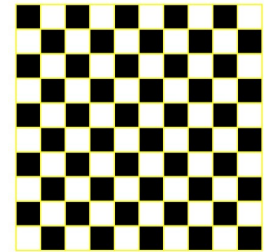


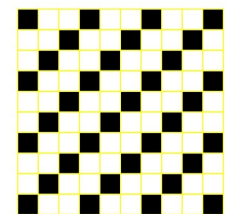
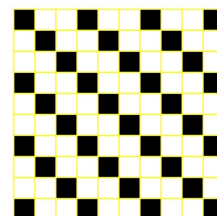
## Regras de boa vizinhança

Ana Paula S. Dias [Departamento de Matemática e Centro de Matemática, Universidade do Porto]  
 Eliana Manuel Pinho [Centro de Matemática e Faculdade de Arquitectura, Universidade do Porto]

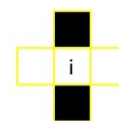
Imagine o leitor que possui azulejos quadrados, todos do mesmo tamanho mas de duas cores diferentes, pretos e brancos. Ao cobrir uma parede com os azulejos, fazendo coincidir os vértices, pode colocar a si mesmo o desafio de tentar que cada azulejo preto tenha quatro vizinhos brancos e que cada azulejo branco tenha quatro vizinhos pretos. Após um momento de reflexão descobrirá que a esta regra de coloração corresponde o padrão do tabuleiro de xadrez.



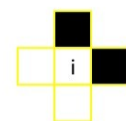
Satisfeito com o resultado, o leitor passa para a parede seguinte e cria uma nova regra. Por exemplo, que cada azulejo preto tenha quatro vizinhos brancos e que cada azulejo branco tenha dois vizinhos pretos (e dois brancos). Não é tão fácil como o anterior mas o leitor consegue chegar a um dos resultados seguintes, que são semelhantes mas em que um está rodado em relação ao outro.



Provavelmente o leitor chegou a esta solução por um processo de tentativa-erro como o seguinte. Começando com um azulejo branco (i), sabe que pode dispor os dois vizinhos pretos em lados opostos - caso a) - ou em lados contíguos - caso b).

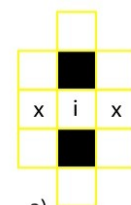


a)

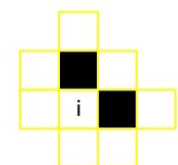


b)

Seguindo a regra de coloração, preenche com azulejos brancos a vizinhança dos azulejos pretos. No entanto, os azulejos assinalados com X, no caso a), ficam com três vizinhos brancos, o que é incompatível com a regra de coloração. Portanto conclui que os vizinhos pretos de um azulejo branco nunca podem estar em lados opostos.



a)

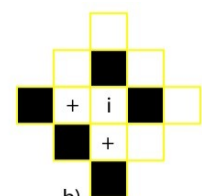


b)

Ao acrescentar azulejos ao caso b), completando a vizinhança dos azulejos assinalados com +, o leitor apercebe-se de um padrão que se pode estender por uma parede tão grande quanto se queira.



a)

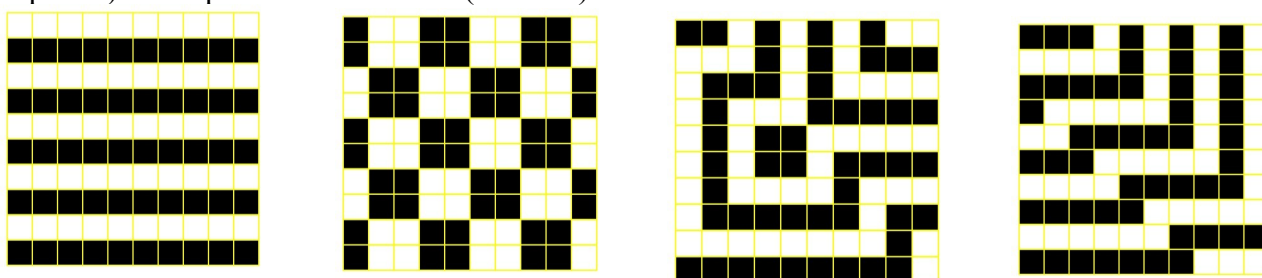


b)

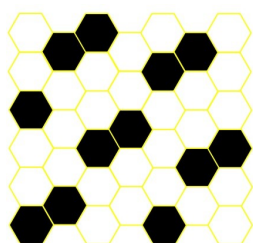
Nesta altura o leitor está a pensar que talvez haja uma maneira mais simples de chegar ao padrão final a partir da regra de coloração.

Entretanto continua a experimentar e verifica que não consegue cobrir a parede com a regra: "cada azulejo preto tem quatro vizinhos brancos e cada azulejo branco tem três vizinhos pretos (e um branco)". A regra de coloração "cada azulejo preto tem um vizinho branco (e três pretos) e cada azulejo branco tem dois vizinhos pretos (e dois brancos)" dá origem a dois padrões diferentes (papel quadriculado e caneta chamados a participar). Quando chega à regra "cada azulejo preto tem dois

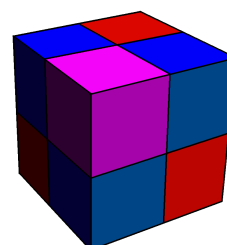
vizinhos brancos e cada azulejo branco tem dois vizinhos pretos" surgem muitos padrões diferentes. Tanto pode ter padrões certinhos, que se repetem periodicamente (os dois padrões periódicos, à esquerda) como padrões mais soltos (à direita):



O leitor desconfia que pode passar uma temporada entretido com este problema e começa a organizar as ideias. Para começar, como ter a certeza de que experimentou todas as regras de coloração? E se tiver azulejos quadrados de três cores diferentes, pretos, brancos e cinzentos? E de quatro cores diferentes? A família e os amigos, nesta altura, contribuem com cadernos quadriculados e combinações de cores improváveis.



Deambulando pela rua - então e se usar aqueles azulejos hexagonais que viu na loja, unindo-os vértice com vértice, de forma a que cada azulejo tenha seis vizinhos? Deambulando pela casa - então e se usar os cubos dos filhos e os sobrepuser, vértice com vértice, cada um com seis vizinhos: o de cima, o de baixo e os quatro dos lados?



O artigo que tem em mãos nasceu de questões desta natureza.

Há muitos modelos científicos que tentam descrever fenómenos reais e que subdividem o espaço em porções pequenas, todas iguais, que se relacionam de determinada maneira. Para o leitor é prático cobrir uma parede grande com azulejos quadrados pequenos e com a regra de fazer coincidir os vértices. Também um cientista que pretenda estudar o desenvolvimento, ao longo do tempo, de uma mancha de bolor numa parede ou de uma espécie de arbusto no deserto, pode dividir a parede, ou a superfície do deserto, numa quadrícula. A partir dessa divisão descreve o alastramento do arbusto, quadrado a quadrado, sabendo que o arbusto só aparece num quadrado se estiver presente em algum dos quadrados vizinhos. As duas cores que o leitor utilizou podem codificar a propriedade que o cientista estuda, o quadrado é preto se não tem arbusto e branco se tem arbusto. Numa situação diferente, em que se estude a concentração de uma determinada substância, pode considerar-se três cores: nas quadrículas pretas a concentração é inferior a  $30^\circ$ , nas quadrículas brancas é superior a  $70^\circ$  e nas quadrículas cinzentas a concentração é superior a  $30^\circ$  e inferior a  $70^\circ$ . O leitor pode imaginar vários casos diferentes.

A matemática que agora lhe apresentamos aborda com muita generalidade o tipo de problemas que até aqui referimos, tentando perceber o que há de comum em todos os exemplos, independentemente de termos bolor, arbustos ou concentrações, independentemente de termos duas, três, ou  $k$  cores, independentemente de termos uma superfície (como uma parede) ou um volume (como uma sala) ou um espaço de maior dimensão. A nossa motivação vem das equações diferenciais. Se cada célula na rede representa um sistema de equações diferenciais ordinárias que depende das células vizinhas, encontrar um padrão corresponde a identificar um subespaço vectorial do espaço de fase do sistema infinito de equações diferenciais que é deixado invariante pelo sistema. Ou por outras palavras, qualquer solução do sistema que passe por tal subespaço afinal permanece lá durante todo o tempo. Neste artigo não desenvolveremos esta vertente do problema. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes nos artigos [2,3] e referências lá citadas.

A questão a que tentamos responder é: num problema em que o espaço está regularmente dividido e em que temos  $k$  cores, dada uma regra local de coloração quais os padrões que podemos obter?

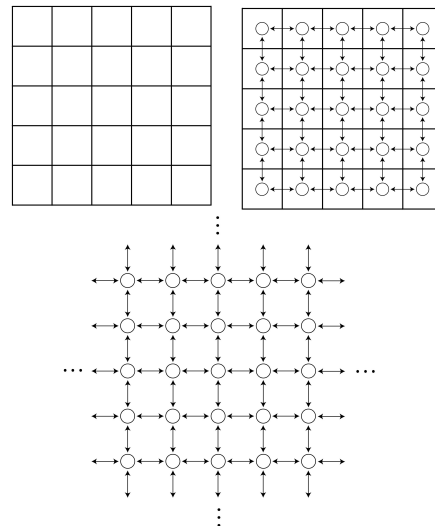
O leitor poderá ficar perplexo por não existir uma resposta imediata embora o treino com os azulejos de duas cores tenha revelado resultados tão diversos: regras de coloração às quais corresponde apenas um padrão, regras às quais correspondem dois padrões, regras às quais corresponde uma aparente infinidade de padrões (sim, garantimos que são em número infinito) e regras às quais não corresponde nenhum padrão.

Na primeira parte do artigo vamos clarificar o significado de "regularmente dividido" e de regra de coloração. Na segunda parte, apoiadas por um exemplo, vamos descrever resultados da nossa investigação matemática. Na terceira parte expomos, de forma muito breve, esses resultados na sua generalidade.

### 1. Ferramentas

Tomemos a quadrícula formada pelo revestimento de azulejos e coloquemos uma bola no centro de cada quadrado, unindo duas bolas com setas se os lados dos respectivos quadrados se tocam. Obtemos assim uma estrutura que descreve as propriedades da quadrícula inicial. Atribuimos às bolas (que passamos a chamar *células*) a cor do azulejo correspondente e representamos as relações de vizinhança (ou *acoplamentos*) por setas, todas do mesmo tamanho. Todas as células têm o mesmo número de vizinhos pois consideramos que esta estrutura é uma *rede infinita*.

Agora está claro porque é que nos encontramos numa área de investigação chamada "redes de células acopladas"!



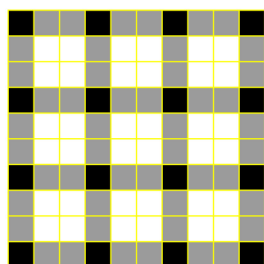
Quando falamos de vizinhança, se X é vizinho de Y então Y é vizinho de X, relação que representamos com uma seta de duas pontas (seta bidireccional), entre X e Y. Relações mais gerais, no entanto, exigem setas com uma ponta e uma cauda, imagine o leitor uma linha de montagem ou uma árvore genealógica. Uma seta bidireccional significa duas setas unidireccionais em direcções opostas.

Formalmente, para o caso dos azulejos quadrados, as células ocupam as posições  $(\alpha, \beta)$  do plano, que pertencem ao conjunto

$$\mathcal{L} = \{\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) : \alpha, \beta \in \mathbf{Z}\}$$

Caso queira aprofundar o estudo, acrescentamos que os nossos resultados são válidos para qualquer *rede euclidiana*  $L$  em  $\mathbf{R}^n$ , isto é, um reticulado (que denotamos igualmente por  $L$ ) com  $n$  geradores linearmente independentes, em  $\mathbf{R}^n$ , que pertencem ao conjunto dos vizinhos mais próximos da origem. A rede hexagonal e a cúbica são exemplos de redes euclidianas.

Para definirmos as regras de coloração de uma forma consistente temos que considerar o número de cores e a *valência* característica de cada rede, onde valência é o nome dado ao número de vizinhos de cada célula.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, neste padrão tomamos as cores pela ordem preto, branco e cinzento. A regra de coloração pode então ser descrita pela matriz A: a primeira linha indica que uma célula da primeira cor (preto) tem 0 vizinhos da primeira cor, 0 vizinhos da segunda cor (branco) e 4 vizinhos da terceira cor (cinzento); de forma análoga a segunda e a terceira linhas indicam as cores dos vizinhos das células brancas e cinzentas, respectivamente.

O leitor já está familiarizado com a tarefa de distribuir cores pelos vizinhos, e concordará

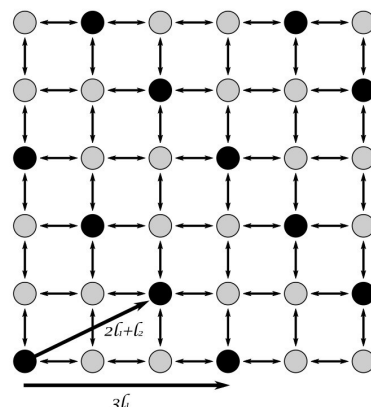
que com matrizes é mais fácil garantir que não nos esqueçamos de nenhuma hipótese. Se prosseguir o estudo verá que, para  $k$  cores e valência  $v$ , tem de considerar todas as matrizes  $k \times k$  com entradas inteiras não negativas e cuja soma, ao longo das linhas, é  $v$ . Basta enumerar as matrizes a menos de permutações das cores pois não é relevante a ordenação que escolheu para as cores.

## 2. Um exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

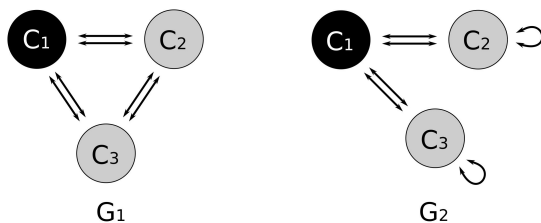
É possível colorir as células da rede quadrada infinita com duas cores, digamos preto e cinzento, de acordo com a regra  $A$ ?

O leitor já sabe, desde o início deste artigo, que a resposta é positiva. Mas já reparou que os padrões obtidos são periódicos segundo duas direcções diferentes? Note os períodos não colineares  $3l_1$  e  $2l_1+l_2$  do padrão seguinte.



Repare o leitor que podemos introduzir naturalmente o conceito de relações de vizinhança (acoplamentos) agora entre um conjunto finito de objectos (células). Obtemos *redes finitas* de células acopladas. Analogamente, faz sentido considerar colorações das células de acordo com uma determinada regra.

Por exemplo, cada uma das redes seguintes tem 3 células, cada célula tem 4 vizinhos e as células estão coloridas de acordo com a regra de coloração descrita pela matriz  $A$ . Tal como anteriormente, uma seta entre duas células (que poderão coincidir, tal como na rede  $G_2$ ) simboliza uma relação de vizinhança entre as duas células. Como cada célula tem 4 vizinhos, ambas as redes têm valência 4. Note que para verificar a valência, no caso das setas que unem uma célula a si mesma, o leitor tem de contar as pontas da seta em torno dessa célula.



Um resultado da nossa investigação afirma que existem padrões espacialmente periódicos com uma dada regra de coloração se e só se existirem redes bidireccionais finitas com a mesma regra de coloração e mais algumas propriedades específicas.

O que vamos fazer de seguida é construir o padrão periódico que acabámos de ver começando pela regra  $A$  e passando pela rede finita  $G_1$ .

*Proporção de cores.* Começamos por determinar a proporção  $p_i$ , para  $i = 1, 2$ , das células de cor preta e cor cinzenta, respectivamente, numa qualquer coloração que respeite a regra  $A$  de qualquer rede (finita ou infinita) bidireccional em que cada célula tem 4 vizinhos. Neste caso calculamos o vector próprio à esquerda da matriz  $A$ , cuja soma das coordenadas é 1, associado ao valor próprio 4, isto é,  $(p_1, p_2)$  tal que  $p_1 + p_2 = 1$  e  $(p_1, p_2) A = 4 (p_1, p_2)$ . Obtemos  $(p_1, p_2) = (1/3, 2/3)$  significando que a proporção de células pretas é  $1/3$  e a de células cinzentas é  $2/3$ .

*Redes bidireccionais finitas.* Uma vez que  $3(1/3, 2/3) = (1, 2)$ , uma rede finita bidireccional de valência 4 e que admita uma coloração de acordo com a regra  $A$ , terá que ter pelo menos 3 células. É fácil de ver que  $G_1$  e  $G_2$  são as únicas redes de 3 células nessas condições.

Sendo  $\{c_1, c_2, c_3\}$  o conjunto de células, em que a célula preta é  $c_1$  e as células cinzentas são denotadas por  $c_2$  e  $c_3$ , as *matrizes de adjacência*  $B_1$  e  $B_2$  destas redes bidireccionais são

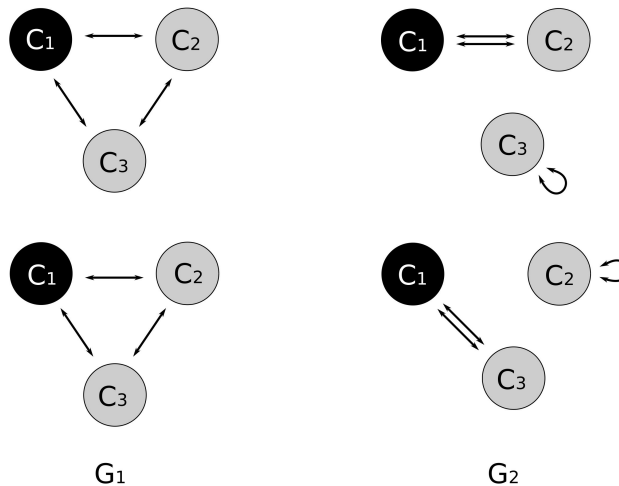
$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Em ambas as matrizes, a entrada na linha  $i$  e coluna  $j$  representa o número de setas direccionadas da célula  $c_j$  para a célula  $c_i$ . As matrizes de adjacência descrevem a forma destas redes sem o recurso ao desenho. As redes são bidireccionais e por isso as matrizes de adjacência são simétricas em relação à diagonal.

*Decomposição em ciclos.* Cada uma das matrizes pode ser decomposta na soma de duas matrizes simétricas com linhas cujas entradas somam 2:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Equivalentemente, cada uma das redes  $G_1$  e  $G_2$  admite uma decomposição em duas redes de valência 2, contendo as células  $c_1, c_2$  e  $c_3$  (ciclos), tal como apresentamos na figura.



Cada um dos ciclos acima é composto por setas bidireccionais e pode ser decomposto em dois ciclos direccionados — um a rodar no sentido dos ponteiros do relógio e outro em sentido contrário. Quando percorrermos as células seguindo um destes ciclos direccionados obtemos uma sequência repetitiva de células, ou permutação. De seguida traduzimos a decomposição em ciclos direccionados para linguagem de matrizes.

Cada uma das matrizes pode ser escrita como uma soma  $M_\sigma + M_{\sigma^T}$  para alguma matriz de permutação  $M_\sigma$  associada a uma permutação  $\sigma$  em  $S_3$  (grupo de permutações de 3 símbolos). Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

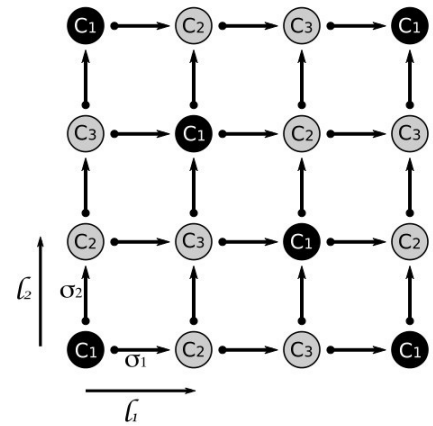
Se  $M_\sigma$  é a matriz associada à permutação  $\sigma_1 = (c_1 c_2 c_3)$ ,

$$M_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

então  $M_{\sigma_1^T}$  é a matriz associada a  $\sigma_1^{-1} = (c_1 c_3 c_2)$  e, tomando  $\sigma_2 = \sigma_1$ , então  $B_1$  é a soma

$$B_1 = (M_{\sigma_1} + M_{\sigma_1^T}) + (M_{\sigma_2} + M_{\sigma_2^T}) = 2(M_{\sigma_1} + M_{\sigma_1^T})$$

*Construção do padrão periódico.* Uma vez que  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  comutam, os nossos resultados garantem que podemos construir uma coloração periódica da rede quadrada respeitando a regra da coloração fixada. Começando com uma qualquer célula  $c_i$  na posição  $l$  em  $L$ , a célula na posição  $l+l_j$  será  $\sigma_j(c_i)$ , para  $j=1,2$ , obtendo o padrão da rede quadrada infinita acima apresentado. Na prática, estamos a associar às direcções horizontal e vertical, as sequências periódicas de células, dadas pelos ciclos direccionados de  $G_1$ . Veja a figura ao lado.



Uma decomposição semelhante da matriz  $B_2$  leva a

$$B_2 = (M_{\sigma_3} + M_{\sigma_3}^T) + (M_{\sigma_4} + M_{\sigma_4}^T)$$

em que  $\sigma_3 = (c_1 c_2)(c_3)$  e  $\sigma_4 = (c_1 c_3)(c_2)$ . Contudo estas permutações não comutam e não é possível fazer uma construção análoga à anterior.

### 3. Outras redes e outras regras

O exemplo apresentado na secção anterior representa um caso especial do problema que pode ser descrito mais geralmente da seguinte forma: dada uma rede euclidiana  $L$  em  $\mathbf{R}^n$ , e uma regra de coloração descrita por uma matriz  $A$  quadrada  $k \times k$ , encontrar uma condição necessária e suficiente para que exista um padrão da rede, espacialmente periódico, que respeite a regra de coloração  $A$ .

Algumas das vantagens deste resultado:

- (a) O problema na rede infinita é traduzido num problema finito.
- (b) O novo problema finito - existência de redes bidireccionais finitas com certas propriedades - é fácil de tratar usando métodos standard em teoria de matrizes.
- (c) O método é construtivo.

De seguida apresentamos informações técnicas acerca dos resultados e das provas para o leitor interessado em aprofundar o tema.

Sendo  $v$  a valência da rede  $L$ , um número par positivo dado que  $L$  é euclidiana, a condição que obtemos envolve a existência de uma rede finita bidireccional, de valência  $v$ , e que admita uma coloração de acordo com  $A$ .

Em geral, são muitas as redes bidireccionais finitas nas condições exigidas. Para cada uma delas, garantimos uma decomposição (factorização) em redes com as mesmas células e de valência 2 usando um resultado clássico de Teoria de Grafos (ver [3]). Um grafo bidireccional diz-se  $v$ -regular se o número de setas incidentes em cada célula for  $v$ . Um 2-factor de um grafo  $G$  com conjunto de células  $C$  é uma união de subgrafos de  $G$ , todos 2-regulares, com conjuntos de células disjuntos cobrindo  $C$ . Qualquer grafo  $v$ -regular, em que  $v$  é par, admite uma factorização em 2-factores.

Para cada uma destas decomposições, associamos  $\Sigma$ , um conjunto de permutações das células, uma permutação para cada 2-factor. O resultado diz que:

**Teorema 1 (ver [2]).** *Na rede euclidiana  $L$ , de valência  $v$ , existe um padrão espacialmente periódico respeitando a regra  $A$  se e só se existe uma rede bidireccional finita de valência  $v$ , com células coloridas de acordo com a regra  $A$ , e com uma decomposição  $\Sigma$  tal que o reticulado é*

homomorfo ao grupo de permutações  $\langle \Sigma \rangle$ .

**Demonstração.** [Esboço da prova de que a existência de um homomorfismo entre  $L$  e  $\langle \Sigma \rangle$  garante a existência de um padrão na rede  $L$ ]

Seja  $\Phi: L \rightarrow \langle \Sigma \rangle$  um homomorfismo de grupos e  $C$  o conjunto de células da rede finita que admite a decomposição  $\Sigma$ . Prova-se que existe uma função  $\Pi: L \rightarrow C$  tal que

$$\Pi(l+g) = \sigma_g(\Pi(l))$$

onde  $\sigma_g = \Phi(g)$ . Sendo a coloração uma função que atribui uma cor a cada célula da rede considerada, defina-se a coloração  $\xi_L$  da rede  $L$  a partir da coloração  $\xi$  da rede bidireccional finita:

$$\xi_L(l) = \xi(\Pi(l)) \quad (l \in L).$$

Por construção,  $\xi_L$  é espacialmente periódica, e prova-se que satisfaz a regra A. □

Um dos objectivos do nosso trabalho é, fixada uma rede euclidiana  $L$  de valência  $v$  e uma regra de coloração A, enumerar *todos* os padrões espacialmente periódicos da rede  $L$  respeitando a regra A. Usando o Teorema 1, isto equivale a enumerar, a menos de simetrias, todas as redes finitas bidireccionais de valência  $v$  com a coloração A e admitindo uma decomposição nas condições do Teorema. A construção de uma rede finita em tais condições garante a existência de um número infinito de outras redes que geram o mesmo padrão. Assim, em [3], introduzimos o conceito de *root networks*, as redes finitas com menor número de células que geram os padrões em  $L$ .

Cada *root network* admitirá várias decomposições em ciclos que poderão originar distintos padrões em  $L$ . O Teorema 5.2 de [3] mostra que a enumeração dos padrões distintos depende das simetrias da *root network*. Mais precisamente, dos diferentes subgrupos abelianos de ordem  $m$  do grupo de automorfismos da *root network*, onde  $m$  é o número das suas células.

## Referências:

[1] **Bondy, J. A. e Murty, U. S. R.**, (1976). *Graph Theory with Applications*, American Elsevier Publishing, New York.

[2] **Dias, A.P.S. e Pinho, E.M.**, (2009). "Spatially Periodic Patterns of Synchrony in Lattice Networks", *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 8 (2), 641-675.

[3] **Dias, A.P.S. e Pinho, E.M.**, (2010). "On the enumeration of periodic patterns of synchrony via finite bidirectional networks", *Proceedings A of the Royal Society of London*, 466, 891-910.

Eliana Manuel Pinho usufruiu da bolsa SFRH/BPD/29975/2006 durante a realização do trabalho aqui descrito e usufrui actualmente da bolsa SFRH/BPD/61266/2009, ambas da FCT — Fundação para a Ciência e a Tecnologia.