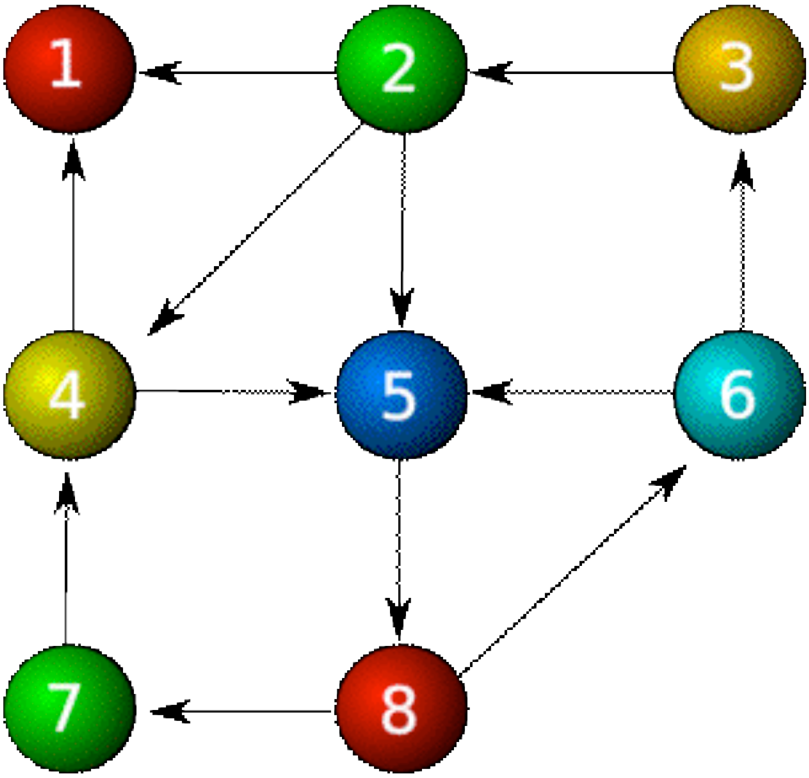
Escola Secundária Garcia de Orta

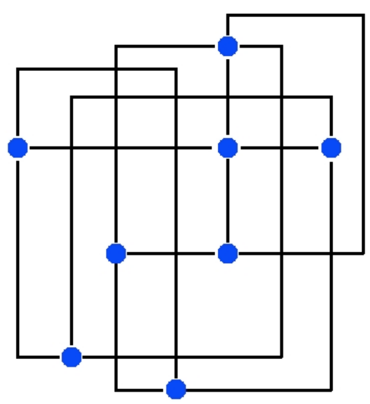
Teoria de Grafos



Porto
2008

Miguel Duarte nº19 11ºA

Índice



Introdução:

Confesso que, até chegar à exposição "Experimentar a Matemática", não fazia a mínima ideia do que seriam grafos, os problemas que eles envolveriam ou as situações do quotidiano nas quais eles estariam inseridos.

Nunca me tinha questionado, como muitos alunos que foram à exposição, de que maneira eram estabelecidas as redes telefónicas, como eram situados os centros de distribuição de mercadorias de algumas empresas ou mesmo de que modo era feito o plano de estradas de uma certa região, e muito menos me havia perguntado se existiria um método matemático que ajudasse nessas estratégias de distribuição e de planeamento. Pensava que era tudo 'ao calhas'!

Foi então grande o meu espanto quando me apercebi de que a Teoria de Grafos está em todo o lado no nosso quotidiano, desde as redes de estradas das cidades até ao simples problema de colorir mapas. Decidi então tratar este módulo da exposição, pois acho-o bastante interessante devido à utilidade que tem para a sociedade, e porque prova que a matemática está, de facto, em todo o lado!

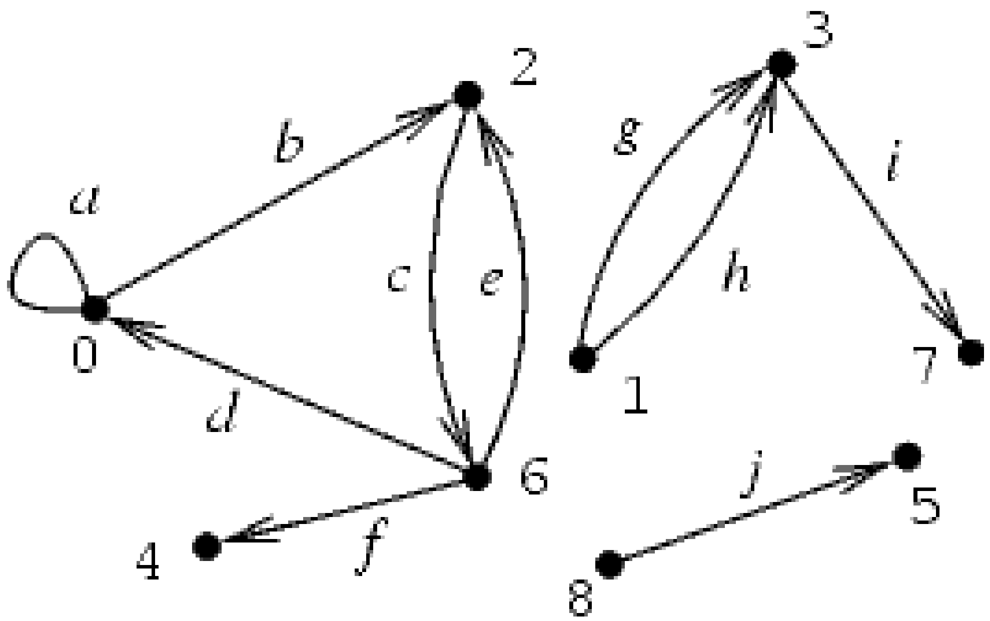
O que é um grafo?

Um grafo pode, muito simplesmente, ser descrito como uma estrutura constituída por dois elementos fundamentais: os arcos e os vértices. Cada arco tem uma origem (ponta inicial) e um destino (ponta final), quase como uma estrada, que sai de uma cidade e chega a outra. Neste caso os vértices são as cidades.

Imaginemos que um arco a sai de um vértice v e chega a um vértice w. Neste caso dizemos que o arco vai de v a w, ou sai de v e entra em w, e pode então ser chamado de arco (v,w) ou vw ou ainda por v-w. Como podemos ver os arcos são dirigidos, e isto leva alguns especialistas a chamar ao grafo em questão *orientado*.

O Grafo pode então ser entendido quase como uma função f:V_A onde V e A correspondem respectivamente aos conjuntos finitos de vértices e arcos, e f é a função que faz corresponder a cada elemento V um par ordenado de elementos A (a cada vértice correspondem em regra dois arcos).

Os vértices têm grau. Este pode ser de saída ou de entrada. O grau de entrada de um vértice é o número de arestas ou arcos que lhe chegam, e o grau de saída corresponde ao número de arestas ou arcos que o têm como origem.



Classificação de Arcos e Adjacência de Vértices:

Os arcos podem ser chamados:

Laços: quando um arco parte de um vértice e tem como destino esse mesmo vértice origina uma estrutura com o aspecto de um laço, como o próprio nome indica.

Arcos Paralelos: quando dois arcos têm o mesmo vértice de origem e o mesmo vértice de chegada dizem-se paralelos.

Arcos Antiparalelos: por analogia com o caso anterior, dois arcos dizem-se antiparalelos quando o vértice de origem de um é o vértice de chegada do outro, e vice-versa.

Arcos simétrico: um arco (wv) diz-se simétrico quando existe nesse grafo um arco (vw).

Quanto aos vértices podemos falar de vértices adjacentes ou vértices vizinhos, e é bastante fácil de perceber este nome: quando existir um arco que saia de v e chegue a w, w diz-se adjacente ou vizinho de v. No entanto v pode não ser vizinho de w, pois pode não existir nenhum arco que saia de w e chegue a v. Através destas relações entre os vértices podemos construir uma matriz de adjacências, onde nos é esquematizado o conjunto de relações de adjacência entre os vértices.

Embora o desenho do grafo em si nos possa parecer mais indicado para estudar o problema em questão, muitos especialistas preferem olhar para uma matriz e descortinar que relações devem ou não ser estabelecidas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	-	1	-	-	-	-	-	-
1	-	-	-	2	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	1	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	1	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	1	-	1	-	1	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	1	-	-	-

Matriz de adjacências do grafo da página anterior

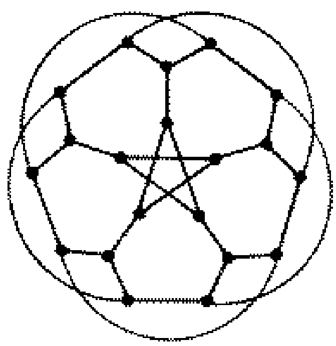
Grafos não Orientados, Circuitos, Caminhos e árvores:

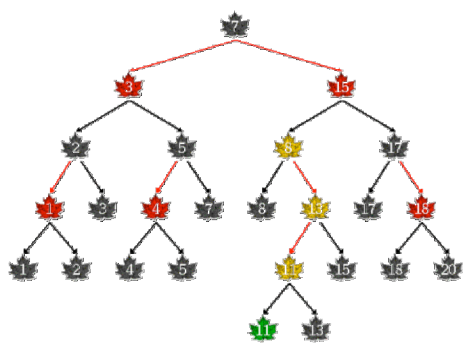
Os grafos não orientados são, muito simplesmente, grafos em que todos os seus arcos são simétricos; isto quer dizer que sempre que existe um arco que vá do vértice v até ao vértice w, existirá um que faça o caminho oposto. Assim esses arcos são chamados arcos gémeos, embora este nome possa ser algo confuso: a designação de arcos gémeos dá a ideia de que esses arcos têm a mesma origem e o mesmo vértice de chegada, e portanto um nome mais indicado que é por vezes usado é o de arcos complementares ou cônjugues. A um par de arcos gémeos dá-se o nome de aresta, e cada um desses arcos é uma parte da aresta. Mais uma vez neste tipo de grafos pode-se falar de adjacência de vértices. Dois vértices são vizinhos se existir uma aresta que os una. Pode também ser feita uma matriz de adjacências.

Não irei falar muito acerca deste tipo de grafos, pois seria preciso entrar em matemática bastante avançada. Basta-nos saber que os arcos não orientados/dirigidos formam relações bastante complexas entre os vértices e os arcos. É comum, quando falamos deste tipo de grafos, falarmos de "componentes", "ciclos" ou "circuitos", grafos "degenerados" e "não degenerados".

Diz-se que um grafo é cíclico quando se estabelecem arcos ligando vértices de uma forma que se origina uma espécie de circuito ou cadeia, e em que nenhum vértice é repetido. Quanto ao seu tipo, os ciclos podem ser degenerados ou não degenerados. Os ciclos ou circuitos são típicos de grafos dirigidos.

Uma árvore é um tipo de grafo não fechado, logo não origina um circuito ou uma cadeia. Esta estrutura ajuda a resolver problemas do género: colocar nomes por ordem alfabética, verificar listas de objectos, ver se um determinado item consta numa lista ou não, etc...





Podemos ainda falar em:

Caminho: cadeia em que todos os arcos possuem a mesma orientação.

Cadeia elementar: quando, ao percorrermos todo o grafo, não passamos duas vezes no mesmo vértice.

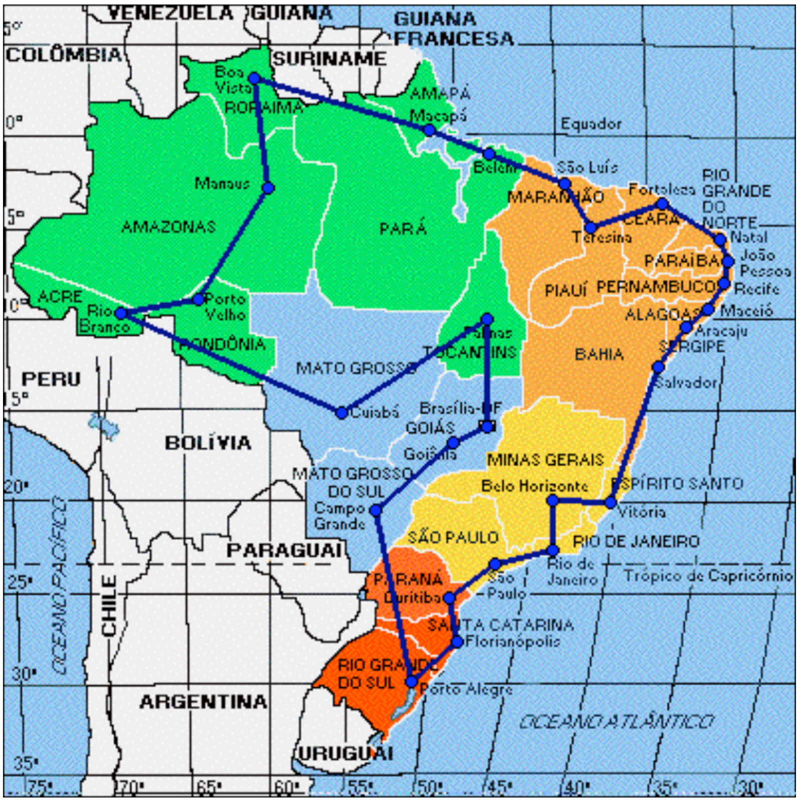
Cadeia simples: quando ao percorrermos o grafo não passamos duas vezes pela mesma aresta ou arco.

Comprimento da cadeia: número de arcos que a compõem.

Dentro dos ciclos existem:

Ciclo Euleriano: ciclo que passa uma vez por todos os arcos do grafo, sem repetir nenhum. É sinónimo de cadeia simples.

Ciclo Hamiltoniano: grafo em que, quando percorrido, nenhum vértice se repete. É sinónimo de caminho elementar.



Aplicações da teoria dos grafos:

A teoria dos grafos está hoje incrivelmente desenvolvida a nível da ciência e da computação, e fiquei surpreendido quando reparei que as aplicações desta nova área da matemática estão por todo o lado, quase como a matemática em si (computação, planeamento, estudos estatísticos, etc...).

No geral, a teoria de grafos ajuda-nos a resolver problemas de optimização. Por exemplo: um empresário tem uma fábrica de sapatos, e existem várias lojas que fazem encomendas frequentes, espalhadas por toda a cidade. Qual a maneira mais económica e eficiente de construir centros de distribuição, de maneira a fornecer rapidamente as lojas e os clientes? Podemos estudar este problema usando um grafo, em que os vértices são os centros de distribuição e as arestas serão os caminhos até às lojas. Problemas comuns são os de colocação de estações de bombeiros, de comboio, etc...

As eliminatórias de um torneio desportivo podem ser esquematizadas usando um grafo.

O mesmo se passa com as redes telefónicas e os mapas de estradas. No primeiro caso é necessário colocar as linhas telefónicas de maneira a não haver sobreposições nem cruzamentos, assim como colocar de forma eficaz os centros de orientação de chamadas. No segundo caso podemos utilizar um grafo para colocar os semáforos, decidir as suas fases de acordo com os fluxos de trânsito e com o sentido único ou duplo das estradas, etc...

A coloração de mapas é dos problemas mais clássicos em que é utilizada a teoria de grafos. Quantas cores serão necessárias para colorir um mapa, de forma a que todos os países tenham cores diferentes dos que lhe fazem fronteira? A resposta é quatro, no máximo, qualquer que seja o mapa.

Vou dar um último exemplo, que foi para mim o mais impressionante. Numa turma foi feito um questionário, em que cada aluno teria de indicar qual era, na turma, o seu melhor amigo. Assim, desenha-se um grafo, em que cada aluno é um vértice, e a aresta indica a amizade desse aluno direccionada para um outro. Podemos, quer através da matriz de adjacências quer através do grafo propriamente dito, ver quais são os alunos mais populares e até detectar problemas de adaptação de outros colegas. Como vêem, esta teoria em constante expansão ajuda a resolver problemas nas mais variadas áreas, e a tendência é para se desenvolver mais e mais.

Aspecto Histórico:

O pai desta teoria é Euler (15/04/1707-18/09/1783), o célebre matemático que se evidenciou em muitas outras áreas desta ciência. Euler levantou uma questão que se relacionava com a arquitectura e com o ordenamento urbano da cidade de Königsberg (actualmente Kaliningrado) na Prússia. A cidade era cruzada pelo rio Nagel, e tinha duas pequenas ilhas centrais. Uma das ilhas era ligada a cada margem por duas pontes. A outra tinha duas pontes, cada uma ligando-a a uma margem. Existia ainda uma sétima ponte ligando as duas ilhas. A pergunta era: seria possível iniciar o percurso numa das quatro zonas (à esquerda das duas ilhas, à direita das duas ilhas, em cada uma das margens), e percorrer todas as pontes sem repetir nenhuma? Euler desenhou um diagrama, atribuindo um vértice a cada uma das áreas, e uma linha a cada ponte. Assumindo cada zona como distinta e atribuindo a cada uma delas uma partida e uma chegada, então, se apenas se passar por cada zona e por cada ponte uma vez, apenas haverá uma rota possível, isto se as ligações entre as quatro zonas forem constantes.

Euler veio a provar mais tarde que, neste caso, não havia solução. Esta questão, na altura relacionada com um simples problema de melhorar o quotidiano aos habitantes da cidade, facilitando-lhes a sua deslocação de um lado ao outro do rio, foi o começo da Teoria dos Grafos que, como vimos no texto anterior, tem hoje muitas e variadas aplicações. Apesar disto, quando Euler propôs o problema, este foi considerado desinteressante e sem aplicações práticas, e caiu no esquecimento durante um século, até ser novamente aproveitado na Química por Cayley, na Biologia por Jordan e na Engenharia Eléctrica por Kirchoff.

No entanto, foi com o aparecimento do computador que este problema realmente ganhou notoriedade, e os cientistas se aperceberam da enorme utilidade que poderia ter na resolução do mais variado tipo de questões. Hoje em dia, com programas complexos da tecnologia computacional, criaram-se inúmeros modelos e algoritmos de resolução, em que, baseados na teoria dos grafos, esses programas sugerem automaticamente qual a melhor maneira de disposição, qual a solução óptima para o problema, etc.

Bibliografia

TEORIA E MODELOS DE GRAFOS

INF 330 - DPI/UFV

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_em_grafos/aulas/undirected.html

http://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_em_grafos/aulas/grafos.html

www.mathex.org