Exame de Tópicos de Geometria

Licenciatura em Matemática

29 de Junho de 2006 Duração... **3h30m (sem tolerância)**

O exame é constituído por 5 folhas. Deve ser resolvido nessas folhas, podendo utilizar o seu verso. Exige-se boa apresentação da prova e justificação clara dos cálculos efectuados. Não é permitido o uso de máquinas de calcular.

Cotação:

1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	2(c)	2(d)	3(a)	3(b)	3(c)	3(d)	4	5
1.5	1.0	1.5	1.0	1.5	1.5	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5	2.0	3.0

NOME ... **TOTAL ...**

CURSO ...

Exercício 1 ... Considere o fecho projectivo $\mathscr{C}$, em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, da curva de grau 6:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$$

a.) Calcule os seus pontos singulares e respectivas multiplicidades.

b.) Calcule as tangentes à curva nesses pontos singulares e respectivas multiplicidades.

c.) Calcule as assímptotas de $\mathscr{C}$.

Resolução ... O fecho projectivo da curva é dado por:

$$F(X,Y,Z) = (X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2Z^2$$

a.),b.) Os pontos singulares são calculados a partir do sistema:

$$\begin{cases} F_X = 6X(X^2+Y^2)^2 - 8XY^2Z^2 & = & 0 \\ F_Y = 6Y(X^2+Y^2)^2 - 8X^2YZ^2 & = & 0 \\ F_Z = -8X^2Y^2Z & = & 0 \end{cases}$$

A terceira equação dá $X=0$ ou $Y=0$ ou $Z=0$. Se $X=0$ a segunda equação implica que $Y=0$. Com $X=0=Y$ a primeira equação é válida $\forall Z$, e portanto $A=[0,0,1]$ é ponto singular. Se $Y=0$ uma análise semelhante conduz de novo ao ponto A. Se $Z=0$, as duas primeiras equações implicam que:

$$\begin{cases} 6X(X^2+Y^2)^2 & = & 0 \\ 6Y(X^2+Y^2)^2 & = & 0 \end{cases}$$

Se $X^2+Y^2 \neq 0$ então viria que $X=0=Y$ o que é absurdo. Portanto $X^2+Y^2=0$, i.e, $(X-iY)(X+iY)=0$ e existem mais dois pontos singulares que são os pontos circulares no infinito $I,J=[1,\pm i,0]$.

O polinómio de intersecção no ponto A é:

$$\begin{aligned} \phi_A(t) &= F((0,0,1)+t(X,Y,Z)) = F(tX,tY,1+tZ) \\ &= ((tX)^2+(tY)^2)^3 - 4(tX)^2(tY)^2(1+tZ)^2 \\ &= -4X^2Y^2t^4 + (...)t^5 + ... \end{aligned} \tag{0.1}$$

donde se deduz que A é um ponto quádruplo e as tangente são $X=0$ e $Y=0$ ambas com multiplicidade 2.

O polinómio de intersecção no ponto I é:

$$\begin{aligned} \phi_I(t) &= F((1,i,0)+t(X,Y,Z)) = F(1+tX,i+tY,tZ) \\ &= ((1+tX)^2+(i+tY)^2)^3 - 4(1+tX)^2(i+tY)^2(tZ)^2 \\ &= 4Z^2t^2 + (...)t^3 + (...)t^4 + ... \end{aligned} \tag{0.2}$$

donde se deduz que I é um ponto duplo com tangente dupla $Z=0$. A análise é análoga para J.

c.) Os pontos do infinito são os pontos circulares I e J. A tangente a I é a recta do infinito $Z=0$. O mesmo para J, A única assímptota é pois $Z=0$. Claro que, do ponto de vista afim, a curva não tem assímptotas.

NOME...

Exercício 2 ... Considere o fecho projectivo $\mathscr{C}$, em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, da cónica:

$$x^2 + 2xy + 2y + 2 = 0$$

a.) Calcule a polar do ponto $(0,0)$.

b.) A equação tangencial de $\mathscr{C}$.

c.) As tangentes a $\mathscr{C}$ que passam no ponto $(1,1)$.

d.) As assímptotas de $\mathscr{C}$.

Resolução ...

a.) O fecho projectivo da cónica é dado por:

$$X^2 + 2XY + 2YZ + 2Z^2 = 0$$

ou ainda:

$$\mathbf{x}^t\mathbf{S}\mathbf{x} = 0, \quad \text{onde} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A polaridade é definida por:

$$\mathbf{x}_o = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} \rightarrowtail \mathbf{u}_o = \begin{pmatrix} U_o & V_o & W_o \end{pmatrix} = \mathbf{x}_o^t\mathbf{S} \rightarrowtail U_oX + V_oW + W_oZ = 0$$

ou, de forma equivalente: a cada ponto $\mathbf{x}_o = [X_o, Y_o, Z_o]$, a polaridade associa a recta de equação $\mathbf{x}_o^t\mathbf{S}\mathbf{x} = 0$. Quando $\mathbf{x}_o = [0,0,1]$ a recta polar é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$$

isto é:

$$Y + 2Z = 0$$

b.) Foi deduzido no curso que a equação tangencial da cónica $\mathbf{x}^t\mathbf{S}\mathbf{x} = 0$ é dada por $\mathbf{u}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}^t = 0$, isto é:

$$\begin{pmatrix} U & V & W \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = 0$$

ou ainda:

$$\frac{1}{3}(U^2 - 2V^2 + W^2 + 4UV - 2UW + 2VW) = 0$$

c.) O ponto $[1,1,1]$ corresponde, por dualidade, à recta $U + V + W = 0$. Esta recta intersecta a cónica tangencial nos pontos de $(\mathbf{P}^2)^*$ dados por:

$$\begin{cases} U + V + W &= 0 \\ U^2 - 2V^2 + W^2 + 4UV - 2UW + 2VW &= 0 \end{cases}$$

Se $W = 0$ viria que $U = 0 = V$ o que é absurdo. Logo $W \neq 0$ e podemos supôr que $W = 1$. Resolvendo vem que $V = -1 - U$ e $5U^2 + 10U + 3 = 0$. Portanto, $U = \frac{-5 \pm \sqrt{10}}{5}$, $V = -1 - U$ e $W = 1$ dão as coordenadas homogéneas dos dois pontos de intersecção.

Resta dualizar para obter as duas tangentes pretendidas de quação $UX + VY + WZ = 0$.

d.) Os pontos do infinito são dados por

$$Z = 0, \quad \text{e} \quad X^2 + 2XY + 2YZ + 2Z^2 = 0$$

isto é:

$$X^2 + 2XY = 0$$

o que conduz às soluções:

$$A = [0, 1, 0] \quad \text{e} \quad B = [2, -1, 0]$$

Agora:

$$T_A\mathscr{C}: \quad F_X(A)\,X + F_Y(A)\,Y + F_Z(A)\,Z = 0$$

isto é:

$$2X + 2Z = 0$$

$$T_B\mathscr{C}: \quad F_X(B)\,X + F_Y(B)\,Y + F_Z(B)\,Z = 0$$

isto é:

$$2X + 4Y - 2Z = 0$$

As assímptotas são pois as rectas afins:

$$x = -1 \quad \text{e} \quad x + 2y = 1$$

NOME...

Exercício 3 ... Considere a cúbica:

$$\mathscr{C}: \quad y^2 = x^3 - x$$

a.) Mostre que é uma curva elíptica e que $\mathcal{O} = [0,1,0]$ é uma inflexão de $\mathscr{C}$.

b.) Deduza directamente a lei de grupo em $\mathscr{C}$, tomando como elemento neutro o ponto $\mathcal{O} = [0,1,0]$.

c.) Deduza directamente fórmulas para a duplicação $2P$ de um ponto $P = (x,y) \in \mathscr{C}$.

d.) Calcule as inflexões de $\mathscr{C}$ (recorde que no curso se provou que um ponto $P \neq \mathcal{O}$, em $\mathscr{C}$, é uma inflexão sse $3P = \mathcal{O}$).

Resolução ...

O fecho projectivo da curva é:

$$F(X,Y,Z) = Y^2Z - X^3 + XZ^2 = 0$$

a.) $\mathscr{C}$ é uma curva elíptica porque $x^3 - x$ tem três raízes reais distintas. $\mathcal{O} = [0,1,0]$ é uma inflexão de $\mathscr{C}$. De facto, é um ponto não singular, uma vez que $F_Z(0,1,0) = 1 \neq 0$. Além disso, a recta tangente a $\mathscr{C}$ em $\mathcal{O}$ é a recta $Z = 0$. Esta recta é definida pelo ponto ponto $\mathcal{O} = [0,1,0]$ e pelo ponto $A = [1,0,0]$, por exemplo. O polinómio de intersecção é:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= F([0,1,0] + t[1,0,0]) = F(t,1,0) \\ &= -t^3 \end{aligned} \tag{0.3}$$

isto é, a ordem de contacto de $T_{\mathcal{O}}\mathscr{C}$ com $\mathscr{C}$ é 3 e portanto $\mathcal{O}$ é uma inflexão.

b.) A dedução faz-se como no ponto 19.13 do curso. Os cálculos mostram que:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_3, -y_3)$$

onde:

$$\begin{aligned} x_3 &= \lambda^2 - x_1 - x_2, \qquad \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2 \\ y_3 &= \lambda x_3 + (y_1 - \lambda x_1) \end{aligned} \tag{0.4}$$

Se $x_1 = x_2$ e $y_1 \neq y_2$ então $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = \mathcal{O}$.

c.) A equação da tangente $T_P\mathscr{C}$, onde $P = (x,y)$, é:

$$(\widetilde{x} - x)f_x(x,y) + (\widetilde{y} - y)f_y(x,y) = 0$$

onde $f_x = -3x^2 + 1$ e $f_y = 2y$. Portanto:

$$T_P\mathscr{C}: \quad \widetilde{y} = y + \frac{(3x^2 - 1)(\widetilde{x} - x)}{2y}$$

pretende-se agora o terceiro ponto de interesecção desta tangente com a curva dada. Para isso, substituímos $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ em $y^2 = x^3 - x$, onde $\widetilde{y}$ é dado pela fórmula anterior e igualamos os coeficientes das potências em $\widetilde{x}^2$, para obter:

$$2P = 2(x,y) = \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^3 - 4x}, -y - \frac{(3x^2 - 1)(-3x^4 + 6x^2 + 1)}{8y(x^3 - 1)} \right)$$

c.) Como $3P = \mathcal{O} \Leftrightarrow 2P = -P$, devemos resolver a equação:

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^3 - 4x} = x$$

isto é:

$$3x^4 - 6x^2 - 1 = 0$$

NOME...

Exercício 4 ... Enuncie o teorema dos nove pontos e utilize-o para demonstrar o teorema de Pascal.

Resolução ...
Ver o curso.

NOME...

Exercício 5 ... Considere os feixes de rectas $\mathscr{F}(A)$ e $\mathscr{F}(B)$, de suporte $A = (0,0)$ e $B = (0,1)$, respectivamente. Suponha que existe uma correspondêcia homográfica entre o feixe $\mathscr{F}(A)$ e o feixe $\mathscr{F}(B)$, associada à matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calcule o lugar geométrico dos pontos de intersecção dos pares de rectas dos dois feixes que se correspondem.

Resolução ...

Consideremos os pontos $A = [0,0,1]$ e $B = [0,1,1]$ em $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$. O feixe de rectas $\mathscr{F}(A)$ é constituído pelas rectas da forma:

$$X + \lambda Y = 0, \qquad \lambda \in \mathbf{P}^1$$

enquanto que o feixe de rectas $\mathscr{F}(B)$ é constituído pelas rectas da forma:

$$X + \mu(Y - Z) = 0, \qquad \lambda \in \mathbf{P}^1$$

A correspondência homográfica entre os dois feixes é da forma:

$$\lambda \rightarrowtail \mu = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

Da primeira equação tiramos que $\lambda = -X/Y$. Substituindo na segunda vem que:

$$X + \frac{-X/Y + 1}{-X/Y - 1}(Y - Z) = 0$$

Resolvendo obtemos a equação de uma cónica (teorema de Steiner):

$$X^2 - Y^2 + 2XY - XZ + YZ = 0$$

De ponto de vista afim:

$$x^2 - y^2 + 2xy - x + y = 0$$