Exame de Tópicos de Geometria

Licenciatura em Matemática

27 de Junho de 2007 Duração... **3h00m (sem tolerância)**

O exame é constituído por 5 folhas. Deve ser resolvido nessas folhas, podendo utilizar o seu verso. Exige-se boa apresentação da prova e justificação clara dos cálculos efectuados.

Cotação:

1(a)	1(b)	1(c)	2(a)	2(b)	2(ci)	2(cii)	3	4(a)	4(b)	4(c)	5(a)	5(b)
1.5	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	3	1.5	1.5	1.0	1.5	1.5

NOME ... **TOTAL ...**

CURSO ...

Exercício 1 ... Considere o triângulo de vértices $A=(1,1), B=(1,3)$ e $C=(2,4)$.

a.) Mostre que $P=(1,0)\in AB$, $Q=(5/3,3)\in AC$ e que $R=(3,5)\in BC$.

b.) Verifique directamente se P,Q e R são colineares.

c.) Verifique se P,Q e R são colineares recorrendo ao Teorema de Menelaus.

Resolução ...

a.) As equações dos lados do triângulo são:

$$AB: \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad x=1 \quad \therefore \quad P\in AB$$

$$AC: \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad y-3x+2=0 \quad \therefore \quad Q\in AC \quad \text{porque} \quad 3-3\cdot(5/3)+2=0$$

$$BC: \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad x-y+2=0 \quad \therefore \quad R\in BC \quad \text{porque} \quad 3-5+2=0$$

b.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 5/3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8/3 \neq 0 \quad \therefore \quad \text{P,Q e R são não colineares.}$$

c.) P,Q e R são colineares se e só se

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA} = -1$$

mas:

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PB} &= \frac{y_P-y_A}{y_B-y_P} = \frac{0-1}{3-0} = -\frac{1}{3} \\ \frac{BR}{RC} &= \frac{y_R-y_B}{y_C-y_R} = \frac{5-3}{4-5} = \frac{2}{-1} = -2 \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{y_Q-y_C}{y_A-y_Q} = \frac{3-4}{1-3} = \frac{-1}{-2} = 2 \end{aligned} \tag{0.1}$$

E como $-\frac{1}{3}\cdot(-2)\cdot 2 \neq -1$ concluímos que P,Q e R são não colineares.

Exercício 2 ... **a.)** Mostre que a razão anarmónica $(ABCD)$ de quatro pontos colineares de $\mathbb{RP}(2)$ é um invariante projectivo.

b.) Verifique que os pontos $A = [1, -1, -1], B = [1, 3, -2], C = [3, 5, -5]$ e $D = [1, -5, 0]$, em $\mathbb{RP}(2)$, são colineares.

c.) Calcular a razão anarmónica $(ABCD)$ dos pontos $A = [1, -1, -1], B = [1, 3, -2], C = [3, 5, -5]$ e $D = [1, -5, 0]$, em $\mathbb{RP}(2)$:

c(i). directamente usando a definição do curso.

c(ii). usando o "plano mergulhante" $x = 1$.

Resolução ... **a.)** provado no curso (Gray, theorem 3, pag. 140).

b.) A equação da recta que une A e B é:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & -1 & 3 \\ z & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore \qquad 5x + y + 4z = 0$$

$C \in AB$ porque $5 \cdot 3 + 5 - 4 \cdot 5 = 0$ e $D \in AB$ porque $5 \cdot 1 - 5 + 0 = 0$.

ci.) Os vectores $\mathbf{a} = (1, -1, -1)$ e $\mathbf{b} = (1, 3, 2)$ que representam A e B, respectivamente, i.e. $A = [\mathbf{a}]$ e $B = [\mathbf{b}]$, são linearmente independentes. Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} \overline{\underset{?}{=}}(3, 5, -5) &= \alpha(1, -1, -1) + \beta(1, 3, 2) \qquad \therefore \qquad \alpha = 1, \beta = 2 \\ \overline{\underset{?}{=}}(1, -5, 0) &= \gamma(1, -1, -1) + \delta(1, 3, 2) \qquad \therefore \qquad \gamma = 2, \delta = -1 \end{aligned} \tag{0.2}$$

e portanto:

$$(ABCD) = (\beta/\alpha)/(\delta/\gamma) = (2/1)/(-1/2) = -4$$

cii.) Como:

$$\begin{aligned} A &= [1, -1, -1] \\ B &= [1, 3, -2] \\ C &= [3, 5, -5] = [1, 5/3, -5/3] \\ D &= [1, -5, 0] \end{aligned} \tag{0.3}$$

temos quatro pontos colineares (notados pelas mesmas letras) no plano afim $x = 1$, com coordenadas (y, z) dadas por:

$$A = (-1, -1), \quad B = (3, -2), \quad C = (5/3, -5/3), \quad D = (-5, 0)$$

Estes pontos estão sobre a recta $y + 4z + 5 = 0$. Como:

$$(ABCD) = (AC/CB)/(AD/DB)$$

calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{AC}{CB} &= \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{5/3 + 1}{3 - 5/3} = 2 \\ \frac{AD}{DB} &= \frac{y_D - y_A}{y_B - y_D} = \frac{-5 + 1}{3 + 5} = -1/2 \end{aligned} \tag{0.4}$$

donde:

$$(ABCD) = (AC/CB)/(AD/DB) = 2/(-1/2) = -4$$

Exercício 3 ... Seja $ABCD$ um paralelogramo, E o ponto médio de AD e F o ponto médio de BC. Mostrar que as rectas DF e EB trissectam a diagonal AC.

Resolução ... Este é um resultado afim. Basta pois prová-lo quando $A = (0,0), B = (1,0), D = (0,1)$ e, portanto, $C = (1,1)$, uma vez que transformações afins preservam paralelismo. Além disso, $E = (0,1/2)$ e $F = (1,1/2)$ porque transformações afins preservam pontos médios de segmentos.

Cálculos:

A equação da recta DF é

$$DF: \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad x + 2y - 2 = 0$$

A equação da recta EB é

$$EB: \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad x + 2y - 1 = 0$$

A equação da diagonal AC é $y = x$, como é evidente. Seja $X = EB \cap AC$ e $Y = DF \cap AC$. Então:

$$X: \begin{cases} x + 2y &= 1 \\ x - y &= 0 \end{cases} \quad \therefore \quad X = (1/3, 1/3)$$

e

$$Y: \begin{cases} x + 2y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{cases} \quad \therefore \quad Y = (2/3, 2/3)$$

e a conclusão é óbvia.

Exercício 4 ... **a.)** Construa um triângulo esférico com dois ângulos rectos e de área igual a $\frac{\pi}{4}$.

b.) Construa o triângulo esférico dual (ou polar) ao triângulo indicado na alínea anterior e calcule a sua área.

c.) Calcule a distância entre New York (40º43'N;74ºW) e Funchal (32º28'N;16º55'W).

Resolução ...

a.) Por exemplo, o triângulo $\mathcal{T}$ com vértices no pólo Norte N, $A = (\mathrm{Lat.}\,0, \mathrm{Long.}\,0)$ e $B = (\mathrm{Lat.}\,0, \mathrm{Long.}\,45^{\mathrm{o}}E)$. Os ângulos são $A = B = \pi/2$ e $N = \pi/4$ e, portanto, a sua área é:

$$(\pi/2 + \pi/2 + \pi/4) - \pi = \pi/4$$

b.) O pólo do meridiano que passa em A e N, e que está no hemisfério que contem o triângulo $\mathcal{T}$, é o ponto $B' = (\mathrm{Lat.}\,0, \mathrm{Long.}\,90^{\mathrm{o}}E)$. O pólo do meridiano que passa em B e N, e que está no hemisfério que contem o triângulo $\mathcal{T}$, é o ponto $A' = (\mathrm{Lat.}\,0, \mathrm{Long.}\,45^{\mathrm{o}}W)$. Finalmente, o pólo do equador que passa em A e B, e que está no hemisfério que contem o triângulo $\mathcal{T}$, é o pólo norte $N' = N$.

O triângulo $\mathcal{T}'$ de vértices A', B' e N' é o triângulo dual (ou polar). Os lados de $\mathcal{T}$ têm comprimentos $a = b = \pi/2$ e $n = \pi/4$. Portanto, os ângulos do triângulo dual são $A' = \pi - a = \pi/2$, $B' = \pi - b = \pi/2$, $N' = \pi - n = 3\pi/4$.

A área de $\mathcal{T}'$ é pois $(\pi/2 + \pi/2 + 3\pi/4) - \pi = 3\pi/4$.

c.) Cálculos aproximados:

$$\begin{aligned} NY &= (40^o 43' N; 74^o W) = (\text{Lat.}\, 40.72^o, \text{Long.}\, 286^o) \\ &= (32^o 28' N; 16^o 55' W) = (\text{Lat.}\, 32.47^o, \text{Long.}\, 343.08^o) \\ \cos 40.72^o &= 0.75 \\ \sin 40.72^o &= 0.65 \\ \cos 32.47 &= 0.84 \\ \sin 32.47 &= 0.54 \end{aligned} \tag{0.5}$$

Coordenadas cartesianas de NY e F:

$$\begin{aligned} NY &= (\cos 40.72^o \times \cos 286^o, \cos 40.72^o \times \sin 286^o, \sin 40.72^o) \\ &= (0.2128, 0.7296, 0.65) \\ F &= (\cos 32.47 \times \cos 343.08^o, \cos 32.47 \times \sin 343.08^o, \sin 32.47) \\ &= (0.8064, -0.2436, 0.54) \end{aligned} \tag{0.6}$$

O produto interno é:

$$NY \cdot F = 0.34487136$$

e $d = \arccos 0.34487136 = 1.218695 rad$. Portanto:

$$d(NY, F) = 1.218695 \times 6.500 Km \approx 7.800 Km$$

Exercício 5 ... Seja $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação afim $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$, com $\det \mathbf{A} > 0$, e T um triângulo. Mostrar que:

(a). área$(\mathcal{A}(T)) = (\det \mathbf{A}) \cdot$ área(T)

(b). Seja $T = \triangle(ABC)$ e P, Q e R os pontos de médios de BC, AC e AB, respectivamente. Mostrar que:

$$\frac{\text{área}\triangle(PQR)}{\text{área}\triangle(ABC)} = \frac{1}{4}$$

Resolução ...

(a). Suponhamos, em primeiro lugar, que $T = R$ é o triângulo de referência com vértices em $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, então:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e \\ c+f \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+e \\ d+f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\text{área}(\mathcal{A}(R)) = \frac{1}{2}\det \begin{pmatrix} e & a+e & b+e \\ f & c+f & d+f \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ... = \frac{1}{2}\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \cdot \text{área}(R)$$

Seja T, agora, um triângulo qualquer. Seja $\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ a única transformação afim que transforma o triângulo de referência R em T e $\mathcal{C} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ a única transformação afim que transforma o triângulo de referência R em $\mathcal{A}(T)$.

Pelo resultado anterior:

$$\text{área}(T) = \text{área}(\mathcal{B}(R)) = \frac{1}{2}\det \mathbf{B}$$

e:

$$\text{área}(\mathcal{A}(T)) = \text{área}(\mathcal{C}(R)) = \frac{1}{2}\det \mathbf{C}$$

Mas, por outro lado, $\mathcal{C}(\mathbf{x}) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{Bx} + \mathbf{b}) = \mathbf{C}(\mathbf{Bx} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{Cbx} + (\mathbf{Cb} + \mathbf{c})$, e portanto:

$$\text{área}(\mathcal{A}(T)) = \text{área}((\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(R)) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{AB}) = \frac{1}{2}\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = (\det \mathbf{A}) \cdot \text{área}(T)$$

(b). Seja $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{a}$ a única transformação afim que transforma o triângulo de referência R no triângulo $T = \triangle(ABC)$, com $\mathcal{A}(0,0) = A, \mathcal{A}(1,0) = B$ e $\mathcal{A}(0,1) = C$. Como transformações afins preservam pontos médios, $R = \mathcal{A}(1/2, 0), P = \mathcal{A}(1/2, 1/2)$ e $Q = \mathcal{A}(0, 1/2)$. Portanto:

$$\frac{\text{área}(\triangle(PQR))}{\text{área}(\triangle(ABC))} = \frac{(\det \mathbf{A}) \cdot (1/2 \cdot 1/2) \cdot 1/2}{(\det \mathbf{A}) \cdot 1/2} = \frac{1}{4}$$