T}(\mathbb{E}^n)$ tal que $f(P) = Q$. Por analogia com \mathbb{R}^n é habitual dizer que $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é *translação pelo vetor* \overrightarrow{PQ} e escrever

$$f(R) = R + \overrightarrow{PQ}$$

para $R \in \mathbb{E}^n$.

3. O conceito de k -plano em \mathbb{E}^n

Recordamos que um sub-espaço afim em \mathbb{R}^n é um subconjunto da forma $V + \mathbf{x}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, onde $V \subseteq \mathbb{R}^n$ é um sub-espaço vectorial e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto. A dimensão de $V + \mathbf{x}_0$ é a dimensão de V . Notemos que uma transformação afim envia sub-espaços afins em sub-espaços afins (preservando a dimensão). Assim, a seguinte definição faz sentido.

DEFINIÇÃO 3.1. Um k -plano num espaço euclidiano \mathbb{E}^n é um subconjunto $V \subset \mathbb{E}^n$ que num sistema de coordenadas $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ corresponde a um sub-espaço afim de dimensão k em \mathbb{R}^n . Um *plano* é um k -plano para $k = 2$ e um *hiper-plano* é um k -plano para $k = n - 1$.

Note-se a independência da escolha do sistema de coordenadas f .

DEFINIÇÃO 3.2. Um k -plano euclidiano parametrizado em \mathbb{E}^n é uma aplicação $\alpha: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{E}^n$ que preserva distâncias:

$$d(\alpha(\mathbf{s}), \alpha(\mathbf{t})) = |\mathbf{s} - \mathbf{t}| \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k,$$

e um k -plano euclidiano em \mathbb{E}^n é a imagem $S = \alpha(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{E}^n$ de um k -plano euclidiano parametrizado.

Vejamos que o recíproco também vale:

PROPOSIÇÃO 3.3. Um k -plano é um k -plano euclidiano e reciprocamente.

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor que $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$. O Ex. 1.16 implica que um k -plano é um k -plano euclidiano. Reciprocamente, seja $\alpha: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação que preserva distâncias, pelo Ex. 2.4, α é afim (e injetivo), pelo que a sua imagem $\alpha(\mathbb{R}^k) \subseteq \mathbb{R}^n$ é um sub-espaço afim de dimensão k . \square

NOTA 3.4. Um k -plano V em \mathbb{R}^n é assim um espaço euclidiano de dimensão k e tem naturalmente a estrutura de sub-espaço afim, mas apenas é um sub-espaço vetorial se passa pela origem O . No entanto a escolha de um ponto fixo $P_0 \in V$ como origem define naturalmente uma estrutura de espaço vetorial em V : explicitamente temos

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^k, \\ P &\mapsto P - P_0. \end{aligned}$$

4. Pontos em posição geral

DEFINIÇÃO 4.1. Dizemos que $k + 1$ pontos P_0, \dots, P_k em \mathbb{E}^n estão em posição geral se não estão contidos em nenhum $(k - 1)$ -plano.

Por exemplo, dois pontos estão em posição geral se são distintos, três pontos estão em posição geral se não são colineares, e $n + 1$ pontos estão em posição geral se não estão contidos num hiper-plano.

No caso de $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$ podemos aproveitar a sua estrutura de espaço vetorial para interpretar o conceito de posição geral em termos da álgebra linear, como se segue.

EXERCÍCIO 4.2. Mostre que P_0, \dots, P_k em \mathbb{R}^n estão em posição geral se e só se os k vetores $P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0$ são linearmente independentes.

PROPOSIÇÃO 4.3. Dados $k + 1$ pontos P_0, \dots, P_k em \mathbb{E}^n em posição geral existe um e um só k -plano por eles.

DEMONSTRAÇÃO. Resulta imediatamente do Ex. 4.2, usando um sistema de coordenadas $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. \square

5. A mediatriz de dois pontos

Vamos introduzir a mediatriz de dois pontos em \mathbb{E}^n e ver que é um hiper-plano.

DEFINIÇÃO 5.1. A mediatriz de dois pontos distintos P, P' num espaço euclidiano \mathbb{E}^n de dimensão n é

$$\text{med}(P, P') = \{Q \in \mathbb{E}^n \mid d(P, Q) = d(P', Q)\}.$$

PROPOSIÇÃO 5.2. Sejam $P, P' \in \mathbb{E}^n$ pontos distintos. Então $\text{med}(P, P') \subset \mathbb{E}^n$ é um hiper-plano.

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor que $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$. Seja M o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$, por outras palavras, M é o único ponto tal que $M - P = P' - M$. Para $Q \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\begin{aligned} |P - Q|^2 &= |P - M + M - Q|^2 \\ &= \langle P - M + M - Q, P - M + M - Q \rangle \\ &= |P - M|^2 + |M - Q|^2 + 2\langle P - M, M - Q \rangle \end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$|P' - Q|^2 = |P' - M|^2 + |M - Q|^2 + 2\langle P' - M, M - Q \rangle.$$

Tendo em conta que $|P - M| = |P' - M|$ e $M - P = P' - M$ vem então que

$$\begin{aligned} |P - Q| = |P' - Q| &\iff \langle P - M, M - Q \rangle = \langle P' - M, M - Q \rangle \\ &\iff \langle P - M, M - Q \rangle = \langle M - P, M - Q \rangle \\ &\iff \langle P - M, M - Q \rangle = 0. \end{aligned}$$

Concluimos que $\text{med}(P, P') \subset \mathbb{E}^n$ é o hiper-plano por M perpendicular ao vetor $P - M$. \square

NOTA 5.3. O recíproco da proposição anterior também vale, no sentido que qualquer hiper-plano $V \subset \mathbb{E}^n$ pode ser visto como mediatriz de dois pontos distintos. De facto, se V é o hiper-plano pelo ponto M perpendicular ao vetor \mathbf{v} , então a demonstração da proposição anterior mostra que $V = \text{med}(P, P')$ onde $P = M + \mathbf{v}$ e $P' = M - \mathbf{v}$.

PROPOSIÇÃO 5.4. *Seja $\{P_0, \dots, P_n \in \mathbb{E}^n\}$ uma coleção de $n + 1$ um pontos em posição geral. Então qualquer ponto $Q \in \mathbb{E}^n$ é determinado pelas distâncias a estes pontos.*

DEMONSTRAÇÃO. Mais precisamente temos de mostrar que, se $Q, Q' \in \mathbb{E}^n$ satisfazem

$$d(Q, P_i) = d(Q', P_i) \quad i = 0, \dots, n$$

então $Q = Q'$. Suponha que $Q \neq Q'$. Concluimos então que todos os P_i estão no hiper-plano $\text{med}(Q, Q')$, o que contradiz a hipótese de os pontos P_i estarem em posição geral. \square

COROLÁRIO 5.5. *Uma isometria $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é determinada pelas imagens $f(P_0), \dots, f(P_n)$ de $n + 1$ pontos P_0, \dots, P_n em posição geral.*

DEMONSTRAÇÃO. Como uma isometria envia hiper-planos em hiper-planos vemos que uma isometria envia um conjunto de pontos em posição geral num conjunto de pontos em posição geral. Assim, os pontos $f(P_0), \dots, f(P_n)$ estão em posição geral. Logo, para cada $Q \in \mathbb{E}^n$ a Proposição 5.4 mostra que $f(Q)$ é determinado pelas distâncias $d(f(Q), f(P_i)) = d(P, P_i)$, $i = 0, \dots, n$. \square

EXERCÍCIO 5.6. Seja $V \subseteq \mathbb{E}^n$ um hiper-plano. Dizemos que dois pontos P e Q em $\mathbb{E}^n \setminus V$ estão do mesmo lado de V se o segmento \overline{PQ} não intersesta V (e estão em lados opostos de V caso contrário). Mostre que $\mathbb{E}^n \setminus V = A \cup B$, onde A e B são disjuntos com a propriedade de que dois pontos $P, Q \in \mathbb{E}^n \setminus V$ estão do mesmo lado de V se e só se ambos pertencem a A ou ambos pertencem a B . (Por outras palavras, “estar do mesmo lado de V ” é uma relação de equivalência em $\mathbb{E}^n \setminus V$ com duas classes de equivalência.) Chamamos a A e B os lados de V .

Sugestão: Usando um sistema de coordenadas apropriado podemos supor que $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$.

Como exemplos do conceito do exercício anterior temos os seguintes: (1) uma reta divide o plano euclidiano em dois lados e (2) pontos distintos P e P' estão em lados opostos do hiper-plano $\text{med}(P, P')$.

6. Reflexões

Continuamos agora o nosso estudo das isometrias de \mathbb{E}^n com as simetrias mais básicas, as reflexões. Vamos começar por usar um sistema de coordenadas para verificar a existência de uma reflexão em qualquer hiper-plano. Vamos basear o nosso estudo subsequente exclusivamente nesse resultado e nas propriedades de incidência do espaço euclidiano \mathbb{E}^n .

PROPOSIÇÃO 6.1. *Seja $V \subset \mathbb{E}^n$ um hiper-plano. Existe uma isometria de \mathbb{E}^n que fixa todos os pontos de V e troca os seus dois lados.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando um sistema de coordenadas apropriado podemos supor que $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$ e que $V \subset \mathbb{R}^n$ é o hiper-plano dado pela equação $x_n = 0$. Então

$$\begin{aligned} \rho: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \end{aligned}$$

é uma isometria com as propriedades pretendidas □

Chamamos *reflexão em V* a uma isometria que satisfaz a propriedade da proposição anterior. Note-se que ainda não provámos a unicidade da reflexão em V . No entanto, a sua existência (conjuntamente com a desigualdade triangular estrita) é suficiente para conseguirmos definir a projecção ortogonal de um ponto num hiper-plano. Por sua vez a projecção ortogonal vai-nos ajudar a provar a unicidade da reflexão desejada.

PROPOSIÇÃO 6.2. *Seja $V \subset \mathbb{E}^n$ um hiper-plano. Para cada $P \in \mathbb{E}^n$ existe um único ponto P^V em V que minimiza a distância a P , ou seja, tal que*

$$d(P, P^V) < d(P, Q)$$

para todo o Q em V distinto de P^V . O ponto P^V é o ponto de interseção do segmento $\overline{P\rho(P)}$ para uma reflexão ρ em V , e chama-se a projecção ortogonal de P em V .

DEMONSTRAÇÃO. Se $P \in V$ o resultado é evidente e $P^V = P$. Suponha agora que $P \notin V$. A Proposição 6.1 dá-nos uma isometria $\rho: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ que fixa todos os pontos de V e troca os seus dois lados. Defina $P' = \rho(P)$ e note-se que $d(P, Q) = d(P', Q)$ para todo o $Q \in V$. Seja agora $P^V \in V$ o ponto de interseção de V com o segmento $\overline{PP'}$. Falta ver que P^V minimiza a distância de pontos em V a P . Como P^V está no segmento que une P a P' temos $d(P, P') = d(P, P^V) + d(P^V, P') = 2d(P, P^V)$. Dado $Q \in V$ temos então, usando a desigualdade triangular,

$$2d(P, P^V) = d(P, P') \leq d(P, Q) + d(Q, P') = 2d(P, Q)$$

com igualdade se e só se Q está no segmento que $\overline{PP'}$, isto é, se e só se $Q = P^V$. Logo $Q = P^V$ é o único mínimo⁴ da aplicação $Q \mapsto d(P, Q)$. □

A proposição anterior tem o seguinte corolário imediato, que justifica dizer a *reflexão em V* e designá-la por ρ_V .

COROLÁRIO 6.3. *Seja $V \subset \mathbb{E}^n$ um hiper-plano e seja $\rho: V \rightarrow V$ uma reflexão em V . Seja $P \in \mathbb{E}^n$ um ponto que não está em V . Então $\rho(P) = P'$, onde P' é o único ponto da reta por P e P^V tal que $d(P', P^V) = d(P, P^V)$ e P^V está entre P e P' . Em particular, ρ é a **única** isometria de \mathbb{E}^n que fixa todos os pontos de V e troca os seus dois lados. □*

Do corolário anterior temos imediatamente o seguinte resultado.

COROLÁRIO 6.4. *Para quaisquer dois pontos distintos P e P' em \mathbb{E}^n a reflexão na mediatriz $\text{med}(P, P')$ troca P e P' . □*

⁴Esta propriedade não faz menção da reflexão ρ , pelo que não depende da sua unicidade, ainda não provada.

PROPOSIÇÃO 6.5. *Seja V um hiper-plano em \mathbb{E}^n e seja $P \in \mathbb{E}^n$ um ponto que não está em V . Então $V = \text{med}(P, P')$, onde $P' = \rho_V(P)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $Q \in V$, então $d(Q, P) = d(\rho_V(Q), \rho_V(P)) = d(Q, P')$ e logo $V \subseteq \text{med}(P, P')$. Como V e $\text{med}(P, P')$ são hiper-planos temos a igualdade desejada. \square

PROPOSIÇÃO 6.6. *Uma reflexão $\rho: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ tem ordem dois, isto é $\rho \circ \rho = \text{Id}_{\mathbb{E}^n}$ e $\rho \neq \text{Id}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja V o hiper-plano de reflexão de $\rho = \rho_V$. Seja P um ponto que não está em V . Vamos ver que $\rho(\rho(P)) = P$. Temos, pela Proposição 6.5, que $V = \text{med}(P, P')$, onde $P' = \rho(P)$. O Corolário 6.4 implica agora que $P = \rho(P')$ como desejado. \square

PROPOSIÇÃO 6.7. *Seja $V \subseteq \mathbb{E}^n$ um hiper-plano e seja $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ uma isometria que fixa V ponto a ponto. Então f é ou a identidade ou a reflexão em V .*

DEMONSTRAÇÃO. Uma vez que V é um hiper-plano existe uma coleção de n pontos Q_1, \dots, Q_n em V , que estão em posição geral. Por hipótese, $f(Q_i) = Q_i$, $i = 1, \dots, n$. Seja P um ponto exterior a V . Então os pontos Q_1, \dots, Q_n, P estão em posição geral (porquê?) e logo, pelo Corolário 5.5, a isometria f é determinada pela sua ação nestes pontos. Além disso, $d(P, Q_i) = d(f(P), f(Q_i)) = d(f(P), Q_i)$, pelo que apenas existem duas hipóteses. Em primeiro lugar, se $f(P) = P$ concluímos que $f = \text{Id}$. Em segundo lugar, se $f(P) \neq P$, então temos que $Q_i \in \text{med}(P, f(P))$ para $i = 1, \dots, n$, pelo que $V = \text{med}(P, f(P))$. O Corolário 6.4 implica agora que $\rho_V(P) = f(P)$. Como $\rho_V(Q_i) = Q_i = f(Q_i)$ para $i = 1, \dots, n$ concluímos finalmente pelo Corolário 5.5 que $f = \rho_V$. \square

COROLÁRIO 6.8. *Seja P_1, \dots, P_n uma coleção de n pontos em \mathbb{E}^n em posição geral e suponha que f e g são isometrias de \mathbb{E}^n com $f(P_i) = g(P_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Então ou $g = f$ ou $g = \rho \circ f$, onde ρ é a reflexão no hiperplano pelos pontos $f(P_1), \dots, f(P_n)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $Q_i = f(P_i)$ para $i = 1, \dots, n$. Como isometrias preservam a propriedade de pontos estarem em posição geral, vem que Q_1, \dots, Q_n estão em posição geral. Além disso, temos $g \circ f^{-1}(Q_i) = g(P_i) = Q_i$. Logo a isometria $g \circ f^{-1}$ fixa o hiper-plano por Q_1, \dots, Q_n ponto a ponto (pelo Corolário 5.5 aplicado a esse hiper-plano). Tiramos a conclusão desejada pela Proposição 6.7. \square

O próximo resultado pode, tal como os anteriores, ser provado sinteticamente mas neste caso uma prova analítica é muito mais simples.

PROPOSIÇÃO 6.9. *Seja $V \subset \mathbb{E}^n$ um hiper-plano. Para cada $R \in V$ existe uma única reta l que intersesta V em R e tal que $\rho_V(l) = l$.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando um sistema de coordenadas podemos supor que $V \subset \mathbb{R}^n$ é o hiper-plano dado pela equação $x_n = 0$ e que $R = 0$. É então claro que a reta procurada é o eixo dos x_n . \square

Dado um hiper-plano V em \mathbb{E}^n dizemos que um k -plano W que não está contido em V é *perpendicular a V* se W intersesta V e $\rho_V(W) = W$, e escrevemos $W \perp V$. Podemos então formular a proposição anterior dizendo que por cada R em V existe uma única reta perpendicular a V que passa por R .

PROPOSIÇÃO 6.10. *Sejam V e W hiper-planos em \mathbb{E}^n se $W \perp V$ então $V \perp W$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja P um ponto em V que não está em W . Queremos $\rho_W(P) \in W$. Como a projeção ortogonal é definida em termos da métrica temos que $f(P^W) = f(P)^{f(W)}$ para qualquer isometria f . Logo temos $\rho_V(P^W) = \rho_V(P)^{\rho_V(W)} = \rho_V(P)^W = P^W$, onde

também usamos $\rho_V(W) = W$ e $\rho_V(P) = P$. Logo $P^W \in V$, pelo que $\rho_W(P) \in V$, como queríamos. \square

Para terminar esta secção damos expressões analíticas para a projecção ortogonal e a reflexão para um hiper-plano $V \subset \mathbb{R}^n$ que passa pelo ponto \mathbf{x}_0 e é perpendicular ao vetor não nulo \mathbf{v} , que escolhemos unitário, $|\mathbf{v}| = 1$:

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \rangle = 0\}.$$

Então a reflexão $\rho_V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por

$$(6.1) \quad \rho_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$$

e a projecção ortogonal $\pi_V: \mathbb{R}^n \rightarrow V$, $P \mapsto P^V$ é dada por

$$\pi_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}.$$

7. Decomposição de isometrias em reflexões

LEMA 7.1. *Seja $k \leq n + 1$ e sejam P_1, \dots, P_k e Q_1, \dots, Q_k duas coleções de k pontos distintos em \mathbb{E}^n tais que $d(P_i, P_j) = d(Q_i, Q_j)$ para todos os i, j . Então existe uma isometria $f = \rho_k \circ \rho_{k-1} \circ \dots \circ \rho_1$, em que cada ρ_i é ou uma reflexão ou a identidade, tal que $Q_i = f(P_i)$ para $i = 1, \dots, k$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos fazer a demonstração por indução segundo k . Para $k = 1$ temos dois pontos P_1 e Q_1 e podemos tomar ρ_1 a reflexão em $\text{med}(P_1, Q_1)$ se P_1 e Q_1 são distintos e $\rho_1 = \text{Id}$ se $P_1 = Q_1$.

Suponha agora que o resultado vale para $k - 1$. Usando a hipótese de indução obtemos uma isometria $g = \rho_{k-1} \circ \dots \circ \rho_1$, em que cada ρ_i é ou uma reflexão ou a identidade, tal que $Q_i = g(P_i)$ para $i = 1, \dots, k - 1$. Seja ρ_k a reflexão no hiper-plano V definido por $V = \text{med}(Q_k, g(P_k))$ se $Q_k \neq g(P_k)$, e $\rho_k = \text{Id}$ se $Q_k = g(P_k)$. Vejamos que $f = \rho_k \circ g = \rho_k \circ \rho_{k-1} \circ \dots \circ \rho_1$ satisfaz $Q_i = f(P_i)$ para $i = 1, \dots, k$ como desejado. Em primeiro lugar temos $f(P_k) = \rho_k(g(P_k)) = Q_k$. Em segundo lugar temos, para $j < k$, que

$$d(Q_j, g(P_k)) = d(g(P_j), g(P_k)) = d(P_j, P_k) = d(Q_j, Q_k),$$

onde na segunda igualdade usamos que g é uma isometria e na terceira a hipótese do lema. Logo $Q_j \in V$ para $j < k$ e, portanto, $\rho_k(Q_j) = Q_j$. Concluimos que $f(P_j) = \rho_k(g(P_j)) = \rho_k(Q_j) = Q_j$ também para $j < k$ como queríamos. \square

COROLÁRIO 7.2. *Qualquer isometria $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ pode ser decomposta em, no máximo, $n + 1$ reflexões.*

DEMONSTRAÇÃO. Escolha uma coleção de $n + 1$ pontos em posição geral e defina $Q_i = f(P_i)$ para $i = 1, \dots, n + 1$. Pelo Lema 7.1 existe uma isometria $\tilde{f}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$, escrita como composta de, no máximo, $n + 1$ reflexões, com $Q_i = \tilde{f}(P_i)$ para $i = 1, \dots, n + 1$. Para terminar a prova recordamos do Corolário 5.5) que uma isometria é determinada pelas imagens de $n + 1$ pontos em posição geral, pelo que $f = \tilde{f}$. \square

Chamamos a atenção para a natureza algorítmica da demonstração do Lema 7.1. Em particular, este método vai-nos ser essencial na classificação das isometrias do plano e do espaço na Secção 8.

NOTA 7.3. O Lema 7.1 também é importante, porque permite escolher coordenadas convenientes através da aplicação de uma isometria apropriada, o que constitui uma ferramenta poderosa em muitas situações.

Terminamos esta secção com a classificação das isometrias de \mathbb{E}^n em *diretas* e *opostas*. Tomamos como ponto de partida a decomposição (do Corolário 7.2) de uma isometria $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ como composta $f = \rho_k \circ \cdots \circ \rho_1$ de reflexões. É importante notar-se que esta decomposição de uma isometria **não é única**. No entanto, vamos ver que a paridade de k é a mesma para qualquer tal decomposição. Para isso recordamos de (2.1) que, usando um sistema de coordenadas $\phi: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos representar qualquer isometria f como uma transformação afim $\tilde{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$(7.1) \quad \tilde{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Aqui $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ é fixo e A é uma matriz ortogonal, ou seja ${}^tAA = I$. Notemos que $\det({}^tAA) = \det(A)^2$ e logo $\det(A) = \pm 1$.

PROPOSIÇÃO 7.4. *Seja $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ uma isometria. Então o valor ± 1 de $\det(A)$ é o mesmo para todas as representações (7.1) de f como transformação afim $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (independentemente do sistema de coordenadas escolhido).*

DEMONSTRAÇÃO. Se f tem a representação (7.1) num determinado sistema de coordenadas, então a sua representação noutra sistema de coordenadas é $\theta \circ \tilde{f} \circ \theta^{-1}$, onde $\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a respetiva mudança de coordenadas. Como θ é uma isometria podemos escrever

$$\theta(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

e calcular, usando $\theta^{-1}(\mathbf{x}) = C^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{d})$:

$$\begin{aligned} \theta \circ \tilde{f} \circ \theta^{-1}(\mathbf{x}) &= \theta(\tilde{f}(C^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{d}))) \\ &= \theta(AC^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{d}) + \mathbf{b}) \\ &= CAC^{-1}\mathbf{x} - CAC^{-1}\mathbf{d} + C\mathbf{b} + \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Concluimos que a matriz ortogonal da representação de f no novo sistema de coordenadas é CAC^{-1} , que tem determinante $\det(CAC^{-1}) = \det(A)$ como queríamos. \square

À luz da proposição anterior, a seguinte definição faz sentido.

DEFINIÇÃO 7.5. Uma isometria $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ diz-se *direta* ou *par*, se o determinante da parte linear da sua representação em coordenadas é igual a $+1$, f diz-se *oposta* ou *ímpar* se esse determinante é igual a -1 .

Às vezes também é conveniente definir o *signal* de uma isometria f como $\epsilon(f) = +1$ se f é par e $\epsilon(f) = -1$ se f é ímpar.

EXERCÍCIO 7.6. Prove as seguintes afirmações.

- A identidade $\text{Id}: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é par.
- Uma reflexão $\rho: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é ímpar.
- O sinal ϵ de uma isometria (introduzido em cima) satisfaz $\epsilon(f \circ g) = \epsilon(f) \cdot \epsilon(g)$.
- Se $f = \rho_k \circ \cdots \circ \rho_1$ é a composta de k reflexões, então $\epsilon(f) = (-1)^k$.

A alínea (d) do exercício anterior é particularmente importante: **embora a decomposição de uma isometria f como composta de reflexões esteja longe de ser única, a paridade do número de reflexões é a mesma para qualquer tal decomposição.**

8. Classificação geométrica das isometrias do plano e do espaço

Começamos por considerar isometrias $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ compostas por duas reflexões. Seja $f = \rho_2 \circ \rho_1$ composta por duas reflexões ρ_1 e ρ_2 nos hiper-planos distintos V_1 e V_2 , respetivamente. Então existem duas alternativas para f :

Os hiper-planos V_1 e V_2 são paralelos: translação. Neste caso podemos escolher coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{E}^n \cong \mathbb{R}^n$ tais que V_1 é o hiper-plano $x_1 = 0$ e V_2 é da forma $x_1 = b$. Assim temos

$$\begin{aligned}\rho_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (-x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \rho_2(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= (2b - x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Portanto f é dada por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + 2b, x_2, \dots, x_n),$$

ou seja, f é translação pelo vetor $\mathbf{b} = (2b, 0, \dots, 0)$. Note-se que uma translação (distinta da identidade) não tem pontos fixos⁵.

EXERCÍCIO 8.1. Mostre que reflexão em $b \in \mathbb{R}$ é dada por $\rho(x) = 2b - x$.

EXERCÍCIO 8.2. Mostre que a composta $f = \rho_2 \circ \rho_1$ de reflexões em hiper-planos paralelos V_1 e V_2 é a identidade se e só se $V_1 = V_2$.

Os hiper-planos V_1 e V_2 interseitam-se: rotação. Neste caso vamos escolher coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ em $\mathbb{E}^n \cong \mathbb{R}^n$ tais que V_1 é o hiper-plano $x_2 = 0$ e V_2 é da forma $\Pi_{\mathbf{w}}$ com vetor normal $\mathbf{w} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0, \dots, 0)$. Note-se que apenas as coordenadas (x_1, x_2) são transformadas de forma não trivial pelas respetivas reflexões, pelo que podemos supor que $n = 2$. Então temos:

$$\begin{aligned}\rho_1(x_1, x_2) &= (x_1, -x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ \rho_2(x_1, x_2) &= A(x_1, x_2),\end{aligned}$$

onde a matriz A é dada pelo Ex. 8.3 em baixo. Portanto $f = \rho_2 \circ \rho_1$ tem matriz

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

ou seja, f é rotação pelo ângulo 2θ em torno de $(0, 0)$. Para n geral f é essa mesma rotação nas coordenadas (x_1, x_2) , mantendo as restantes coordenadas constantes; por exemplo, em \mathbb{R}^3 , a matriz de f é

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que representa uma rotação por 2θ em torno do eixo dos x_3x_3 . Note-se que qualquer rotação de \mathbb{E}^3 tem uma reta fixa ponto a ponto, chamado o seu *eixo*.

EXERCÍCIO 8.3. Seja $l \subset \mathbb{R}^2$ a reta dada pela equação $-(\sin \theta)x + (\cos \theta)y = 0$. Mostre que reflexão em l é dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Sugestão: Recorde-se da formula (6.1).

⁵Recordamos que um *ponto fixo* de $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ é um ponto $P_0 \in \mathbb{E}^n$ tal que $f(P_0) = P_0$.

Conhecemos agora todas as isometrias de \mathbb{E}^n que podem ser decompostas em, no máximo, duas reflexões. Apresentamos de seguida mais alguns tipos de isometria composta de 3 ou 4 reflexões. Os teoremas de classificação das isometrias de \mathbb{E}^2 e \mathbb{E}^3 dizem que estes tipos esgotam todas as isometrias.

Reflexão com deslizamento. Seja $\tau: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ translação segundo o vetor \mathbf{v} e seja $\rho: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ reflexão num hiper-plano paralelo a \mathbf{v} (por outras palavras, se \mathbf{w} é um vetor normal ao hiper-plano então $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$). Então a composta $f = \tau \circ \rho$ chama-se uma *reflexão com deslizamento*. Em coordenadas apropriadas podemos escrever $\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + b, x_2, \dots, x_n)$ e $\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, -x_2, \dots, x_n)$, e logo

$$(8.1) \quad \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + b, -x_2, \dots, x_n);$$

desta expressão vemos que a ordem de τ e ρ não importa:

$$f = \tau \circ \rho = \rho \circ \tau.$$

Note-se que f pode ser escrita como composta de três reflexões: as duas primeiras em hiper-planos paralelos e a terceira num hiper-plano ortogonal a estes dois.

EXERCÍCIO 8.4. Escreva explicitamente a expressão (8.1) para uma reflexão com deslizamento nos casos $n = 2$ e $n = 3$.

Reflexão rotativa. Na abordagem dos dois últimos tipos de isometria vamos supor que $n = 3$ (embora possam também ser definidas em dimensões superiores). Primeiro consideramos uma rotação $r: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ pelo ângulo θ em torno do eixo l seguida de uma reflexão $\rho: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ num plano Π perpendicular ao eixo l . A composta $f = \rho \circ r$ chama-se uma *reflexão rotativa*.

EXERCÍCIO 8.5. Suponha que em coordenadas apropriadas em \mathbb{E}^3 o eixo de rotação de r é o eixo dos x_3x_3 e que o plano de reflexão de ρ é o plano $x_3 = 0$. Determine as matrizes de r e ρ e mostre que a reflexão rotativa $f = \rho \circ r$ tem matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mostre também que a ordem de r e ρ não importa: $f = \rho \circ r = r \circ \rho$.

Fazemos algumas notas sobre reflexões rotativas:

- (1) o plano Π e o eixo l são invariantes por f ;
- (2) se $r \neq \text{Id}$, então a reflexão rotativa $f = \rho \circ r$ tem um único ponto fixo P_0 , nomeadamente o ponto de interseção de Π com l ;
- (3) uma reflexão rotativa f pode ser escrita como composta de três reflexões: as duas primeiras em planos que se intersectam e a terceira num plano ortogonal a estes dois.
- (4) no caso particular em que o ângulo de rotação de r é π , a pelo ângulo θ em torno do eixo é *inversão em P_0* : a imagem $f(P)$ de cada $P \neq P_0$ é tal que P_0 é o ponto médio do segmento $\overline{Pf(P)}$, e em coordenadas com $P_0 = O$ temos $f(P) = -P$.

Parafuso. Por fim consideramos uma rotação $r: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ pelo ângulo θ em torno do eixo l seguida de uma translação $\tau: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ segundo um vetor \mathbf{v} paralelo ao eixo l . A composta $f = \tau \circ r$ chama-se um *parafuso*.

EXERCÍCIO 8.6. Suponha que em coordenadas apropriadas em \mathbb{E}^3 o eixo de rotação de r é o eixo dos x_3x_3 e que τ é translação pelo vetor $\mathbf{b} = (0, 0, b)$. Exprima o $f = \tau \circ r$ em coordenadas e verifique que a ordem de r e τ não importa: $f = \tau \circ r = r \circ \tau$.

Fazemos algumas notas sobre parafusos:

- (1) o eixo l é invariante por f ;
- (2) o parafuso $f = \tau \circ r$ tem pontos fixos se e só se τ é a identidade;
- (3) Um parafuso f pode ser escrita como composta de quatro reflexões.

EXERCÍCIO 8.7. Seja $f = \tau \circ r: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ um parafuso em que as isometrias r e τ ambas são distintas da identidade. Mostre que não é possível escrever f como composta de duas reflexões.

Sugestão: considere pontos fixos.

EXERCÍCIO 8.8. Classifique cada um dos tipos de isometria $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ atrás enunciados de acordo com a sua paridade.

TEOREMA 8.9. *Qualquer isometria $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ diferente da identidade é de um dos seguintes tipos:*

- (1) *reflexão,*
- (2) *translação,*
- (3) *rotação ou*
- (4) *reflexão com deslizamento.*

DEMONSTRAÇÃO. A estratégia da demonstração é a seguinte. Para uma dada isometria f consideramos as transformadas por f de um ponto não fixo P e construímos (em geral, usando o método do Lema 7.1) uma sequência de reflexões g que tem o mesmo efeito em P que f . Depois usamos o Corolário 6.8 para relacionar g e f e, assim, determinar f . Note-se que este resultado no presente caso de $n = 2$ diz o seguinte:

Se P e Q são pontos distintos e f e g são isometrias com $f(P) = g(P)$ e $f(Q) = g(Q)$ então ou $g = f$ ou $g = \rho \circ f$, onde ρ é reflexão na reta por $f(P)$ e $f(Q)$.

Suponhamos que $f \neq \text{Id}$, então existe um ponto P tal que $f(P) \neq P$. Consideramos três casos (não exclusivos):

Caso 1: existe P tal que $Q = f(P) \neq P$ e $f(Q) = P$. Consideramos ρ_1 , a reflexão em $l_1 = \text{med}(P, Q)$. Então $\rho_1(P) = Q$ e $\rho_1(Q) = P$. Portanto f e ρ_1 têm o mesmo efeito nos pontos distintos P e Q , e concluímos que ou $f = \rho_1$ ou $f = \rho_2 \circ \rho_1$, onde ρ_2 é reflexão na reta PQ . Assim, f é ou uma reflexão ou a composta de reflexões em retas perpendiculares.

Caso 2: $P, Q = f(P)$ e $R = f(Q)$ são distintos e colineares. Neste caso consideramos ρ_1 , a reflexão em $l_1 = \text{med}(P, Q)$ e ρ_2 a reflexão em $l_2 = \text{med}(P, R)$. Então l_1 e l_2 são paralelas e $g = \rho_2 \circ \rho_1$ é uma translação que satisfaz $g(P) = Q$ e $g(Q) = R$. Portanto f e g têm o mesmo efeito nos pontos distintos P e Q , e concluímos que ou $f = g$ ou $f = \rho_3 \circ g$, onde ρ_3 é reflexão na reta $QR = PQ$. Como a reta QR é perpendicular às retas l_1 e l_2 , vemos que f é ou uma translação ou uma reflexão com deslizamento.

Caso 3: existe um P tal que $P, Q = f(P)$ e $R = f(Q)$ não são colineares. Consideramos novamente ρ_1 , a reflexão em $l_1 = \text{med}(P, Q)$ e ρ_2 a reflexão em $l_2 = \text{med}(P, R)$. Então l_1 e l_2 interseitam-se e $g = \rho_2 \circ \rho_1$ é rotação em torno do seu ponto de interseção e satisfaz $g(P) = Q$ e $g(Q) = R$.

Para terminar a prova basta exhibir uma segunda isometria h distinta de g que é de um dos tipos enunciados e satisfaz $h(P) = Q$ e $h(Q) = R$, já que sabemos que existem apenas duas isometrias com essa propriedade e logo $f = g$ ou $f = h$. Para isso, considerem-se o pontos médios M de \overline{PQ} e N de \overline{QR} , respetivamente, a reta $l = MN$ e a perpendicular m a l por M . Se ρ_l e ρ são as reflexões em m e l , respetivamente, é então fácil ver que a reflexão com deslizamento $h = \rho_2 \circ \rho_m \circ \rho_l$ satisfaz $h(P) = Q$ e $h(Q) = R$. Por fim, se

$h = g$ teríamos $\rho_2 \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \rho_m \circ \rho_l$, donde $\rho_1 = \rho_m \circ \rho_l$, o que é impossível (considerando pontos fixos). \square

EXERCÍCIO 8.10. Seja $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ uma isometria distinta da identidade com $f \circ f = \text{Id}$. Mostre que f é ou uma reflexão ou uma *meia-volta*, isto é, uma rotação pelo ângulo π .

TEOREMA 8.11. *Qualquer isometria $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ diferente da identidade é de um dos seguintes tipos:*

- (1) *reflexão,*
- (2) *translação,*
- (3) *rotação,*
- (4) *reflexão com deslizamento,*
- (5) *reflexão rotativa, ou*
- (6) *parafuso.*

DEMONSTRAÇÃO. A chave da demonstração é mostrar que existe uma direção em \mathbb{E}^3 que é invariante por f e seguir uma estratégia semelhante ao caso $n = 2$ para identificar f como uma das isometrias do enunciado. Note-se que no caso $n = 3$ o Corolário 6.8 diz o seguinte:

Se P, Q e R são pontos não colineares e f e g são isometrias com $f(P) = g(P)$, $f(Q) = g(Q)$ e $f(R) = g(R)$, então ou $g = f$ ou $g = \rho \circ f$, onde ρ é reflexão no plano por $f(P), f(Q)$ e $f(R)$.

Suponhamos primeiro que f tem um ponto fixo P_0 . Se para algum $P \neq P_0$ os pontos P_0, P e $f(P)$ são colineares, então a reta $l = P_0P$ é invariante por f . Portanto, o plano Π que é perpendicular a l e passa por P_0 é invariante por f , e concluímos que a restrição $g = f|_{\Pi}: \Pi \rightarrow \Pi$ de f a Π é uma isometria com um ponto fixo, nomeadamente P_0 . Pela classificação das isometrias de \mathbb{E}^2 vem que essa restrição é uma rotação ou uma reflexão, e em cada um destes casos podemos prolongá-la a uma isometria do mesmo tipo $g: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$. Como Π contém três pontos não colineares concluímos que $f = g$ ou $f = \rho \circ g$, onde ρ é reflexão em Π . Assim, se g é uma reflexão, então ou f também o é ou f é uma rotação (em torno de um eixo contido em Π). De modo análogo, se g é uma rotação, então ou f também o é ou f é uma reflexão rotativa.

Continuamos a considerar o caso em que f tem um ponto fixo P_0 , mas suponha agora que para algum P os pontos P_0, P e $Q = f(P)$ não são colineares. Vamos construir uma isometria g que tem o mesmo efeito que f nestes três pontos. Para isso seja $V_1 = \text{med}(P, f(P))$ e $V_2 = \text{med}(P, f(Q))$. Então a composta $g = \rho_2 \circ \rho_1$ das reflexões em V_1 e V_2 , respetivamente, satisfaz o desejado. Logo f e g coincidem no plano Π por P_0, P e $Q = f(P)$ e temos que $f = g$ ou $f = \rho_3 \circ g$, onde ρ_3 é reflexão em Π . No primeiro caso f é uma rotação em torno da perpendicular a Π por P_0 e no segundo caso f é uma reflexão rotativa com o mesmo eixo.

Consideramos agora o caso em que f não tem nenhum ponto fixo. Seja τ_0 a translação pelo vetor $\overrightarrow{f(P_0)P_0}$. Então a isometria $g = \tau_0 \circ f$ fixa P_0 e logo, pelos casos já considerados, tem um plano invariante Π (que passa por P_0). Note-se que $f = \tau_0^{-1} \circ g$ leva o plano Π num plano paralelo. Seja Q_0 a projeção ortogonal de $f(P_0)$ em Π e seja τ translação pelo vetor $\overrightarrow{f(P_0)Q_0}$, que é ortogonal a Π ; então $g = \tau \circ f$ é uma isometria que preserva Π . **Esta decomposição de f segundo direções perpendiculares é a chave do argumento, que permite identificar f como sendo de um dos tipos do enunciado.** Passamos a explicar os detalhes ao leitor interessado. Se $\tau \neq \text{Id}$ vai ser útil escrever $\tau = \rho_{\Pi} \circ \rho_0$, onde ρ_{Π} é reflexão em Π e ρ_0 é reflexão na mediatriz de $f(P_0)$ e Q_0 que é paralelo a Π ; temos então $f = \rho_0 \circ \rho_{\Pi} \circ g$. Analisemos agora as várias possibilidades para a restrição $g|_{\Pi}$ de g a Π , que é uma isometria de um plano euclidiano, para tirar conclusões sobre

$f = \tau^{-1} \circ g = \rho_0 \circ \rho_{\Pi} \circ g$; em cada um dos casos existem duas isometrias de \mathbb{E}^3 que se restringem a $g|_{\Pi}$ em Π , e estas duas isometrias diferem por reflexão em Π .

- (1) Se $g|_{\Pi}$ é a identidade, então as duas possibilidades para g são:
 - g é a identidade e logo $f = \tau^{-1}$ é uma translação.
 - $g = \rho_{\Pi}$ é reflexão em Π e, se $\tau \neq \text{Id}$, temos $f = \rho_0 \circ \rho_{\Pi} \circ g = \rho_0$.
- (2) Se $g|_{\Pi}$ é uma reflexão numa reta l em Π , então as duas possibilidades para g são:
 - g é reflexão no plano ortogonal a Π por l . Como esse plano é paralelo ao vetor de translação de τ vemos que f é uma reflexão com deslizamento.
 - g é reflexão no plano ortogonal a Π por l composta com ρ_{Π} , ou seja, g é uma rotação por π em torno de l . Ainda, se $\tau \neq \text{Id}$, temos que f é a composta de ρ_0 com reflexão no plano ortogonal a Π por l , e logo f é uma rotação (por π).
- (3) Se $g|_{\Pi}$ é uma translação, então as duas possibilidades para g são:
 - g é uma translação τ_{Π} por um vetor paralelo a Π e logo $f = \tau^{-1} \circ g$ também é uma translação.
 - $g = \rho_{\Pi} \circ \tau_{\Pi}$ é uma reflexão com deslizamento. Como o plano de reflexão de ρ_0 é paralelo a Π vemos que $f = \rho_0 \circ \tau_{\Pi}$ é uma reflexão com deslizamento.
- (4) Se $g|_{\Pi}$ é uma rotação, então as duas possibilidades para g são:
 - g é uma rotação r em torno de uma reta l perpendicular a Π . Neste caso $f = \tau^{-1} \circ g$ é um parafuso.
 - $g = \rho_{\Pi} \circ r$ é uma reflexão rotativa com eixo l . Neste caso $f = \rho_0 \circ$ também é uma reflexão rotativa com eixo l .
- (5) Se $g|_{\Pi}$ é uma reflexão com deslizamento, então as duas possibilidades para g são:
 - $g = g_0$ é uma reflexão com deslizamento cujo plano de reflexão Π_0 é perpendicular a Π . Logo a direção de τ é paralelo a esse plano e f é uma reflexão com deslizamento.
 - $g = \rho_{\Pi} \circ g_0$. Como o vetor de translação de G_0 é paralelo a Π e Π_0 vemos que $f = \rho_0 \circ g_0$ é um parafuso (cujo eixo é $\Pi \cap \Pi_0$ e ângulo de rotação é π).

□

Exercícios

1. Mostre que uma matriz ortogonal 2×2 , A , é uma *matriz de rotação*,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

se e só se $\det(A) = 1$, e uma *matriz de reflexão*,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

se e só se $\det(A) = -1$.

2. Seja $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ uma matriz de reflexão. Calcule os vetores e valores próprios de A e deduza que A é reflexão por uma reta pela origem em \mathbb{R}^2 .

3. Seja $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ uma isometria par que fixa um ponto O . Mostre que f é uma rotação cujo eixo passa por O .

4. Seja $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 .

- (a) Mostre que existe uma única isometria $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(O) = O$ e $f(e_i) = \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, 3$ (como habitualmente (e_1, e_2, e_3) é a base canônica de \mathbb{R}^3).

- (b) Suponha que a base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ é de *orientação positiva* o que, por definição, significa que $\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) > 0$. Mostre que a isometria f da alínea (a) é uma rotação cujo eixo passa por O .
- (c) Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação. Mostre que f pode escrita como composta de rotações em torno dos três eixos de coordenadas.

Sugestão: Defina $\mathbf{u}_i = f(e_i)$ e encontre uma isometria composta de rotações em torno dos três eixos de coordenadas que envia e_i em \mathbf{u}_i para $i = 1, 2, 3$.

CAPÍTULO 2

Geometria Esférica

1. Conceitos básicos da geometria esférica

DEFINIÇÃO 1.1. A superfície esférica de dimensão dois e raio $r > 0$ é

$$\mathbb{S}_r^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Escrevemos $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_1^2$ para a superfície esférica de raio 1.

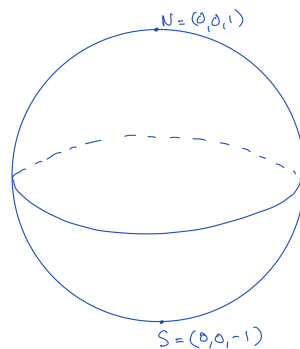


FIGURA 1.1. A superfície esférica \mathbb{S}^2

Recordamos ainda que um *círculo máximo* $C \subset \mathbb{S}_r^2$ por definição é a interseção entre \mathbb{S}^2 e um plano por O em \mathbb{R}^3 :

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid ax + by + cz = 0\} = \mathbb{S}^2 \cap \Pi_{\mathbf{w}}$$

onde

$$\Pi_{\mathbf{w}} = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{w} \rangle = 0\}.$$

é o plano por O ortogonal ao vetor não nulo $\mathbf{w} = (a, b, c)$.

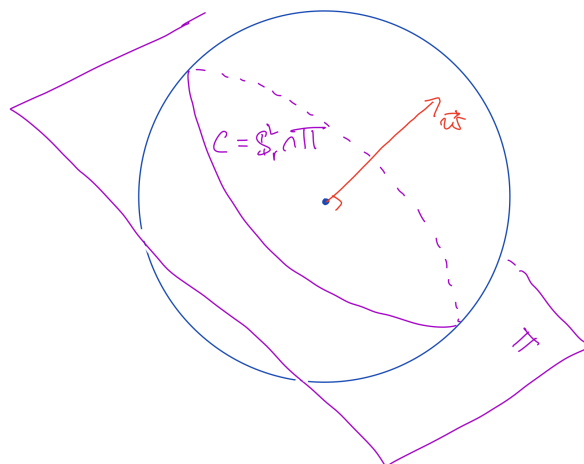


FIGURA 1.2. Círculo máximo

EXERCÍCIO 1.2. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}_r^2$ vetores ortogonais a \mathbf{w} , e ortogonais entre si. Mostre que a curva

$$\alpha(t) = (\cos t)\mathbf{u} + (\sin t)\mathbf{v}$$

parametriza o círculo máximo $C = \mathbb{S}^2 \cap \Pi_{\mathbf{w}}$.

Para fazer geometria em \mathbb{S}_r^2 precisamos de uma métrica. A ideia é medir a distância entre dois pontos ao longo do arco mais curto de círculo máximo que une P a Q . Definimos a *métrica esférica* por

$$(1.1) \quad d_{\mathbb{S}_r^2}(P, Q) = r \arccos \left(\frac{\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle}{r^2} \right) \in [0, r\pi].$$

Quando não existe risco de confusão escrevemos simplesmente $d(P, Q) = d_{\mathbb{S}_r^2}(P, Q)$.

É claro que a função distância $d_{\mathbb{S}_r^2}$ tem as propriedades de uma métrica no sentido da Definição 1.1, com a exceção da desigualdade triangular que será demonstrada em baixo.

EXERCÍCIO 1.3. Seja $\alpha(t)$ a parametrização de um círculo máximo do Ex. 1.2. Mostre que

$$\int_a^b |\alpha'(t)| dt = r(b - a).$$

Recorde-se que o comprimento de arco de uma curva diferenciável $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é $l(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$ e conclua que o comprimento do arco mais curto de círculo máximo que une $P = \alpha(a)$ a $Q = \alpha(b)$ é, de facto, $r \arccos(\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle / r^2) = d(P, Q)$.

A forma (1.1) da métrica esférica fornece-nos logo uma grande quantidade de isometrias de \mathbb{S}_r^2 , nomeadamente as transformações induzidas por isometrias lineares de \mathbb{R}^3 . Recordamos que estas são as transformações ortogonais $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ de \mathbb{R}^3 , onde a matriz A satisfaz ${}^tAA = I$.

PROPOSIÇÃO 1.4. *Seja f a restrição a \mathbb{S}_r^2 de uma transformação ortogonal $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x}$ de \mathbb{R}^3 .*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{S}_r^2 &\rightarrow \mathbb{S}_r^2, \\ \mathbf{x} &\rightarrow A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Então f é uma isometria de \mathbb{S}_r^2 .

DEMONSTRAÇÃO. É imediato da definição (1.1), tendo em conta que transformações ortogonais preservam o produto escalar em \mathbb{R}^3 . \square

O nosso próximo objetivo será provar a desigualdade triangular, e a proposição anterior permite-nos escolher coordenadas que facilitam a nossa tarefa. Para simplificar a notação, suponhamos que $r = 1$. Assim, para pontos P, Q e R em \mathbb{S}^2 podemos, depois de aplicar uma isometria convenientemente escolhida, supor que $P = (0, 0, 1)$, que Q está no semi-plano com $y = 0$ e $x \geq 0$ e que R está no semi-espaço $y \geq 0$, conforme indicado na Figura 1.3.

Escreva $\gamma = d(P, Q)$, $\beta = d(P, R)$, $\alpha = d(Q, R)$ e seja $a \in [0, \pi]$ o ângulo entre o plano xOz e o plano¹ OPR conforme indicado na figura. Então, lembrando que as distâncias β e

¹Se $R = \pm P = (0, 0, \pm 1)$ então O, P e R são colineares e não existe um plano único por estes três pontos. Podemos, neste caso, atribuir qualquer valor a $a \in [0, \pi]$ e os nossos argumentos mantêm-se válidos.

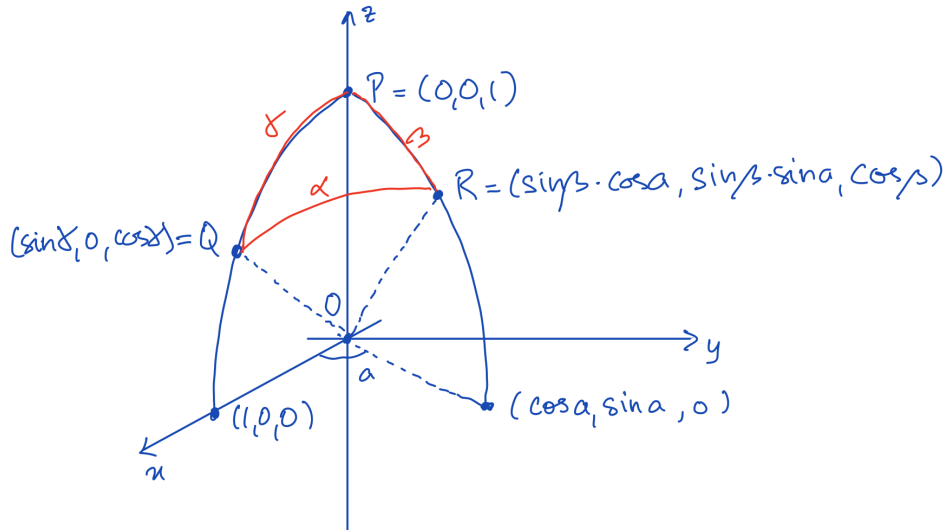


FIGURA 1.3. A desigualdade triangular esférica

γ são comprimentos de arco de circunferências de raio 1 e, portanto, ângulos, concluímos que

$$\begin{aligned} Q &= (\sin \gamma, 0, \cos \gamma), \\ R &= \cos \beta(0, 0, 1) + \sin \beta(\cos a, \sin a, 0) \\ &= (\sin \beta \cos a, \sin \beta \sin a, \cos \beta). \end{aligned}$$

Logo o co-seno da distância $\alpha = d(Q, R)$, que é dada por $\cos \alpha = \langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR} \rangle$, pode ser calculada:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \cos \alpha &= \langle (\sin \gamma, 0, \cos \gamma), (\sin \beta \cos a, \sin \beta \sin a, \cos \beta) \rangle \\ &= \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 1.5. *Sejam P, Q e R pontos de \mathbb{S}_r^2 . Então*

$$d(Q, R) \leq d(Q, P) + d(P, R)$$

com igualdade se e só se P, Q e R estão no mesmo círculo máximo.

DEMONSTRAÇÃO. Usando a notação que acabámos de introduzir, vamos comparar $\cos \alpha$ dado por (1.2) com

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma.$$

Recordando que β, γ e em $[0, \pi]$ vem que $\sin \beta \geq 0$ e $\sin \gamma \geq 0$, e temos ainda $\cos a \geq -1$. Logo vemos que

$$\cos \alpha \geq \cos(\beta + \gamma).$$

Mas a função \cos é decrescente em $[0, \pi]$ e concluímos que $\alpha \leq \beta + \gamma$, que é a desigualdade triangular.

Falta apenas ver o caso da igualdade. Exceto nos casos $\beta = 0$ e $\gamma = 0$ que são triviais, vemos da análise anterior que a igualdade só pode acontecer se $\cos a = -1$, ou seja $a = \pi$. E neste caso, de facto os pontos P, Q e R estão todos no círculo máximo $\mathbb{S}_r^2 \cap \{y = 0\}$. \square

Concluímos da desigualdade triangular que o traço de uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ que preserva distâncias (localmente) está contido num círculo máximo. Esta observação justifica a nossa próxima definição.

DEFINIÇÃO 1.6. Uma *reta esférica* $l \subseteq \mathbb{S}_r^2$ é o mesmo que um círculo máximo.

EXERCÍCIO 1.7. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}_r^2$ vetores ortogonais a \mathbf{w} e ortogonais entre si, e defina

$$(1.3) \quad \beta(t) = \cos(t/r)\mathbf{u} + \sin(t/r)\mathbf{v}.$$

Mostre que $\beta(t)$ parametriza a reta esférica $\mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_{\mathbf{w}}$ e que $d(\beta(s), \beta(t)) = |s - t|$ para $|s - t| \leq r\pi$.

O exercício anterior mostra que a curva $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ é uma geodésica parametrizada, que se diz *completa* por o seu domínio ser \mathbb{R} . Dizemos que uma curva $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ da forma (1.3) é uma *reta esférica parametrizada*.

Recordamos que dois pontos P e Q em \mathbb{S}_r^2 são *antípodas* se $P = -Q$.

PROPOSIÇÃO 1.8. *Sejam P e Q pontos distintos e não antípodas em \mathbb{S}^2 . Então passa uma única reta esférica por P e Q .*

DEMONSTRAÇÃO. Recorde-se que uma reta esférica é da forma $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi$, onde Π é um plano por O . Assim, Π define uma reta esférica $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi$ por P e Q se e só se Π passa por O, P e Q . A hipótese da proposição é equivalente a dizer que O, P e Q não são colineares e logo existe um único plano Π nas condições pretendidas. \square

NOTA 1.9. A exclusão de pontos antípodas na proposição anterior é típica em geometria esférica. É como se o ponto antípoda $-P$ fosse uma imagem fantasma de P que não devia contar na nossa geometria. O problema com esta ideia é decidir qual dos dois pontos P e $-P$ excluir de consideração. Podemos adotar a seguinte forma de contornar este problema: perante uma determinado configuração de pontos em \mathbb{S}_r^2 , iremos escolher cada ponto ou o seu ponto antípoda de modo a que a nova coleção assim obtida esteja toda contida num hemisfério. Isto justifica que frequentemente fazemos esta hipótese nos nossos resultados. Note-se que este procedimento não é canónico e, por isso, não completamente satisfatório. Voltaremos mais tarde de forma mais sistemática a esta questão.

A proposição anterior é completamente análoga à situação da geometria euclidiana: por quaisquer dois pontos distintos passa uma única reta. No entanto, no que diz respeito à interseção de retas distintas a geometria esférica tem um comportamento completamente diferente: **não existem retas paralelas!**

PROPOSIÇÃO 1.10. *Sejam l e m retas esféricas. Então l e m interseitam-se num par de pontos antípodas.*

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_l$ e $m = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_m$, onde Π_l e Π_m são planos por O , necessariamente distintos. Então Π_l e Π_m interseitam-se ao longo de uma reta $r \subset \mathbb{R}^3$ por O , e os dois pontos de interseção de r com \mathbb{S}_r^2 são os pontos antípodas de interseção de l com m . \square

EXERCÍCIO 1.11. Sejam P e Q pontos antípodas em \mathbb{S}_r^2 e seja R um terceiro ponto. Mostre que existe uma reta esférica por P, Q e R . Logo, se três pontos P, Q e R são não colineares (em \mathbb{S}_r^2 !), então não existe nenhum par de pontos antípodas entre eles.

Dualidade. Em geometria esférica existe uma relação interessante entre pontos e retas. Por um lado, dada uma reta esférica $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi \subset \mathbb{S}_r^2$, a reta por O em \mathbb{R}^3 ortogonal ao plano Π interseita \mathbb{S}_r^2 em dois pontos antípodas, a que chamamos os *pólos* de l . Por outro lado, um ponto P (ou um par de pontos antípodas P e $-P$) determina uma reta por O e a reta esférica obtida por interseção do plano ortogonal a essa reta com \mathbb{S}_r^2 chama-se a *reta dual a P* (ou, às vezes, o *equador dos pólos P e $-P$*).

2. Ângulos em geometria esférica

O nosso próximo objetivo é estudar o conceito de ângulo em geometria esférica. Para tal vamos utilizar o conceito euclidiano, pelo que vamos precisar dos conceitos de vetor tangente e reta tangente.

DEFINIÇÃO 2.1. Seja $P \in \mathbb{S}_r^2$. O *plano tangente a \mathbb{S}_r^2 em P* é o plano $T_P\mathbb{S}_r^2$ por P ortogonal ao vetor \overrightarrow{OP} .

O plano afim $T_P\mathbb{S}_r^2$ tem um ponto distinguido P , e vamos equipá-lo com a estrutura de espaço vectorial correspondente em que P corresponde ao vetor nulo. Dizemos que $\mathbf{v} \in T_P\mathbb{S}_r^2$ é um *vetor tangente a $T_P\mathbb{S}_r^2$ em P* .

DEFINIÇÃO 2.2. Seja $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi$ uma reta esférica. A *reta tangente $T_P l$ a l em $P \in \mathbb{S}_r^2$* é a interseção do plano Π com o plano por P ortogonal ao vetor \overrightarrow{OP} . Um *vetor tangente a l em P* é um vetor $\mathbf{v} \in T_P\mathbb{S}_r^2$ na direção de l .

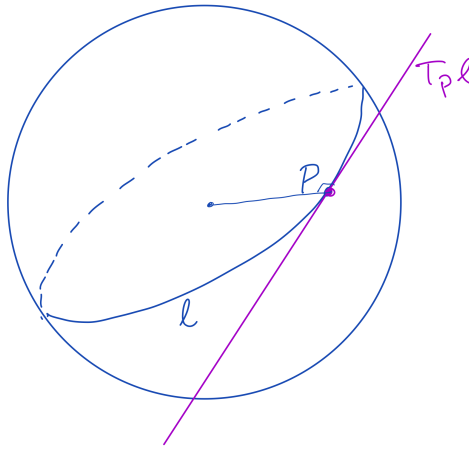


FIGURA 2.1. Reta tangente

Note-se que a reta tangente também pode ser identificada com a reta no plano Π que passa por P e é perpendicular ao vetor \overrightarrow{OP} .

NOTA 2.3. Em cada ponto P de uma reta esférica l existem dois vetores unitários tangentes a l em P , correspondentes às duas orientações possíveis de l .

EXERCÍCIO 2.4. Considere a parametrização (1.3) de uma reta esférica l . Mostre que $\mathbf{a} = \beta'(t)$ é um vetor tangente unitário a l no ponto $\beta(t)$. Dado $P = \beta(t_0)$ encontre ainda uma parametrização $\tilde{\beta}(s)$ de l de modo a que $\tilde{\beta}(0) = P$ e $\tilde{\beta}'(0) = -\mathbf{a}$.

DEFINIÇÃO 2.5. Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} vetores tangentes a \mathbb{S}_r^2 em P . O *ângulo entre \mathbf{v} e \mathbf{w} em geometria esférica* é o ângulo euclidiano $\theta \in [0, \pi]$ formado por \mathbf{v} e \mathbf{w} no plano euclidiano $T_P\mathbb{S}_r^2$, isto é,

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|}.$$

DEFINIÇÃO 2.6. Sejam l e m retas em \mathbb{S}_r^2 que se interseçam no ponto P . O *ângulo de interseção de l com m em P* é o ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ entre as retas tangentes $T_P l$ e $T_P m$.

Note-se que $T_P l$ e $T_P m$ são retas em $T_P\mathbb{S}_r^2$ que se interseçam em P , pelo que faz sentido falar no seu ângulo de interseção. Note-se também que ângulo de interseção de l com m

em P no ponto antípoda $-P$ é o mesmo que o ângulo de interseção em P . Note-se ainda que podemos orientar l e m através da escolha de vetores tangentes em P , e nesse caso faz sentido considerar o ângulo θ no intervalo $[0, \pi]$.

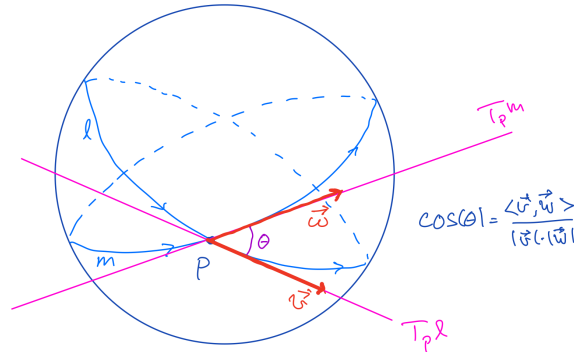


FIGURA 2.2. Ângulo em geometria esférica

Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} vetores tangentes às retas esféricas l e m , respetivamente, como indicado na Figura 2.2. Podemos representar $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_{\mathbf{a}}$ e $m = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_{\mathbf{b}}$, onde como habitualmente $\Pi_{\mathbf{u}}$ é o plano por O ortogonal ao vetor \mathbf{u} . Para relacionar o ângulo formado por \mathbf{v} e \mathbf{w} com o ângulo formado por \mathbf{a} e \mathbf{b} precisamos de uma escolha consistente do sentido destes dois últimos vetores: convencionamos que são escolhidos de modo a que $(\mathbf{v}, \mathbf{a}, \overrightarrow{OP})$ seja uma base de *orientação positiva*² de \mathbb{R}^3 , e analogamente para $(\mathbf{w}, \mathbf{b}, \overrightarrow{OP})$. Temos então que

$$\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|},$$

já que uma rotação por $\pi/2$ em torno de \overrightarrow{OP} transforma \mathbf{v} e \mathbf{w} em vetores com o mesmo sentido que \mathbf{a} e \mathbf{b} , respetivamente. Assim, o ângulo formado por \mathbf{v} e \mathbf{w} pode ser calculado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Tomamos por definição o *ângulo*³ formado por dois planos como sendo igual ao ângulo em $[0, \pi/2]$ formado por vetores normais aos planos. Fixando os sentidos dos vetores normais (equivalentemente, fixando orientações nos planos) podemos considerar esse ângulo no intervalo $[0, \pi]$.

Com estas definições temos o seguinte resultado imediato.

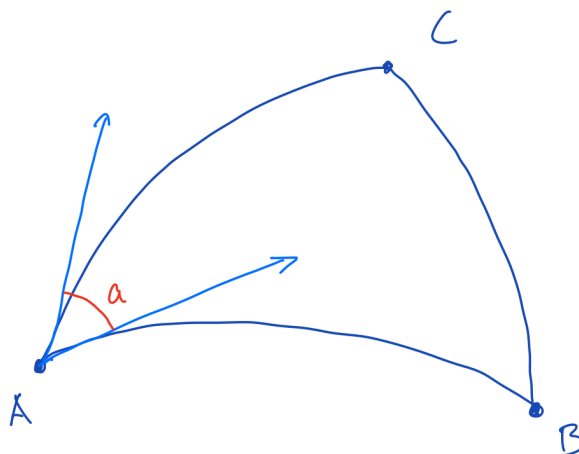
PROPOSIÇÃO 2.7. *Sejam $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_l$ e $m = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_m$ retas esféricas distintas. Então o ângulo de interseção de l com m coincide com o ângulo entre os planos Π_l e Π_m em \mathbb{R}^3 .* \square

3. Trigonometria esférica

Estamos agora em condições de avançar para a trigonometria. O nosso primeiro objetivo será definir o conceito de triângulo.

²Isto significa $\det(\mathbf{v}, \mathbf{a}, \overrightarrow{OP}) > 0$.

³O ângulo formado por dois planos chama-se às vezes um *ângulo diedral*.

FIGURA 3.1. Ângulo interno a de um triângulo esférico

DEFINIÇÃO 3.1. Um *triângulo esférico* ΔABC em \mathbb{S}_r^2 é a figura formada por três pontos distintos A , B e C (os *vértices* do triângulo).

As *arestas* do triângulo esférico ΔABC são os arcos de círculo máximo mais curto que une os seus vértices.

NOTA 3.2. No caso degenerado de existirem dois pontos antípodas entre os vértices A , B e C é preciso especificar um dos infinitos arcos de círculo máximo que une esses dois pontos antípodas como aresta de ΔABC . Note-se que o terceiro vértice está num arco que une os dois vértices antípodas, arco esse que forma duas arestas.

NOTA 3.3. Mais geralmente, é possível considerar triângulos esféricos em que as arestas não são necessariamente os arcos de círculo máximo mais curto, sendo então sempre necessário especificar também as arestas, além dos vértices. Os triângulos esféricos acima definidos passam então a ser designados *próprios*. Não vamos precisar deste conceito mais geral.

Podemos agora definir os ângulos de um triângulo esférico. Para isso note-se que um vetor tangente a uma aresta num vértice de um triângulo esférico pode apontar na direção do outro vértice da aresta ou na direção oposta.

DEFINIÇÃO 3.4. O *ângulo* no vértice A do triângulo esférico ΔABC é o ângulo em $[0, \pi]$ formado por vetores tangentes às arestas \overline{AB} e \overline{AC} em A que apontam na direção do outro vértice da respetiva aresta.

NOTA 3.5. Dado um polígono em \mathbb{S}_r^2 , isto é, uma região conexa cujo bordo é uma curva simples e fechada em (conceitos que não vamos definir formalmente), formada por arcos de círculo máximo, podemos definir uma orientação do bordo convencionando que o interior do polígono se encontra do lado esquerdo do bordo quando percorrido no sentido positivo. Faz então sentido definir um conceito de ângulo interno do polígono no intervalo $[0, 2\pi[$ em cada vértice. Se temos um triângulo esférico podemos definir o seu interior como sendo aquela das duas regiões delimitadas pelo triângulo que está contida num hemisfério. Temos, assim, um polígono no sentido que acabámos de introduzir, e os ângulos internos desse polígono coincide com os ângulos do triângulo esférico.

O resultado principal sobre a geometria dos triângulos esféricos é o seguinte.

TEOREMA 3.6 (Lei dos co-senos esférica). *Seja ΔABC um triângulo esférico com ângulos a , b e c e comprimentos dos lados opostos α , β e γ , respetivamente. Então*

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

□

De facto, já demonstrámos a lei dos co-senos esférica em (1.2). A novidade reside na interpretação das grandezas α , β , γ como lados, e a como um ângulo, de um triângulo esférico.

NOTA 3.7. Para ϵ pequeno podemos aproximar as funções trigonométricas pelas suas séries de Taylor:

$$\cos \epsilon = 1 - \epsilon^2/2 + \dots, \quad \sin \epsilon = \epsilon - \epsilon^3/6 + \dots$$

Assim, descartando potências superiores a dois em α , β e γ temos a aproximação

$$\begin{aligned} 1 - \alpha^2/2 &\approx (1 - \beta^2/2)(1 - \gamma^2/2) + (\beta - \beta^3/6)(\gamma - \gamma^3/6) \cos a \\ &\approx 1 - \beta^2/2 - \gamma^2/2 + \beta\gamma \cos a. \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\alpha^2 \approx \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos a.$$

Portanto, para um triângulo esférico suficientemente pequeno a lei dos co-senos esférica é aproximadamente a lei dos co-senos euclidiana. Vemos, assim, outra manifestação da ideia de ver a geometria euclidiana como uma situação limite da geometria esférica para distâncias pequenas⁴

4. Mediatrizes, reflexões e isometrias em geometria esférica

Vamos desenvolver os conceitos de mediatriz e reflexão em analogia com a geometria euclidiana plana.

DEFINIÇÃO 4.1. Sejam P e P' pontos distintos em \mathbb{S}_r^2 . A *mediatriz* de P e P' é

$$\text{med}(P, P') = \{Q \in \mathbb{S}_r^2 \mid d(Q, P) = d(Q, P')\}$$

PROPOSIÇÃO 4.2. A *mediatriz* $\text{med}(P, P') \subseteq \mathbb{S}_r^2$ é uma *reta esférica*.

DEMONSTRAÇÃO. Recordando a definição da função distância da geometria esférica temos que $d(Q, P) = d(Q, P')$ se e só se

$$\langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP} \rangle = \langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP'} \rangle$$

ou, equivalentemente,

$$\langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{PP'} \rangle = 0.$$

Assim, $\text{med}(P, P')$ é a interseção de \mathbb{S}_r^2 com o plano por O perpendicular a $\overrightarrow{PP'}$, que é de facto uma reta esférica. □

Note-se que a prova da proposição anterior fornece uma forma prática de calcular a mediatriz. O facto de a mediatriz ser uma reta conduz imediatamente ao seguinte resultado fundamental.

PROPOSIÇÃO 4.3. Um ponto $Q \in \mathbb{S}_r^2$ é determinada pelas suas distâncias a três pontos não colineares em \mathbb{S}_r^2 . Por outras palavras, se P_0, P_1 e P_2 são tres pontos não colineares, e Q e Q' satisfazem $d(Q, P_i) = d(Q', P_i)$ para $i = 1, 2, 3$, então $Q = Q'$.

DEMONSTRAÇÃO. Se $Q \neq Q'$, então a condição $d(Q, P_i) = d(Q', P_i)$ para $i = 1, 2, 3$ implica que os pontos P_1, P_2 e P_3 estão na reta $\text{med}(Q, Q')$ e logo são colineares. □

PROPOSIÇÃO 4.4. Uma isometria de \mathbb{S}_r^2 é determinada pela sua ação em três pontos não colineares.

⁴Equivalentemente, podemos ver a geometria euclidiana como uma situação limite da geometria esférica numa esfera \mathbb{S}_r^2 de raio suficientemente grande.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que P_0, P_1 e P_2 são tres pontos não colineares e f e g são isometrias de \mathbb{S}_r^2 com $f(P_i) = g(P_i)$ para $i = 1, 2, 3$. Note-se que os três pontos $f(P_0), f(P_1)$ e $f(P_3)$ não são colineares (porquê?). Além disso, para qualquer $Q \in \mathbb{S}_r^2$ tem-se

$$d(f(Q), f(P_i)) = d(Q, P_i) = d(g(Q), g(P_i)) = d(g(Q), f(P_i)), \quad i = 1, 2, 3,$$

e concluímos pela Proposição 4.3 que $f(Q) = g(Q)$. \square

O nosso próximo objetivo é introduzir o conceito de reflexão em geometria esférica. Como reflexão num plano pela origem em \mathbb{R}^3 preserva \mathbb{S}_r^2 , a seguinte definição faz sentido.

DEFINIÇÃO 4.5. seja $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi$ uma reta esférica. *Reflexão em l* é a aplicação $\rho_l: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ definida por

$$\rho_l(P) = \rho_\Pi(P),$$

onde $\rho_\Pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é reflexão no plano Π .

Se \mathbf{w} é um plano normal ao plano Π pela origem podemos naturalmente calcular a reflexão em $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi$ pela fórmula para ρ_Π :

$$\rho_l(P) = P - 2\langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w}.$$

Enunciamos na proposição seguinte algumas propriedades da reflexão em geometria esférica, em analogia com a geometria euclidiana.

PROPOSIÇÃO 4.6. *Reflexão $\rho_l: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ numa reta esférica l tem as seguintes propriedades.*

- (1) ρ_l é uma isometria de \mathbb{S}_r^2 .
- (2) ρ_l fixa l ponto a ponto.
- (3) Sejam P e P' pontos distintos em \mathbb{S}_r^2 . Então $\rho_l(P) = P'$ se e só se $l = \text{med}(P, P') \subset \mathbb{S}_r^2$.
- (4) ρ_l troca os dois lados⁵ de l em \mathbb{S}_r^2 .
- (5) ρ_l tem ordem dois: $\rho_l \circ \rho_l = \text{Id}: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ e $\rho_l \neq \text{Id}$.

DEMONSTRAÇÃO. A reflexão $\rho_l: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ é uma isometria por ser a restrição de uma isometria ρ_Π de \mathbb{R}^3 que preserva a origem e que é, portanto, uma transformação ortogonal. As restantes afirmações são consequências imediatas das propriedades análogas para a reflexão ρ_Π em \mathbb{R}^3 . \square

TEOREMA 4.7 (das três reflexões). *Se P_0 e P_1 são pontos distintos e não antípodas em \mathbb{S}_r^2 e P'_0 e P'_1 são pontos tais que $d(P_0, P_1) = d(P'_0, P'_1)$ então existe uma isometria $f: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$, composta de no máximo duas reflexões, tal que $f(P_0) = P'_0$ e $f(P_1) = P'_1$. A única outra isometria com esta propriedade é $g = \rho \circ f$, onde ρ é reflexão na reta esférica $P'_0P'_1$.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova é idêntica à prova do teorema análogo no plano euclidiano que vimos no Capítulo 1. \square

EXERCÍCIO 4.8. Escreva uma demonstração do Teorema 6.1.

COROLÁRIO 4.9. *Qualquer isometria $f: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ é a restrição de uma isometria $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preserva a origem.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma reflexão $\rho_l: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ é certamente a restrição de uma isometria de \mathbb{R}^3 que preserva a origem e o resultado segue porque qualquer isometria de \mathbb{S}_r^2 é a composta de reflexões. \square

⁵Entendemos por *lados* de l os dois hemisférios aberto em \mathbb{S}_r^2 delimitados por l .

NOTA 4.10. Seja

$$\text{Isom } \mathbb{S}_r^2 := \{f: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2 \mid f \text{ é uma isometria}\}$$

o grupo de isometrias de \mathbb{S}_r^2 . Então o Corolário 4.9 mostra que temos uma identificação

$$\text{Isom}(\mathbb{S}_r^2) \cong \text{O}(3) := \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\},$$

fazendo a matriz ortogonal A corresponder à isometria de \mathbb{S}_r^2 dada por multiplicação por A . Note-se que a matriz I corresponde à identidade $\text{Id}: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ e que o produto de matrizes corresponde à composta das respetivas isometrias de \mathbb{S}_r^2 . Em linguagem algébrica exprimimos estes facto dizendo que o grupo $\text{Isom}(\mathbb{S}_r^2)$ é *isomorfo* ao grupo ortogonal $\text{O}(3)$.

Exatamente como na geometria euclidiana podemos agora introduzir o conceito de *paridade* de uma isometria de \mathbb{S}_r^2 : uma isometria diz-se *par* se é a composta de um número par de reflexões e *ímpar* se é a composta de um número ímpar de reflexões. Uma isometria é par se e só se corresponde a uma matriz ortogonal A com $\det(A) = 1$ e ímpar se e só se corresponde a uma matriz ortogonal A com $\det(A) = -1$.

Estamos agora em condições de proceder à classificação geométrica das isometrias de \mathbb{S}_r^2 . O mesmo usado na classificação geométrica das isometrias de \mathbb{E}^2 do Teorema 8.9 funciona, mas o resultado final é diferente porque não existem retas paralelas em geometria esférica, e logo também não temos isometrias correspondentes às translações. Antes de enunciar o teorema de classificação introduzimos os tipos de isometria que vamos encontrar, além das reflexões.

Rotação. Consideremos a composta $f = \rho_2 \circ \rho_1$ de duas reflexões de \mathbb{S}_r^2 , onde $\rho_i: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ é reflexão na reta esférica $l_i = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_{\mathbf{w}_i}$ para $i = 1, 2$; aqui $\Pi_{\mathbf{w}_i}$ é o plano por O ortogonal ao vetor \mathbf{w}_i que tomamos unitário.

Então ρ_i é a restrição a \mathbb{S}_r^2 da reflexão $\tilde{\rho}_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ no plano $\Pi_{\mathbf{w}_i}$. Logo f é a restrição a \mathbb{S}_r^2 da composta $F = \tilde{\rho}_2 \circ \tilde{\rho}_1$, que é uma rotação em \mathbb{R}^3 com eixo $\Pi_{\mathbf{w}_1} \cap \Pi_{\mathbf{w}_2}$. Mais precisamente, F é rotação pelo ângulo 2θ em torno de $\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2$, onde $\cos \theta = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$. Chamamos a f uma *rotação de \mathbb{S}_r^2* pelo ângulo 2θ . Note-se que f fixa **dois** pontos antípodas e se $f \neq \text{Id}$ então estes são os únicos pontos fixos de f . Além disso, o equador correspondente a estes dois pontos fixos é uma reta invariante por f , e esta é a única reta invariante por f , exceto se $f = \text{Id}$ ou $\theta = \pi$.

Reflexão com deslizamento. Uma *reflexão com deslizamento* é uma isometria $f: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ que pode ser escrita como uma composta $f = \rho \circ r = r \circ \rho$, onde r é uma rotação em torno do par de pontos antípodas P e $-P$ e ρ é reflexão no equador destes pólos. Note-se que uma reflexão com deslizamento é a restrição a \mathbb{S}_r^2 de uma reflexão rotativa em \mathbb{R}^3 cujo eixo e plano de reflexão passam por O . Uma reflexão rotativa diferente da identidade não tem pontos fixos e a sua única reta invariante é o equador dos polos da rotação, exceto se f é a *aplicação antípoda*:

$$\begin{aligned} A: \mathbb{S}_r^2 &\rightarrow \mathbb{S}_r^2, \\ P &\mapsto -P. \end{aligned}$$

Note-se que A é a composta de três reflexões em retas esféricas perpendiculares.

TEOREMA 4.11. *Qualquer isometria $f: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ diferente da identidade é de um dos seguintes tipos:*

- (1) *reflexão,*
- (2) *rotação ou*
- (3) *reflexão com deslizamento.*

DEMONSTRAÇÃO. Convidamos o leitor a fazer as adaptações necessárias à demonstração do Teorema 8.9 que se aplica praticamente palavra a palavra, mas notando que a composta de duas reflexões é sempre uma rotação (e nunca uma translação). \square

5. A área de um triângulo esférico

Sai fora do âmbito deste curso tratar de forma rigorosa o conceito de área de uma região em \mathbb{S}_r^2 ; referimos o leitor interessado à literatura sobre geometria diferencial, por exemplo [1] ou [2]. Para nós basta saber que é possível definir um conceito de área (um número real positivo) de uma região $F \subseteq \mathbb{S}_r^2$ delimitada por um número finito de arcos de círculo máximo com as seguintes propriedades.

- (1) Se $F = F_1 \cup F_2$, onde a interseção $F_1 \cap F_2$ está contida num número finito de arcos de círculo máximo, então $\text{Área}(F_1 \cup F_2) = \text{Área}(F_1) + \text{Área}(F_2)$; esta propriedade chama-se *aditividade*.
- (2) A área é invariante por isometrias: $\text{Área}(f(F)) = \text{Área}(F)$ para qualquer isometria $f: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$.
- (3) A área da superfície esférica de raio r é $\text{Área}(\mathbb{S}_r^2) = 4\pi r^2$.

Chamamos um *gomo de abertura* a da região delimitada por dois semi-círculos máximos que se intersectam em pontos antípodas com um ângulo interno a , conforme indicado na Figura 5.1.

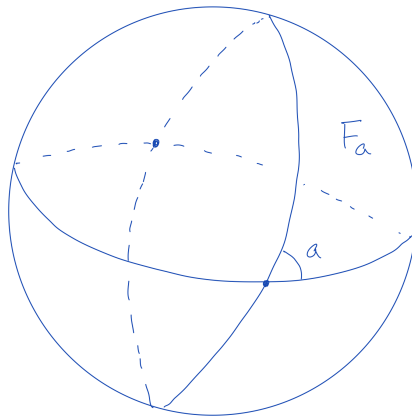


FIGURA 5.1. Gomo

LEMA 5.1. A área de um gomo $F_a \subseteq \mathbb{S}_r^2$ de abertura a é $2ar^2$.

DEMONSTRAÇÃO. As propriedades (1) e (2) da área implicam que a área de F_a é proporcional a a , e o fator de proporcionalidade pode ser determinado notando que um gomo de abertura 2π coincide com toda a superfície esférica, cuja área é $4\pi r^2$ pela propriedade (3). Logo

$$\text{Área}(F_a) = \frac{a}{2\pi} \text{Área}(\mathbb{S}_r^2) = \frac{a}{2\pi} 4\pi r^2 = 2ar^2.$$

\square

TEOREMA 5.2. A área de um triângulo esférico $\Delta \subset \mathbb{S}_r^2$ com ângulos internos a, b e c é dada por

$$\frac{1}{r^2} \text{Área}(\Delta) = (a + b + c) - \pi.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\Delta = \Delta ABC \subset \mathbb{S}_r^2$ e considere as retas esféricas obtidas prolongando as arestas de Δ , conforme indicado na Figura 5.2. O par de retas esféricas que passa por A define uma região Σ_a constituído por um par de gomos opostos que inclui

Δ , e cuja área é $\text{Área}(\Sigma_a) = 2\text{Área}(F_a) = 4ar^2$. Analogamente temos regiões Σ_b e Σ_c , de áreas $4br^2$ e $4cr^2$, respetivamente. Além disso, a reunião destas três regiões cobre a esfera toda e a sua interseção é a reunião de ΔABC e o triângulo geometricamente igual $\Delta A'B'C'$ “no verso” de \mathbb{S}_r^2 , cujos vértices são os pontos antípodas de A , B e C . Podemos, assim, calcular a área de \mathbb{S}_r^2 somando as áreas de Σ_a , Σ_b e Σ_c e subtraindo as quatro vezes que a área de ΔABC é contada a mais (duas vezes para ΔABC e duas vezes para $\Delta A'B'C'$):

$$4\pi r^2 = \text{Área}(\mathbb{S}_r^2) = 4ar^2 + 4br^2 + 4cr^2 - 4\text{Área}(\Delta) = 4(r^2(a + b + c) - \text{Área}(\Delta)),$$

donde obtemos o resultado pretendido. \square

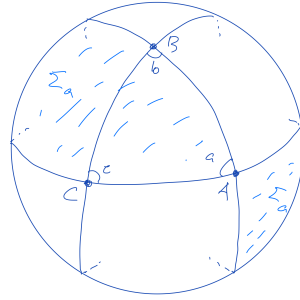


FIGURA 5.2. A área de um triângulo esférico

6. O triângulo polar

O produto escalar em \mathbb{R}^3 define uma *dualidade* entre retas e planos por O , fazendo a uma reta por O corresponder o plano ortogonal por O , e vice-versa. Evidentemente, repetindo esta operação duas vezes leva-nos de volta à reta ou ao plano original. Uma vez que em geometria esférica retas e planos por O correspondem a pares de pontos antípodas e retas esféricas, respetivamente, podemos definir:

- A *reta esférica dual*, ou o *equador*, de um ponto P (ou um par de pontos antípodas P e $-P$) é $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi_{\overrightarrow{OP}}$.
- Os *pólos* da reta esférica $l = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi$ são os pontos de interseção da reta por O perpendicular a Π com \mathbb{S}_r^2 .

A dualidade entre retas e planos que enunciámos atrás implica que a reta esférica dual dos pólos de uma reta esférica l é a própria reta l , e vice-versa.

Vamos agora usar estas ideias para associar um novo triângulo a cada triângulo esférico. Nesta secção, para quaisquer três pontos não colineares A , B e C em \mathbb{S}_r^2 vamos definir ΔABC como o triângulo esférico próprio determinado pelos arcos de círculo máximo que unem os vértices. Observamos que os pontos antípodas $\bar{A} = -A$, $\bar{B} = -B$ e $\bar{C} = -C$ definem um segundo triângulo esférico $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ que é isométrico a ΔABC (através da aplicação antípoda).

DEFINIÇÃO 6.1. Sejam A , B e C três pontos não colineares em \mathbb{S}_r^2 . Seja A' o pólo da reta esférica BC que está no mesmo hemisfério que A , ou seja, tal que $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'} \rangle > 0$, e defina B' e C' de modo análogo. O triângulo $\Delta A'B'C'$ chama-se o *triângulo esférico polar*, ou *dual*, de ΔABC .

TEOREMA 6.2. *O triângulo dual do triângulo dual de ΔABC é o próprio ΔABC .*

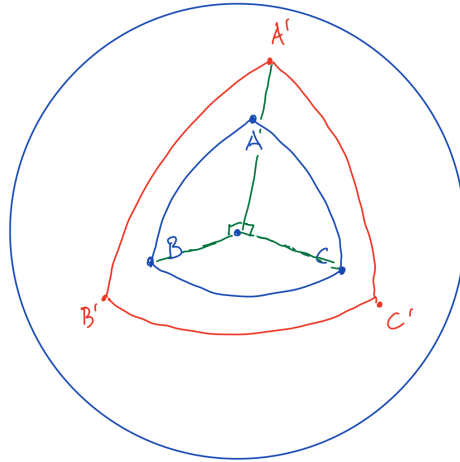


FIGURA 6.1. Triângulo dual

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\Delta A'B'C'$ o triângulo dual de ΔABC . Então, por definição, B' é o pólo de AC e logo \vec{OA} e \vec{OB}' são ortogonais. Do mesmo modo, C' é o pólo de AB e logo \vec{OA} e \vec{OC}' são ortogonais. Concluimos que \vec{OA} é ortogonal ao plano $OB'C'$, isto é, A é o pólo da reta esférica $B'C'$. Além disso, os pontos A e A' estão no mesmo hemisfério. Assim A é um vértice do triângulo polar de $\Delta A'B'C'$. Aplicando o mesmo argumento a B e C vem que ΔABC é o triângulo dual de $\Delta A'B'C'$, como queríamos demonstrar. \square

TEOREMA 6.3 (do triângulo dual). *Seja Δ um triângulo esférico com ângulos internos a, b e c , e comprimentos dos lados apostos α, β e γ , respectivamente. Seja ainda Δ' o triângulo dual de Δ , com ângulos internos a', b' e c' , e comprimentos dos lados apostos α', β' e γ' , respectivamente. Então*

$$\begin{aligned} \alpha' &= r(\pi - a), & \beta' &= r(\pi - b), & \gamma' &= r(\pi - c), \\ \alpha &= r(\pi - a'), & \beta &= r(\pi - b'), & \gamma &= r(\pi - c'). \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja B'' o ponto de interseção⁶ de AB com $B'C'$ e seja C'' o ponto de interseção de AC com $B'C'$ (veja-se a Figura 6.2). Então, uma vez que, A é o pólo de

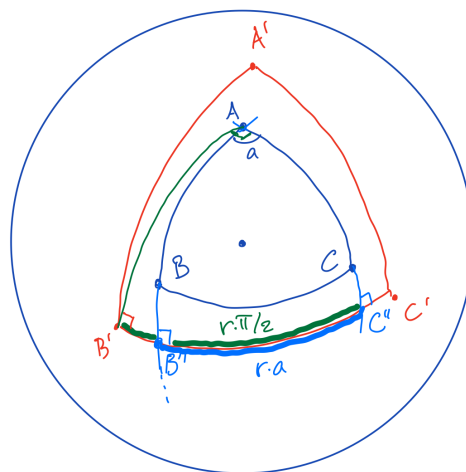


FIGURA 6.2. Prova do Teorema do triângulo dual

⁶De facto existem dois tais pontos de interseção. Tomamos aquele que está do mesmo lado de AC que o pólo B' , e analogamente para C'' .

$B'C'$ a distância (esférica) entre B'' e C'' é igual a r vezes o ângulo a :

$$(6.1) \quad d(B'', C'') = ra.$$

Além disso, como B' é o pólo de A temos que o ângulo $\angle B'AC$ é $\pi/2$. Assim, como $B'C' = B'C''$ é o equador de A vem que a distância entre B' e C'' é

$$(6.2) \quad d(B', C'') = r\pi/2.$$

Analogamente temos

$$(6.3) \quad d(C', B'') = r\pi/2.$$

Usando (6.1), (6.2) e (6.3) deduzimos que

$$\begin{aligned} \alpha' &= d(B', C') \\ &= d(B', C'') + d(C', B'') - d(B'', C'') \\ &= r\pi/2 + r\pi/2 - ra \\ &= r(\pi - a) \end{aligned}$$

como queríamos. As formulas para β' e γ' obtêm-se por uma simples mudança dos nomes. As fórmulas para α , β e γ seguem das que acabámos de demonstrar, tendo em conta o Teorema 6.2 nos diz que ΔABC é o triângulo dual de $\Delta A'B'C'$. \square

7. A projeção estereográfica

Para simplificar notação vamos supor que $r = 1$ nesta secção, salvo indicação em contrário. Além disso será conveniente designar a terceira coordenada em \mathbb{R}^3 por t em vez de z . Assim, consideramos a superfície esférica unitária

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1\}.$$

Designamos o pólo norte por $N = (0, 0, 1)$.

DEFINIÇÃO 7.1. A *projeção estereográfica a partir do pólo norte* é a aplicação

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ P = (x, y, t) &\mapsto \pi(P) = (u, v), \end{aligned}$$

onde $\pi(P)$ é o ponto de interseção da reta NP com o plano $t = 0$, plano esse que identificamos com \mathbb{R}^2 da forma usual.

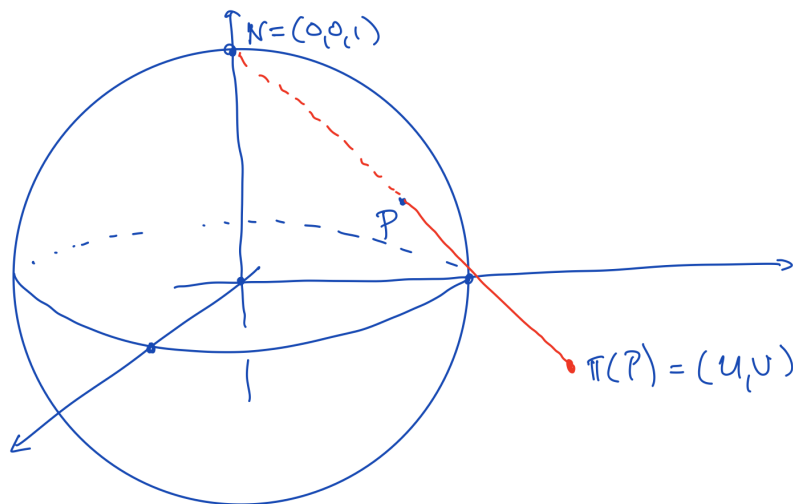


FIGURA 7.1. Projeção estereográfica

Para calcular uma expressão analítica para a projeção estereográfica consideramos o plano NOP que corta \mathbb{S}^2 numa circunferência de raio 1 e centro O , como indicado na Figura 7.1.

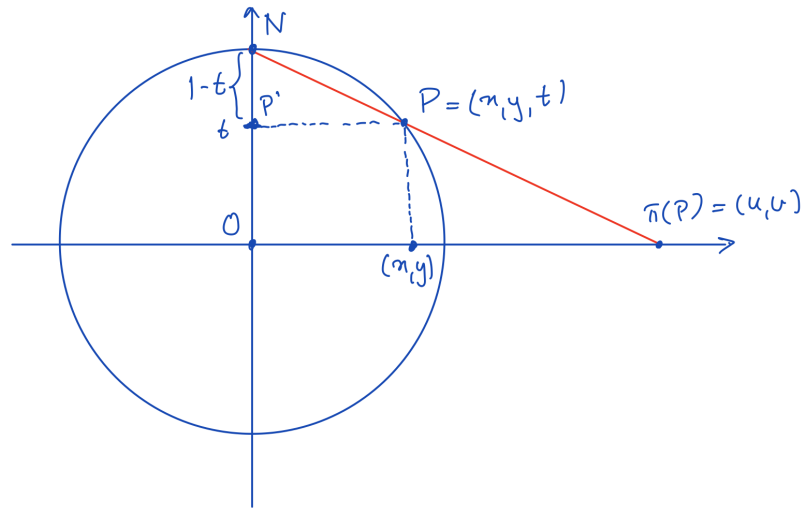


FIGURA 7.2. Cálculo de $\pi(x, y, t)$

Seja $P' = (0, 0, t)$ a projeção ortogonal de P no eixo dos tt , então os triângulos $\triangle NP'P$ e $\triangle NO\pi(P)$ são semelhantes com razão $(1-t)/1 = 1-t$ e concluímos que $(x, y) = (1-t)(u, v)$, e logo

$$(7.1) \quad \pi(x, y, t) = \frac{1}{1-t}(x, y).$$

A fim de determinar a expressão para π^{-1} temos de resolver a equação

$$(7.2) \quad (u, v) = \pi(x, y, t) = \frac{1}{1-t}(x, y)$$

em ordem a (x, y) , sabendo que x, y e t estão relacionados por

$$(7.3) \quad x^2 + y^2 + t^2 = 1.$$

Usando (7.2) e (7.3) obtemos

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{(1-t)^2}(x^2 + y^2) = \frac{1-t^2}{(1-t)^2} = \frac{1+t}{1-t}$$

donde deduzimos que

$$1-t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1} \quad \text{e} \quad t = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Logo, recordando que $(x, y) = (1-t)(u, v)$ vem

$$(7.4) \quad \pi^{-1}(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1).$$

Inversão. Antes de prosseguir com o nosso estudo da projeção estereográfica e a sua aplicação à geometria esférica precisamos de recordar a noção de inversão numa circunferência no plano euclidiano.

DEFINIÇÃO 7.2. Seja \mathcal{C} uma circunferência de centro O e raio $\rho > 0$ no plano euclidiano \mathbb{E}^2 . A *inversão em \mathcal{C}* é a aplicação $I: \mathbb{E}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ definida por $I(P) = P'$, onde P' é o único ponto na semi-reta por P de origem O que satisfaz

$$|OP||OP'| = \rho^2.$$

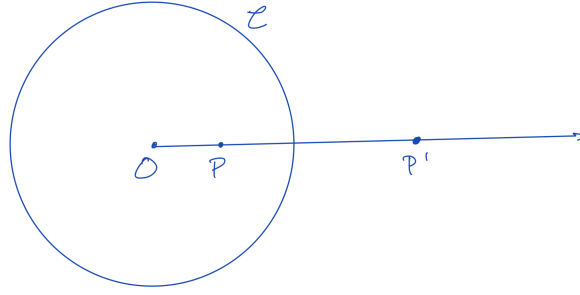


FIGURA 7.3. Inversão

Fazemos as seguintes observações:

- Se $P' = I(P)$, então $P = I(P')$, por outras palavras I tem ordem dois: $I \circ I = \text{Id}$.
- A inversão I envia o interior de \mathcal{C} no exterior de \mathcal{C} e vice-versa.
- Todos os pontos de \mathcal{C} (e mais nenhum) são fixos por I .

Vai ser-nos útil representar a inversão numa coordenada complexa $z = u+iv \in \mathbb{C} \cong \mathbb{E}^2$. Para isso começamos por considerar inversão na circunferência de centro 0 e raio ρ em \mathbb{C} . Escrevendo $z \neq 0$ com $|z| = r$ na forma polar, $z = re^{i\theta}$ vemos da definição de inversão que $I(z)$ tem o mesmo argumento que z e módulo $|I(z)| = \rho^2/|z| = \rho^2/r$. Assim,

$$(7.5) \quad I(z) = \rho^2/re^{i\theta} = \frac{\rho^2}{re^{-i\theta}} = \frac{\rho^2}{\bar{z}}.$$

Em particular, inversão na circunferência unitária $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ é dada por $I(z) = 1/\bar{z}$. Por fim usamos que inversão numa circunferência geral $\mathcal{C}_{d,\rho}$ de centro $d \in \mathbb{C}$ e raio $\rho > 0$ pode ser escrita como

$$I(z) = \tau \circ J \circ \tau^{-1},$$

onde τ é translação por d e J é a inversão (7.5) em $\mathcal{C}_{0,\rho}$. Recordando que $\tau(z) = z + d$ obtemos então que inversão em $\mathcal{C}_{d,\rho}$ é dada por

$$I(z) = \frac{\rho^2}{\bar{z} - \bar{d}} + d.$$

O nosso próximo objetivo é provar que inversão envia circunferências em circunferências. Para isso notamos que podemos reescrever a equação $|z - d|^2 = \rho^2$ da circunferência $\mathcal{C}_{d,\rho}$ como

$$\begin{aligned} \rho^2 &= |z - d|^2 \\ &= (z - d)(\bar{z} - \bar{d}) \\ &= z\bar{z} - \bar{d}z - d\bar{z} + d\bar{d}. \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$(7.6) \quad \sigma = d\bar{d} - \rho^2$$

podemos escrever a equação de $\mathcal{C}_{d,\rho}$

$$(7.7) \quad z\bar{z} - \bar{d}z - d\bar{z} + \sigma = 0.$$

Reciprocamente, dados $d \in \mathbb{C}$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ tais que $\rho^2 = |d|^2 - \sigma > 0$ a equação (7.7) define a circunferência $\mathcal{C}_{d,\rho}$ de centro d e raio ρ^2 . Note-se que $\sigma = 0$ se e só se $|d| = \rho$, ou seja, se e só se $\mathcal{C}_{d,\rho}$ passa por $0 \in \mathbb{C}$.

PROPOSIÇÃO 7.3. *Seja I inversão numa circunferência \mathcal{C} em \mathbb{C} e seja $\mathcal{C}_{d,\rho}$ a circunferência de centro d e raio ρ . Então $I(\mathcal{C}_{d,\rho})$ é uma circunferência, exceto se $\mathcal{C}_{d,\rho}$ passa pelo centro de \mathcal{C} , caso em que $I(\mathcal{C}_{d,\rho})$ é uma reta. Além disso, se o centro de \mathcal{C} é diferente de d , então no primeiro caso o centro de $I(\mathcal{C}_{d,\rho})$ está na reta por d e o centro de \mathcal{C} , e no segundo caso $I(\mathcal{C}_{d,\rho})$ é ortogonal a essa reta.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha sem perda de generalidade que a circunferência de inversão \mathcal{C} é a circunferência unitária \mathbb{S}^1 de centro 0. Escrevendo

$$w = I(z) = 1/\bar{z} \iff z = 1/\bar{w}$$

queremos provar que o lugar dos w , tais que $z \in \mathcal{C}_{d,\rho}$, é uma circunferência. Usando (7.7) sabemos que $z \in \mathcal{C}_{d,\rho}$ se e só se

$$\begin{aligned} z\bar{z} - \bar{d}z - d\bar{z} + \sigma &= 0 \\ \iff \frac{1}{\bar{w}} \frac{1}{w} - \bar{d} \frac{1}{\bar{w}} - d \frac{1}{w} + \sigma &= 0 \\ \iff 1 - \bar{d}w - d\bar{w} + \sigma w\bar{w} &= 0. \end{aligned}$$

Se $\sigma \neq 0$ podemos dividir por σ e obtemos

$$w\bar{w} - \frac{\bar{d}}{\sigma}w - \frac{d}{\sigma}\bar{w} + \frac{1}{\sigma} = 0$$

e sabemos de (7.6) e (7.7) que esta é a equação de uma circunferência, de centro $d' = \frac{d}{\sigma}$ e raio ρ' dado por $(\rho')^2 = |d|^2/\sigma^2 - \frac{1}{\sigma}$. Logo, se $d \neq 0$, então d' está na reta por 0 e d .

No caso em que $\sigma = 0$, isto é, quando $\mathcal{C}_{d,\rho}$ passa pelo centro da circunferência de inversão \mathbb{S}^1 , obtemos

$$\bar{d}w + d\bar{w} = 1$$

que, de acordo com o Exercício 7.4 em baixo, é a equação de uma reta em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, que é perpendicular à reta por 0 e d . \square

EXERCÍCIO 7.4. Seja $v = a + ib \in \mathbb{C}$ não nulo e seja $\delta \in \mathbb{R}$. Mostre que a equação

$$\bar{v}z + v\bar{z} = 2\delta$$

é a equação de uma reta l em $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ortogonal ao vetor (a, b) que passa pelo ponto $\frac{\delta}{|v|^2}v$. Em particular, se $|v| = 1$, então δ é a distância de l a 0.

Projeção estereográfica, inversão e reflexão. O seguinte teorema importante mostra que reflexões em geometria esférica correspondem a inversões no plano através da projeção estereográfica.

TEOREMA 7.5. *Seja $l = \mathbb{S}^2 \cap \Pi$ uma reta esférica, onde $\Pi = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + ct = 0\}$, e seja $\rho: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ reflexão em l .*

Se $c \neq 0$ então $\pi(l)$ é a circunferência em \mathbb{R}^2 de

- centro $P = \pi(\rho(N)) = -\frac{1}{c}(a, b)$ e
- raio $\rho = \frac{1}{c}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

e

$$\pi \circ \rho \circ \pi^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$$

é inversão em $\pi(l)$.

Se $c = 0$ (equivalentemente, l passa por N), então $\pi(l)$ é a reta de equação $ax + by = 0$ em \mathbb{R}^2 e $\pi \circ \rho \circ \pi^{-1}$ é reflexão nessa reta.

NOTA 7.6. A circunferência de inversão $\pi(l)$ no plano passa necessariamente pelos dois pontos (diametralmente opostos) de interseção de l com o circunferência unitária de centro $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 . Por outro lado, o centro de $\pi(l)$ pode ser qualquer.

NOTA 7.7. Note-se que quanto mais próximo um ponto de \mathbb{R}^2 está do centro de uma circunferência, mais afastado é a sua imagem por inversão nessa circunferência. Mais precisamente, se O é o centro da circunferência, então

$$\lim_{P \rightarrow O} I(P) = \infty$$

Também temos para $P \in \mathbb{S}^2$ que

$$\lim_{P \rightarrow N} \pi(P) = \infty.$$

Motivado por estas observações podemos acrescentar formalmente um *ponto no infinito*, designado por ∞ , ao plano e convencionar que

- se I é inversão numa circunferência de centro O , então $I(O) = \infty$ e $I(\infty) = O$,
- $\pi(N) = \infty$, e
- ∞ está em qualquer reta no plano e reflexão nessa reta fixa ∞ .

Convencionamos ainda considerar uma reta em \mathbb{R}^2 como uma circunferência⁷ cujo centro é ∞ .

Com estas convenções deixa de ser necessário fazer as exceções do enunciado do Teorema 7.5 e temos um diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{S}^2 \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} & \xrightarrow{I} & \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, \end{array}$$

onde ρ é reflexão na reta esférica l e $I = \pi \circ \rho \circ \pi^{-1}$ é inversão em $\pi(l)$. Note-se que $I = \pi \circ \rho \circ \pi^{-1} \iff I \circ \pi = \pi \circ \rho$, ou seja, os dois caminhos possíveis do canto superior esquerdo do diagrama para o canto inferior direito dão a mesma aplicação. Um diagrama com esta propriedade diz-se um *diagrama comutativo*.

Exercícios

1. Seja $P \in \mathbb{S}_r^2$ um ponto e seja $0 < \rho < r\pi$. A *circunferência esférica de centro P e raio ρ* é

$$C_\rho = \{Q \in \mathbb{S}_r^2 \mid d(P, Q) = \rho\}.$$

- (a) Mostre que o comprimento de C_ρ é $c(\rho) = 2\pi r \sin \frac{\rho}{r}$.
- (b) Usando integração, dê um argumento heurístico⁸ para a fórmula

$$A(\rho) = 2\pi r^2 \left(1 - \cos \frac{\rho}{r}\right)$$

para a área de um disco esférico de raio ρ .

- (c) Encontre as séries de Taylor centradas em $\rho = 0$ das funções $c(\rho)$ e $A(\rho)$. Compare com as fórmulas euclidianas nos limites $r \rightarrow \infty$ e $\rho \rightarrow 0+$.
- (d) Deduza de cada uma das alíneas (a) e (b) que não é possível a existência de uma isometria⁹ de uma região aberta (não vazia) de \mathbb{S}_r^2 para uma região do plano euclidiano \mathbb{R}^2 .

2. Neste exercício, suponha que $r = 1$. Seja ΔABC um triângulo esférico. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

- (1) $d(A, B) = d(A, C)$;
- (2) $\angle ABC = \angle ACB$;

⁷Quando necessário, chamamos *circunferência generalizada* a uma reta ou circunferência no plano.

⁸O argumento terá de ser heurístico porque não definimos o conceito de área de uma região esférica.

⁹Podemos usar sem prova que uma isometria preserva áreas.

(3) Existe uma isometria $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $f(A) = A$, $f(B) = C$ e $f(C) = B$.

Sugestão para (2) \implies (3): Considere a reflexão na mediatriz de \overline{BC} .

3. Descubra e prove a versão esférica do Teorema de Pitágoras.

Sugestão: Utilize a lei dos co-senos esférica.

4. Um *polígono esférico* de n lados é uma região $\Delta \subset \mathbb{S}_r^2$ delimitada por n segmentos (*arestas*) $\overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$. Suponha-se que os *vértices* P_i são distintos e que os interiores das arestas não se intersejam.

Encontre e prove uma fórmula para a área de Δ em função dos ângulos internos a_i nos vértices P_i .

5. Neste exercício, suponha que $r = 1$. Sejam α , β e γ os comprimentos dos lados de um triângulo esférico. Mostre que

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma \quad \text{e} \quad \alpha + \beta + \gamma < 2\pi.$$

Sugestão: Utilize a lei dos co-senos esférica.

6. Neste exercício, suponha que $r = 1$. Sejam α , β e γ os comprimentos dos lados de um triângulo esférico e sejam a , b e c os ângulos opostos, correspondentes aos vértices P , Q e R , respectivamente. Prove a *lei dos senos esférica*:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

Sugestão: escolha um sistema de coordenadas semelhante ao usado na prova da lei dos co-senos esférica. Mostre que a matriz A com linhas \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} e \overrightarrow{OR} tem determinante $\det(A) = \sin a \sin \beta \sin \gamma$.

7. Sejam P e Q pontos distintos em \mathbb{S}_r^2 e seja $L \subset \mathbb{S}^2$ um círculo máximo tal que P e Q estão no mesmo hemisfério relativamente a L . Mostre que o arco mais curto entre P e Q não intersesta L e que o arco mais comprido intersesta L em 2 pontos.

8. Sejam P , Q e R em \mathbb{S}_r^2 pontos não colineares. Mostre que existe um ponto $A \in \mathbb{S}_r^2$ tal que P , Q e R estão todos do mesmo lado do equador de A .

9. Neste exercício, suponha que $r = 1$. Seja ΔABC um triângulo esférico com ângulos a , b e c e lados opostos α , β e γ . Prove a *segunda lei dos co-senos esférica*

$$\cos(a) = -\cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$

usando o teorema do triângulo polar e a (primeira) lei dos co-senos esférica.

10. Utilize o teorema do triângulo polar para provar a implicação (2) \implies (1) do exercício 2.

11. Seja

$$C_\rho = \{Q \in \mathbb{S}_r^2 \mid d(P, Q) = \rho\}.$$

uma circunferência esférica ($0 < \rho < \pi r$). Mostre que $C_\rho = \mathbb{S}_r^2 \cap \Pi$ para um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ e que, reciprocamente, um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ com distância a $O = (0, 0, 0)$ inferior a r intersesta \mathbb{S}_r^2 numa circunferência esférica.

12. Seja

$$C_\rho = \{Q \in \mathbb{S}_r^2 \mid d(P, Q) = \rho\}.$$

uma circunferência esférica ($0 < \rho < \pi r$). Mostre que a imagem $T(C_\rho) \subset \mathbb{S}_r^2$ por uma isometria $T: \mathbb{S}_r^2 \rightarrow \mathbb{S}_r^2$ também é uma circunferência esférica.

13. Seja $T_{x,\alpha}$ a rotação em torno do eixo dos xx pelo ângulo α e seja $T_{y,\beta}$ a rotação em torno do eixo dos yy pelo ângulo β . Determine as compostas $T_{x,\alpha} \circ T_{y,\beta}$ e $T_{y,\beta} \circ T_{x,\alpha}$ e deduza que o grupo $SO(3)$ não é abeliano.

Sugestão: represente as rotações por matrizes.

14. Neste exercício, suponha que $r = 1$. Seja $P = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ um ponto. Encontre a matriz $A \in O(3)$ de uma rotação $T: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que leva P em $(0, 0, 1)$.

Sugestão: escreva $(x, y, z) = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ e escreva T como a composta de duas rotações: a primeira em torno do eixo dos zz e a segunda em torno do eixo dos yy .

15. Seja $L \subset \mathbb{S}_r^2$ um círculo máximo e seja $P \in \mathbb{S}_r^2$ um ponto distinto dos pólos de L . Mostre que existe um único círculo máximo por P perpendicular a L .

16. As coordenadas geográficas da cidade do Porto são $(41^\circ 09'N, 8^\circ 37'O)$ e as da cidade de Copenhague são $(55^\circ 41'N, 12^\circ 34'E)$ (valores aproximados). Estime a distância (esférica) entre as duas cidades em km (por definição a distância entre o equador e o Pólo Norte é 10,000km).

17. Encontre todas as isometrias $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que preservam mais que uma reta.

18. Considere a projeção estereográfica $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$. Sejam $P, P' \in \mathbb{S}^2$ pontos antípodos com $\pi(P) = z \in \mathbb{C}$. Mostre que $\pi(P') = -1/\bar{z}$.

19. Seja $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ a aplicação $f(z) = 1/z$.

- Escreva a expressão da aplicação correspondente $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y) = F(u, v)$.
- Calcule a matriz jacobiana $JF(u, v)$ e verifique que representa uma transformação de semelhança de \mathbb{R}^2 .
- Sejam $\alpha, \beta:] - \epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas diferenciáveis com $\alpha(0) = \beta(0) (\neq 0)$. Mostre que o ângulo entre $\alpha'(0)$ e $\beta'(0)$ é igual ao ângulo entre $(F \circ \alpha)'(0)$ e $(F \circ \beta)'(0)$.

20. Seja $P = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Mostre que a imagem de P pela projeção estereográfica $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ é $\pi(P) = (\cot(\theta/2)\cos \phi, \cot(\theta/2)\sin \phi)$.

Sugestão: Note-se que por simetria basta considerar o caso $\phi = 0$.

21. Considere a projeção estereográfica $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$. Seja $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ tal que $|\pi(P)| = r$. Mostre que a distância esférica do pólo sul S a P é $d(P, S) = 2 \arctan(r)$.

CAPÍTULO 3

Geometria inversiva e transformações de Möbius

1. A esfera de Riemann e coordenadas homogêneas

Já vimos a utilidade no estudo das inversões de usar uma coordenada complexa z no plano euclidiano $\mathbb{E}^2 \cong \mathbb{C}$, e incluir formalmente um ponto no infinito ∞ . Vamos agora elaborar mais esta ideia, considerando a *esfera de Riemann*

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

e explicar como, de forma rigorosa, usando a coordenada usual $z \in \mathbb{C}$ podemos introduzir uma nova coordenada $w = 1/z$ para estudar $\hat{\mathbb{C}}$ “em torno de ∞ ”.

A cada par de números complexos (z, w) , **não ambos iguais a zero**, fazemos corresponder $z/w \in \hat{\mathbb{C}}$, onde convencionamos que $z/0 = \infty$ para qualquer $z \neq 0$. Notamos que (z, w) e (z', w') correspondem ao mesmo ponto em $\hat{\mathbb{C}}$ se e só se têm a mesma razão, isto é, se existe $\lambda \neq 0$ tal que $(z, w) = \lambda(z', w')$. Vamos, por isso, escrever um elemento $P \in \hat{\mathbb{C}}$ como

$$P = [z : w] \in \hat{\mathbb{C}}.$$

e chamamos a $[z : w]$ *coordenadas homogêneas* de P . Assim, acrescentamos às razões $[z : w]$ com $w \neq 0$ a razão

$$[1 : 0] = \infty \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Note-se que a aplicação

$$z \mapsto [z : 1]$$

inclui \mathbb{C} em $\hat{\mathbb{C}}$ como complemento de $\{\infty\}$ e que a sua inversa é

$$\phi: [z : w] \mapsto z/w.$$

Pensamos em ϕ como um sistema de coordenadas $\hat{\mathbb{C}}$ que a cada ponto $[z : w]$ em $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ faz corresponder a coordenada z/w . Podemos definir um outro sistema de coordenadas por

$$\psi: [z : w] \mapsto w/z.$$

Neste sistema de coordenadas $\infty = [1 : 0]$ tem coordenada $\psi([1 : 0]) = 0$ e ψ^{-1} da origem à inclusão de uma cópia de \mathbb{C} como complemento de $\{[0 : 1]\}$:

$$w \mapsto [1 : w].$$

assim, $\hat{\mathbb{C}}$ é coberto por dois sistemas de coordenadas, cada um com coordenada em \mathbb{C} e as *mudanças de coordenadas* $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ correspondentes são

$$\phi^{-1} \circ \psi: z \mapsto [z : 1] \mapsto 1/z$$

e

$$\psi^{-1} \circ \phi: w \mapsto [1 : w] \mapsto 1/w.$$

NOTA 1.1. A mudança de coordenadas entre as duas projeções estereográficas (de $N = (0, 0, 1)$ e $S = (0, 0, -1)$, respetivamente) é a aplicação $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dada por

$$(u, v) \mapsto \frac{(u, v)}{u^2 + v^2}.$$

Numa coordenada complexa $z = u + iv$ em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ esta transformação corresponde a

$$z \mapsto \frac{z}{|z|^2} = 1/\bar{z}.$$

Assim, se em vez de $\psi([z : w]) = w/z$ usarmos a coordenada $\bar{\psi}([z : w]) := \bar{w}/\bar{z}$ na esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ obtemos uma identificação natural $\hat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$. Esta identificação justifica chamar “esfera” à esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Uma das vantagens de trabalhar com $\hat{\mathbb{C}}$ é que podemos estender o domínio de algumas funções de modo a não existirem pontos em que não estão definidos. Como já vimos, inversão numa circunferência é um caso relevante. Outro caso é o de uma função racional $f(z) = p(z)/q(z)$ (onde os polinômios p e q não têm zeros comuns). A função f não está definida nos zeros de $q(z)$, mas podemos prolongar f a uma função $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ fazendo $f(z) = \infty$ quando $q(z) = 0$. Um caso muito importante é quando $p(z) = az + b$ e $q(z) = cz + d$ e $ad - bc \neq 0$. Obtemos neste caso uma *transformação de Möbius*

$$(1.1) \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Podemos considerar f como uma transformação da esfera de Riemann da seguinte forma¹

$$(1.2) \quad \tilde{f}([z : w]) = [az + bw : cz + dw],$$

que na coordenada $z \mapsto [z : 1]$ corresponde a (1.1).

EXERCÍCIO 1.2. Mostre que a expressão para \tilde{f} na coordenada $w \mapsto [1 : w]$, ou seja a função $\psi \circ \tilde{f} \circ \psi^{-1}$ é $w \mapsto \frac{c+dw}{a+bw}$

EXERCÍCIO 1.3. Mostre que a condição $ad - bc \neq 0$ garante que $az + bw$ e $cz + dw$ não se anulam simultaneamente para $(z, w) \neq (0, 0)$. Por outras palavras, esta condição garante que \tilde{f} definida em (1.2) está bem definida.

Podemos estudar o comportamento da transformação de Möbius (1.1) em torno de ∞ usando a coordenada w . Com efeito, temos que a expressão de f usando a coordenada w no domínio e a coordenada z no contradomínio é

$$(1.3) \quad \phi \circ \tilde{f} \circ \psi^{-1}(w) = \frac{a + bw}{c + dw}.$$

Por exemplo, $f(\infty)$ calcula-se substituindo $w = 0$ em (1.3):

$$f(\infty) = a/c,$$

e o ponto no infinito ∞ é fixo por f se e só se $c = 0$, ou seja, se $f(z) = (az + b)/d$ que não tem pólos² em \mathbb{C} .

EXERCÍCIO 1.4. Verifique a equação (1.3).

Note-se que a condição $ad - bc \neq 0$ é equivalente a $\det(A) \neq 0$, onde A é a matriz 2×2

$$(1.4) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Não é por acaso que aparece aqui uma matriz. De facto uma matriz complexa 2×2 invertível (1.4) define sempre uma transformação de Möbius

$$f_A: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

¹É habitual fazer um ligeiro abuso de notação e escrever a aplicação $\tilde{f}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ da forma (1.1).

²Um *pólo* de uma função racional $f(z) = p(z)/q(z)$ (onde p e q não têm zeros comuns) é z tal que $q(z) = 0$.

por (1.1), e duas matrizes definem a mesma transformação se e só se uma é um múltiplo da outra por um escalar complexo não nulo.

Olhando para a representação (1.2) vemos que, se $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$, então

$$\tilde{f}_A([z : w]) = [u : v].$$

Por outras palavras, usando coordenadas homogêneas $[z : w]$ em $\hat{\mathbb{C}}$, a transformação de Möbius f_A corresponde a multiplicação pela matriz A . Esta observação tem uma seguinte consequência importante: o produto de matrizes corresponde à composta das respetivas transformações de Möbius.

PROPOSIÇÃO 1.5. *Sejam $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ matrizes invertíveis. Então a transformação de Möbius correspondente ao produto BA é*

$$f_{BA} = f_B \circ f_A.$$

EXERCÍCIO 1.6. Mostre que o produto de matrizes corresponde à composta de transformações de Möbius fazendo um cálculo direto usando expressões da forma (1.1).

EXERCÍCIO 1.7. Seja $f(z) = az + b$. Interpretando f como transformação de Möbius $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ encontre uma matriz que representa f . Qual é a imagem de ∞ por f ?

EXERCÍCIO 1.8. Considere a transformação de Möbius f dada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Determine $f(\infty)$ e o ponto $P \in \hat{\mathbb{C}}$ tal que $f(P) = \infty$.

EXEMPLO 1.9. Recordamos que a inversão na circunferência $\mathcal{C}_{d,\rho}$ de centro $d \in \mathbb{C}$ e raio ρ é

$$I(z) = \frac{\rho^2}{\bar{z} - \bar{d}} + d.$$

Podemos escrever I como

$$(1.5) \quad I(z) = \frac{d\bar{z} + \rho^2 - |d|^2}{\bar{z} - \bar{d}} = \frac{d\bar{z} - \sigma}{\bar{z} - \bar{d}},$$

onde

$$\sigma = |d|^2 - \rho^2.$$

Logo, se definirmos

$$(1.6) \quad A = \begin{pmatrix} d & -\sigma \\ 1 & -\bar{d} \end{pmatrix}$$

e f_A é a transformação de Möbius correspondente, então

$$I(z) = f_A(\bar{z}).$$

Reciprocamente, para uma matriz A da forma (1.6) com $|d|^2 - \sigma > 0$ a transformação $I(z) = f_A(\bar{z})$ é inversão na circunferência de centro d e raio $\sqrt{|d|^2 - \sigma}$.

EXERCÍCIO 1.10. Verifique que $I(d) = \infty$ e $I(\infty) = d$.

Podemos incluir de forma natural reflexões no mesmo formalismo, considerando matrizes da forma

$$(1.7) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -\bar{a} \end{pmatrix}$$

com $b \in \mathbb{R}$ e considerar a transformação

$$g(z) = f_A(\bar{z}) = -(a\bar{z} + b)/\bar{a} = (-a/\bar{a})\bar{z} + b/\bar{a}.$$

Note-se que $-a/\bar{a}$ é um número complexo de módulo 1, e logo g é a composta de uma reflexão ($z \mapsto \bar{z}$) seguida de uma rotação e uma translação. Concluimos que g é uma reflexão ou uma reflexão com deslizamento e, para ver que é uma reflexão, procuramos os pontos fixos em \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} g(z) &= z \\ \iff -(a\bar{z} + b)/\bar{a} &= z \\ \iff \bar{a}z + a\bar{z} &= -b. \end{aligned}$$

De acordo com o Ex. 1.11 esta é a equação de uma reta em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Portanto, g é reflexão nesta reta e qualquer reflexão pode ser representada desta forma. Notamos que, visto como transformação da esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, uma reflexão g fixa o ponto no infinito ∞ , que é consistente com a nossa convenção que qualquer reta em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ passa por ∞ .

EXERCÍCIO 1.11. Mostre que

$$\bar{a}z + a\bar{z} = -b$$

é a equação de uma reta em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ e que qualquer reta em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ tem uma equação desta forma.

Sugestão: Escreva $a = u + iv$ e $z = x + iy$ e verifique que a equação é equivalente a $ux + vy = -b/2$.

Resumimos as nossas conclusões na seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 1.12. *Seja A uma matriz 2×2 invertível da forma*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -\bar{a} \end{pmatrix}$$

onde b e c são números reais e $-\det(A) = |a|^2 + bc > 0$. Então a transformação $I: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por

$$I(z) = f_A(\bar{z}) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} - \bar{a}}$$

é uma inversão ou uma reflexão. Mais precisamente,

- Se $c \neq 0$, então I é inversão na circunferência $\mathcal{C}_{d,\rho}$ de centro $d = a/c$ e raio ρ dada por $\rho^2 = |d|^2 + b/c$.
- Se $c = 0$, então I é reflexão na reta em $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ de equação $\bar{a}z + a\bar{z} = -b$.

2. Inversão em esferas

Podemos facilmente generalizar o conceito de inversão numa circunferência e definir inversão numa esfera³ em \mathbb{E}^3 como se segue.

DEFINIÇÃO 2.1. Seja $\mathbb{S}_{O,\rho}^2 = \{P \in \mathbb{E}^3 \mid d(P, O) = \rho\}$ a esfera de dimensão 2 em \mathbb{E}^3 com centro O e raio ρ . *Inversão em $\mathbb{S}_{O,\rho}^2$* é a aplicação

$$\begin{aligned} I: \mathbb{E}^3 \setminus \{O\} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \setminus \{O\} \\ P &\mapsto P', \end{aligned}$$

onde P' é o ponto da semi-reta por P com origem em O que satisfaz $|OP||OP'| = \rho^2$.

³De facto, os resultados desta secção generaliza-se facilmente a qualquer dimensão, mas só nos interessem os casos \mathbb{E}^2 e \mathbb{E}^3 .

NOTA 2.2. Se Π é um plano em \mathbb{E}^3 que passa por O , então $\Pi \cap \mathbb{S}_{O,\rho}^2$ é a circunferência em Π de centro O e raio ρ , e a restrição de I a Π é inversão nessa circunferência. Reciprocamente, suponha que $O \in \mathbb{E}^3$, $\rho > 0$ e que a aplicação $I: \mathbb{E}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E}^3 \setminus \{O\}$ é tal que a sua restrição a qualquer plano por O é inversão na circunferência de centro O e raio ρ . Então I é inversão em $\mathbb{S}_{O,\rho}^2$.

De forma análoga à construção da esfera de Riemann podemos completar \mathbb{E}^3 com um ponto ∞ no infinito e considerar

$$\hat{\mathbb{E}}^3 = \mathbb{E}^3 \cup \{\infty\}.$$

Vamos prolongar uma inversão I a $\hat{\mathbb{E}}^3$ convencionando que $I(O) = \infty$ e $I(\infty) = O$. Vamos ainda considerar um plano $V \subseteq \mathbb{E}^3$ como uma esfera (de raio infinito) que passa por ∞ , e considerar que inversão em V é reflexão nesse plano, fixando ∞ .

PROPOSIÇÃO 2.3. *Seja I inversão na esfera $\mathbb{S}_{O,\rho}^2$ e seja $\mathbb{S} \subset \mathbb{E}^3$ uma esfera. Então a imagem $I(\mathbb{S})$*

- *é um plano se \mathbb{S} passa por O e*
- *uma esfera caso contrário.*

DEMONSTRAÇÃO. Se o centro P_0 de \mathbb{S} é O o resultado é claro, pelo que podemos considerar a reta $l = OP_0$. Se V é um plano que contém l , então, usando Proposição 7.3, vem que a restrição de I a V envia a circunferência $\mathbb{S} \cap V$ numa circunferência \mathcal{C} cujo centro P_1 está em l e cujo raio é r , digamos. Como esta observação se verifica para qualquer plano V que contém l , vem que I envia \mathbb{S} na esfera de centro P_1 e raio r .

No caso em que \mathbb{S} passa por O , temos que adaptar o argumento ligeiramente: $\mathbb{S} \cap V$ é enviada numa reta m perpendicular a l em V e $I(\mathbb{S})$ é o plano perpendicular a l que contém m . \square

Estas ideias permitem-nos ver a projeção estereográfica como a restrição de uma inversão.

PROPOSIÇÃO 2.4. *A projeção estereográfica a partir do pólo norte $N = (0, 0, 1)$*

$$\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

é a restrição a \mathbb{S}^2 da inversão na esfera de centro N e raio $\sqrt{2}$.

DEMONSTRAÇÃO. Escreva \mathbb{S}' para a esfera de centro N e raio $\sqrt{2}$. Seja V um plano que contém O e N . Basta provar que a restrição da inversão na circunferência $\mathcal{C}' = V \cap \mathbb{S}'$ a $V \cap \mathbb{S}^2$ coincide com a restrição de π a $V \cap \mathbb{S}^2$, conforme indicado na Figura 2.1. Notamos agora que a circunferência $V \cap \mathbb{S}^2$ passa pelo centro de \mathcal{C}' , pelo que inversão em \mathcal{C}' envia $V \cap \mathbb{S}^2$ na reta pelos dois pontos de interseção de $V \cap \mathbb{S}^2$ com \mathcal{C}' . Por outro lado a imagem de $P \in V \cap \mathbb{S}^2$ por inversão em \mathcal{C}' está na reta por N e P , e logo coincide com $\pi(P)$. \square

PROPOSIÇÃO 2.5. *Sejam \mathcal{C}_1 uma circunferência e \mathcal{C}_2 uma circunferência generalizada em $\hat{\mathbb{C}}$, e seja I_i inversão em \mathcal{C}_i , $i = 1, 2$. Então $J = I_1 \circ I_2 \circ I_1$ é inversão numa circunferência \mathcal{C} cujo centro está na reta perpendicular a \mathcal{C}_2 que passa pelo centro de \mathcal{C}_1 .*

NOTA 2.6. A formulação da proposição anterior foi escolhida para ser particularmente transparente no caso em que \mathcal{C}_2 é um plano que não passa pelo centro de \mathcal{C}_1 , por ser esse a situação que nos interessa no Teorema em baixo. No entanto, a formulação aplica-se geralmente; por exemplo, se \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são circunferências não concêntricas, então o centro de \mathcal{C} está na reta que une os seus centros.

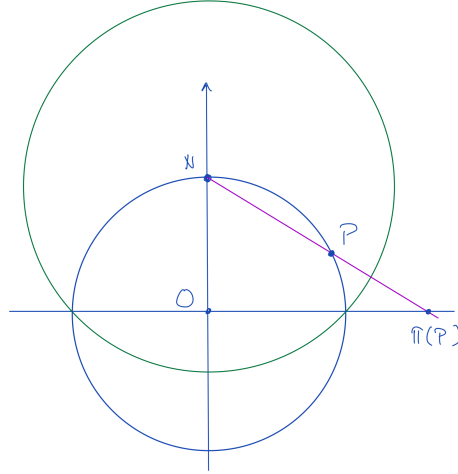


FIGURA 2.1. Projeção estereográfica como restrição de inversão

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2.5. De acordo com a Proposição 1.12 podemos, para $i = 1, 2$, representar a inversão I_i por

$$I_i = f_{A_i}(\bar{z}),$$

onde f_i é a transformação de Möbius de matriz

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -\bar{a}_i \end{pmatrix}, \quad b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad -\det(A_i) > 0.$$

Notando que $\overline{f_A(z)} = f_{\bar{A}}(\bar{z})$ para qualquer transformação de Möbius vemos que

$$J(z) = I_1 \circ I_2 \circ I_1(z) = f_{A_1} \circ f_{\bar{A}_2} \circ f_{A_1}(\bar{z}) = f_{A_1 \bar{A}_2 A_1}(\bar{z}).$$

Fazendo a multiplicação das matrizes vemos que

$$A_1 \bar{A}_2 A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \bar{a}_2 a_1 + b_2 c_2 a_1 + a_1 b_2 c_1 - b_1 a_2 c_1 & a_1 \bar{a}_2 b_1 + b_1 c_2 b_1 - a_1 b_2 \bar{a}_1 + b_1 a_2 \bar{a}_1 \\ c_1 \bar{a}_2 a_1 - \bar{a}_1 c_2 a_1 + c_1 b_2 c_1 + \bar{a}_1 a_2 c_1 & c_1 \bar{a}_2 b_1 - \bar{a}_1 c_2 b_1 - c_1 b_2 \bar{a}_1 - \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_1 \end{pmatrix},$$

que é de facto uma matriz da forma do enunciado da Proposição 1.12 e, portanto, representa uma inversão numa circunferência (generalizada) \mathcal{C} .

Para terminar, consideramos o efeito de J em ∞ . No caso em que \mathcal{C}_1 é uma circunferência e \mathcal{C}_2 é uma reta que não passa pelo centro O_1 de \mathcal{C}_1 temos que $I_1(\infty) = O_1$ e logo que $I_2 \circ I_1(\infty) = I_2(O_1)$ está na reta por O_1 perpendicular a \mathcal{C}_2 . Portanto, $J(\infty) = I_1(I_2(O_1))$ está nesta mesma reta. Concluimos que J é inversão numa circunferência cujo centro está na reta por O_1 perpendicular a \mathcal{C}_2 , como queríamos. Deixamos ao cuidado do leitor o argumento (completamente análogo) em que ambas de \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 são circunferências. \square

COROLÁRIO 2.7. *Sejam \mathbb{S}_1 uma esfera e Π_2 uma esfera generalizada em $\hat{\mathbb{E}}^3$, seja I_1 inversão em \mathbb{S}_1 e seja I_2 inversão em Π_2 . Então $J = I_1 \circ I_2 \circ I_1$ é inversão numa esfera \mathbb{S} cujo centro está na reta perpendicular a Π_2 que passa pelo centro de \mathbb{S}_1 .*

DEMONSTRAÇÃO. Se V é um plano perpendicular a Π_2 que passa pelo centro de \mathbb{S}_1 vemos da Proposição 2.5 que a restrição de J a esse plano é inversão numa circunferência \mathcal{C}_V cujo centro está na reta l em V que é perpendicular a $V \cap \Pi_2$ e passa pelo centro de \mathbb{S}_1 . Como qualquer outro plano V' perpendicular a Π_2 que passa pelo centro de \mathbb{S}_1 é obtido de V por rotação em torno de l , vemos que a restrição de J a V' é inversão numa circunferência com o mesmo centro e raio que \mathcal{C}_V , e daí concluimos o resultado desejado. \square

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 7.5 DO CAPÍTULO 2. Seja \mathbb{S}_1 a esfera de centro N e raio $\sqrt{2}$. Sabemos da Proposição 2.4 que a projeção estereográfica $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ é a restrição a \mathbb{S}^2 da inversão I_1 em \mathbb{S}_1 .

Seja Π_2 o plano por O perpendicular ao vetor não nulo (a, b, c) , e seja $l = \mathbb{S}^2 \cap \Pi_2$ a reta esférica correspondente. Então a reflexão ρ em l é a restrição da reflexão I_2 em Π_2 . Portanto, as duas aplicações

$$\pi^{-1} \circ \rho \circ \pi \quad J = I_1 \circ I_2 \circ I_1$$

coincidem em $\hat{\mathbb{C}}$ (recorde-se que $I_1^{-1} = I_1$). Em particular, J envia o plano $\hat{\mathbb{C}} = \{t = 0\}$ em si próprio.

Pelo Corolário 2.7, sabemos que J é inversão numa esfera \mathbb{S} cujo centro P está na reta por N ortogonal a Π_2 e, uma vez que J preserva o plano $\hat{\mathbb{C}}$, o centro P também está em $\hat{\mathbb{C}}$ (ver Ex. 2.8). Logo $\pi^{-1} \circ \rho \circ \pi = J|_{\hat{\mathbb{C}}}$ é inversão na circunferência $\mathcal{C}_l = \mathbb{S} \cap \hat{\mathbb{C}}$ cujo centro é P . Além disso, P é o ponto de interseção da reta por N e $\rho(N)$ com $\hat{\mathbb{C}}$, ou seja

$$P = \pi(\rho(N)) = -\frac{1}{c}(a + ib)$$

como queríamos mostrar.

Resta-nos determinar o raio ρ da circunferência \mathcal{C}_l . Como os pontos da circunferência unitária $\mathbb{S}^2 \cap \hat{\mathbb{C}}$ são fixos pela projeção estereográfica vemos que os dois pontos de interseção desta circunferência com l pertencem a \mathcal{C}_l (porque são fixos pela inversão em \mathcal{C}_l). Além disso, a reta por estes dois pontos é perpendicular a OP e concluímos que o raio de \mathcal{C}_l é dado por

$$\rho^2 = 1^2 + \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2},$$

como queríamos mostrar. □

EXERCÍCIO 2.8. Seja f inversão numa esfera $\mathbb{S} \subset \mathbb{E}^3$ e seja Π um plano. Mostre que $f(\Pi)$ é um plano se e só se Π passa pelo centro de \mathbb{S} .

3. Projeção estereográfica preserva ângulos

DEFINIÇÃO 3.1. Um aplicação linear $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva ângulos se existe um número real $\lambda > 0$ tal que

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{w}) \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

para todos os $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

O nome é evidentemente justificado pela definição do ângulo (não orientado) θ entre dois vetores não nulos \mathbf{v} e \mathbf{w} através da fórmula

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|}.$$

EXEMPLO 3.2. Qualquer transformação ortogonal $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ onde A é uma matriz ortogonal) preserva ângulos, porque f preserva o produto escalar euclidiano.

EXERCÍCIO 3.3. Seja A uma matriz ortogonal e seja $\lambda \neq 0$. Mostre que a aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(\mathbf{v}\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v}$ preserva ângulos.

Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável cujo domínio é um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Recordamos que a derivada de f em $P \in U$ é uma aplicação linear $df_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ cuja matriz é a matriz Jacobiana Jf_P de f em P . Além disso, para qualquer curva diferenciável $\alpha(t)$ em U temos pela regra da cadeia que

$$(3.1) \quad df_P(\alpha'(t)) = Jf_P \cdot \alpha'(t) = (f \circ \alpha)'(t)$$

onde $P = \alpha(t)$. Assim, escolhendo uma curva $\alpha(t)$ convenientemente, podemos usar esta fórmula para calcular a derivada de f aplicada a $\mathbf{v} = \alpha'(t)$.

DEFINIÇÃO 3.4. A aplicação f preserva ângulos se, em cada $P \in U$, a derivada df_P preserva ângulos.

EXERCÍCIO 3.5. Mostre que uma translação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva ângulos e deduza que qualquer isometria preserva ângulos.

O resultado seguinte diz que inversões em circunferências e esferas preservam ângulos. Só nos interessam estes casos mas, como o enunciado e a prova são iguais em qualquer dimensão, usamos esta generalidade.

PROPOSIÇÃO 3.6. *Inversão numa esfera $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ preserva ângulos.*

DEMONSTRAÇÃO. À luz do Ex. 3.5 podemos supor que o centro de \mathbb{S} é a origem $O \in \mathbb{R}^n$.

Começamos por calcular $dI_P(\mathbf{v})$, a derivada de I em P , aplicada a dois tipos de vetores específicos, de modo a aproveitar a simetria esférica da situação.

Consideramos em primeiro lugar o vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ na direção do raio de \mathbb{S} por P ; para tal definimos $\alpha(t) = t\mathbf{v}$, sendo então $\alpha(1) = P$ e $\alpha'(t) = \mathbf{v}$, $\forall t$. Logo

$$\begin{aligned} (I \circ \alpha)'(t) &= \frac{d}{dt}(I(t\mathbf{v})) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho^2}{|t\mathbf{v}|^2} t\mathbf{v} \right) \\ &= -\frac{\rho^2}{t^2|OP|^2} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Em particular,

$$dI_P(\mathbf{v}) = \alpha'(1) = -\frac{\rho^2}{|OP|^2} \mathbf{v}.$$

Em segundo lugar consideramos um vetor \mathbf{v} perpendicular à direção do raio de \mathbb{S} por P que, de acordo com o Ex. 3.7 em baixo podemos escrever como $\mathbf{v} = \alpha'(0)$, onde $\alpha(0) = P$ e $|\alpha(t)| = |OP|$ para todo o t . Então

$$\begin{aligned} dI_P(\mathbf{v}) &= (I \circ \alpha)'(t) \\ &= \frac{d}{dt} I(\alpha(t)) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho^2}{|\alpha(t)|^2} \alpha(t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho^2}{|OP|^2} \alpha(t) \right) \\ &= \frac{\rho^2}{|OP|^2} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Para terminar a prova consideramos uma base ortonormada $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ de \mathbb{R}^n em que \mathbf{v}_1 é paralelo a \overrightarrow{OP} e $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são ortogonais a \overrightarrow{OP} . Escrevendo $\lambda = \frac{\rho}{|OP|}$ vemos dos nossos cálculos anteriores que

$$dI_P(\mathbf{v}_1) = -\lambda^2 \mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad dI_P(\mathbf{v}_i) = \lambda^2 \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Logo, nesta base, a matriz de dI_P é

$$\lambda^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e deduzimos do Ex. 3.3 que dI_P preserva ângulos, como desejado. \square

EXERCÍCIO 3.7. Seja $P \in \mathbb{R}^n$ e seja $\alpha(t)$ uma curva em \mathbb{R}^n com $\alpha(0) = P$ e $|\alpha(t)| = |OP|$ para todo o t . Mostre que

$$\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0$$

e deduza que $\mathbf{v} = \alpha'(0)$ é perpendicular a \overrightarrow{OP} . (*Sugestão:* Calcule a derivada da função constante $|\alpha(t)|^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$.)

Reciprocamente (supondo que $P \neq O$), mostre que qualquer vetor \mathbf{v} perpendicular a \overrightarrow{OP} pode ser escrito como $\mathbf{v} = \alpha'(t)$ para uma curva α tal que $\alpha(0) = P$ e $|\alpha(t)| = |OP|$ para todo o t . (*Sugestão:* Considere a circunferência obtida intersecando a esfera de centro O e raio $|OP|$ com o plano por O , P e $P + \mathbf{v}$.)

COROLÁRIO 3.8. A projeção estereográfica $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ preserva ângulos.

DEMONSTRAÇÃO. Vimos na Proposição 2.4 que a projeção estereográfica é a restrição de uma inversão e logo o resultado segue da Proposição 3.6. \square

4. Isometrias da esfera e transformações de Möbius

Vimos (no Teorema 7.5 do Cap. 2) que reflexões na geometria esférica de \mathbb{S}^2 correspondem a inversões em circunferências (ortogonais à circunferência unitária $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$) através da projeção estereográfica. Sabemos também que uma isometria de \mathbb{S}^2 é a composta de reflexões, o que nos abre a porta ao estudo de todas as isometrias de \mathbb{S}^2 através da sua ação em \mathbb{C} . As transformações de Möbius vão ter um papel essencial, baseado na Proposição 1.12 que as relaciona com inversões.

Começamos com alguns exemplos.

EXEMPLO 4.1. A reflexão $r: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ na reta esférica de equação $y = 0$ é a restrição da reflexão em \mathbb{R}^3 no plano xOt . Logo a transformação correspondente de \mathbb{C} através da projeção estereográfica é a reflexão no eixo real $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$:

$$I(z) = \bar{z}.$$

EXERCÍCIO 4.2. Mostre que a reflexão na reta esférica de equação $x = 0$ corresponde através da projeção estereográfica à reflexão no eixo imaginário $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$:

$$I(z) = -\bar{z}.$$

EXEMPLO 4.3. Considere rotação pelo ângulo θ de \mathbb{S}^2 em torno do eixo dos tt . Lembrando a definição da projeção estereográfica é claro que transformação correspondente do plano \mathbb{C} é rotação por θ em torno de 0:

$$(4.1) \quad f(z) = e^{i\theta} z.$$

EXERCÍCIO 4.4. Considere a ação da transformação de Möbius (4.1) na esfera de Riemann e mostre que $f(\infty) = \infty$.

EXEMPLO 4.5. Suponha que $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ é um plano vertical por O ortogonal ao vetor unitário $\mathbf{v} = (x, y, 0)$, e escreva $a = x + iy = e^{i\phi}$. Seja $l = \mathbb{S}^2 \cap \Pi$ a reta esférica correspondente. Então $\pi(l) = \mathbb{C} \cap \Pi$ é a reta por $0 \in \mathbb{C}$ de equação

$$\bar{a}z + a\bar{z} = 0$$

e (de acordo com a Proposição 1.12) reflexão esférica em l corresponde a reflexão em $\pi(l)$, dada pela transformação de Möbius

$$g(z) = (-a/\bar{a})\bar{z} = -e^{2i\phi}\bar{z}.$$

EXERCÍCIO 4.6. Seja $l \subset \mathbb{C}$ uma reta por 0 que faz o ângulo θ com o eixo real. Seja $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ reflexão em l , seja g rotação por θ em torno de 0 e seja $I(z) = \bar{z}$ reflexão no eixo real $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Mostre que

$$f = g \circ I \circ g^{-1}$$

e calcule a expressão de f . Compare o resultado com o Exemplo 4.5.

EXERCÍCIO 4.7. Encontre a transformação $I: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspondente à reflexão na reta esférica $\{x = y\} \subset \mathbb{S}^2$.

Vamos agora determinar a forma geral de uma inversão (ou reflexão) em \mathbb{C} que corresponde a uma reflexão de \mathbb{S}^2 .

PROPOSIÇÃO 4.8. A transformação de \mathbb{C} dada por

$$I(z) = f_A(\bar{z})$$

corresponde a uma reflexão de \mathbb{S}^2 através da projeção estereográfica se e só se a matriz A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$ e $\det(A) = -|a|^2 - b^2 < 0$.

DEMONSTRAÇÃO. A transformação $I: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspondente a reflexão na reta esférica $l \subseteq \mathbb{S}^2$ é inversão na circunferência (generalizada) $\mathcal{C} = \pi(l)$. Uma vez que l intersesta o equador \mathbb{S}^1 de \mathbb{S}^2 em dois pontos antípodas e π fixa \mathbb{S}^1 ponto a ponto vemos que $\mathcal{C} = \pi(l)$ intersesta \mathbb{S}^1 nesses mesmos dois pontos. No caso em que \mathcal{C} é uma reta de equação $\bar{a}z + a\bar{z} = b$ isto acontece se e só se \mathcal{C} passa por $0 \in \mathbb{C}$, isto é, se e só se $b = 0$. Assim, neste caso, A é da forma indicada. Por fim, uma circunferência \mathcal{C} de centro $d \in \mathbb{C}$ intersesta \mathbb{S}^1 em dois pontos antípodas se e só se $|d|^2 + 1^2 = \rho^2$, como vemos considerando o triângulo reto formado por d , 0 e um dos pontos de interseção de \mathcal{C} com \mathbb{S}^1 . Recordamos agora que na forma geral de uma inversão da Proposição 1.12 temos $\rho^2 = |d|^2 + b/c$, e concluímos que $b/c = 1$. Assim, também neste caso, A é da forma indicada. \square

NOTA 4.9. Como já observamos podemos multiplicar a matriz A por qualquer constante não nula sem alterar a respetiva transformação de Möbius. Podemos, assim, normalizar a matriz que representa uma reflexão de \mathbb{S}^2 multiplicando por $\sqrt{-\det(A)}$, de modo a que $\det(A) = |a|^2 + b^2 = -1$.

EXEMPLO 4.10. Vamos determinar a forma da transformação $I: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspondente a uma reflexão numa reta esférica l que intersesta o eixo dos yy . Sabemos I fixa os dois pontos de interseção $\pm i$ de l com o eixo imaginário em \mathbb{C} (já que estes pontos são fixos pela projeção estereográfica π) e logo podemos determinar a forma matriz A considerando

$$f(i) = i \iff \frac{a(-i) + b}{b(-i) - \bar{a}} = i \iff -ai + b = b - ai \iff a = \bar{a} \iff a \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $I(z) = f_A(\bar{z})$, onde f_A é a transformação de Möbius de matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Se normalizarmos $\det(A) = -a^2 - b^2 = -1$ podemos escrever $a = \cos \phi$ e $b = \sin \phi$ para um $\phi \in [0, 2\pi[$ e logo

$$I(z) = \frac{\cos(\phi)\bar{z} + \sin(\phi)}{\sin(\phi)\bar{z} - \cos(\phi)}.$$

Procuramos agora as transformações de \mathbb{C} correspondentes a rotações $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

EXEMPLO 4.11. Rotação de \mathbb{S}^2 em torno do eixo dos tt pelo ângulo θ corresponde evidentemente através da projeção estereográfica à rotação por θ em torno de $0 \in \mathbb{C}$, que é dada pela transformação de Möbius

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

de matriz

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO 4.12. Seja $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma rotação em torno do eixo dos yy . Podemos decompor $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ como $g = r_2 \circ r_1$, onde r_1 é a reflexão no plano yOt e r_2 é reflexão num plano que passa pelo eixo dos yy . A transformação $I_1: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspondente a r_1 é a reflexão $I_1(z) = -\bar{z}$ no eixo imaginário e a transformação $I_2: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspondente a r_2 é, de acordo com o Exemplo 4.10 dada por

$$I_2(z) = \frac{\cos(\phi)\bar{z} + \sin(\phi)}{\sin(\phi)\bar{z} - \cos(\phi)}.$$

Logo a transformação de Möbius f correspondente a g é

$$f(z) = I_2 \circ I_1(z) = \frac{\cos(\phi)z - \sin(\phi)}{\sin(\phi)z + \cos(\phi)}.$$

EXERCÍCIO 4.13. Este exercício diz respeito ao Exemplo 4.12. Calcule $f(0)$ e, notando que $0 = \pi(g(S))$ (onde $S = (0, 0, -1)$ é o pólo sul), mostre que o ângulo de rotação de g é -2ϕ .

Sugestão: Considere a Figura 4.1.

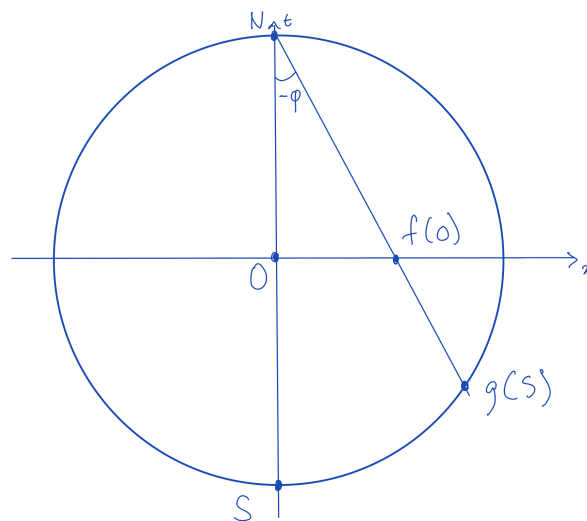


FIGURA 4.1. Ex. 4.13

No caso geral podemos decompor uma rotação $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ como $g = r_2 \circ r_1$, onde r_1 e r_2 são reflexões em planos que se intersectam no eixo de g . Podemos ainda escolher

r_1 de modo a que o seu plano de reflexão seja vertical, isto é, passe pelo pólo norte N . Logo, de acordo com o Exemplo 4.5, podemos escrever $I_1(z) = -e^{-2i\phi}\bar{z} = f_1(\bar{z})$ para a transformação de \mathbb{C} correspondente a r_1 , onde f_1 é a transformação de Möbius de matriz

$$C = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & -e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

Escreva ainda $I_2(z) = f_2(\bar{z})$ para a transformação de \mathbb{C} correspondente a r_2 , onde a matriz A da transformação de Möbius f_2 é como na Proposição 4.8. Então a transformação $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ correspondente a g é a transformação de Möbius de matriz

$$AC = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -\bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & -e^{-i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi}a & -e^{-i\phi}b \\ e^{i\phi}b & e^{-i\phi}\bar{a} \end{pmatrix}$$

que é da forma

$$(4.2) \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

com $\det(B) = (-1)^2 = 1$. Reciprocamente, dada uma matriz B desta forma, podemos escolher ϕ de modo a que $b = -e^{i\phi}\beta$ seja real e definir $a = e^{-i\phi}\alpha$, e vemos que B corresponde a uma rotação de \mathbb{S}^2 . Provámos, assim, o seguinte teorema.

TEOREMA 4.14. *As rotações de \mathbb{S}^2 correspondem através da projeção estereográfica às transformações de Möbius $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ da forma*

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{-\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}$$

onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. □

Assim, matrizes da forma (4.2) com $\det(B) = 1$ correspondem a isometrias pares de \mathbb{S}^2 e sob esta correspondência a composta de isometrias corresponde ao produto de matrizes (Proposição 1.5).

EXERCÍCIO 4.15. Prove que uma matriz B da forma (4.2) com $\det(B) = 1$ corresponde à transformação identidade de \mathbb{C} se e só se $B = \pm I$.

Terminamos esta secção com duas notas, não indispensáveis, que interpretam alguns dos nossos resultados à luz da álgebra linear.

NOTA 4.16. Em \mathbb{C}^2 temos o produto interno hermitiano

$$(4.3) \quad \langle (z_1, w_1), (z_2, w_2) \rangle = z_1\bar{z}_2 + w_1\bar{w}_2$$

e uma aplicação linear $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ de matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ preserva este produto interno se e só se

$$(4.4) \quad A^*A = I,$$

onde $A^* = {}^t \bar{A}$ é a matriz conjugada transposta, ou *adjunta*, de A (uma matriz com esta propriedade diz-se *hermitiana* ou *unitária*.) É claro que a matriz identidade é hermitiana, e que o produto de duas matrizes que preservam o produto interno (4.3) também o faz. Também é claro que uma matriz hermitiana é invertível com inversa hermitiana: com efeito, $A^*A = I \iff A^{-1} = A^*$ e $(A^*)^* = A$.

As matrizes hermitianas formam assim um subgrupo do grupo $GL(2, \mathbb{C})$ das matrizes 2×2 invertíveis, chamado o *grupo unitário* (em dimensão 2), e designado por $U(2)$. O subgrupo $SU(2) \subseteq U(2)$ das matrizes unitárias A com $\det(A) = 1$ chama-se o *grupo unitário especial*.

O Teorema 4.14 diz, na linguagem da teoria de grupos, que a associação $B \mapsto f_B$ define um homomorfismo de grupos de $SU(2)$ no grupo $SO(3)$ das isometrias pares de \mathbb{S}^2 ,

que é sobrejetivo e cujo nucleo é $\{\pm I\}$. por outras palavras, temos um isomorfismo de grupos $\text{SO}(3) \cong \text{SU}(2)/\{\pm I\}$.

NOTA 4.17. Como se sabe, uma matriz unitária

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. De facto, se $\det(A) = 1$ então o polinómio caraterístico de A é da forma

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (\alpha + \bar{\alpha})\lambda + 1$$

que tem coeficientes reais, e logo os valores próprios são números complexos conjugados $\lambda = e^{i\phi}$ e $\bar{\lambda} = e^{-i\phi}$ de módulo 1 (porque $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = \det(A) = 1$).

Escreva $\mathbf{u} = (z, w)$ para o vetor próprio correspondente ao valor próprio α , então a transformação de Möbius correspondente a A envia $[z : w]$ em $[\lambda z : \lambda w] = [z : w]$. Por outras palavras, os dois pontos em $\hat{\mathbb{C}}$ cujas coordenadas homogéneas são dadas pelos vetores próprios de A correspondem aos dois pólos da rotação de \mathbb{S}^2 definida por A . Além disso, A pode ser conjugada por uma matriz unitária para a forma diagonal $\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$ que sabemos corresponder a uma rotação por $\theta = 2\phi$ em torno do eixo dos tt . Assim, o argumento do valor próprio λ de A é metade do ângulo da rotação correspondente de \mathbb{S}^2 .

Exercícios

1. Seja $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ a aplicação $f(z) = 1/z$.

- Escreva a expressão da aplicação correspondente $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x, y) = F(u, v)$.
- Calcule a matriz jacobiana $JF(u, v)$ e verifique que representa uma transformação de semelhança de \mathbb{R}^2 .
- Sejam $\alpha, \beta:] - e, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas diferenciáveis com $\alpha(0) = \beta(0) (\neq 0)$. Mostre que o ângulo entre $\alpha'(0)$ e $\beta'(0)$ é igual ao ângulo entre $(F \circ \alpha)'(0)$ e $(F \circ \beta)'(0)$.

2. Seja $P = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$. Mostre que a imagem de P pela projeção estereográfica $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ é $\pi(P) = (\cot(\theta/2)\cos \phi, \cot(\theta/2)\sin \phi)$.

Sugestão: Note-se que por simetria basta considerar o caso $\phi = 0$.

3. Considere a projeção estereográfica $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$. Seja $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ tal que $|\pi(P)| = r$. Mostre que a distância esférica do pólo sul S a P é $d(P, S) = 2 \arctan(r)$.

4. Defina-se o grupo unitário especial por

$$\text{SU}(2) = \{A \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mid A^* A = I, \det(A) = 1\},$$

onde I é a matriz identidade e $A^* = {}^t \bar{A}$ é a matriz transposta conjugada de A .

- Seja $\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$ o produto interno hermitiano usual em \mathbb{C}^2 . Mostre que a transformação linear de \mathbb{C}^2 determinada por $A \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ preserva este produto interno hermitiano se e só se $A^* A = I$.
- Mostre que $A \in \text{SU}(2)$ se e só se A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{com } |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

5. Sejam $f_1(z), f_2(z)$ as transformações de Möbius correspondentes às matrizes $A_1, A_2 \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$. Mostre diretamente que $f_2 \circ f_1$ é a transformação de Möbius correspondente à matriz $A_2 A_1$.

6. Encontre as transformações de Möbius de \mathbb{C} correspondentes às seguintes isometrias da esfera \mathbb{S}^2 :

- (a) rotação de \mathbb{S}^2 em torno do eixo dos xx por um ângulo de $\pi/4$;
- (b) rotação de \mathbb{S}^2 em torno do eixo dos yy por um ângulo de $\pi/4$;
- (c) rotação de \mathbb{S}^2 em torno da reta orientada por O com vetor diretor $(1, 0, 1)$ por um ângulo de π .

7. Diga quais das seguintes transformações de Möbius correspondem a isometrias da esfera \mathbb{S}^2 :

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

$$f(z) = \frac{z-i}{iz+1}$$

$$f(z) = z+c, \quad c \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = \frac{2z-1}{z+1},$$

$$f(z) = \frac{z+i}{iz+1},$$

$$f(z) = \lambda z, \quad \lambda > 0.$$

Geometria hiperbólica

1. Geometria de Lorentz

A forma quadrática de Lorentz. Vamos considerar o espaço \mathbb{R}^{n+1} com coordenadas¹ (t, x_1, \dots, x_n) e a forma quadrática de Lorentz definida por

$$q_L(t, x_1, \dots, x_n) = -t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Esta forma quadrática é associada ao produto escalar de Lorentz

$$\langle (s, x_1, \dots, x_n), (t, y_1, \dots, y_n) \rangle_L = -st + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

através da fórmula

$$q_L(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_L,$$

onde $\mathbf{x} = (t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Chamamos frequentemente *espaço de Lorentz* ao espaço \mathbb{R}^{n+1} com o produto escalar de Lorentz.

NOTA 1.1. A teoria da relatividade especial de Einstein pode ser tratada geometricamente usando geometria de Lorentz. Para isso, usa-se a forma quadrática

$$q(t, x, y, z) = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

no espaço-tempo \mathbb{R}^4 com coordenadas (t, x, y, z) , onde $c > 0$ é a velocidade da luz. A nossa abordagem da geometria de Lorentz corresponde a usar unidades em que $c = 1$.

NOTA 1.2. O produto escalar de Lorentz pode ser relacionado com o produto escalar euclidiano da seguinte forma. Se definirmos a matriz

$$(1.1) \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$(1.2) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = \langle J\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

EXEMPLO 1.3. No caso $n = 1$ temos \mathbb{R}^2 com coordenadas (t, x) e a forma quadrática $q_L(t, x) = -t^2 + x^2$, e no caso $n = 3$ temos \mathbb{R}^3 com coordenadas (t, x, y) e a forma quadrática $q_L(t, x, y) = -t^2 + x^2 + y^2$.

EXERCÍCIO 1.4. Prove que o produto escalar de Lorentz é não degenerada. Por definição, isto significa o seguinte: se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle_L = 0$ para o todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ então $\mathbf{v} = 0$.

Sugestão: Calcule $\langle \mathbf{v}, e_i \rangle_L$ para os vetores da base canônica (e_1, \dots, e_{n+1}) de \mathbb{R}^{n+1} .

Analogamente ao caso do produto escalar euclidiano temos as seguintes *identidades de polarização* para o produto escalar de Lorentz:

$$(1.3) \quad 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L = q_L(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q_L(\mathbf{x}) - q_L(\mathbf{y}) = q_L(\mathbf{x}) + q_L(\mathbf{y}) - q_L(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

¹Essencialmente interessam-nos os casos $n = 2, 3$ e o leitor deve visualizar os conceitos e resultados nestes dois casos.

EXERCÍCIO 1.5. Prove as identidades (1.3). *Sugestão:* Calcule $q_L(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ e $q_L(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

DEFINIÇÃO 1.6. Considere \mathbb{R}^{n+1} com a forma quadrática de Lorentz. Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ diz-se

- *espacial* se $q_L(\mathbf{x}) > 0$,
- *temporal* se $q_L(\mathbf{x}) < 0$, e
- *isotrópico* (ou *luminário*) se $q_L(\mathbf{x}) = 0$.

O *cone da luz* no espaço de Lorentz \mathbb{R}^{n+1} é o conjunto dos vetores isotrópicos, $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q_L(\mathbf{x}) = 0\}$, por outras palavras, C é o cone dado pela equação

$$t^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Note-se que um ponto P está no interior do cone da luz C se e só se o vetor \overrightarrow{OP} é temporal e P está no exterior do cone da luz se e só se o vetor \overrightarrow{OP} é espacial. Por fim, se um vetor \mathbf{x} é espacial ou isotrópico podemos definir a sua *norma de Lorentz* por

$$|\mathbf{x}|_L = \sqrt{q_L(\mathbf{x})}.$$

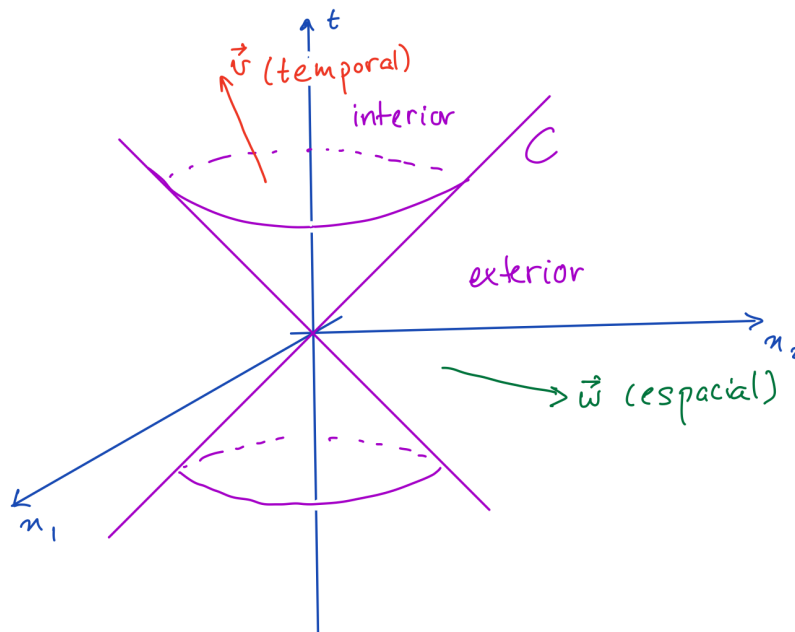


FIGURA 1.1. O cone da luz

Transformações de Lorentz. As transformações de Lorentz são as transformações que preservam o produto escalar de Lorentz. Este é o conceito análogo ao conceito de transformação ortogonal de \mathbb{R}^n com o produto escalar euclidiano. As transformações de Lorentz são, assim, as simetrias naturais da geometria de Lorentz e os conceitos da geometria de Lorentz são aqueles que são invariantes por transformações de Lorentz.

DEFINIÇÃO 1.7. Uma transformação linear $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ diz-se uma *transformação de Lorentz* se

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle_L = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

NOTA 1.8. A identidade de polarização implica o seguinte facto, que às vezes é útil: para mostrar que uma transformação linear f é uma transformação de Lorentz basta verificar que f preserva a forma quadrática de Lorentz, isto é,

$$q_L(f(\mathbf{x})) = q_L(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

NOTA 1.9. Escreva $\mathbb{R}^{n+1} = V \oplus W$, onde $V \cong \mathbb{R}$ é o eixo dos tt e $W \cong \mathbb{R}^n$ é o hiperplano $t = 0$. Então a restrição do produto escalar de Lorentz a W coincide com o produto escalar euclidiano em \mathbb{R}^n , e a restrição do produto escalar de Lorentz a V coincide com o simétrico do produto escalar euclidiano em \mathbb{R} .

EXERCÍCIO 1.10. Seja $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma transformação linear que preserva a decomposição da Nota 1.9, isto é, tal que $f(V) \subset V$ e $f(W) \subset W$. Mostre que f é uma transformação de Lorentz se e só se a sua restrição a W é uma transformação ortogonal e a sua restrição a V é $\pm \text{Id}$.

EXEMPLO 1.11. Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma rotação em torno do eixo dos tt ou uma reflexão num plano que contém o eixo dos tt . Então, pelo Ex. 1.10, f é uma transformação de Lorentz.

Podemos usar a Nota 1.2 para caracterizar as matrizes das transformações de Lorentz, como se segue.

PROPOSIÇÃO 1.12. *Seja $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma transformação linear de matriz A . Então f é uma transformação de Lorentz se e só se a matriz satisfaz*

$${}^tAJA = J$$

onde J é a matriz (1.1).

DEMONSTRAÇÃO. A matriz A representa uma transformação de Lorentz se e só se

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle_L = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_L$$

para todos os \mathbf{x} e \mathbf{y} em \mathbb{R}^{n+1} . Usando a representação (1.2) do produto escalar de Lorentz esta condição é equivalente a

$$\langle JA\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle J\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

ou seja,

$$\langle {}^tAJA\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle J\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

para todos os \mathbf{x} e \mathbf{y} em \mathbb{R}^{n+1} . A conclusão desejada segue desta condição, lembrando que a entrada (i, j) de qualquer matriz B pode ser obtida como $b_{ij} = \langle Be_j, e_i \rangle$. \square

Uma *matriz de Lorentz* é uma matriz que satisfaz a condição da Proposição 1.12.

EXEMPLO 1.13. Consideramos o caso do plano de Lorentz. Pela Proposição 1.12 vemos que uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é uma matriz de Lorentz se e só se

$$(1.4) \quad {}^tAJA = J$$

onde $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Temos que

$${}^tAJA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 + c^2 & -ab + cd \\ -ab + ds & -b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

e logo a condição (1.4) é equivalente às três condições

$$a^2 - c^2 = 1, \quad d^2 - b^2 = 1 \quad \text{e} \quad ab = cd.$$

Vemos daí que necessariamente $(b, d) = \pm(c, a)$ e, assim, as matrizes de Lorentz em dimensão 2 são da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad a^2 - b^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

escrevendo $(a, b) = \pm(\cosh(s), \sinh(s))$ para $s \in \mathbb{R}$ vemos que as matrizes em cima pode ser escritas

$$(1.5) \quad \pm \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \pm \begin{pmatrix} \cosh s & -\sinh s \\ \sinh s & -\cosh s \end{pmatrix}.$$

Terminamos esta secção com a introdução de mais alguns conceitos relacionados com as transformações de Lorentz. Vamos designar o *grupo de Lorentz* (de \mathbb{R}^{n+1}) das matrizes de Lorentz por

$$O(1, n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A J A = J\}.$$

Note-se que uma transformação de Lorentz preserva o cone da luz C (porquê?). Por outro lado, o interior de C :

$$\{(t, x_1, \dots, x_n) \mid q_L(\mathbf{x}) = -t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 < 0\}$$

tem duas componentes, correspondentes a $t > 0$ e $t < 0$, respetivamente. O subgrupo das transformações de Lorentz que preservam cada uma destas duas componentes corresponde às matrizes de Lorentz $A = (a_{ij})$ cuja primeira entrada a_{00} satisfaz $a_{00} > 0$ e é designada por $O^+(1, n)$. Notamos que $(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-t, x_1, \dots, x_n)$ é uma transformação de Lorentz que troca as duas componentes do interior de C e que qualquer transformação de Lorentz pode ser escrita como a composta desta com uma transformação de Lorentz em $O^+(1, n)$. Observamos por fim que a condição ${}^t A J A = J$ implica que $\det(A) = \pm 1$ para uma matriz de Lorentz A . O subgrupo de $O(1, n)$ das matrizes A com $\det(A) = 1$ chama-se o *grupo especial de Lorentz* e é designado por $SO(1, n)$. Também temos o subgrupo $SO^+(1, n) \subseteq SO(1, n)$ das matrizes de Lorentz de determinante 1 que preservam cada uma das componentes do interior do cone da luz.

EXEMPLO. O grupo $O^+(1, 1)$ é constituído pelas matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad a^2 - b^2 = 1,$$

onde $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. O subgrupo $SO^+(1, 1) \subseteq O^+(1, 1)$ é constituído pelas matrizes do primeiro tipo.

EXERCÍCIO. Mostre que a aplicação

$$s \mapsto A(s) = \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}$$

define um isomorfismo de grupos $(\mathbb{R}, +, 0) \xrightarrow{\cong} SO^+(1, 1)$, isto é, que

$$A(0) = I \quad \text{e} \quad A(s+t) = A(s)A(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Complementos ortogonais de Lorentz. No espaço \mathbb{R}^n com o produto escalar euclidiano qualquer vetor \mathbf{v} não nulo define um hiper-plano ortogonal por O . Em geometria de Lorentz, dado um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ definimos o seu *complemento ortogonal de Lorentz* como

$$\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle_L = 0\}.$$

EXERCÍCIO 1.14. Seja $\mathbf{v} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Mostre que $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ é o sub-espaço de \mathbb{R}^{n+1} isomorfo a \mathbb{R}^n constituído por vetores da forma $(0, x_1, \dots, x_n)$.

EXERCÍCIO 1.15. Suponha que $\mathbf{v} \neq 0$. Mostre que $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um sub-espaço vetorial de dimensão n .

Sugestão: Considere a aplicação linear $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\alpha(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle_L$.

EXEMPLO 1.16. Considere o caso $n = 1$, isto é, o plano de Lorentz \mathbb{R}^2 com o produto escalar de Lorentz $\langle (s, x), (t, y) \rangle_L = -st + xy$. Seja $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ um vetor não nulo. Então o complemento ortogonal de Lorentz $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L} \subset \mathbb{R}^2$ de \mathbf{v} é constituído pelos vetores $\mathbf{x} = (t, x)$ tais que

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle_L = 0 \iff -at + bx = 0 \iff (t, x) = \lambda(b, a) \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Assim, em termos da geometria euclidiana de \mathbb{R}^2 , o complemento ortogonal de Lorentz de \mathbf{v} é a reflexão da reta por O na direção de \mathbf{v} na reta $x = y$. Concluimos que:

- (1) se \mathbf{v} é espacial, então $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp L}$ (exceto 0) está contido no interior do cone da luz;
- (2) se \mathbf{v} é temporal, então $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp L}$ (exceto 0) está contido no exterior do cone da luz;
- (3) se \mathbf{v} é isotrópico, então $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp L}$ é a reta por O na direção de \mathbf{v} e está assim contido no cone da luz.

NOTA 1.17. Mais geralmente, para qualquer sub-espaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ podemos definir

$$V^{\perp L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle_L = 0 \forall \mathbf{v} \in V\}.$$

EXERCÍCIO 1.18. Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um sub-espaço vetorial de dimensão k .

- (a) Mostre que $V^{\perp L} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um sub-espaço vetorial de dimensão $(n+1) - k$.
- (b) Mostre que $(V^{\perp L})^{\perp L} = V$.

LEMA 1.19. *Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor. Então são válidas as seguintes afirmações.*

- (1) *Se \mathbf{v} é temporal então existe uma transformação de Lorentz $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(\mathbf{v})$ está contido no eixo dos tt .*
- (2) *Se \mathbf{v} é espacial então existe uma transformação de Lorentz $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(\mathbf{v}) = (0, b, 0, \dots, 0)$ está contido no eixo dos x_1x_1 .*
- (3) *Se \mathbf{v} é isotrópico então existe uma transformação de Lorentz $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $f(\mathbf{v})$ está contido no cone da luz $t = \pm x_1$ no plano tOx_1 .*

DEMONSTRAÇÃO. De acordo com o Ex. 1.10 podemos usar uma transformação ortogonal de $\mathbb{R}^n \cong \{t = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ para levar \mathbf{v} num vetor contido no plano tOx , ou seja, da forma $(a, b, 0, \dots, 0)$. Podemos agora aplicar transformações de Lorentz nas coordenadas (t, x) e deixar as restantes coordenadas invariantes. Vemos, assim, que basta considerar o caso $n = 1$ e podemos escrever $\mathbf{v} = (a, b)$. Então \mathbf{v} é um vetor isotrópico se e só se $a^2 = b^2$, isto é, se $a = \pm b$ o que prova (3).

Se \mathbf{v} é um vetor espacial podemos escrever $\mathbf{v} = \lambda(a, b)$, onde $q_L(a, b) = -a^2 + b^2 = 1$ e $\lambda = \sqrt{q_L(\mathbf{v})} > 0$. Considere a matriz de Lorentz (Exemplo 1.13)

$$A = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

A matriz A leva $e_1 = (0, 1)$ em $(a, b) = \mathbf{v}$ e logo a matriz de Lorentz A^{-1} leva $\mathbf{v} = \lambda(a, b)$ em λe_1 , o que prova (2).

Por fim, se \mathbf{v} é um vetor temporal podemos escrever $\mathbf{v} = \lambda(a, b)$, onde $q_L(a, b) = -a^2 + b^2 = -1$ e $\lambda = \sqrt{-q_L(\mathbf{v})} > 0$, e considerar a matriz de Lorentz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

A matriz A leva $e_0 = (1, 0)$ em (a, b) e logo a matriz de Lorentz A^{-1} leva $\mathbf{v} = \lambda(a, b)$ em λe_1 , o que prova (1). \square

NOTA 1.20. Podemos compor as transformações de Lorentz do Lema 1.19 com a transformação de Lorentz $(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-t, x_1, \dots, x_n)$ que troca as duas componentes do interior do cone da luz. Assim podemos sempre escolher f de modo a que f preserve estas duas componentes. Note-se também que no Caso (3) podemos garantir que $f(\mathbf{v})$ está contido na reta $t = x_1$ no plano tOx_1 compondo com a transformação de Lorentz $(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto (t, -x_1, \dots, x_n)$.

Em geometria euclidiana em \mathbb{R}^n o complemento ortogonal de um vetor não nulo é um hiper-plano por O e, com a restrição do produto interno euclidiano, é um espaço euclidiano de dimensão $n - 1$. Em geometria de Lorentz a situação é diferente, conforme o tipo do vetor \mathbf{v} . As transformações de Lorentz que agora temos à nossa disposição são suficientes para compreendermos melhor os tipos de hiper-planos possíveis.

Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor não nulo e seja $\Pi_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp L} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o seu complemento ortogonal de Lorentz com a restrição do produto escalar de Lorentz de \mathbb{R}^{n+1} . Podemos identificar três casos básicos:

- (1) Se \mathbf{v} é o vetor temporal e_0 , então $\Pi_{\mathbf{v}}$ é o hiper-plano $\{t = 0\} \cong \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com coordenadas (x_1, \dots, x_n) e o produto interno euclidiano.
- (2) Se \mathbf{v} é o vetor espacial e_n , então $\Pi_{\mathbf{v}}$ é o hiper-plano $\{x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com coordenadas (t, x_1, \dots, x_{n-1}) e o produto escalar de Lorentz.
- (3) Se \mathbf{v} é o vetor isotrópico $e_0 + e_n$, então $\Pi_{\mathbf{v}}$ é o hiper-plano $\{-t + x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e, usando coordenadas (u, x_1, \dots, x_n) em $\Pi_{\mathbf{v}}$ relativamente à base $(\mathbf{v}, e_1, \dots, e_n)$, a restrição do produto escalar de Lorentz corresponde à forma quadrática degenerada $q(u, x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

A seguinte proposição diz que em geral, conforme o tipo de \mathbf{v} , o hiper-plano $\Pi_{\mathbf{v}}$ é equivalente a um destes casos através de uma transformação de Lorentz.

PROPOSIÇÃO 1.21. *Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor não nulo e seja $\Pi_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp L} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o seu complemento ortogonal de Lorentz com a restrição do produto escalar de Lorentz de \mathbb{R}^{n+1} . Então as seguintes afirmações verificam-se.*

- (1) *Se \mathbf{v} é temporal então existe uma transformação de Lorentz de \mathbb{R}^{n+1} que identifica $\Pi_{\mathbf{v}}$ com o hiper-plano $\{t = 0\} \cong \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com coordenadas (x_1, \dots, x_n) e o produto interno euclidiano. Neste caso $\Pi_{\mathbf{v}}$ diz-se um hiper-plano euclidiano.*
- (2) *Se \mathbf{v} é espacial então existe uma transformação de Lorentz de \mathbb{R}^{n+1} que identifica $\Pi_{\mathbf{v}}$ com o hiper-plano $\{x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com coordenadas (t, x_1, \dots, x_{n-1}) e o produto escalar de Lorentz. Neste caso $\Pi_{\mathbf{v}}$ diz-se um hiper-plano de Lorentz.*
- (3) *Se \mathbf{v} é isotrópico então existe uma transformação de Lorentz de \mathbb{R}^{n+1} que identifica $\Pi_{\mathbf{v}}$ com o hiper-plano $\{t + x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com a forma quadrática degenerada $q(u, x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ em coordenadas (u, x_1, \dots, x_n) relativamente à base $(e_0 + e_n, e_1, \dots, e_n)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Notamos que se f é uma transformação de Lorentz, então

$$\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{x}) \rangle_L = 0 \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle_L = 0$$

e logo $f(\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp L}) = \langle f(\mathbf{v}) \rangle^{\perp L}$. A conclusão é agora imediata pelo Lema 1.19. \square

O produto vetorial em geometria de Lorentz. Na geometria euclidiana de \mathbb{R}^n , dados dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} , o seu produto vetorial é ortogonal ao plano gerado por \mathbf{v} e \mathbf{w} e dá-nos, entre outras coisas, uma forma fácil de escrever a equação deste plano. Pretendemos fazer uma construção análoga em geometria de Lorentz.

EXERCÍCIO 1.22. Seja $\alpha: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear. Prove que existe um e um só vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\alpha(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle_L$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Sugestão: Escreva $\alpha(\mathbf{x}) = a_0 t + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ para $\mathbf{x} = (t, x_1, \dots, x_n)$.

Para vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ escrevemos $\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ para o determinante da matriz de colunas (ou linhas) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v}_3 , e recordamos que $\mathbf{v}_i \mapsto \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ é uma forma linear em \mathbb{R}^3 para $i = 1, 2, 3$. À luz do Ex. 1.22 a seguinte definição faz sentido.

DEFINIÇÃO 1.23. Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} vetores em \mathbb{R}^3 . O *produto vetorial de Lorentz* de \mathbf{v} com \mathbf{w} é o vetor $\mathbf{v} \times_L \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$(1.6) \quad \langle \mathbf{v} \times_L \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle_L = \det(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Deixamos como exercício provar que o produto vetorial de Lorentz tem propriedades semelhantes ao produto vetorial euclidiano. Em particular:

- $\mathbf{v} \times_L \mathbf{w}$ é linear em cada um dos fatores.
- $\mathbf{v} \times_L \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times_L \mathbf{v}$.
- $\mathbf{v} \times_L \mathbf{w} = 0$ se e só se \mathbf{v} e \mathbf{w} são linearmente dependentes.
- $\langle \mathbf{v} \times_L \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_L = \langle \mathbf{v} \times_L \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_L = 0$.

Escreva $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2)$ e $\mathbf{w} = (w_0, w_1, w_2)$. Podemos obter uma fórmula para $\mathbf{v} \times_L \mathbf{w}$ fazendo $\mathbf{x} = e_i$, $i = 0, 1, 2$ em (1.6):

$$\mathbf{v} \times_L \mathbf{w} = -e_0 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} - e_1 \begin{vmatrix} v_0 & v_2 \\ w_0 & w_2 \end{vmatrix} + e_2 \begin{vmatrix} v_0 & v_1 \\ w_0 & w_1 \end{vmatrix}.$$

É conveniente representar esta fórmula pela expressão formal

$$\mathbf{v} \times_L \mathbf{w} = \begin{vmatrix} -e_0 & e_1 & e_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \\ w_0 & w_1 & w_2 \end{vmatrix}.$$

Por fim notamos que o produto vetorial de Lorentz está relacionado com o produto vetorial euclidiano da seguinte forma:

$$\mathbf{v} \times_L \mathbf{w} = \rho(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

onde ρ é reflexão no plano $\{t = 0\}$.

PROPOSIÇÃO 1.24. Sejam $\Pi_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ e $\Pi_{\mathbf{w}} = \langle \mathbf{w} \rangle^{\perp_L}$ planos distintos que passam por O em \mathbb{R}^3 (com o produto escalar de Lorentz). Então a interseção $\Pi_{\mathbf{v}} \cap \Pi_{\mathbf{w}}$ é a reta por O na direção de $\mathbf{v} \times_L \mathbf{w}$

DEMONSTRAÇÃO. Imediata das definições e das propriedades de $\mathbf{v} \times_L \mathbf{w}$. □

Reflexões de Lorentz. Queremos introduzir um conceito apropriado de *reflexão de Lorentz* no hiper-plano $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ para um vetor **espacial** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ que podemos supor unitário no sentido de Lorentz: $q_L(\mathbf{v}) = 1$. Para isso definimos a *componente de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ao longo de \mathbf{v}* por

$$\mathbf{x}' = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L \mathbf{v}$$

e notamos que

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{v} \rangle_L = \langle \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L = 0,$$

onde usámos $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L = q_L(\mathbf{v}) = 1$. Assim,

$$(1.7) \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L \mathbf{v}$$

está em $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ e podemos escrever

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$$

com $\mathbf{x}' \in \langle \mathbf{v} \rangle$ e $\mathbf{x}'' \in \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$. Além disso, como $\langle \mathbf{v} \rangle$ e $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ são sub-espacos vetoriais complementares, esta escrita é única. Chamamos a \mathbf{x}'' a *projeção ortogonal de Lorentz de \mathbf{x} em $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$* .

Podemos agora definir a *reflexão de Lorentz em $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$* por

$$(1.8) \quad \rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L \mathbf{v}$$

para um vetor espacial \mathbf{v} com $q_L(\mathbf{v}) = 1$.

NOTA 1.25. Se \mathbf{v} é temporal, podemos supor que $q_L(\mathbf{v}) = -1$ e definimos a componente de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ao longo de \mathbf{v} por

$$\mathbf{x}' = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L \mathbf{v}.$$

os argumentos procedem então da mesma forma como no caso de \mathbf{v} ser espacial: temos que

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$$

onde $\mathbf{x}' \in \langle \mathbf{v} \rangle$ e $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ e a reflexão de Lorentz em $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ é

$$(1.9) \quad \rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}' = \mathbf{x} + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle_L \mathbf{v}$$

PROPOSIÇÃO 1.26. *Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ um vetor espacianão isotrópico. Então a reflexão de Lorentz $\rho: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida em (1.8) ou (1.9) é uma transformação de Lorentz que fixa o hiper-plano $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ ponto a ponto e troca os seus dois lados.*

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ se e só se $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$, e ρ troca os dois lados de $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ porque o ponto médio de \mathbf{x} e $\rho(\mathbf{x})$ é $\frac{1}{2}(\mathbf{x} + (\mathbf{x} - 2\mathbf{x}')) = \mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{x}''$ que está em $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$. Por fim, notando que

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}' = \mathbf{x}'' - \mathbf{x}',$$

vemos que

$$q_L(\rho(\mathbf{x})) = \langle \mathbf{x}'' - \mathbf{x}', \mathbf{x}'' - \mathbf{x}' \rangle = q_L(\mathbf{x}') + q_L(\mathbf{x}'') = \langle \mathbf{x}'' + \mathbf{x}', \mathbf{x}'' + \mathbf{x}' \rangle = q_L(\mathbf{x}),$$

pelo que ρ é uma transformação de Lorentz. \square

NOTA 1.27. Tratámos aqui apenas o caso de projecção e reflexão de Lorentz num hiper-plano por $O \in \mathbb{R}^{n+1}$ por ser este o único caso que vamos usar. No entanto, os argumentos podem ser facilmente adaptados a um hiper-plano por qualquer $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ fixo, de forma análoga ao que fizemos no caso euclidiano na Secção 6 do Capítulo 1. Note-se que, em geral, a reflexão de Lorentz assim obtida será a composta de uma transformação de Lorentz (que é linear, por definição) e uma translação.

Bases de Lorentz e mudanças de coordenadas. As bases ortonormadas são as bases adaptadas à geometria de \mathbb{R}^n com o produto interno euclidiano. O conceito correspondente em geometria de Lorentz é o seguinte.

DEFINIÇÃO 1.28. Uma base $(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n)$ de \mathbb{R}^{n+1} é uma *base de Lorentz* se

$$\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \rangle_L = -1, \quad \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle_L = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_L = 0, \quad i \neq j.$$

Por exemplo, a base canónica (e_0, \dots, e_n) é uma base de Lorentz de \mathbb{R}^{n+1} .

EXEMPLO 1.29. Considere o plano de Lorentz \mathbb{R}^2 e seja $\mathbf{u}_0 = (a, b)$ um vetor temporal com $q_L(\mathbf{u}_0) = -a^2 + b^2 = -1$. Então o vetor $\mathbf{u}_1 = (b, a)$ satisfaz $q_L(\mathbf{u}_1) = -b^2 + a^2 = 1$ e $\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle_L = -ab + ba = 0$. Logo $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ é uma base de Lorentz de \mathbb{R}^2 .

A demonstração da seguinte proposição importante é praticamente imediata das definições e deve ser efetuada pelo leitor como exercício.

PROPOSIÇÃO 1.30. *Seja $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma transformação linear e seja $(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n)$ uma base de Lorentz. Então $(f(\mathbf{u}_0), \dots, f(\mathbf{u}_n))$ é uma base Lorentz se e só se f é uma transformação de Lorentz.* \square

Comprimento de arco em geometria de Lorentz. Consideramos uma curva diferenciável $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $q_L(\alpha'(s)) > 0$ para todo o $s \in [a, b]$. Em analogia com a geometria euclidiana definimos o *comprimento de arco de Lorentz²* de α por

$$l_L(\alpha) = \int_a^b \sqrt{q_L(\alpha'(s))} ds.$$

EXERCÍCIO 1.31. Seja $\beta(u) = \alpha(g(u))$ uma reparametrização de α , onde $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ é diferenciável com $g(c) = a$, $g(d) = b$ e $g'(u) \geq 0$. Mostre que $l_L(\beta) = l_L(\alpha)$.

EXERCÍCIO 1.32. Calcule o comprimento de arco Lorentz da curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(s) = (\cosh(s), \sinh(s)).$$

Note-se que o traço de α está contido no ramo superior da hipérbole de equação $t^2 - x^2 = 1$. Explique porquê é razoável afirmar que a curva $\alpha(s)$ é análoga, em geometria de Lorentz, à curva $\beta(s) = (\cos s, \sin s)$ em geometria euclidiana.

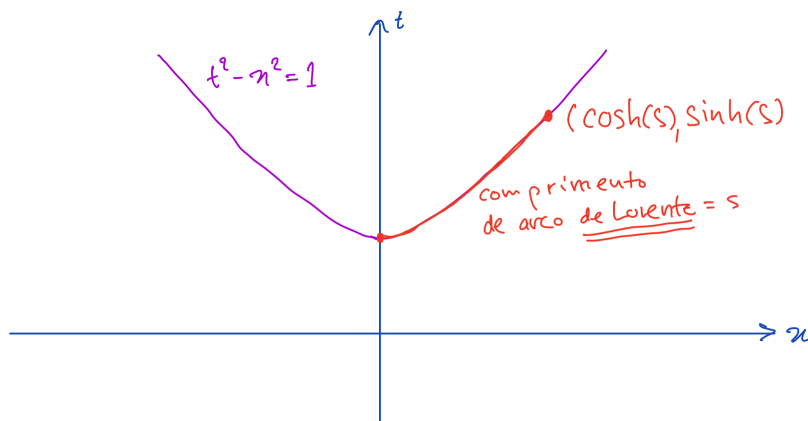


FIGURA 1.2. Parametrização do ramo superior da hipérbole $t^2 - x^2 = 1$

O último resultado desta seção diz que transformações de Lorentz preservam o comprimento de arco de Lorentz. Assim, este conceito é um conceito da geometria de Lorentz.

PROPOSIÇÃO 1.33. Seja $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $q_L(\alpha'(s)) \geq 0$ para todo o $s \in [a, b]$, seja $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma transformação de Lorentz e defina $\beta(s) = f(\alpha(s))$. Então $l_L(\beta) = l_L(\alpha)$.

DEMONSTRAÇÃO. Sendo a aplicação f uma transformação linear, ela é a sua própria derivada. Logo

$$\beta'(s) = (f \circ \alpha)'(s) = df_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = f(\alpha'(s)).$$

Como f é uma transformação de Lorentz temos então que

$$q_L(\beta'(s)) = q_L(f(\alpha'(s))) = q_L(\alpha'(s)),$$

onde o resultado é imediato. □

²Em relatividade especial o comprimento de arco de Lorentz de uma tal curva corresponde à chamada *comprimento próprio* da curva.

2. Geometria hiperbólica: o modelo do hiperboloide

A ideia da nossa abordagem da geometria hiperbólica é proceder em analogia com a geometria esférica, mas usando o produto escalar de Lorentz em \mathbb{R}^{n+1} em vez do produto interno euclidiano.

DEFINIÇÃO 2.1. O *modelo do hiperboloide do plano hiperbólico* é

$$\mathcal{H}^2 = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid q_L(t, x, y) = -1, t > 0\}.$$

Por outras palavras, \mathcal{H}^2 é a folha superior do hiperboloide de duas folhas definido pela equação $t^2 = 1 + x^2 + y^2$.

NOTA 2.2. A cada ponto $P \in \mathcal{H}^2$ podemos fazer corresponder a reta por O na direção de \overrightarrow{OP} , que é um vetor temporal. Reciprocamente, uma reta por O intersesta \mathcal{H}^2 se e só se a sua direção é temporal e nesse caso o ponto de interseção é único.

EXERCÍCIO 2.3. Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ um vetor não nulo. Mostre que $\Pi_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ intersesta \mathcal{H}^2 (numa hipérbole) se e só se \mathbf{v} é espacial, isto é, se e só se $\Pi_{\mathbf{v}}$ é um plano de Lorentz.

Sugestão: Utilize a Proposição 1.21 para reduzir a um dos três casos básicos.

DEFINIÇÃO 2.4. Uma *hipérbole máxima* é a interseção $l = \mathcal{H}^2 \cap \Pi$, onde $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ é um plano de Lorentz por O .

PROPOSIÇÃO 2.5. *Sejam P e Q em \mathcal{H}^2 pontos distintos. Então passa uma única hipérbole máxima por P e Q .*

DEMONSTRAÇÃO. A hipérbole máxima por P e Q é necessariamente a interseção do plano (de Lorentz) por O , P e Q com \mathcal{H}^2 . \square

O nosso próximo objetivo é definir uma função distância em \mathcal{H}^2 .

DEFINIÇÃO 2.6. Sejam P e Q pontos de \mathcal{H}^2 . A *distância hiperbólica* $d(P, Q)$ entre P e Q é o comprimento de arco de Lorentz do segmento de hipérbole máxima que une P a Q .

Se necessário, distinguiamos a distância hiperbólica de outras funções distância usando a notação $d_{\mathcal{H}^2}(P, Q) = d(P, Q)$.

PROPOSIÇÃO 2.7. *Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação de Lorentz em $O^+(1, 2)$. Então $f(\mathcal{H}^2) = \mathcal{H}^2$.*

DEMONSTRAÇÃO. Uma transformação de Lorentz preserva o hiperboloide de duas folhas definido por $q_L(t, x, y) = -1$. Logo o resultado é imediato da definição de $O^+(1, 2)$ como o grupo das transformações de Lorentz que preservam as duas componentes do interior do cone da luz. \square

Sabemos já (da Proposição 1.33) que as transformações de Lorentz preservam comprimento de arco de Lorentz e logo concluímos da Proposição anterior que as transformações de Lorentz em $O^+(1, 2)$ preservam a distância hiperbólica. Por outras palavras, temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.8. *Seja f uma transformação de Lorentz em $O^+(1, 2)$. Então a restrição de f a \mathcal{H}^2 é uma isometria.* \square

Dados P e Q arbitrários podemos usar a Proposição 1.21 para encontrar uma transformação de Lorentz f que leva a hipérbole máxima por l por P e Q na hipérbole máxima $\mathcal{H}^2 \cap \{y = 0\}$. Além disso, de acordo com o Ex. 1.32 podemos parametrizar esta hipérbole por $(\cosh(s), \sinh(s), 0)$, onde s é o comprimento de arco de Lorentz. Temos então,

pela Proposição 1.33, uma parametrização $f^{-1} \circ \alpha: \mathbb{R} \rightarrow l$ pelo comprimento de arco de Lorentz. Por outras palavras, a hipérbole máxima l em \mathcal{H}^2 (com a distância hiperbólica) é isométrica a \mathbb{R} . Logo temos que quaisquer duas parametrizações de l pelo comprimento de arco de Lorentz diferem por pré-composição com uma isometria $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Faz, assim, sentido dizer que um ponto de l *está entre* dois outros pontos dados e falar em *segmentos* de hipérboles máximas.

Para calcular a distância hiperbólica $d(P, Q)$ começamos por considerar o caso em que P e Q estão contidos na hipérbole máxima $\mathcal{H}^2 \cap \{y = 0\}$, isto é, a hipérbole $t^2 - x^2 = 1$ no plano tOx . Escrevendo $P = (\cosh(s_1), \sinh(s_1), 0)$ e $Q = (\cosh(s_2), \sinh(s_2), 0)$ temos que a distância hiperbólica entre P e Q é $|s_2 - s_1|$. Observamos agora que

$$\begin{aligned} -\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle_L &= \cosh(s_2) \cosh(s_1) - \sinh(s_2) \sinh(s_1) \\ &= \cosh(s_2) \cosh(-s_1) + \sinh(s_2) \sinh(-s_1) \\ &= \cosh(s_2 - s_1) \\ &= \cosh(d(P, Q)), \end{aligned}$$

onde usámos que \cosh é par, pelo que $\cosh(s_2 - s_1) = \cosh(s_1 - s_2)$. A importância desta observação é que $-\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle_L$ é invariante por transformações de Lorentz. Logo temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.9. *Sejam P e Q pontos de \mathcal{H}^2 . A distância hiperbólica entre P e Q é*

$$d(P, Q) = \cosh^{-1}(-\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle_L).$$

NOTA 2.10. A fórmula da Proposição 2.9 deve ser comparada com a fórmula em geometria esférica

$$d(P, Q) = \cos^{-1}(\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \rangle)$$

para $P, Q \in \mathbb{S}^2$.

EXERCÍCIO 2.11. Mostre que a distância hiperbólica satisfaz:

- (1) $d(P, Q) = d(Q, P)$;
- (2) $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0$ se e só se $P = Q$.

Para verificar que \mathcal{H}^2 com a distância hiperbólica é um espaço métrico falta provar a desigualdade triangular. Podemos usar um argumento semelhante ao usado para provar a desigualdade triangular em geometria esférica.

PROPOSIÇÃO 2.12. *Sejam P, Q e R pontos em \mathcal{H}^2 . Então*

$$d(Q, R) \leq d(Q, P) + d(P, R)$$

com igualdade se e só se P está no segmento de hipérbole máxima que une Q a R .

DEMONSTRAÇÃO. Basta considerar o caso em P, Q e R são distintos. Escreva

$$\alpha = d(Q, R), \quad \beta = d(P, Q), \quad \text{e} \quad \gamma = d(P, R).$$

As transformações de Lorentz que temos à nossa disposição fornecem isometrias de \mathcal{H}^2 que permitem supor que

$$\begin{aligned} P &= (1, 0, 0) \\ Q &= (\cosh \beta, \sinh \beta, 0) \\ R &= (\cosh \gamma, \cos a \sinh \gamma, \sin a \sinh \gamma), \end{aligned}$$

onde $a \in [0, 2\pi[$ é o ângulo entre as projeções de \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{PR} no plano xOy , conforme indicado na Figura 2.1. Temos então

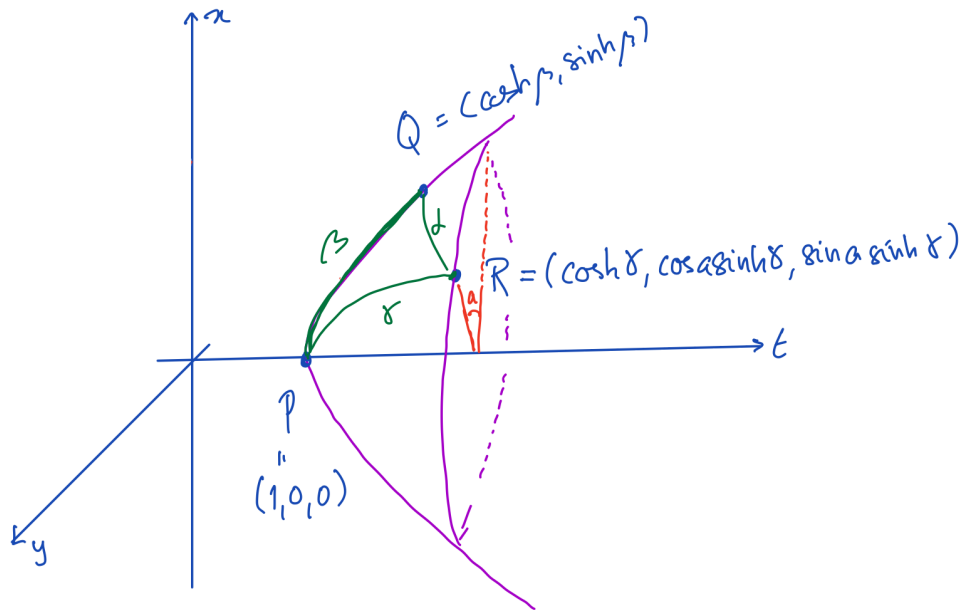


FIGURA 2.1. A desigualdade triangular hiperbólica

$$(2.1) \quad \cosh \alpha = -\langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR} \rangle_L = \cosh \beta \cosh \gamma - \sinh \beta \sinh \gamma \cos a$$

que podemos comparar com a fórmula

$$\cosh(\beta + \gamma) = \cosh \beta \cosh \gamma + \sinh \beta \sinh \gamma.$$

Como $\beta > 0$ e $\gamma > 0$ temos $\sinh \beta > 0$ e $\sinh \gamma > 0$ e logo vemos que

$$\cosh \alpha \leq \cosh(\beta + \gamma)$$

com igualdade se e só se $\cos a = -1 \iff a = \pi$. Daí obtemos o resultado desejado, lembrando que \cosh é uma função estritamente crescente em $[0, \infty[$. \square

Pela desigualdade triangular, o segmento de hipérbole máxima que une dois pontos em \mathcal{H}^2 é o caminho³ mais curto entre os dois pontos. Este facto justifica a seguinte definição.

DEFINIÇÃO 2.13. Uma *reta hiperbólica* em \mathcal{H}^2 é o mesmo que uma hipérbole máxima.

Pela Proposição 2.5 temos que passa uma única reta hiperbólica por dois pontos distintos P e Q em \mathcal{H}^2 . Note-se também que dada uma reta hiperbólica l , existe uma isometria

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow l$$

e qualquer outra isometria $\mathbb{R} \rightarrow l$ é da forma $\alpha \circ f$, onde f é uma isometria de \mathbb{R} .

DEFINIÇÃO 2.14. Duas retas hiperbólicas l e m dizem-se *paralelas* se $l = m$ ou se l e m são disjuntas. Escrevemos $l \parallel m$ para indicar que l e m são paralelas.

Chegamos ao ponto de estar em condições de enunciar a diferença principal entre a geometria euclidiana e a geometria hiperbólica:

PROPOSIÇÃO 2.15. *Dados uma reta hiperbólica $l \subseteq \mathcal{H}^2$ e um ponto $P \in \mathcal{H}^2$ que não está em l existem duas retas distintas por P que são paralelas a l .*

³Não vamos indicar com precisão todos os tipos de caminhos a incluir na comparação, mas certamente os caminhos formados por arcos de hipérbole máxima estão incluídos.

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $l = \Pi \cap \mathcal{H}^2$, onde Π é um plano que passa por O . Uma reta hiperbólica por $P \in \mathcal{H}^2$ é da forma $m = \Pi' \cap \mathcal{H}^2$ onde Π' é um plano que passa por O e P , e l e m interseccionam-se se e só se a reta $\Pi \cap \Pi'$ está no interior do cone da luz. É claro que existe mais que um plano Π' por O e P tal que a reta $\Pi \cap \Pi'$ não está no interior do cone da luz, o que demonstra o pretendido. \square

Uma versão moderna do Quinto Postulado de Euclides é a seguinte:

Dados uma reta l e um ponto P que não está em l existe uma única reta por P que é paralela a l .

Note-se que a Proposição 2.15 afirma que **em \mathcal{H}^2 se verifica a negação desta propriedade!** Não é difícil confirmar que no plano hiperbólico \mathcal{H}^2 se verificam os restantes postulados de Euclides. Portanto, é impossível provar o Quinto Postulado a partir dos restantes.

NOTA 2.16. Com a notação da prova da proposição anterior, note-se que existem dois planos Π' por O e P tais que $\Pi \cap \Pi'$ está no cone da luz. As duas retas hiperbólicas correspondentes $\Pi' \cap \mathcal{H}^2$ correspondem às posições limite de retas paralelas a l por P (com $\Pi \cap \Pi'$ no exterior do cone da luz).

DEFINIÇÃO 2.17. Retas paralelas $l = \Pi \cap \mathcal{H}^2$ e $m = \Pi' \cap \mathcal{H}^2$ tais que $\Pi \cap \Pi'$ está contido no cone da luz chamam-se *paralelas limite*. Retas paralelas $l = \Pi \cap \mathcal{H}^2$ e $m = \Pi' \cap \mathcal{H}^2$ tais que $\Pi \cap \Pi'$ está no exterior do cone da luz chamam-se *ultra-paralelas*.

PROPOSIÇÃO 2.18. *Retas hiperbólicas l e m são ultra-paralelas se e só se têm uma perpendicular comum.*

DEMONSTRAÇÃO. Usamos a notação da Definição 2.17. Se l e m são ultra-paralelas podemos, depois de aplicar uma transformação de Lorentz apropriada, supor que a reta espacial $\Pi \cap \Pi'$ é o eixo dos xx , e neste caso é claro que a reta hiperbólica $\{x = 0\}$ é uma perpendicular comum a l e m . O recíproco prova-se usando um argumento semelhante. \square

3. Geometria hiperbólica básica

Nesta secção desenvolvemos alguns conceitos e resultados básicos da geometria hiperbólica seguindo ideias semelhantes às aplicadas em geometria euclidiana.

Reflexões. Seja $\Pi = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ um plano por O no espaço de Lorentz \mathbb{R}^3 , onde \mathbf{v} é um vetor espacial e logo $l = \mathcal{H}^2 \cap \Pi$ é uma reta hiperbólica. Como Π contém pontos no interior do cone da luz, vemos que a reflexão de Lorentz $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida em (1.8) preserva as duas componentes do interior do cone da luz. Portanto, ρ preserva \mathcal{H}^2 e logo a sua restrição a \mathcal{H}^2 define uma isometria

$$\rho_l: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2.$$

Das propriedades das reflexões de Lorentz é imediato que a isometria ρ_l tem as seguintes propriedades:

- (1) ρ_l fixa a reta hiperbólica ponto a ponto.
- (2) ρ_l troca os dois lados de l em \mathcal{H}^2 .
- (3) ρ_l tem ordem dois: $\rho_l \circ \rho_l = \text{Id}_{\mathcal{H}^2}$.

À luz destas propriedades justifica-se chamar *reflexão hiperbólica na reta hiperbólica l* à isometria ρ_l .

Retas perpendiculares e mediatrizes. Podemos agora introduzir uma série de conceitos geométricos, análogos a conceitos da geometria euclidiana. Por exemplo, duas retas hiperbólicas distintas l e m que se intersectam dizem-se *perpendiculares*, escrito $l \perp m$, se $\rho_l(m) = m$, e o pé da perpendicular pelo ponto P à reta l é o ponto de interseção de l com a reta por P e $\rho_l(P)$.

EXERCÍCIO 3.1. Suponha que $l = \Pi_{\mathbf{v}} \cap \mathcal{H}^2$ e $m = \Pi_{\mathbf{w}} \cap \mathcal{H}^2$, onde $\Pi_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$ e $\Pi_{\mathbf{w}} = \langle \mathbf{w} \rangle^{\perp_L}$. Mostre que $l \perp m$ se e só se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_L = 0$.

PROPOSIÇÃO 3.2. *Por cada ponto P numa reta hiperbólica l passa uma e uma só perpendicular a l .*

DEMONSTRAÇÃO. Escreva $l = \Pi_{\mathbf{v}} \cap \mathcal{H}^2$, onde $\Pi_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$. Dado $P \in l$, seja Π' o plano por O e P que contém \mathbf{v} . Então o Ex. 3.1 mostra que $m = \Pi' \cap \mathcal{H}^2$ é uma reta perpendicular a l que passa por P e que é única. \square

DEFINIÇÃO 3.3. A *mediatriz* de dois pontos distintos P e P' em \mathcal{H}^2 é

$$\text{med}(P, P') = \{Q \in \mathcal{H}^2 \mid d(P, Q) = d(P', Q)\}.$$

PROPOSIÇÃO 3.4. *A mediatriz $\text{med}(P, P') \subseteq \mathcal{H}^2$ é uma reta hiperbólica.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja l a perpendicular à reta PP' que passa pelo ponto médio do segmento que une P a P' . Então reflexão em l troca P e P' e concluimos que $l \subseteq \text{med}(P, P')$. A inclusão contrária $\text{med}(P, P') \subseteq l$ é consequência da desigualdade triangular estrita. \square

Usando argumentos formalmente idênticos aos usados no caso da geometria euclidiana temos os seguintes resultados.

PROPOSIÇÃO 3.5. *Sejam P_0, P_1 e P_2 pontos não colineares em \mathcal{H}^2 e sejam Q e Q' pontos tais que*

$$d(P_i, Q) = d(P_i, Q'), \quad i = 0, 1, 2.$$

Então $P = P'$. \square

PROPOSIÇÃO 3.6. *Sejam P_0, P_1 e P_2 pontos não colineares em \mathcal{H}^2 e sejam $f, g: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ isometrias tais que $f(P_i) = g(P_i)$ para $i = 0, 1, 2$. Então $f = g$.*

4. Plano tangente e ângulos em geometria hiperbólica

Tal como em geometria esférica, o conceito apropriado de ângulo em geometria hiperbólica diz respeito ao ângulo entre vetores tangentes a \mathcal{H}^2 .

DEFINIÇÃO 4.1. O *plano tangente* a \mathcal{H}^2 em $P \in \mathcal{H}^2$ é o plano $T_P\mathcal{H}^2$ por P que é ortogonal de Lorentz ao vetor \overrightarrow{OP} :

$$T_P\mathcal{H}^2 = \{P + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{v}, \overrightarrow{OP} \rangle_L = 0\} = P + \langle \overrightarrow{OP} \rangle^{\perp_L}.$$

O plano afim $T_P\mathcal{H}^2$ tem um ponto distinguido P , e vamos dar a $T_P\mathcal{H}^2$ a estrutura de espaço vectorial correspondente, em que P corresponde ao vetor nulo. Por outras palavras, temos uma identificação canónica $T_P\mathcal{H}^2 \xrightarrow{\cong} \langle \overrightarrow{OP} \rangle^{\perp_L}$ dada por $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$ com inversa $\mathbf{v} \mapsto P + \mathbf{v}$. Dizemos que um vetor $\langle \overrightarrow{OP} \rangle^{\perp_L}$ é um *vetor tangente a \mathcal{H}^2 em P* .

EXERCÍCIO 4.2. Mostre que o plano tangente $T_P\mathcal{H}^2$ é idêntico ao plano tangente à superfície de nível $f(t, x, y) = t^2 - x^2 - y^2 = 1$ em P definido da forma usual.

NOTA 4.3. Os vetores tangentes a \mathcal{H}^2 em P são **espaciais**, uma vez que \overrightarrow{OP} é temporal. Por outras palavras, a restrição do produto escalar de Lorentz a $T_P\mathcal{H}^2 = \langle \overrightarrow{OP} \rangle^{\perp_L}$ é um produto escalar euclidiano.

EXERCÍCIO 4.4. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathcal{H}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável tal que $\alpha(t_0) = P$. Mostre que $\alpha'(t_0)$ é um vetor tangente a \mathcal{H}^2 em P .

Para a seguinte definição, recordamos que escrevemos $|\mathbf{v}|_L = \sqrt{q_L(\mathbf{v})}$ para a norma de Lorentz um vetor espacial \mathbf{v} .

DEFINIÇÃO 4.5. Sejam \mathbf{v} e \mathbf{w} vetores tangentes não nulos a \mathcal{H}^2 em P . O *ângulo hiperbólico entre \mathbf{v} e \mathbf{w}* é o ângulo $\theta \in [0, \pi]$ definida por

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_L}{|\mathbf{v}|_L |\mathbf{w}|_L}.$$

NOTA 4.6. Para definir o ângulo no intervalo $[0, 2\pi[$ é necessário escolher uma orientação no plano tangente $T_P \mathcal{H}^2$.

EXEMPLO 4.7. No caso $P = (1, 0, 0)$, o plano tangente $T_P \mathcal{H}^2$ é o plano horizontal $\{t = 1\}$ e a restrição do produto escalar de Lorentz coincide com o produto escalar euclidiano. Portanto, neste caso (e só neste), o ângulo hiperbólico entre dois vetores tangentes coincide com o ângulo euclidiano.

Podemos definir o conceito de triângulo hiperbólico $\Delta PQR \subseteq \mathcal{H}^2$ da forma óbvia. Em particular, os *ângulos internos* de ΔPQR são definidos da forma natural, à custa do ângulo entre vetores tangentes. A identidade (2.1) pode agora ser interpretada da seguinte forma.

TEOREMA 4.8 (Lei dos co-senos hiperbólica). *Seja ΔABC um triângulo hiperbólico com ângulos internos a, b e c e comprimentos dos lados opostos α, β e γ , respectivamente. Então*

$$\cosh \alpha = \cosh \beta \cosh \gamma - \sinh \beta \sinh \gamma \cos a.$$

□

COROLÁRIO 4.9 (Teorema de Pitágoras hiperbólico). *Num triângulo hiperbólico reto com hipotenusa α e catetas β e γ tem-se*

$$\cosh \alpha = \cosh \beta \cosh \gamma.$$

□

Temos ainda uma segunda identidade fundamental da trigonometria hiperbólica.

TEOREMA 4.10 (Lei dos senos hiperbólica). *Seja ΔABC um triângulo hiperbólico com ângulos internos a, b e c e comprimentos dos lados opostos α, β e γ , respectivamente. Então*

$$\frac{\sin a}{\sinh \alpha} = \frac{\sin b}{\sinh \beta} = \frac{\sin c}{\sinh \gamma}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Usando coordenadas como na demonstração da Proposição 2.12 calculamos

$$\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cosh \beta & \sinh \beta & 0 \\ \cosh \gamma & \cos a \sinh \gamma & \sin a \sinh \gamma \end{vmatrix} = \sin a \sinh \beta \sinh \gamma.$$

Como o determinante é invariante por permutações cíclicas das linhas concluímos que

$$\sin a \sinh \beta \sinh \gamma = \sin b \sinh \gamma \sinh \alpha = \sin c \sinh \alpha \sinh \beta,$$

donde obtemos o resultado desejado.

□

5. A soma dos ângulos internos de um triângulo

As leis da trigonometria hiperbólica que acabámos de provar permitem-nos estudar algumas a questão da soma dos ângulos internos de um triângulo.

LEMA 5.1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico reto não degenerado é estritamente menor que π .*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $a = \pi/2$, b e c ângulos internos do triângulo Δ e sejam α , β e γ os comprimentos dos lados opostos.

Pela lei dos co-senos aplicada ao ângulo b e o Teorema de Pitágoras hiperbólico obtemos

$$\begin{aligned} \cos b \sinh \alpha \sinh \gamma &= \cosh \alpha \cosh \gamma - \cosh \beta \\ &= \cosh \beta \cosh^2 \gamma - \cosh \beta \\ &= \cosh \beta (\cosh^2 \gamma - 1) \\ &= \cosh \beta \sinh^2 \gamma, \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\cos b \sinh \alpha = \cosh \beta \sinh \gamma.$$

Por outro lado, pela lei dos senos hiperbólica, temos $\sinh \alpha = \sinh \beta / \sin b$ (porque $a = \pi/2$), e logo

$$(5.1) \quad \cos b \sinh \beta = \sin b \cosh \beta \sinh \gamma.$$

Além disso, fazendo as contas análogas começando por aplicar a lei dos co-senos ao ângulo c vem

$$(5.2) \quad \cos c \sinh \gamma = \sin c \cosh \gamma \sinh \beta.$$

De (5.1) e (5.2) obtemos

$$\cos b \cos c = \sin b \sin c \cosh \beta \cosh \gamma$$

e logo, usando $\cos(b+c) = \cos b \cos c - \sin b \sin c$, tem-se

$$\cos(b+c) = \sin b \sin c (\cosh \beta \cosh \gamma - 1).$$

Desta identidade concluímos que $\cos(b+c) > 0 \iff b+c < \pi/2$ como queríamos. \square

LEMA 5.2. *Seja ΔABC um triângulo hiperbólico e seja D um ponto no segmento hiperbólico que une B a C . Então a soma dos ângulos internos de ΔABC é igual à soma dos ângulos internos de ΔABD e de ΔADC menos π .*

DEMONSTRAÇÃO. Basta observar que ângulos em geometria hiperbólica obedecem à propriedade usual de aditividade, uma vez que são definidos como ângulos euclidianos no plano tangente. \square

TEOREMA 5.3. *A soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico não degenerado é estritamente menor que π .*

DEMONSTRAÇÃO. Imediata dos Lemas 5.1 e 5.2. \square

À luz deste teorema é natural quantificar a diferença entre π e a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico.

DEFINIÇÃO 5.4. O *defeito* de um triângulo hiperbólico Δ com ângulos internos a , b e c é

$$\delta(\Delta) = \pi - (a + b + c)$$

Do Lema 5.2 vemos imediatamente que o defeito tem a seguinte propriedade.

PROPOSIÇÃO 5.5. *Seja $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ um triângulo hiperbólico decomposto em dois outros triângulo hiperbólicos. Então*

$$\delta(\Delta) = \delta(\Delta_1) + \delta(\Delta_2).$$

□

NOTA 5.6. O defeito de um triângulo hiperbólico é evidentemente invariante por isometrias de \mathcal{H}^2 . Não vamos definir formalmente o conceito de área em geometria hiperbólica, mas é claro que qualquer definição razoável de área no plano hiperbólico deve também ser invariante por isometrias e ter a propriedade de aditividade da Proposição 5.5. Além disso, estas duas propriedades são suficientes para determinar a área de uma figura decomponível em triângulos, a menos de uma normalização. Portanto, concluímos que a área de um triângulo hiperbólico deverá ser proporcional ao seu defeito. Esta observação deve ser comparada com o Teorema 5.2 do Capítulo 2.

NOTA 5.7. Se $\square ABCD$ é um quadrilátero hiperbólico vemos, fazendo uma decomposição em triângulos, que a soma dos seus ângulo internos é estritamente menor que 2π . Logo não existem retângulos em geometria hiperbólica! Em particular, a perpendicular comum a duas retas hiperbólicas ultra-paralelas é única.

Terminamos esta secção com um estudo mais cuidado de paralelismo em geometria hiperbólica.

DEFINIÇÃO 5.8. A *distância* de um ponto P a uma reta l no plano hiperbólico é a distância de P ao pé da perpendicular a l por P .

TEOREMA 5.9. *Seja l uma reta no plano hiperbólico e seja P um ponto à distância $\gamma > 0$ de l . Então o ângulo b entre a perpendicular a l por P e cada uma das duas retas paralelas limite a l por P satisfaz*

$$\cot b = \sinh \gamma.$$

Em particular, $b < \pi/2$ e $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} b = 0$.

O ângulo b chama-se o *ângulo de paralelismo para a distância γ* .

DEMONSTRAÇÃO. Considere o triângulo hiperbólico reto ΔABC , em que $B = P$, A é o pé da perpendicular a l por P e C é um ponto de l . Então, da identidade (5.1) da demonstração do Lema 5.1, vemos que

$$\cot b = \coth \beta \sinh \gamma,$$

onde $\beta = d(A, C)$. Mas uma paralela limite a l por P é exatamente a posição limite das retas hiperbólicas PC quando C (e logo β) tende para ∞ para qualquer um dos lados de A (esta afirmação torna-se evidente considerando os respetivos plano em \mathcal{H}^2 por O). Logo obtemos o resultado pretendido lembrando que $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \coth \beta = 1$. □

6. Isometrias do plano hiperbólico e a sua classificação

Recordamos que a classificação das isometrias do plano euclidiano foi feita recorrendo ao Teorema das três reflexões, que por sua vez é baseado nas propriedades básicas de reflexões e mediatrizes. Como acabamos de ver temos os resultados análogos em geometria hiperbólica.

TEOREMA 6.1 (das três reflexões em geometria hiperbólica). *Se P_0 e P_1 são pontos distintos em \mathcal{H}^2 e P'_0 e P'_1 são pontos tais que $d(P_0, P_1) = d(P'_0, P'_1)$ então existe uma isometria $f: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$, composta de no máximo duas reflexões, tal que $f(P_0) = P'_0$ e $f(P_1) = P'_1$. A única outra isometria com esta propriedade é $g = \rho \circ f$, onde ρ é reflexão na reta hiperbólica $P'_0P'_1$.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova é idêntica à prova do teorema análogo no plano euclidiano que vimos no Capítulo 1. \square

A classificação geometria das isometrias de \mathcal{H}^2 procede agora de um forma análoga ao caso da geometria euclidiana, com uma diferença importante: uma composta $f = \rho_2 \circ \rho_1$ de reflexões em retas paralelas l_1 e l_2 pode ser de dois tipos, conforme o tipo de paralelismo.

DEFINIÇÃO 6.2. Sejam l_1 e l_2 retas hiperbólicas (distintas) e seja $\rho_i: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ reflexão na reta l_i , $i = 1, 2$.

- Se l_1 e l_2 se interseçam, então a composta $f = \rho_2 \circ \rho_1$ chama-se uma *rotação* em torno do ponto de interseção.
- Se l_1 e l_2 são paralelas limites, então a composta $f = \rho_2 \circ \rho_1$ chama-se uma *rotação limite*.
- Se l_1 e l_2 são ultra-paralelas, então a composta $f = \rho_2 \circ \rho_1$ chama-se uma *translação*.
- Se m é a perpendicular comum das retas ultra-paralelas l_1 e l_2 e ρ_m denota reflexão em m , então a composta $\rho_m \circ \rho_2 \circ \rho_1$ chama-se uma *reflexão com deslizamento*.

EXERCÍCIO 6.3. Seja $f = \rho_2 \circ \rho_1$ uma translação hiperbólica. Mostre que a perpendicular comum m de l_1 e l_2 é a única reta invariante por f . Assim, as propriedades de uma translação hiperbólica são muito diferentes das de uma translação euclidiana.

EXERCÍCIO 6.4. Seja $f = \rho_2 \circ \rho_1$ uma rotação limite. Mostre que f não tem nenhuma reta invariante.

TEOREMA 6.5. *Qualquer isometria $f: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ é de um dos seguintes tipos: identidade, reflexão, rotação, rotação limite, translação ou reflexão com deslizamento.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova prossegue de forma idêntica à prova do Teorema 8.9 de classificação das isometrias do plano euclidiano no Capítulo 1, exceto que no primeiro parágrafo do Caso 3 é preciso também distinguir a possibilidade de l_1 e l_2 serem paralelas, levando à possibilidade de g ser uma translação ou uma rotação limite, além da possibilidade de ser uma rotação. \square

Exercícios

1. Considere a curva $\alpha(s) = (\cosh(s), \sinh(s), 0)$ em \mathcal{H}^2 . Verifique que $\alpha'(s)$ é um vetor espacial e calcule as normas hiperbólico $|\alpha'(s)|_L$ e euclidiano $|\alpha'(s)|$ do vetor tangente $\alpha'(s)$.

2. Considere os pontos $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (\sqrt{2}, 1, 0)$ e $R = (3, 2, 2)$ em \mathcal{H}^2 . Calcule as distâncias $d(P, Q)$, $d(Q, R)$ e $d(P, R)$. Determine ainda o ângulo $\angle QPR$.

3. (a) Calcule a \mathcal{H}^2 -distância $d(P, Q)$ entre $P = (1, 0, 0)$ e $Q = (\cosh(\rho), \sinh(\rho), 0)$ para $\rho \in \mathbb{R}$.
- (b) Encontre uma parametrização $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{H}^2$ da \mathcal{H}^2 -circunferência de centro $P = (1, 0, 0)$ e \mathcal{H}^2 -raio $\rho > 0$.
- (c) Calcule a norma de Lorentz $|\alpha'(\theta)|_L$ do vetor tangente da curva parametrizada α encontrada na alínea anterior.
- (d) Calcule o \mathcal{H}^2 -comprimento de uma \mathcal{H}^2 -circunferência de \mathcal{H}^2 -raio $\rho > 0$.

4. Neste exercício, considere geometria hiperbólica em

$$\mathcal{H}_r^2 = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid -t^2 + x^2 + y^2 = -r^2, t > 0\}$$

para $r > 0$. Tal como no caso $r = 1$, a função distância é dada através da definição $l(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(s)|_L ds$ do \mathcal{H}_r^2 -comprimento de arco para uma curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathcal{H}_r^2$. Calcule

o \mathcal{H}_r^2 -comprimento de uma \mathcal{H}_r^2 -circunferência de \mathcal{H}_r^2 -raio $\rho > 0$, e faça um desenvolvimento da expressão obtida em potências de ρ/r (recorde-se que $\sinh(x) = x + x^3/3! + x^5/5! + \dots$).

5. Seja $P = (a, b, 0) = (\cosh(s), \sinh(s), 0) \in \mathcal{H}^2$ (para algum $s \in \mathbb{R}$).

(a) Mostre que os vetores $\mathbf{v} = (b, a, 0)$ e $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$ são tangentes a \mathcal{H}^2 em P , e que

$$q_L(\mathbf{v}) = q_L(\mathbf{w}) = 1, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_L = 0.$$

(b) Faça um esboço dos vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} numa folha identificada com o plano tangente $T_P\mathcal{H}^2$, usando

- (i) a métrica induzida em $T_P\mathcal{H}^2$ pelo produto escalar de Lorentz em \mathbb{R}^3 , e
- (ii) a métrica induzida em $T_P\mathcal{H}^2$ pelo produto escalar euclidiano em \mathbb{R}^3 .

(c) Esboço a curva $\alpha(\theta) = \cos(\theta)\mathbf{v} + \sin(\theta)\mathbf{w}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e indique o ponto $Q = \alpha(\pi/4)$ em cada uma das figuras produzidas na alínea anterior. De seguida compare o ângulo euclidiano entre \mathbf{v} e \overrightarrow{PQ} com o ângulo hiperbólico.

6. Mostre que a isometria T_θ de \mathcal{H}^2 dada pelo matriz de Lorentz

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

pode ser escrita como composta $T_\theta = T_2 \circ T_1$ de \mathcal{H}^2 -reflexões em \mathcal{H}^2 -retas L_1 e L_2 , que se intersectam em $(1, 0, 0)$ fazendo um \mathcal{H}^2 -ângulo de $\theta/2$.

7. Seja $P = (\cosh(s), \sinh(s), 0) \in \mathcal{H}^2$, seja $\Pi_1 \subset \mathbb{R}^3$ o plano $x = 0$ e seja $\Pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ o plano por P e o eixo dos yy . Considere as \mathcal{H}^2 -retas $L_i = \mathcal{H}^2 \cap \Pi_i$, $i = 1, 2$.

- (a) Mostre que Π_2 é o ortogonal de Lorentz do vetor $\mathbf{v} = (\sinh(s), \cosh(s), 0)$.
- (b) Seja $T_i: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{H}^2$ a \mathcal{H}^2 -reflexão em L_i para $i = 1, 2$. Encontre as matrizes de Lorentz que representam T_1 e T_2 .
- (c) Mostre que a isometria $T = T_2 \circ T_1$ é dada pelo matriz de Lorentz A_{2s} , onde

$$A_s = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) & 0 \\ \sinh(s) & \cosh(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Sejam L_1 e L_2 retas hiperbólicas ultraparalelas e suponha que o segmento de uma perpendicular comum M a L_1 e L_2 que as une tem comprimento s . Mostre que a composta $T = T_2 \circ T_1$ das reflexões T_i em L_i pode ser escrita da forma T_{2s} usando uma base de Lorentz apropriada de \mathbb{R}^3 .
- (e) Mostre que T_s é uma \mathcal{H}^2 -translação, ou seja, a composta de duas \mathcal{H}^2 -reflexões em \mathcal{H}^2 -retas ultraparalelas.

8. Mostre que a isometria T de \mathcal{H}^2 dada pelo matriz de Lorentz

$$A = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) & 0 \\ \sinh(s) & \cosh(s) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é uma \mathcal{H}^2 -reflexão com deslizamento, ou seja, T pode ser escrita como composta $T = T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$ de uma \mathcal{H}^2 -reflexão T_1 e uma \mathcal{H}^2 -translação T_2 com o mesmo eixo L .

9. Considere os vetores

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$

- (a) Mostre que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ é uma base ortonormada de \mathbb{R}^3 com o produto escalar euclidiano usual.
- (b) Determine os produtos escalares de Lorentz $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_L$ para $i, j = 1, 2, 3$.
- (c) Seja $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2 + c\mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle_L = 0$ se e só se $c = 0$.
- (d) Seja $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ para $a \in \mathbb{R}$. Mostre que $|\mathbf{v}|_L = 1$.
- (e) Seja $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ para $a \in \mathbb{R}$, e seja $\rho_{\mathbf{v}}$ reflexão de Lorentz no plano $\Pi_{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp_L}$. Determine a matriz A de $\rho_{\mathbf{v}}$ na base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.
- (f) Escreva $\rho_1 = \rho_{\mathbf{u}_2}$ e $\rho_2 = \rho_{\mathbf{v}}$, onde $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ para $a \in \mathbb{R}$. Determine a matriz de $f = \rho_2 \circ \rho_1$ na base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.
- (g) Mostre que a isometria T de \mathcal{H}^2 dada, na base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, pela matriz de Lorentz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

é uma *rotação limite*, ou seja, T pode ser escrita como composta $T = T_2 \circ T_1$ de duas \mathcal{H}^2 -reflexões em \mathcal{H}^2 -retas L_1 e L_2 que são paralelas assintóticas.

10. Mostre que $L = \mathcal{H}^2 \cap \{y = 0\}$ é a única \mathcal{H}^2 -reta invariante pela \mathcal{H}^2 -translação T_s dada pela matriz de Lorentz $A_s = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) & 0 \\ \sinh(s) & \cosh(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ com $s \neq 0$.

11. Mostre que retas ultraparalelas em \mathcal{H}^2 têm uma *única* perpendicular comum.

12. Seja Δ um triângulo hiperbólico com lados α, β e γ e ângulos opostos a, b e c , respetivamente. Prove a *Lei dos senos hiperbólica*:

$$\frac{\sin(a)}{\sinh(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sinh(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sinh(\gamma)}.$$

Sugestão: utilize um argumento análogo ao utilizado na prova da lei dos senos esférica.

13. Sejam l e m retas que se intersectam no plano hiperbólico, e seja ρ reflexão em l . Mostre que o ângulo de interseção entre l e m é $\pi/2$ se e só se $\rho(m) = m$, ou seja, $l \perp m$.

14. Mostre que a hipotenusa num triângulo hiperbólico reto é estritamente maior que cada uma das catetas.

Sugestão: utilize a lei dos co-senos hiperbólica.

15. Seja L um reta no plano hiperbólico e seja P um ponto exterior a L . Mostre que a função $f: L \rightarrow \mathbb{R}, Q \mapsto d(P, Q)$ tem um único mínimo, dado pelo pé da perpendicular a L por P .

Bibliografia

- [1] Paulo V. Araújo, *Geometria diferencial*, 3^a ed., IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
- [2] Manfredo P. do Carmo, *Differential geometry of curves & surfaces*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016, Revised & updated second edition of [MR0394451]. MR 3837152