Álgebra Linear e Geometria Analítica

Teste de auto-avaliação Abril de 2006

Exercício 1 ... Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}_3[t]$ das funções polinomiais $p = p(t)$, de grau ≤ 3, de coeficientes reais, munido do produto interno:

$$\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{+1} p(t)q(t)\,dt$$

a.) Mostre que:

$$S = \{p \in \mathbb{R}_3[t] : \quad p(t) = p(-t)\,\}$$

é um subespaço vectorial. Calcule $\dim S$ e determine uma base ortonormada para S.

b.) Calcule o polinómio de S que está mais próximo de $t^3 - 1$.

c.) Calcule o ortogonal de S em $\mathbb{R}_3[t]$.

d.) Mostre que a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{T}: & \mathbb{R}_3[t] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[t] \\ & p = p(t) & \longmapsto & \mathbf{T}[p](t) = p'' - 2tp' \end{array}$$

é linear e calcule o seu núcleo e imagem.

Exercício 2 ... Calcular a solução dos mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercício 3 ... Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno Euclideano usual.

a.) Calcule a fórmula, em coordenadas relativas à base canónica de $\mathbb{R}^3$, para a simetria (ou reflexão) ortogonal $\mathbf{S}$, relativa ao plano $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 3x - y - 5z = 0\}$. Calcule os valores próprios de $\mathbf{S}$ e indique uma base que diagonalize $\mathbf{S}$.

b.) Calcule o simétrico do vector $\mathbf{v} = (-2, 3, 0)$ relativo ao plano π.

c.) Calcule o núcleo e a imagem de $\mathbf{S}$.

d.) Calcule a distância entre o ponto $A = (-2, -1, 4)$ e o plano π.

Exercício 4 ... Considere a aplicação seguinte:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x, y + 2z, 2y + z) \end{array}$$

a.) Calcule os valores próprios de F.

b.) Calcule os subespaços próprios associados a cada um dos valores próprios de F, calculados na alínea anterior, e determine uma base para cada um desses subespaços.

c.) Considere a seguinte forma quadrática em $\mathbb{R}^3$:

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4yz$$

e calcule a matriz simétrica que a representa, relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

d.) Calcule uma base ortonormada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, relativamente à qual a forma quadrática q, definida na alínea anterior, tenha a forma diagonal e diagonalize a forma quadrática q.

Exercício 5 ... Resolva a seguinte fórmula de recorrência:

$$x(k + 3) = x(k + 2) + 2x(k + 1) - 2x(k), \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

com condições iniciais $x(0) = 0, x(1) = 1$ e $x(2) = 1$.

<u>Exercício 6</u> ... Considere o espaço vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas reais 2×2, munido do produto interno:

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$$

a.) Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} Q: & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & Q(A) = \det A \end{array}$$

é uma forma quadrática em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e calcule a matriz simétrica que a representa relativamente à base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b.) Diagonalize Q.