Exercícios de Elementos de Matemática I

1. Verifique se f é derivável em 0 e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

   (a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x + |x|$

   (b) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$

2. Determine a equação da recta tangente a cada uma das seguintes curvas nos pontos indicados:

   (a) $y = 2x + 1$ no ponto $(1, 3)$

   (b) $y = 2x^3 + 1$ no ponto $(1, 3)$

   (c) $y = x^2 + x$ no ponto $(2, 6)$

   (d) $y^2 + x^2 = 1$ no ponto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

3. Mostre que os gráficos das funções reais de variável real $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = 2x^3 + 1$ têm uma tangente comum no ponto $(1, 3)$.

4. Considere a função real de variável real $f(x) = x^2 + 3$.

   (a) Determine os pontos do gráfico da função f tais que a tangente ao gráfico nesses pontos intersecta o eixo dos xx no ponto $(2, 0)$.

   (b) Determine a equação das rectas que passam pelo ponto $(5, 9)$ e são tangentes ao gráfico de f.

   (c) Determine as equações das tangentes ao gráfico que são paralelas à recta $12x - 3y + 14 = 0$.

5. Escreva a expressão da derivada de cada uma das seguintes funções a seguir definidas.

   (a) $y = 2 + 3x^2 + 7x^5$ (b) $y = \frac{8-x+3x^2}{2-9x}$ para $x \neq 2/9$ (c) $y = x^2 + 1/x^2$ para $x \neq 0$

   (d) $y = (5x)^{1/5}$ (e) $y = (\frac{8-x+3x^2}{2-9x})^{2/5}$ para $x \neq 2/9$ (f) $y = x^{5/2} - x^{-5/2}$ para $x > 0$

   (g) $y = \frac{x^{3/2}-x-1/2}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \in]0, 1[$ (h) $y = x\sqrt{1 + x^4}$ (i) $y = \frac{x^{3/2}-x-1/2}{x^{2/3}}$ para $x \neq 0$

   (j) $y = \frac{(x^2+1)^{1/3}}{\sqrt{x^3-1}}$ para $x \neq 1$ (k) $y = sen(cos(x))$ (l) $y = sen(x)cos(x)$ (m) $y = \frac{xsen(x)}{1+x^2}$

   (n) $y = sen(\frac{x}{1+x^2})$ (o) $y = \frac{1}{\sqrt{1+sen^2(x)}}$ (p) $y = cos((\frac{1}{x-1})^{1/3})$ para $x \neq 1$

6. A função $f(z) = z^2 - z + 1$ é crescente para $z > 1/2$. Se g designa a função inversa de f neste intervalo, determine $g'(3)$ e $g'(7)$.

7. Para cada uma das seguintes alíneas, indique a derivada da ordem indicada.

   (a) $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$, $x \neq -1$, f'' (b) $g(x) = (x+1)^3$, $g^{(14)}$ (c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, h', $x \in]-1,1[$,

   (d) $j(x) = cos^2(x)$, j' (e) $k(x) = sen(x)$, $k^{(40)}$ (f) $l(x) = x^2 sen(x))$, l^4

8. Diga quais das seguintes funções são limitadas no intervalo indicado e quais atingem um valor máximo e/ou um valor mínimo nesse intervalo, indicando, no caso afirmativo, esses valores.

   (a) $f(x) = x^3 + 7$ em $]-1,3[$ (b) $g(x) = x^3 + 7$ em $\mathbf{R}$ (c) $h(x) = sen(x)$ em $]-\pi, \pi[$

   (d) $j(x) = sen(x)$ em $\mathbf{R}$ (e) $k(x) = 1/x$ em $[1,5]$

9. Seja $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

   (a) Calcule $f \circ f$ e $f \circ f \circ f$.

   (b) Verifique $(f \circ f)' = f'(f(x))f'(x)$

   (c) Determine $(f \circ f \circ f)'$, indicando o seu domínio.

10. Determine x e $y \in \mathbf{R}$ tais que $x + y = 402$ e que o produto de x por y seja o maior possível.

11. Determine os pontos da curva $y^2 = x + 1$ que estão mais próximos da origem.

12. Mostre que de todos os triângulos isósceles com um dado perímetro, o triângulo equilátero é o que tem maior área.

13. A energia potencial efectiva $V(r)$ de um electrão à distância r do núcleo no átomo de hidrogénio consiste em duas partes, uma originada pela atracção de Coulomb entre o electrão e o núcleo, e a outra pelo movimento rotacional do electrão. Assim

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{l(l+1)h^2}{8\pi^2 m r^2}$$

   onde m e e representam, respectivamente, a massa e a carga do electrão. É sabido que o raio a_0 da primeira órbita de Bohr no átomo de hidrogénio é dado por $a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$.

   (a) Mostre que se $V(r)$ for medido em unidades de $\frac{e^2}{4\pi a_0 r}$ e fizermos a mudança de variável $r = \rho a_0$ então

$$V(\rho) = -1/\rho + \frac{l(l+1)}{2\rho^2}.$$

   (b) Assumindo que $l \neq 0$ (isto é, excluindo o caso do electrão ocupar uma órbita s), mostre que existe um ponto de viragem, nomeadamente o ponto $(\rho_m, V(\rho_m))$, sendo $\rho_m = l(l+1)$. Identifique a natureza desse ponto de viragem.

14. O movimento de uma partícula sob a influência de um potencial constante numa caixa unidimensional (linha) de comprimento l é um problema clássico de Mecânica Quântica para o qual é possível resolver a correspondente equação de Schrödinger. A função de onda para este sistema apresenta a seguinte forma

$$\psi(x) = \sqrt{2/l}\, sen(\frac{n\pi x}{l}).$$

(a) Mostre que $\psi(x)$ admite pontos de viragem quando $\frac{n\pi x}{l}$ é um múltiplo ímpar de $\pi/2$.

(b) Indique os valores de x correspondentes aos pontos de viragem para $n = 3$.

(c) Encontre a segunda derivada de ψ e diga qual é a natureza de cada um dos pontos de viragem da alínea anterior.

15. Seja $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$. Determine a, b, c, d, e de modo que $f(0) = 2$, $f(-2) = -14$ e $f(2) = -14$ sejam mínimos locais de f.

16. Mostre que um polinómio de grau 3 tem no máximo três zeros.

17. Mostre que a equação $cos(x) = 2x$ tem exactamente uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

18. Verifique se o teorema de Rolle é aplicável a cada uma das seguintes funções nos intervalos indicados. Em caso afirmativo, determine os pontos do gráfico da função restrita ao intervalo nos quais a tangente ao gráfico é horizontal.

    (a) $f(x) = x^{2/3}$ em $[-1, 1]$. (b) $f(x) = x^{1/3}$ em $[1, 2]$. (c) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ em $]-1, 1[$.

    (d) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ em $[-1, 1]$. (e) $h(x) = sen(x)$ em $[0, 2\pi]$

19. Sabendo que 1 e -1 são raízes do polinómio $x^6 - 1$, mostre que são as únicas raízes deste polinómio.

20. Esboce os gráficos das seguintes funções:

    (a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ para $x \neq 1$ (b) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ para $x \in \mathbf{R}$ (c) $h(x) = (x + 1)^{1/3}$ para $x \neq -1$

    (d) $j(x) = x + sen(x)$ para $x \in \mathbf{R}$ (e) $k(x) = sen^{1/3}(x)$ para $x \in \mathbf{R}$ (f) $m(x) = (x + 1)^{2x}$ para $x \in \mathbf{R}$

21. Verifique se o Teorema do Valor Médio é aplicável a cada uma das seguintes funções nos intervalos indicados. Em caso afirmativo, determine os pontos c do intervalo que verificam a conclusão do teorema.

    (a)$f(x) = \frac{4}{x-1} + x - 1$ em $[2, 5]$ (b) $g(x) = |x - 1|$ em $[0, 1]$ (c) $g(x) = |x - 1|$ em $[-2, 4]$

22. Mostre que $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$ para $x \in [0, +\infty[$.

23. (a) Encontre a recta que melhor aproxima o gráfico da função $f(x) = x^3$ no ponto $(1, 1)$. Majore o erro cometido ao utilizar a recta para calcular o valor aproximado da função para $x = 1.5$

    (b) Encontre a parábola que melhor aproxima f nesse mesmo ponto. Compare os erros cometidos ao utilizar respectivamente a recta encontrada na alínea anterior e a parábola para aproximar a função.

24. Determine o polinómio p de grau 3 tal que $p(1) = -2$, $p'(1) = -2$, $p''(1) = 3$ e $p^{(3)}(1) = -6$.

25. Escreva o polinómio de Taylor de grau n das seguintes funções no ponto x_0 para os valores de n e x_0 indicados, assim como uma majoração para o resto.

    (a) $f(x) = x^5 + 2x^4 + x + 4$ para $x_0 = 2$, $n = 5$ (b) $g(x) = e^x$ para $x_0 = 0$ e $n = 4$

    (c) $g(x) = e^x$ para $x_0 = 1$ e $n = 4$ (d) $h(x) = cos(2x)$ para $x_0 = \pi/6$ e $n = 3$

26. Calcule os seguintes limites, utilizando a regra de l'Hôpital.

(a) $\lim_{x\to\infty} ln(\frac{x^2+1}{x^2+5})$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{xcos(x)-sen(x)}{x^3}$

(d) $\lim_{x\to 0}(1/sen^2(x)-1/x^2)$ (e) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-sen^2(\pi x/2)}$ (f) $\lim_{x\to 3}(\frac{1}{x-3}-\frac{5}{x^2-x-6})$

(g) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-x^{1/3})}$

27. Escreva a expressão da derivada de cada uma das seguintes funções a seguir definidas.

(a) $y=e^{-x^2}$ (b) $y=e^{1/x^2}$ (c) $y=1/2(e^x-e^{-x})$ (d) $y=e^{x^2}/x^2$ (e) $y=(e^x+e{-}x)^2$

(f) $y=ln(x^4)$ (g) $y=log_{10}(x^4)$ (h) $y=ln(x^2+1)-e^{x^2+1}ln(x^2)$ (i) $y=3^{7x}$ (j) $y=\frac{3^x+7^x}{e^x+2}$

28. Calcule os seguintes limites, utilizando a regra de l'Hôpital.

(a) $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x$ (b) $\lim_{x\to 1}(ln(x^2))/(x-1)$ (c) $\lim_{x\to\infty} e^{x^2+1}/x$ (d) $\lim_{x\to\infty} e^x/(x^2+1)$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{x^5+2x^3+7}$ (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+x^2}{e^{x^2}+x}$ (g) $\lim_{x\to\infty} e^x/ln(x)$ (h) $\lim_{x\to\infty}(ln(x^2))/x^2$

29. Calcule, utilizando um polinónio de Taylor da função

(a) $cos(\pi/10)$ com erro inferior a 10^{-4} (b) e com erro inferior a 10^{-5}

(c) $ln(2)$ com erro inferior a 10^{-3} (d) $arctg(0,5)$ com erro inferior a 10^{-2}

30. Encontre a derivada das seguintes funções $y(x)$ que estão definidas implicitamente perto do ponto $(1,1)$

(a) $y^2+x^2=2$ (b) $sen(2\pi y)+cos(2\pi x)=1$ (c) $ln(y)+e^x=e$ (d) $xy+x=2$

31. Considere as funções f, g e h de $[0,2]$ em $\Re$ definidas respectivamente por $f(x) = x^2 + 1$,

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

e

$$h(x) = \begin{cases} 13/9 & 0 \leq x \leq 2/3 \\ 25/9 & 2/3 \leq x \leq 4/3 \\ 5 & 4/3 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Esboce os gráficos destas funções e indique as somas inferior e superior que se podem obter para f utilizando, respectivamente, as funções em escada g e h.

32. A velocidade de um autocarro em movimento (em metros por segundo) é observada ao longo de períodos de 10 segundos e verifica-se que

$$\begin{array}{lll} 4 \leq v \leq 5 & se & 0 < t < 10 \\ 5.5 \leq v \leq 6.5 & se & 10 < t < 20 \\ 5 \leq v \leq 5.7 & se & 20 < t < 30 \end{array}.$$

(a) Dê uma estimativa por defeito da distância percorrida nesses 30 segundos.

(b) Dê uma estimativa por exccesso da distância percorrida nesses 30 segundos.

33. Calcule as áreas limitadas pelas curvas indicadas

(a) $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = x^2$.

(b) $x = -1$, $y = 0$, $x = 1$ e $y = x^4$

34. Calcule os seguintes integrais

(a) $\int_4^6 3x\ dx$	(b) $\int_2^3 (x^2 + 5x + 1)\ dx$	(c) $\int_1^1 8\ dx$	(d) $\int_{-4}^0 (1 + x^2 - x^3)\ dx$
(e) $\int_1^2 s^{4/3}\ ds$	(f) $\int_1^2 4\pi r^{2/3}\ dr$	(g) $\int_{-1}^1 (t^4 + t^{917})\ dt$	(h) $\int_1^2 (s + 1/s^2)\ ds$
(i) $\int_1^2 (t+4)^{-3}\ dt$	(j) $\int_{\pi/2}^{\pi} (3 + z^2)\ dz$	(k) $\int_1^2 (1+t^2)^2/t^2\ dt$	(l) $\int_1^2 (x^2+5)^2/x^4\ dx$
(m) $\int_1^2 (t^2 + 8t + 1)/t^4\ dt$	(n) $\int_{-2}^{-1} (x^2 + x)^2/x\ dx$	(o) $\int_1^8 (1 + \sqrt{x})\ dx$	(p) $\int_2^4 (u^4 - 1)/(u - 1)\ du$

35. Indique a área compreendida entre os gráficos das seguintes funções.

(a) x^2 e $4x^4$ em $[2,3]$ (b) $2x^2$ e $x^4 + 1$ em $[-1/2, 1/2]$ (c) $x^4 + 1$ e $1/x^2$ em $[1,2]$.

36. Indique uma primitiva das seguintes funções.

(a) $(2x^3 + 5)^{7/2} 6x^2$ (b) $(2x^3 + 5)^{7/2} x^2$ (c) $(x - 5)^6$ (d) $1/\sqrt{3x + 4}$

s(e) $(x - 3)^2/4$ (f) $(2x + 3)(x^2 + 2s - 1)$ (g) $(x + 1)(x^2 + 2x - 5)$ (h) $x^{2/3}\sqrt{2 + x^{5/3}}$

(i) $x^{-2}\sqrt{1 - xv^{-1}}$ (j) $x(2x - 1)$ (k) $x^3(1 + x^2)^{3/2}$ (l) $x\sqrt{1 + x}$

37. Verifique a igualdade $\int \frac{x^3+2x+1}{(1-x)^5}\ dx = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2(x-1)^2} + \frac{5}{3(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4}$ e calcule $\int_2^3 \frac{x^3+2x+1}{(1-x)^5}\ dx$.

38. Sendo $\int_0^1 f(x)\ dx = 3$, $\int_1^2 f(x)\ dx = 4$ e $\int_2^3 f(x)\ dx = -8$, calcule os seguintes integrais

(a) $\int_0^2 f(x)\ dx$ (b) $\int_0^1 3f(x)\ dx$ (c) $\int_0^3 8f(x)\ dx$ (d) $\int_1^3 10f(x)\ dx$

39. Seja $F(t)=\int_3^t \frac{1}{[(4-s)^2+8]^3}\,ds$. Calcule $F'(4)$.

40. Indique as derivadas das funções seguintes.

(a)$d/dt\int_0^t \frac{3}{(x^4+x^3+1)^6}\,dx$ (b) $d/dt\int_t^3 x^2(1+x)^5\,dx$ (c) $d/dt\int_t^4 \frac{u^4}{(u^2+1)^3}\,du$

41. Indique uma primitiva para cada uma das seguintes funções.

$(a)\ (1+(2x-1)^2)^{-1}$	$(b)\ (x^2+2x+2)^{-1}$	$(c)\ sen\theta cos\theta/(1+sen^4\theta)$
$(d)\ x^{-1}\sqrt{16x^2-1}$	$(e)\ (x\sqrt{x-1})^{-1}$	$(f)\ senx\,cos^{-3}x(1+tg^4x)^{-1}$
$(g)\ x^2+e^x$	$(h)\ cosx+e^{4x}$	$(i)\ e^{4x}-1/x$
$(j)\ (x^2+1)x^{-1}$	$(k)\ x(x-1)^{-1}$	$(l)\ (y-1)/(y^2-1)$
$(m)\ e^{-x}$	$(n)\ 3^x$	$(o)\ x^2+x+1+1/x+1/x^2$

42. Calcule os seguintes integrais.

$(a)\ \int (2+3x)sen5x\,dx$	$(b)\ \int x^4(1-x)^{20}\,dx$	$(c)\ \int x\sqrt{1+x^2}\,dx$	$(d)\ \int_1^2 x^{-2}sen(1/x)\,dx$
$(e)\ \int_{-2}^1 x(x^2-1)^9\,dx$	$(f)\ \int sen(\sqrt{x-1})\,dx$	$(g)\ \int xsenx^2cosx^2\,dx$	$(h)\ \int_0^\phi \sqrt{1+3cos^2x}sen2x\,dx$
$(i)\ \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$	$(j)\ \int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$	$(k)\ \int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$	$(l)\ \int \frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}\,dx$
$(m)\ \int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx$	$(n)\ \int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx$	$(o)\ \int \frac{x+1}{x^3-1}\,dx$	$(p)\ \int \frac{dx}{x^4+1}\,dx$

43. Utilizando integração por partes, mostre que

$$\int(a^2-x^2)^n\,dx = x(a^2-x^2)^n/(2n+1)+2a^2n/(2n+1)\ \int(a^2-x^2)^{n-1}\,dx+C.$$

44. Uma porta em forma de parábola com 1,50 m de base e 2 m de altura é cortada numa parede. Que área ocupa a porta nessa parede?

45. Uma tina é cheia de água, à velocidade de $3t^2+6t$ litros por minuto em cada instante t, durante 2 minutos. Supondo que a tina estava vazia no instante inicial, que quantidade de água apresenta ao fim dos 2 minutos?

46. Pretende-se cobrir uma piscina que tem a forma da região limitada pelas curvas $y=x^2$ e $y=2$. A cobertura custa 5000\$00 por metro quadrado e é vendida em unidades quadradas de $0.5\times 0.5\ m^2$. Por quanto fica o material necessário para cobrir a piscina?

47. Um balão deixa escapar ar à velocidade de $3t^2+2t\ cm^3/seg$ durante 3 segundos. Quanto ar escapa durante esse período?

48. Um esgoto polui um lago perto de uma estância de ski durante algum tempo. A concentração de bactérias na água ao fim de t dias, (C(t) = concentração de bactérias por centímetro cúbico) é dada por $C'(t)=10^3(t-7)$ para $0\le t\le 6$, após descontaminação do lago. Qual é a variação na concentração das bactérias entre o quarto e o sexto dias?

49. Uma bola de neve esférica com diâmetro inicial de 70 cm está a derreter-se, diminuindo o seu diâmetro à velocidade de 4 cm/seg. Suponha que a bola mantém a forma esférica durante todo o processo.

(a) Indique o instante no qual a bola tem diâmetro 20 cm.
(b) Qual é o diâmetro da bola ao fim de 12 minutos?
(c) Quanto tempo demora a bola a derreter-se completamente?

50. a velocidade média v_m de uma molécula de massa m numa amostra gasosa à temperatura T é dada pelo modelo fornecido pela Teoria Cinemática dos Gases como tendo a expressão $v_m = 4\pi\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^\infty e^{-\alpha v^2}\, v^3\, dv$, onde k é a constante de Bolzano e $\alpha = \frac{m}{2kT}$. Utilize a substituição $u = v^2$ para simplificar o integral e o método de integração por partes para encontrar o valor de v_m.

51. Aproxime os seguintes integrais definidos, considerando $n = 4$

    (a) pela definição
    (b) pela regra do trapézio
    (c) pela regra de Simpson
        i. $\int_5^7 (x^3 + x + 2)\, dx$
        ii. $\int_5^{10} \frac{1}{x+1}\, dx$
        iii. $\int_1^{10} \sqrt{x} + 3\, dx$
        iv. $\int_5^7 \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\, dx$

    e compare os resultados obtidos.

52. O calor específico C_p para o benzeno sólido a uma pressão constante, para valores $23K \leq T \leq 273K$, é o seguinte:

T/K	23	48	73	123	223	273
$C_p/Jmol^{-1}K{-}1$	13.01	29.66	40.46	55.44	97.61	122.30

Considerando que $C_p = AT^3$, para $0 \leq T \leq 23K$, determine a entropia do benzeno sólido a $273K$, calculando uma aproximação do integral definido $\int_0^{273} C_p/T\, dT$, usando a regra do trapézio para calcular o integral $\int_{23}^{273} C_p/T\, dT$.

53. Indique quais dos seguintes integrais impróprios são convergentes, calculando nesses casos o seu valor.

    (a) $\int_0^1 ln(x)\, dx$ (b) $\int_0^2 1/x\, dx$ (c) $\int_0^2 1/x^2\, dx$
    (d) $\int_0^2 1/x^n\, dx$ (e) $\int_0^{\pi/2} tg(x)\, dx$ (f) $\int_0^1 1/(1-x)^{1/2}\, dx$
    (g) $\int_0^5 1/(x^2-9)\, dx$ (h) $\int_0^\pi cosec(x-\pi)\, dx$ (i) $\int_0^{+\infty} e^{x+3}\, dx$
    (j) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ (k) $\int_{-\infty}^2 e^{-x}\, dx$ (l) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\, dx$
    (m) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^3}\, dx$ (n) $\int_{\sqrt{\pi-1}}^{+\infty} xcos(x^2+1)\, dx$ (o) $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+x+1}\, dx$

54. Calcule o perímetro da circunferência de raio 3 utlizando um integral definido.

55. Calcule o perímetro da região plana definida por $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 4$.

56. Calcule o volume de uma esfera de raio r, considerando que a esfera foi gerada pela rotação de meio círculo em torno de um eixo.

57. Encontre o volume do elipsoide de equação $x^2/9 + y^2/16 + z^2/25 = 1$.

58. Encontre o volume do sólido limitado pelas superfícies $x^2/9 + y^2/16 + z^2/25 = 1$, $z = 0$ e $z = 5$.

59. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos XX da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

 (a) pelo método do disco; (b) pelo método da concha.

60. Encontre o volume do sólido obtido rodando a região $x^{2/3} + y^{2/3} \leq 4$ em torno do eixo dos XX.

61. Relativamente às funções que se seguem, determine as derivadas parciais indicadas:

 (a) $f(x, y) = xy^3 + 2x$; $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ $(2, 1)$

 (b) $f(x, y) = xe^{-xy} + 3y$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

 (c) $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2+1}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

 (d) $f(s, t) = \sqrt{8 + s^2 + t^4}$; $\frac{\partial f}{\partial s}(1, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial t}(1, 0)$

 (e) $f(x, y, z) = x^2z^3 + xy - tg\ z$; $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$

 (f) $f(x, y, z) = x\sqrt{yz}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(2, -1, -3)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, -1, -3)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(2, -1, -3)$

 (g) $f(x, y, z) = x^{yz}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(2, 1, 1)$

 (h) $f(x, y) = x^2y^3 - 3xy^7 + 3x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

 (i) $f(x, y) = sen^2(xy)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\pi}{2}, 1)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\frac{\pi}{2}, 1)$

 (j) $f(x, y) = arcsen(x^2 + y^2 - 1)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $(0, 1)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 1)$

 (k) $f(x, y) = x^2y^3z^4$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

 (l) $f(x, y) = x^2y^3 - 2x^4y$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ e $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$

 (m) $f(x, y) = e^{xy^2}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$

 (n) $f(x, y, z) = x^5 + x^4y^4z^3 + yz^2$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ e $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}$

 (o) $f(x, y, z) = e^{xyz}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial y}$

 (p) $u(x, y, z) = x + 2y^2 + 3z^3$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}(2, -1, 1)$

 (q) $f(x, y) = \int_1^2 \frac{e^{x+2y+t}}{t}\ dt$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

 (r) $f(x, y) = \int_0^\pi \frac{sen(txy)}{t}\ dt$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1/2, 1/2)$

62. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(u, v) = f(u \cos v, u\, sen\, v)$. Determine $\frac{\partial g}{\partial u}$ e $\frac{\partial g}{\partial v}$ usando a regra da cadeia.

63. Para cada uma das seguintes funções $z(x, y)$ definidas implicitamente perto do ponto $(1, 1, 1)$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$:

 (a) $x^2 + y^3 + z^2 = 3$, (b) $e^{y+z} + (z - x)^3 = e^2$.

64. Determine os máximos e mínimos locais e ainda os pontos-sela das seguintes funções:

 (a) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - x^2y$ (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

 (c) $f(x, y) = x^2\, cosy + seny + x^2$ (d) $f(x, y) = e^{-x}(x^2 + y^2)$

65. Encontre os três números positivos tal que a sua soma é igual a 300 e a soma dos seus quadrados é mínima.

66. Que dimensões deve ter uma caixa rectangular fechada com $1m^3$ de volume para que a sua superfície lateral seja mínima?

67. Determine a distância mínima do ponto $(1, 0, -2)$ a um ponto do plano $x + 2y + z = 4$.

68. Calcule os seguintes integrais duplos:

(a) $\int\int_D (x^2 + 4y) \quad dxdy$ sendo $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 3\}$
(b) $\int\int_D (x - y)^2 \quad dxdy$ sendo $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 4\}$
(c) $\int\int_D xe^{x^2-y} \quad dxdy$ sendo $D = [0, 2] \times [0, 3]$
(d) $\int\int_D x\cos(x + y)\ dxdy$ sendo $D = [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$
(e) $\int\int_D xy\ dA, \quad D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
(f) $\int\int_D (3x + y)\ dA, \quad D = \{(x, y) \in R^2 :\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ \sin x \leq y \leq \cos x\}$
(g) $\int\int_D \frac{1}{x}\ dA, \quad D = \{(x, y) \in R^2 : 1 \leq y \leq e,\ y^2 \leq x \leq y^4\}$
(h) $\int\int_D x\cos y\ dA$, D é limitado por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$
(i) $\int\int_D e^{x+y}\ dA$, $D = \{(x, y) \in R^2 :\ y \leq x,\ 0 \leq x \leq 2 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$
(j) $\int\int_D 3xy\ dA$; D é limitado por $x = 0,\ x = y$ e $y = x^2 - 4x + 4$
(k) $\int\int_D 4y\ dA$, $D = \{(x, y) \in R^2 :\ 0 \leq y \leq x^2 + 1 \text{ e } y - 1 \leq x \leq 1\}$
(l) $\int\int_D xy\ dA$, D é a região do terceiro quadrante pertencente ao círculo de centro $(0, 0)$ e raio 3.

69. Determine quais das seguintes séries convergem usando o critério da comparação:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{ln(n)}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^{n-1}}$

70. Determine quais das seguintes séries convergem usando o critério do integral:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ sen\frac{\pi}{n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

71. Determine quais das seguintes séries convergem usando o critério da razão:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n+1}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)!}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n(n+2)}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$

72. Determine quais das seguintes séries convergem:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{e^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$

73. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências:
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n4^n}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^n}$ (f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(ln(n))^n}$

74. Determine a série de Taylor das seguintes funções nos pontos indicados:
(a) $ln\ x$ em $x_0 = 1$ (b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ em $x_0 = 1$
(c) e^{-2x} em $x_0 = 1$ (d) $sen\ x$ em $x_0 = \pi/4$

75. Mostre que, para todos $m, n \geq 1$:

(a) $\int_0^{2\pi} cos(mx)\ cos(nx) = 0$ se $m \neq n$ e $\int_0^{2\pi} cos(mx)\ cos(nx) = \pi$ se $m = n$;

(b) $\int_0^{2\pi} cos(mx)\ sen(nx) = 0$.

76. Determine as séries de Fourier (com período 2π) das funções

(a) $f(x) = x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$,

(b) $f(x) = |x - \pi|$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$.

Conclua que $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$

77. Determine a série de Fourier (com período 1) da função $f(x) = e^x$ $(0 \leq x \leq 1)$.