Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Licenciaturas em Matemática

22 de Junho de 2006 Duração... **3h00m (sem tolerância)**

O exame é constituído por 5 folhas. Deve ser resolvido nessas folhas, podendo utilizar o seu verso. Exige-se boa apresentação da prova e justificação clara dos cálculos efectuados. Não é permitido o uso de máquinas de calcular.

Exercício 1 ... Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\mathbf{A}(x, y) = (x + y, x - y, x)$$

a.) Calcule o ortogonal da imagem de $\mathbf{A}$ em $\mathbb{R}^3$, com a estrutura Euclideana usual.

b.) Calcule a "solução" dos mínimos quadrados do sistema:

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x - y &= 1 \\ x &= 0 \end{cases}$$

Calcule o erro associado a essa solução e explique qual o seu significado geométrico (da solução e do seu erro).

Resolução ...

a.) A imagem de $\mathbf{A}$ é constituída por todos os vectores $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

$$(X, Y, Z) = \mathbf{A}(x, y) = (x + y, x - y, x)$$

para algum vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A questão é pois: quais os vectores $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais existe (x, y) tal que:

$$\begin{cases} x + y &= X \\ x - y &= Y \quad ? \\ x &= Z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema em ordem a x, y (com X, Y, Z como parâmetros), vem que:

$$\begin{cases} x &= Z \\ y &= X - Z \\ 0 &= X + Y - 2Z \end{cases}$$

Portanto a imagem de $\mathbf{A}$ é o plano $X + Y - 2Z = 0$ em $\mathbb{R}^3$. O seu ortogonal é a recta gerada pelo vector $\mathbf{n} = (1, 1, -2)$.

b.) Por definição (e pelo teorema da aproximação óptima), a "solução" dos mínimos quadrados é a solução do sistema:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}_{\mathrm{im}\,\mathbf{A}}(\mathbf{b})$$

onde $\mathbf{P}_{\mathrm{im}\,\mathbf{A}}(\mathbf{b})$ é a projecção ortogonal do vector $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ sobre o plano imagem de $\mathbf{A}$: $X + Y - 2Z = 0$.

Essa projecção pode ser calculada pela seguinte fórmula:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{im}\,\mathbf{A}}(1, 1, 0) = (1, 1, 0) - \frac{(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -2)}{\|(1, 1, -2)\|^2}(1, 1, -2) = \frac{2}{3}(1, 1, 1)$$

Logo a solução procurada é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y &= 2/3 \\ x - y &= 2/3 \\ x &= 2/3 \end{cases}$$

que é:

$$x = 2/3, \quad y = 0$$

O erro associado é, por definição, igual à distância entre o ponto $(1, 1, 0)$ e a $\mathbf{P}_{\mathrm{im}\,\mathbf{A}}(\mathbf{b})$:

$$e = \|(1, 1, 0) - \frac{2}{3}(1, 1, 1)\| = \sqrt{6}/3$$

O significado geométrico foi explicado no curso (secção 1.9 dos apontamentos).

NOME...

Exercício 2 ... Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{A}(x, y) = (6x - 2y, -2x + 9y)$$

a.) Mostrar que $\mathbf{A}$ é diagonalizável e calcular uma base ortonormada para $\mathbb{R}^2$ (com a estrutura Euclideana usual) constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$.

b.) Considere as sucessões (x_n) e (y_n), definidas pelas fórmulas de recorrência seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_{n+1} & = & 6x_n - 2y_n \\ y_{n+1} & = & -2x_n + 9y_n \end{array} \right. , \quad n \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Calcule x_n e y_n como funções de n.

Resolução ...

a.) A matriz de $\mathbf{A}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é a matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios calculam-se por:

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)(9-\lambda) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 5, \quad 10$$

Como existem dois ($= \dim \mathbb{R}^2$) valores próprios distintos, $\mathbf{A}$ é diagonalizável. Os espaços próprios calculam-se da forma habitual e são:

$$\mathscr{E}(5) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathscr{E}(10) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Estes espaços são ortogonais (tinham que o ser, pelo teorema espectral!). Um base ortonormada para $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$ é:

$$\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{(1,-2)}{\sqrt{5}} \right\}$$

a.) Pondo $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, as fórmulas de recorrência dadas escrevem-se na forma vectorial:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, \qquad \mathbf{x}_0 = (1, 1)$$

onde $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$. Os cálculos devem ser feitos na base $\mathscr{B}$ que diagonaliza o operador $\mathbf{A}$. Escrevendo o vector $\mathbf{x}_n$ na base $\mathscr{B}$, vem que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_n + y_n)\,\mathbf{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}(x_n - 2y_n)\,\mathbf{u}_2 \end{aligned} \tag{0.1}$$

isto é, as componentes de $\mathbf{x}_n$ na base $\mathscr{B}$ são $\widetilde{x}_n = \frac{2x_n + y_n}{\sqrt{5}}, \widetilde{y}_n = \frac{x_n - 2y_n}{\sqrt{5}}$.

Na base $\mathscr{B}$ as fórmulas de recorrência escrevem-se na forma:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{n+1} \\ \widetilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}_n \\ \widetilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\widetilde{x}_n \\ 10\widetilde{y}_n \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\widetilde{x}_0 \\ 10\widetilde{y}_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\widetilde{x}_1 \\ 10\widetilde{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2\widetilde{x}_0 \\ 10^2\widetilde{y}_0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} \widetilde{x}_n \\ \widetilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n\widetilde{x}_0 \\ 10^n\widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$$

Mas $\widetilde{x}_0 = \frac{2x_0+y_0}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \widetilde{y}_0 = \frac{x_0-2y_0}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Portanto:

$$\begin{cases} \widetilde{x}_n & = & \frac{2x_n+y_n}{\sqrt{5}} & = & 5^n \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \widetilde{y}_n & = & \frac{x_n-2y_n}{\sqrt{5}} & = & 10^n \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

e resolvendo em ordem a x_n e y_n obtemos:

$$x_n = 2 \times 5^{n-1}(3 - 2^{n-1}), \qquad y_n = 5^{n-1}(3 + 4 \times 2^{n-1})$$

NOME...

Exercício 3 ... Considere a cónica afim Euclideana $\mathscr{C}$ em $\mathbb{E}^2$, definida por:

$$7x^2 + 7y^2 + 2xy + 4x - 20y - 4 = 0$$

a.) Verifique se $\mathscr{C}$ é central e, em caso afirmativo, calcule o seu centro.

b.) Reduza $\mathscr{C}$ à forma canónica e identifique a cónica $\mathscr{C}$.

c.) Calcule as coordenadas do(s) foco(s) de $\mathscr{C}$ relativamente ao referencial original $\{O; x, y\}$

Resolução ...

a.) Escrevendo na forma matricial, vem que:

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^t \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^t \mathbf{b} + c = 0 \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix} - 4 = 0 \end{aligned} \tag{0.2}$$

Como $\delta = \det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = 48 \neq 0$, a cónica é central de centro:

$$\mathbf{x}_o = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = -\frac{1}{48} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

b.) Valores próprios da matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$: $\lambda = 6,\ \ 8.$

Base ortonormada de vectores próprios: $\mathscr{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}, \mathbf{u}_2 = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} \right\}$

A matriz de passagem da base canónica $\mathscr{C}$ para a base $\mathscr{B}$ é matriz ortogonal $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

O vector $\mathbf{x}$ muda de acordo com:

$$\mathscr{C} \to \mathscr{B} = \mathscr{C}P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{\mathscr{B}} = \widetilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = P^t \mathbf{x}_{\mathscr{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e analogamente para o vector $\mathbf{b}$:

$$\mathscr{C} \to \mathscr{B} = \mathscr{C}P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}_{\mathscr{B}} = \widetilde{\mathbf{b}} = P^t \mathbf{b}_{\mathscr{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/\sqrt{2} \\ -8/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Na nova base $\mathscr{B}$ a equação da cónica é:

$$\begin{aligned} q(\widetilde{\mathbf{x}}) &= \widetilde{\mathbf{x}}^t \operatorname{diag}(6,8) \widetilde{\mathbf{x}} + 2\widetilde{\mathbf{x}}^t \widetilde{\mathbf{b}} + c = 0 \\ &= \begin{bmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 12/\sqrt{2} \\ -8/\sqrt{2} \end{pmatrix} - 4 \\ &= 6\widetilde{x}^2 + 8\widetilde{y}^2 + 12\sqrt{2}\widetilde{x} - 8\sqrt{2}\widetilde{y} - 4 = 0 \end{aligned} \tag{0.3}$$

Completando quadrados vem que:

$$6(\widetilde{x} + \sqrt{2})^2 + 8(\widetilde{y} - \sqrt{2}/2)^2 = 20$$

ou:

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{20}{6}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{20}{8}}\right)^2} = 1$$

onde pusemos $X = \widetilde{x} + \sqrt{2}$, $\; Y = \widetilde{y} - \sqrt{2}/2$. A cónica é pois uma elipse com semieixos iguais a $a = \sqrt{\frac{20}{6}}$ e $b = \sqrt{\frac{20}{8}}$. Como:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \widetilde{x} & = & \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ \widetilde{y} & = & \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{array} \right. , \qquad \text{e} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} X & = & \widetilde{x} + \sqrt{2} \\ Y & = & \widetilde{y} - \sqrt{2}/2 \end{array} \right.$$

vem que:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & \frac{x-y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \\ Y & = & \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}/2 \end{array} \right.$$

A nova origem do referencial $\{\widetilde{O}; X, Y\}$ está situada no ponto cujas coordenadas x, y obtêm-se através de:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{x-y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} & = & 0 \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}/2 & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo vem:

$$x = -1/2, \qquad y = 3/2$$

que são exactamente as coordenadas x, y do centro da cónica.

Os focos da elipse estão situados nos pontos de coordenadas X, Y iguais, respectivamente, $(\pm\sqrt{5/6}, 0)$, uma vez que a distância semi-focal é dada por $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5/6}$. As correspondentes coordenadas x, y obtêm-se resolvendo, em ordem a x e y, o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{x-y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} & = & \pm\sqrt{5/6} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}/2 & = & 0 \end{array} \right.$$

NOME...

Exercício 4 ... Considere a simetria $\mathbf{S} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano $\pi : x - y + z = 0$.

a.) Calcule, em forma vectorial, uma fórmula para o simétrico de um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule o simétrico do ponto $(1, 0, -1)$.

b.) Calcule, em forma quaterniónica, uma fórmula para o simétrico de um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule o simétrico do ponto $(1, 0, -1)$.

Resolução ...

a.) Como se viu no curso:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - 2\,\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} \\
&= (x, y, z) - 2\,\frac{(x, y, z)\cdot(1, -1, 1)}{\|(1, -1, 1)\|^2}(1, -1, 1) \\
&= (x, y, z) - 2\,\frac{x - y + z}{3}(1, -1, 1) \\
&= \frac{1}{3}\,(x + 2y - 2z, 2x + y + 2z, -2x + 2y + z) \qquad (0.4)
\end{aligned}$$

b.) Identificamos $\mathbb{R}^3 \cong \mathscr{P}$, isto é, um vector $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é identificado com o quaternião puro $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Como se viu no curso, a simetria $S_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relativamente ao plano $\pi = \mathbf{n}^\perp$, pode ser escrita na forma:

$$S_\pi(\mathbf{x}) = -\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}^{-1}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{n}^{-1} \\
&= -\mathbf{n}\mathbf{x}\frac{\overline{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^2} \\
&= -\frac{1}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \\
&= \text{............} \qquad (0.5)
\end{aligned}$$

Em particular:

$$\mathbf{S}(1, 0, -1) = \mathbf{S}(\mathbf{i} - \mathbf{k}) = -\frac{1}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})(\mathbf{i} - \mathbf{k})(-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \text{............}$$

NOME...

Exercício 6 ... Seja $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o espaço vectorial real das matrizes quadradas $n \times n$, com entradas reais.

a.) Mostre que $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\,(AB^t)$ define um produto interno Euclideano em $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b.) Calcule o núcleo da forma linear $\mathrm{tr}\,: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Calcule ainda $\dim(\ker \mathrm{tr}\,)$, uma base para $\ker \mathrm{tr}$ e o seu ortogonal relativamente ao produto interno referido na alínea anterior.

Resolução ...

a.)

A bilinearidade é óbvia:

$$\langle (A+B)|C\rangle = \mathrm{tr}\,((A+B)C^t) = \mathrm{tr}\,(AC^t + BC^t) = \mathrm{tr}\,(AC^t) + \mathrm{tr}\,(BC^t) = \langle A|C\rangle + \langle B|C\rangle$$

$$\langle \lambda A|B\rangle = \mathrm{tr}\,(\lambda AB^t) = \lambda \mathrm{tr}\,(AB^t) = \langle A|B\rangle$$

A simetria:

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\,(AB^t) = \mathrm{tr}\,((AB^t)^t) = \mathrm{tr}\,(BA^t) = \langle B|A\rangle$$

Definido positivo e não degenerado:

$$\langle A|A\rangle = \mathrm{tr}\,(AA^t) = \mathrm{tr}\,(\sum_j (A^i_j A^k_j) = \sum_{i,j} (A^i_j)^2 \geq 0, \quad \text{e} \quad = 0, \text{ se e só se } A^i_j = 0, \forall i,j, \text{ isto é, sse } A = 0$$

b.) Cálculos............