Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica II

Licenciaturas em Matemática

21 de Junho de 2007 Duração... **3h00m (sem tolerância)**

O exame é constituído por 5 folhas. Deve ser resolvido nessas folhas, podendo utilizar o seu verso. Exige-se boa apresentação da prova e justificação clara dos cálculos efectuados. Não é permitido o uso de máquinas de calcular.

Cotação:

1(a)	1(b)	2(a)	2(b)	2(c)	3(a)	3(b)	3(c)	4(a)	4(b)	5(a)	5(b)
2.5	1.5	1.0	2.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1	2.5	1.5	1.5

Nome ... **Total ...**

Número mecanográfico ...

Curso ...

Exercício 1 ... Considere o operador linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$A(x,y,z) = (-y+2z, -y, -x+y-3z), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

a.) Calcule os valores próprios de A e, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de A. A é diagonalizável? Justifique.

b.) Considere o produto escalar Euclideano usual em $\mathbb{R}^3$. Calcule o adjunto de A.

Resolução ...

a.) A matriz de A, relativamente à base canónica $\mathscr{C} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios calculam-se pela equação característica:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)[(-3-\lambda)(-\lambda)+2] = (-1-\lambda)(3\lambda+\lambda^2+2) = 0$$

cujas raízes são $\lambda = -1$ (com multiplicidade 2) e $\lambda = -2$.

Cálculo dos vectores próprios associados a $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad x - y + 2z = 0 \quad \therefore \quad \begin{cases} x &= s-2r \\ y &= s \\ z &= r \end{cases}$$

Portanto:

$$\mathscr{E}_{-1}(A) = \{(s-2r, s, r) : s, r \in \mathbb{R}\} = \{s(1,1,0) + r(-2,0,1) : s, r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\langle(1,1,0), (-2,0,1)\rangle$$

Cálculo dos vectores próprios associados a $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad x + z = 0 \text{ e } y = 0 \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & 0 \\ z & = & t \end{array} \right.$$

Portanto:

$$\mathscr{E}_{-2}(A) = \{(-t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\langle(-1, 0, 1)\rangle$$

Conclusão: A é diagonalizável e uma base de vectores próprios é $\mathscr{B} = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$. Nesta base $[A]_{\mathscr{B}} = \ \mathrm{diag}(-1, -1, -2)$.

b.) O adjunto de A define-se através da equação $\langle A^*\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|A\mathbf{y}\rangle$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, como se viu nas aulas. A matriz de A^*, relativamente a uma base ortonormada $\mathscr{C}$, é a transposta da matriz $[A]_{\mathscr{C}}$. Portanto, tomando como $\mathscr{C}$ a base canónica:

$$[A^*]_{\mathscr{C}} = [A]_{\mathscr{C}}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e:

$$A^*(x, y, z) = (-z, -x - y + z, 2x - 3z)$$

Exercício 2 ... Considere a cónica afim Euclideana $\mathscr{C}$ em $\mathbb{E}^2$, definida por:

$$q(x, y) = 3\,x^2 + 3\,y^2 - 10\,xy + 14\,x - 2\,y + 3 = 0$$

a.) Verifique se $\mathscr{C}$ é central e, em caso afirmativo, calcule o seu centro.

b.) Reduza $\mathscr{C}$ à forma canónica e identifique a cónica $\mathscr{C}$.

c.) Calcule as coordenadas do(s) foco(s) e do(s) vértice(s) de $\mathscr{C}$ relativamente ao referencial original $\{O; x, y\}$

Resolução ...

a.) Escrevemos q em forma matricial:

$$q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3 = 0$$

A parte quadrática é representada pela matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ cujo determinante é diferente de zero e portanto a cónica é central. O centro calcula-se resolvendo $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$, em ordem a $\mathbf{x}$, onde $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo obtemos que as coordenadas do centro são $(1, 2)$.

b.) Os valores próprios de $\mathbf{A}$ calculam-se por:

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ -5 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 25 = 0 \quad \therefore \quad \lambda = -2, \lambda = 8$$

Um vector próprio unitário, associado ao valor próprio $\lambda = -2$ é $\widehat{\mathbf{e}}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e um vector próprio unitário, associado ao valor próprio $\lambda = 8$ é $\widehat{\mathbf{e}}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

A base $\widehat{\mathscr{C}} = \{\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2\}$ é ortonormada e positiva.

Pondo:

$$\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}P = \widehat{\mathscr{C}} \quad \therefore \quad [\mathbf{i}\ \ \mathbf{j}] \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = [\widehat{\mathbf{e}}_1\ \ \widehat{\mathbf{e}}_2]$$

Portanto:

$$\begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

uma vez que P é uma matriz ortogonal: $P^{-1} = P^t$. Vem então que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widehat{x} &=& \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ \widehat{y} &=& -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{array} \right. \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{y} \\ y &=& \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{y} \end{array} \right.$$

A equação da cónica nas coordenadas $\widehat{x}, \widehat{y}$ é pois:

$$\begin{aligned} \widehat{q}(\widehat{x}, \widehat{y}) &= -2\widehat{x}^2 + 8\widehat{y}^2 + 14\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{y}\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\widehat{y}\right) \\ &= -2\widehat{x}^2 + 8\widehat{y}^2 + 6\sqrt{2}\widehat{x} - 8\sqrt{2}\widehat{y} + 3 = 0 \qquad (0.1) \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\widehat{x}^2 - 4\widehat{y}^2 - 3\sqrt{2}\widehat{x} + 4\sqrt{2}\widehat{y} - 3/2 = 0$$

Completando quadrados vem que:

$$\left(\widehat{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\left(\widehat{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 = 0$$

ou ainda:

$$\frac{\widetilde{x}^2}{4} - \widetilde{y}^2 = 1$$

onde $\widetilde{x} = \widehat{x} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ e $\widetilde{y} = \widehat{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. A cónica é pois uma hipérbole com:

- **semi-eixo real** $a = 2$
- **semi-eixo imaginário** $b = 1$
- **distância focal** $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{5}$
- **excentricidade** $e = c/a = \sqrt{5}/2$.
- O **parâmetro** $p = b^2/a = 1/2$
- Os **focos** $(\pm\sqrt{5}, 0)$ no referencial $\{\widetilde{O}; \widetilde{x}, \widetilde{y}\}$
- Os **vértices** $(\pm 2, 0)$ no referencial $\{\widetilde{O}; \widetilde{x}, \widetilde{y}\}$
- As **directrizes** - as rectas de equação: $x = \pm a/e = \pm 4\sqrt{5}/5$ no referencial $\{\widetilde{O}; \widetilde{x}, \widetilde{y}\}$
- As **assímptotas** - as rectas de equação: $x = \pm b/a = \pm 1/2$ no referencial $\{\widetilde{O}; \widetilde{x}, \widetilde{y}\}$

Para calcular estas características no referencial original $\{O; x, y\}$, usamos as equações:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{x} &=& \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \widetilde{y} &=& -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

....

Exercício 3 ... Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno Euclideano usual, e a aplicação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, definida por:

$$A(x, y) = (x - y, x + y, x, x - 2y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

a.) Defina $\mathcal{S} =$ imagem $A \subseteq \mathbb{R}^4$ e o ortogonal $\mathcal{S}^\perp$ através de equações cartesianas.

b.) Calcule uma base ortogonal para o subespaço $\mathcal{S} =$ imagem $A \subseteq \mathbb{R}^4$.

c.) Calcule a solução dos mínimos quadrados do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 1 \\ x + y & = & 0 \\ x & = & 1 \\ x - 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolução ...

a.) A imagem de A é o susbespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $A(1, 0) = (1, 1, 1, 1)$ e por $A(0, 1) = (-1, 1, 0, -2)$. Estes dois vectores são linearmente independentes porque, por exemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Logo constituem uma base de $\mathcal{S}$ que tem, por isso, dimensão 2. Como:

$$\mathcal{S} = \big\{(X, Y, Z, W) \in \mathbb{R}^4 : (X, Y, Z, W) = r(1, 1, 1, 1) + s(-1, 1, 0, -2) : \quad r, s \in \mathbb{R}\big\}$$

ou:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r - s & = & X \\ r + s & = & Y \\ r & = & Z \\ r - 2s & = & W \end{array} \right. \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{lcr} r & = & Z \\ s & = & -X + Z \\ 0 & = & X + Y - 2Z \\ 0 & = & -2X + Z + W \end{array} \right.$$

$\mathcal{S}$ escreve-se na seguinte forma cartesiana:

$$\mathcal{S} = \big\{(X, Y, Z, W) \in \mathbb{R}^4 : \quad X + Y - 2Z = 0 = 2X - Z - W\big\}$$

O ortogonal $\mathcal{S}^\perp$ define-se por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^\perp &= \big\{(X, Y, Z, W) \in \mathbb{R}^4 : (X, Y, Z, W) \cdot (1, 1, 1, 1) = 0 = (X, Y, Z, W) \cdot (-1, 1, 0, -2)\big\} \\ &= \big\{(X, Y, Z, W) \in \mathbb{R}^4 : X + Y + Z + W = 0 = -X + Y - 2W\big\} \end{aligned} \tag{0.2}$$

b.) Como primeiro vector dessa base tomamos, por exemplo, $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$. Um segundo vector $\mathbf{u}_2$ tem que estar em $\mathcal{S}$ e tem que ser perpendicular a $\mathbf{u}_1$. Se $\mathbf{u}_2 = (X, Y, Z, W)$ então:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X + Y - 2Z & = & 0 \\ 2X - Z - W & = & 0 \\ X + Y + Z + W & = & 0 \end{array} \right. \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{rcl} X + Y - 2Z & = & 0 \\ -2Y + 3Z - W & = & 0 \\ 3Z + W & = & 0 \end{array} \right. \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{rcr} X & = & -t \\ Y & = & 3t \\ Z & = & t \\ W & = & -3t \end{array} \right.$$

Escolhendo $t = 1$, por exemplo, vem $\mathbf{u}_2 = (-1, 3, 1, -3)$. Uma base ortogonal para $\mathcal{S}$ é pois:

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (-1, 3, 1, -3)\}$$

c.) A projecção ortogonal do vector $(1,0,-1,0)$ sobre $\mathcal{S}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Pr}_{\mathcal{S}}(1,0,-1,0) &= \frac{(1,0,1,0)\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1+\frac{(1,0,1,0)\cdot\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 \\
&= \frac{(1,0,1,0)\cdot(1,1,1,1)}{\|(1,1,1,1)\|^2}(1,1,1,1)+\frac{(1,0,1,0)\cdot(-1,3,1,-3)}{\|(-1,3,1,-3)\|^2}(-1,3,1,-3) \\
&= \frac{1}{8}(1,1,1,1) \qquad (0.3)
\end{aligned}$$

Resta resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 1/8 \\ x+y &=& 1/8 \\ x &=& 1/8 \\ x-2y &=& 1/8 \end{array}\right.$$

cuja solução é $x=1/8$ e $y=0$. É esta a solução dos mínimos quadrados do sistema dado.

Exercício 4 ... Considere a fórmula de recorrência:

$$x_{k+2}=4\,x_{k+1}+\frac{9}{4}x_k$$

para uma sucessão $(x_k)_{k\geq 0}$ de números reais, cujos dois primeiros termos são $x_0=1$ e $x_1=0$.

a.) Calcule os 3 primeiros termos da sucessão x_k

b.) Calcule o termo geral da sucessão x_k como função de k.

Resolução ...

a.) cálculo

b.) Em primeiro lugar escrevemos a fórmula de recorrência na forma de um sistema dinâmico discreto $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{A}\mathbf{x}_k$ com condição inicial $\mathbf{x}_0$. Pondo $\mathbf{x}_k=\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix}$ vem que $\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e:

$$\mathbf{x}_{k+1}=\begin{pmatrix} x_{k+2} \\ x_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 9/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{pmatrix}$$

Portanto $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 9/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculamos agora os valores próprios de $\mathbf{A}$:

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 9/4 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix}=0 \quad \therefore \quad (4-\lambda)(-\lambda)-9/4=0 \quad \therefore \quad \lambda=-1/2,9/2$$

Calculamos agora uma base ortonormada de vectores próprios:

- para $\lambda=-1/2$:

$$\begin{pmatrix} 9/2 & 9/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad 2x+y=0 \quad \therefore \quad \mathbf{u}_1=\left(\tfrac{\sqrt{5}}{5},-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

- para $\lambda=9/2$:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 9/4 \\ 1 & -9/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad 2x-9y=0 \quad \therefore \quad \mathbf{u}_2=\left(\tfrac{9\sqrt{85}}{85},\tfrac{2\sqrt{85}}{85}\right)$$

Na base $\mathscr{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ a matriz $\mathbf{A}$ diagonaliza-se:

$$[\mathbf{A}]_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}(-1/2, 9/2)$$

O vector inicial $\mathbf{x}_0$ escreve-se na forma:

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathbf{u}_1 + \frac{2\sqrt{85}}{85}\mathbf{u}_2$$

isto é:

$$[\mathbf{x}_0]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{85}}{85} \end{array} \right)_{\mathscr{B}}$$

Sabemos que $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$. Na base $\mathscr{B}$ isto escreve-se na forma:

$$[\mathbf{x}_k]_{\mathscr{B}} = [\mathbf{A}]^k_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}_0]_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}(-1/2, 9/2)^k \left(\begin{array}{c} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{85}}{85} \end{array} \right)_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c} -(-1/2)^k \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ (9/2)^k \cdot \frac{2\sqrt{85}}{85} \end{array} \right)_{\mathscr{B}}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \left(\begin{array}{c} x_{k+1} \\ x_k \end{array} \right) = -(-1/2)^k \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}\mathbf{u}_1 + (9/2)^k \cdot \frac{2\sqrt{85}}{85}\mathbf{u}_2 \\ &= (-1/2)^k \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \left(\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{array} \right) + (9/2)^k \cdot \frac{2\sqrt{85}}{85} \left(\begin{array}{cc} \frac{9\sqrt{85}}{85}, \frac{2\sqrt{85}}{85} \end{array} \right) \end{aligned} \tag{0.4}$$

isto é:

$$x_k = \frac{4}{5}(-1/2)^{k+1} + \frac{4}{85}(9/2)^k$$

Exercício 5 ... Seja $(\mathcal{V}, \langle\,|\,\rangle)$ um espaço vectorial e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Suponha que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são três vectores próprios de T, associados respectivamente aos valores próprios λ , η e γ distintos dois a dois.

a.) Mostrar que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes.

b.) Mostrar que, se $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ é vector próprio de T, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Resolução ...

a.) Para dois vectores foi resolvido no curso.Suponhamos então que, por exemplo, $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, com $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Então viria que:

$$\lambda(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{u} = T(\mathbf{u}) = T(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha T(\mathbf{v}) + \beta T(\mathbf{w}) = \alpha\eta\mathbf{v} + \beta\gamma\mathbf{w}$$

isto é:

$$\alpha(\lambda - \eta)\mathbf{v} + \beta(\lambda - \gamma)\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

e como $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são dois vectores linearmente independentes e $\alpha \neq 0 \neq \beta$, viria que $\lambda = \eta = \gamma$ o que contraria a hipótese.

b.) Sabemos, por hipótese, que $T(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}, T(\mathbf{v}) = \eta\mathbf{v}$ e ainda que $\lambda \neq \eta$. Suponhamos que $T(a\mathbf{u}+b\mathbf{v}) = \gamma(a\mathbf{u} + b\mathbf{v})$ para um certo escalar γ. Para já sabemos que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ porque um vector próprio não pode ser nulo. Vem então que:

$$\begin{aligned} \gamma(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) &= \gamma a\mathbf{u} + \gamma b\mathbf{v} \\ &= T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \\ &= aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v}) \\ &= a\lambda\mathbf{u} + b\eta\mathbf{v} \end{aligned} \tag{0.5}$$

o que implica (uma vez que **u** e **v** são linearmente independentes, pela alínea a).) que:

$$\gamma a = a\lambda \qquad \text{e} \qquad \gamma b = b\eta$$

isto é:

$$(a = 0 \text{ ou } \lambda = \gamma) \;\; \text{e} \;\; (b = 0 \text{ ou } \eta = \gamma)$$

Um jogo lógico mostra que $a = 0$ ou $b = 0$, atendendo a que $\lambda \neq \eta$.