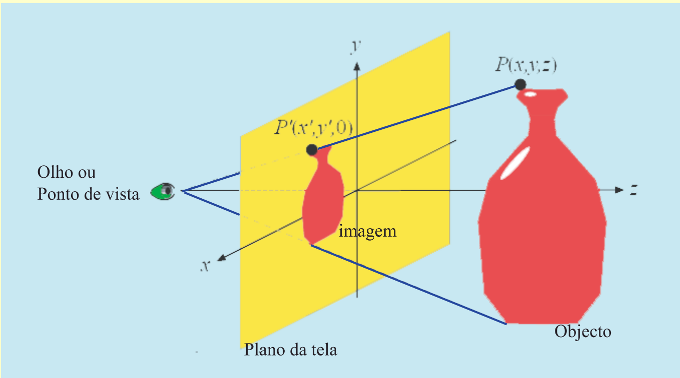
Tópico 1

Perspectiva no espaço

▶ 1.1 Perspectiva. Projecção central ou cónica ...



No espaço afim $\mathbb{E} = \mathbb{A}^3$, consideremos um plano π, a **tela**, e um ponto V, o **ponto de vista**, não pertencente a π. Seja π_o o plano que passa em V e é paralelo a π.

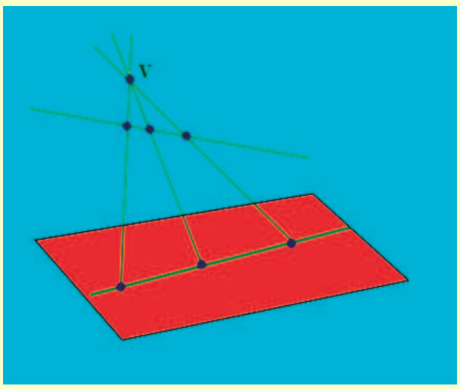
A **projecção central** ou **cónica** de centro V, de $\mathbb{E}$ sobre π, ou **perspectiva** com ponto de vista V, é a aplicação:

$$\Pi_V : \mathbb{E} - \pi_o \to \pi$$

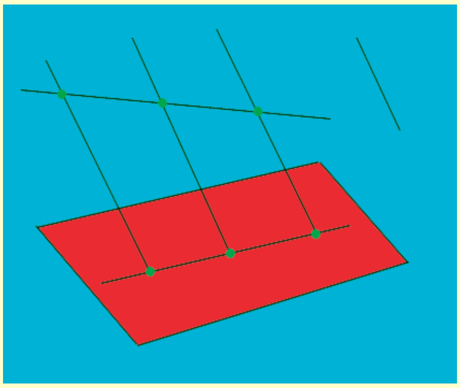
definida da seguinte forma - a cada ponto $P \in \mathbb{E}$ associamos o ponto $P' \in \pi$, intersecção da recta VP, que une V com P, com o plano π.

▶ 1.2 Perspectiva cavaleira. Projecção cilíndrica ... No espaço afim $\mathbb{E} = \mathbb{A}^3$, consideremos um plano π, a **tela**, e uma direcção de recta δ, não paralela a π. A **projecção cilíndrica** de $\mathbb{E}$ sobre π, ou **perspectiva cavaleira** de direcção δ é a aplicação $\Pi_\delta : \mathbb{E} \to \pi$, definida da seguinte forma - a cada ponto $P \in \mathbb{E}$ associamos o ponto $P' \in \pi$, intersecção com o plano π da recta que passa em P e é paralela a δ.

▶ 1.3 Propriedades ...



Sejam P_1, P_2 e P_3 três pontos de $\mathbb{E} - \pi_o$, alinhados sobre uma recta ℓ que não passa em V. Então os pontos $P'_i = \Pi_V(P_i)$, $i = 1, 2, 3$ estão alinhados segundo uma recta $\ell' = \Pi_V(\ell) \subset \pi$.

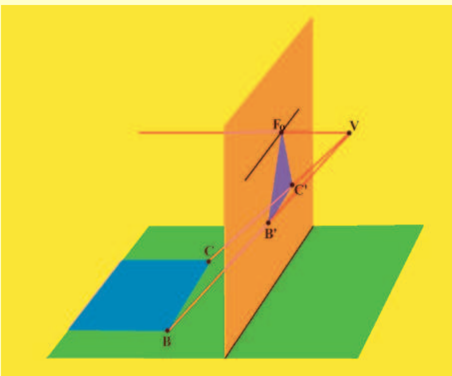


Sejam P_1, P_2 e P_3 três pontos de $\mathbb{E}$, alinhados sobre uma recta ℓ não paralela a δ. Então os pontos $P_i' = \Pi_\delta(P_i)$, $i = 1, 2, 3$ estão alinhados segundo uma recta $\ell' = \Pi_\delta(\ell) \subset \pi$.

► **1.4 <u>Desenho em perspectiva</u>** ... No desenho em perspectiva procura-se reproduzir numa tela π a imagem de um objecto obtida através da projecção cónica cujo centro V é o olho do pintor. O desenho seguinte, intitulado *"O pintor e a mulher deitada"*, é da autoria de Albrecht Dürer (1471-1528):

A perspectiva diz-se cavaleira quando o pintor está suficientemente longe do objecto para que se possa considerar o seu olho no infinito, segundo uma certa direcção dada, e a projecção sobre a tela como cilíndrica.

► **1.5 <u>Pontos de fuga. Linhas de fuga</u>** ...

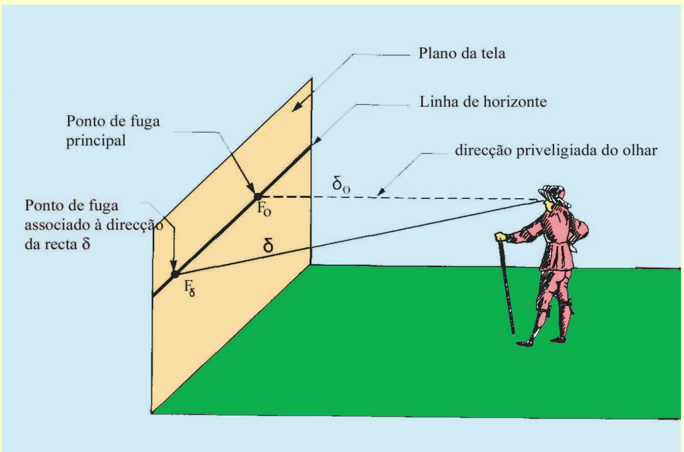


Chama-se **ponto de fuga** associado a uma direcção δ, não paralela ao plano da tela π, ao ponto F_δ intersecção com π da recta que passa em V e é paralela a δ.
Quando δ é a direcção principal, i.e., a direcção perpendicular à tela, o ponto de fuga associado F_o diz-se o **ponto de fuga principal**.
Veja o desenho seguinte de Hyeronymus Rodler (séc. XV)

Chama-se **linha de fuga**, associada a uma direcção de planos α, à recta f_α intersecção com π do plano que passa em V e é paralelo a α - é o lugar geométrico dos pontos de fuga F_δ das direcções de rectas paralelas ao plano α.

É claro que dois planos paralelos têm as mesmas linhas de fuga.

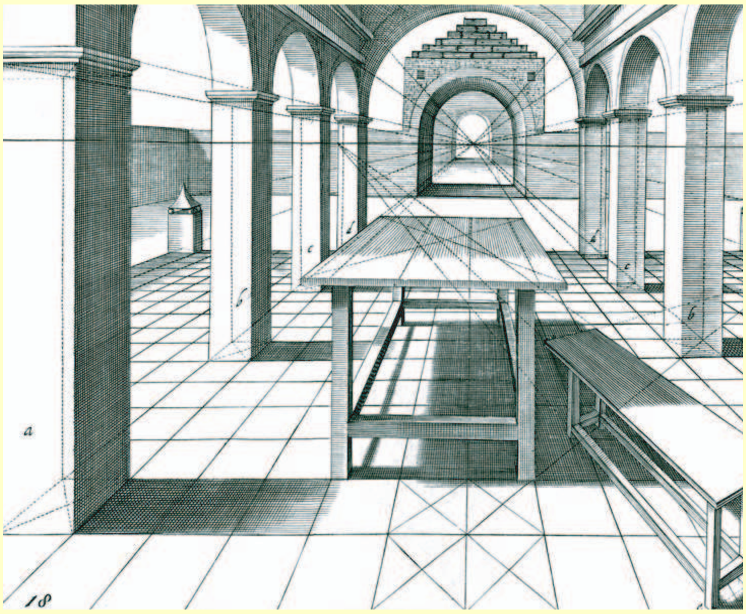
Quando a tela é vertical, a linha de fuga dos planos horizontais chama-se a **linha do horizonte**. O ponto de fuga principal pertence a esta linha.



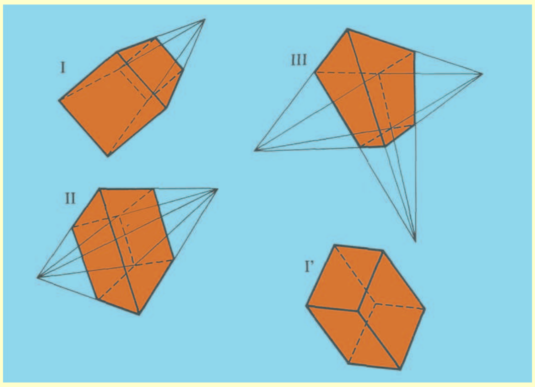
► 1.6 Regras do desenho em perspectiva ...

- **[Persp1].** Todo o objecto situado num plano paralelo à tela é representado por uma imagem semelhante ao objecto. Em particular, rectas paralelas à tela desenham-se como rectas paralelas, todo o ângulo num plano paralelo à tela é preservado, etc...

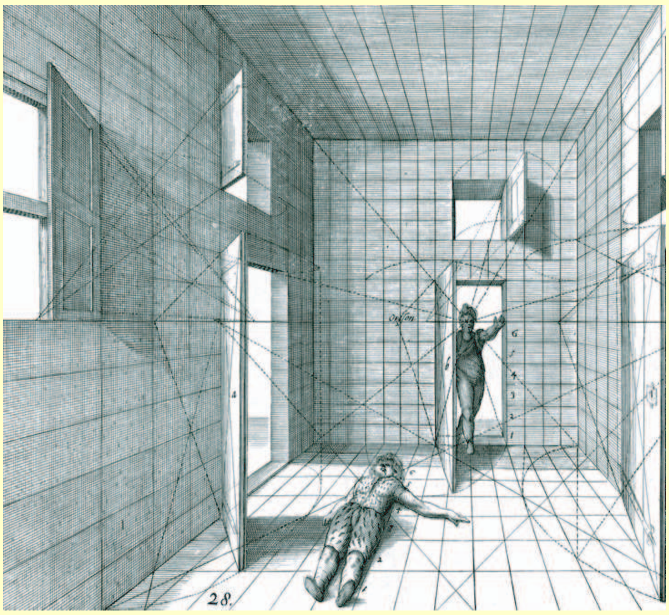
- **[Persp2].** Toda a família de rectas paralelas, mas não paralelas à tela, desenha-se como uma família de rectas concorrentes no ponto de fuga associado à direcção das rectas dadas. Em particular, as rectas perpendiculares à tela desenham-se como rectas concorrentes no ponto de fuga principal.



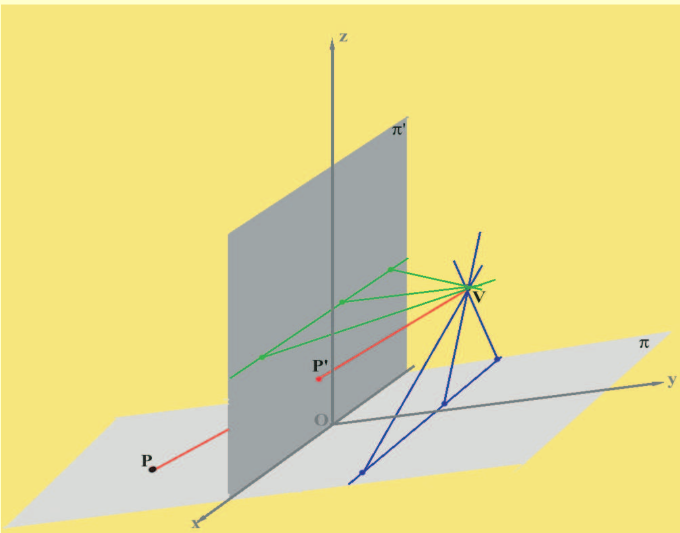
Na figura seguinte estão representados quatro desenhos em perspectiva de um cubo. O ponto de vista está a distância finita nos três primeiros e no infinito no quarto.



- Em I, a tela é paralela uma das faces do cubo.
- Em II, a tela é paralela uma das arestas do cubo, mas não é paralela a qualquer das suas faces.
- Em III, a tela não é paralela a qualquer das arestas do cubo.
- Em I', a tela não é paralela a qualquer das faces do cubo.



▶ 1.7 **Perspectiva. Projecção central** ...



No espaço afim $\mathbb{E} = \mathbb{A}^3$, consideremos dois planos distintos π, π' e um ponto V (o ponto de vista) não pertencente a qualquer deles. Suponhamos que os planos se intersectam numa recta i (quando são paralelos a análise é análoga).
Definamos a projecção central de centro V, de π sobre π', ou perspectiva de π sobre π', $\Pi : \pi \to \pi'$, com ponto de vista V, da forma usual - a cada ponto $P \in \pi$ associamos o ponto $P' \in \pi'$, intersecção da recta VP, que une V com P, com o plano π':

$$\Pi : \pi \to \pi', \qquad P' = \Pi(P) = VP \cap \pi' \tag{1.1}$$

Escolhamos um referencial afim com origem num ponto $O \in i = \pi \cap \pi'$, com o eixo dos x coincidente com a recta i e o eixos dos y e dos z coincidentes com rectas respectivamente em π e π'. Os planos π e π' são pois dados pelas equações $z = 0$ e $y = 0$.

Suponhamos que $V = (a, b, c)$ nesse referencial. A condição de colinearidade dos pontos $V = (a, b, c), P = (x, y, 0)$ e $P' = (x', 0, y')$ é:

$$(a, b, c) = (x, y, 0) + t((x', 0, y') - (x, y, 0))$$

ou:

$$\frac{x - x'}{x - a} = \frac{y}{y - b} = \frac{y'}{c}$$

Resolvendo em ordem a x' e a y', obtemos:

$$x' = \frac{ay - bx}{y - b}, \qquad y' = \frac{cy}{y - b}, \qquad P \neq (x, b, 0) \tag{1.2}$$

e a aplicação inversa é dada por:

$$x = \frac{ay' - cx'}{y' - c}, \qquad y = \frac{by'}{y' - c}, \qquad P' \neq (x', 0, c) \tag{1.3}$$

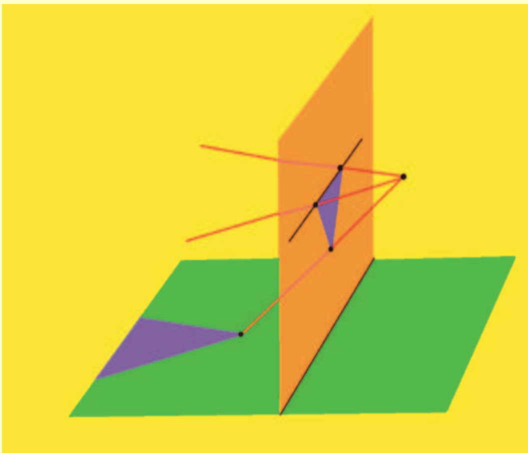
Π é uma colineação - a imagem de uma recta $\ell \subset \pi$ é a recta $\ell' \subset \pi'$ obtida intersectando o plano π' com o plano gerado por V e ℓ.

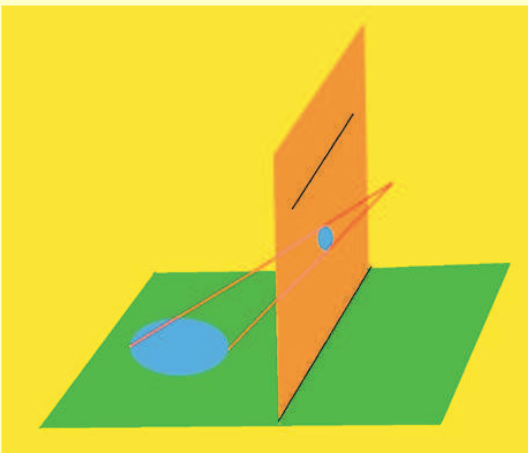
Note que $\Pi : \pi \longrightarrow \pi'$ não está definida nos pontos da forma $(x, b, 0) \in \pi$ que estão sobre uma recta π_∞ de π que se diz a linha de fuga (ou linha do horizonte) de Π em π.

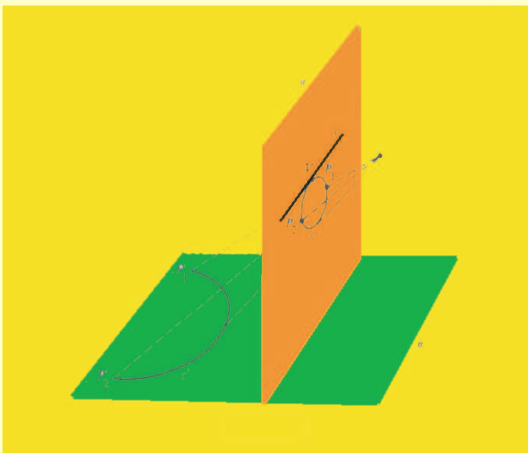
A aplicação inversa $\Lambda : \pi' \longrightarrow \pi$ não está definida nos pontos da forma $(x', 0, c) \in \pi'$ que estão sobre uma recta π'_∞ de π' que se diz a linha de fuga (ou linha do horizonte) de ψ em π'.

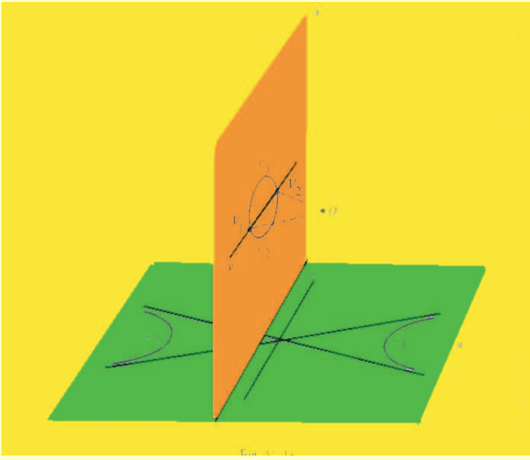
A imagem de duas rectas de π, concorrentes num ponto $I \in \pi_\infty$, consiste de duas rectas em π', paralelas à recta VI.

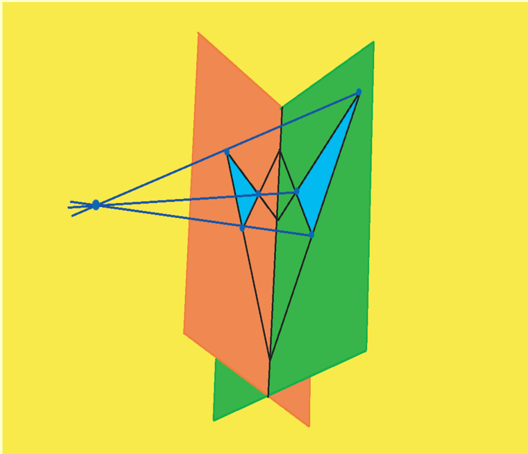
Nas figuras seguintes ilustram-se alguns efeitos geométricos da perspectiva $\Pi : \pi \longrightarrow \pi'$.











► **1.8** **Projectividades** ... Qualquer aplicação de um plano sobre um outro, que seja a composta de um número finito de projecções (centrais ou paralelas), diz-se uma **projectividade**. A geometria projectiva de um plano é o conjunto de propriedades invariantes sob projectividades.