Resolução de alguns exercícios de ALGA

Exercício ... Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}_3[t]$ das funções polinomiais $p(t)$, de grau ≤ 3, de coeficientes reais, munido do produto interno:

$$\langle p(t)|q(t)\rangle = \int_0^{+1} p(t)q(t)\,dt$$

a.) Mostre que:

$$S = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] : \quad p(t) = p(-t)\,\}$$

é um subespaço vectorial. Calcule $\dim S$ e determine uma base ortonormada para S.

b.) Calcule o polinómio de S que está mais próximo do polinómio $p(t) = t$.

c.) Calcule o ortogonal de $\mathcal{T} = \text{span}\{1\}$ em $\mathbb{R}_3[t]$.

d.) Calcule o núcleo e a imagem da aplicação linear:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{T}: & \mathbb{R}_3[t] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[t] \\ & p(t) & \longmapsto & \mathbf{T}[p(t)] = p''(t) - 2tp'(t) \end{array}$$

Resolução ...

a.) Se $p, q \in S$ então $(p+q)(t) = p(t) + q(t) = p(-t) + q(-t) = (p+q)(-t)$ e portanto $p + q \in S$. Se $p \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $(\lambda p)(t) = \lambda p(t) = \lambda p(-t) = \lambda p(-t)$ e portanto $\lambda p \in S$.

Se $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in S$ então $a + bt + ct^2 + dt^3 = p(t) = p(-t) = a - bt + ct^2 - dt^3$, isto é, $2bt + 2dt^3 = 0$ e portanto $b = d = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} S &= \{p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t] : \quad b = d = 0\,\} \\ &= \{p(t) = a + ct^2 \in \mathbb{R}_3[t] : \quad a, c \in \mathbb{R}\,\} \\ &= \text{span}\{1, t^2\} \end{aligned}$$

e $\dim S = 2$. Os polinómios $p(t) \equiv 1$ e $q(t) = t^2$ constituem uma base para S.

Uma base ortonormada obtem-se pelo processo de Gram-Schmidt. $\|1\|^2 = \int_0^1 1\,dt = 1$ e $t^2 - \frac{\langle t^2|1\rangle}{\|1\|^2}\,1 = t^2 - \int_0^1 t^2\,dt = t^2 - 1/3$. Além disso $\left\|t^2 - 1/3\right\|^2 = \int_0^1 (t^2 - 1/3)^2\,dt = 4/45$. Logo os polinómios 1 e $(3\sqrt{5}/2)(t^2 - 1/3)$ constituem uma base ortonormada para S.

b.) Pelo teorema da aproximação óptima esse polinómio é dado pela projecção ortogonal de t sobre S:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_S(t) &= \langle t|1\rangle\,1 + \langle t|(3\sqrt{5}/2)(t^2 - 1/3)\rangle\,(3\sqrt{5}/2)(t^2 - 1/3) \\ &= \int_0^1 t\,dt + (45/4)\left(\int_0^1 t(t^2 - 1/3)\,dt\right)(t^2 - 1/3) \\ &= 1/2 + (45/48)(t^2 - 1/3) \end{aligned}$$

c.) Um polinómio $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t]$ estará em $\mathcal{T}^\perp$ sse $\langle (a + bt + ct^2 + dt^3)|1\rangle = 0$ isto é, sse $a + b/2 + c/3 + d/4 = 0$. Portanto:

$$\mathcal{T}^\perp = \{p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t] : \quad a + b/2 + c/3 + d/4 = 0\,\}$$

que é um hiperplano em $\mathbb{R}_3[t]$.

d.) Um polinómio $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t]$ estará em $\ker \mathbf{T}$ sse:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{T}[p(t)] \;=\; p''(t) - 2tp'(t) \\ &= (a + bt + ct^2 + dt^3)'' - 2t(a + bt + ct^2 + dt^3)' \\ &= (2c + 6dt) - 2t(b + 2ct + 3dt^2) \\ &= 2c + (6d - 2b)t - 4ct^2 - 6dt^3 \end{aligned}$$

donde $2c = 0, 6d - 2b = 0, 4c = 0, 6d = 0$, isto é, $b = c = d = 0$. Portanto o $\ker \mathbf{T}$ é constituídio pelos polinómios $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t]$ tais que $b = c = d = 0$, isto é, $\ker \mathbf{T} = \{a : a \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{1\}$.

$\text{im}\,\mathbf{T}$ é constituídia pelos polinómios $P(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 \in \mathbb{R}_3[t]$ tais que:

$$\mathbf{T}(a + bt + ct^2 + dt^3) = A + Bt + Ct^2 + Dt^23$$

para algum polinómio $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \in \mathbb{R}_3[t]$. Como $\mathbf{T}[p(t)] = 2c + (6d - 2b)t - 4ct^2 - 6dt^3$, vem que:

$$2c + (6d - 2b)t - 4ct^2 - 6dt^3 = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$$

isto é:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & 2c & & & = & A \\ -2b & & & + & 6d & = & B \\ & - & 4c & & & = & C \\ & & & - & 6d & = & D \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2b & & & + & 6d & = & B \\ & & 2c & & & = & A \\ & & & - & 6d & = & D \\ & & & & 0 & = & 2A + C \end{array}\right. \Rightarrow$$

e portanto $\text{im}\,\mathbf{T} = \{P(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 \in \mathbb{R}_3[t] : \quad 2A + C = 0\}$.

Exercício ... Considere a aplicação linear:

$$\begin{array}{rrcl} \mathbf{T}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & \mathbf{T}(x, y, z) = (4z, x + 2y + z, 2x + 4y - 2z) \end{array}$$

a.) Calcular a matriz de $\mathbf{T}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcular o núcleo e a imagem de $\mathbf{T}$.

b.) Calcular os valores próprios de $\mathbf{T}$ e, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de $\mathbf{T}$. Calcule a matriz de $\mathbf{T}$ relativamente a esta nova base.

c.) Usando os resultados das alíneas anteriores, calcule $\mathbf{T}^3(0, 0, -4)$, onde $\mathbf{T}^3 = \mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}$.

Resolução ...

a.) A matriz é $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. $\ker \mathbf{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{T}(x, y, z) = (4z, x+2y+z, 2x+4y-2z) = (0, 0, 0)\}$ o que implica que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \\ 2x + 4y - 2z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x + 2y & = & 0 \\ 2x + 4y & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x + 2y & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2t \\ y & = & t \\ z & = & 0 \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

isto é $\ker \mathbf{T} = \{t(-2, 1, 0) : t \in \mathbb{R}^3\} = \text{span}\{(-2, 1, 0)\}$ que é a recta de $\mathbb{R}^3$ gerada por $(-2, 1, 0)$ e de equações cartesianas $x + 2y = 0$ e $z = 0$.

A imagem de $\mathbf{T}$ é gerada por $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = (0, 1, 2), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = (0, 2, 4)$ e $\mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = (4, 1, -2)$, isto é:

$$\begin{array}{rcl} \text{im}\mathbf{T} & = & \text{span}\{(0, 1, 2), (0, 2, 4), (4, 1, -2)\} \\ & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = a(0, 1, 2) + b(0, 2, 4) + c(4, 1, -2), \quad a, b, c \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Portanto:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4c & = & x \\ a + 2b + c & = & y \\ 2a + 4b - 2c & = & z \end{array}\right. \Rightarrow .... \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a + 2b + c & = & y \\ 4c & = & 2y - z \\ 0 & = & x - 2y + z \end{array}\right.$$

isto é, $\text{im}\mathbf{T}$ é o plano $x - 2y + z = 0$ em $\mathbb{R}^3$.

b.) A equação característica é $\det(T - \lambda \text{Id}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 16\lambda = 0$, cujas raízes são $\lambda = -4, 0, +4$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{T};-4) &= \text{span}\{(1,0,-1)\} \\
\mathcal{E}(\mathbf{T};0) &= \text{span}\{(-2,1,0)\} \\
\mathcal{E}(\mathbf{T};-4) &= \text{span}\{(1,1,1)\}
\end{aligned}
$$

e os vectores $\{\mathbf{e}_1 = (1,0,-1), \mathbf{e}_2 = (-2,1,0), \mathbf{e}_3 = (1,1,1)\}$ constituem uma base de vectores próprios de $\mathbf{T}$ que é, por isso, diagonalizável. Nesta base a matriz de $\mathbf{T}$ é diag$(-4,0,4)$.

c.) Calculando as componentes do vector $(0,0,-4)$ na base de vectores próprios de $\mathbf{T}$, calculada anteriormente, vem que:

$$(0,0,-4) = a(1,0,-1) + b(-2,1,0) + c(1,1,1) = (a-2b+c, b+c, -a+c)$$

donde se deduz que $a=-1, b=1, c=-1$. Portanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}^3(0,0,-4) &= -\mathbf{T}^3(1,0,-1) + \mathbf{T}^3(-2,1,0) - \mathbf{T}^3(1,1,1) \\
&= -(-4)^3(1,0,-1) + 0^3(-2,1,0) - 4^3(1,1,1) \\
&= (0,-64,-128)
\end{aligned}
$$

Exercício ... Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno Euclideano usual.

a.) Calcule a fórmula, em coordenadas relativas à base canónica de $\mathbb{R}^3$, para a simetria (ou reflexão) ortogonal $\mathbf{S}$, relativa ao plano $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ 2x - y - 2z = 0\}$. Calcule os valores próprios de $\mathbf{S}$ e indique uma base que diagonalize $\mathbf{S}$.

b.) Calcule o simétrico do vector $\mathbf{v} = (-2,5,0)$ relativo ao plano π.

c.) Calcule o núcleo e a imagem de $\mathbf{S}$.

d.) Calcule a distância entre o ponto $A = (-2,-1,4)$ e o plano π.

Resolução ...

a.) Como se deduziu nas aulas, $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\mathbf{P_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = (2,-1,-2)$ é um vector perpendicular ao plano π. Portanto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}(x,y,z) &= (x,y,z) - 2\,\frac{\langle (x,y,z)|(2,-1,-2)\rangle}{9}\,(2,-1,-2) \\
&= (x,y,z) - 2\,\frac{2x-y-2z}{9}\,(2,-1,-2) = ...
\end{aligned}
$$

b.) Substituir $(x,y,z) = (-2,5,0)$ na fórmula anterior e fazer os cálculos para obter $\mathbf{S}(-2,5,0) = (2,3,-4)$.

c.) $\ker \mathbf{S} = \{\mathbf{0}\}$ e $\text{im}\mathbf{S} = \mathbb{R}^3$.

d.) aplicar a fórmula dada nas aulas :

$$d(A,\pi) = \|\mathbf{P_n}(\mathbf{x})\| = \left\| \frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n} \right\| = \frac{|\langle \mathbf{x}|\mathbf{n}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|}$$

onde $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$. Portanto:

$$d(A,\pi) = \frac{|\langle (-2,-1,4)|(2,-1,-2)\rangle|}{3} = 11/3$$

Exercício ... Reduzir à forma canónica a equação da cónica:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$$

Identificar e fazer um esboço dessa cónica. Calcular o seu centro (se existir) e indicar as suas características geométricas principais (eixos, directriz, foco(s) e excentricidade).

Resolução ... a cónica é central com centro em $O = (1, -1)$. Os valores próprios da parte quadrática são 2 e 8. No referencial $\{O; E_1, E_2\}$, onde E_1 e E_2 formam uma base ortonormada de vectores próprios da matriz simétrica associada à parte quadrática, e designando por X, Y as coordenadas relativas a esse referencial, a equação da cónica reduz-se à forma canónica:

$$\frac{X^2}{2^2} + Y^2 = 1$$

que é uma elipse.

As características geométricas calculam-se da forma habitual.

Exercício ... Considere um espaço vectorial $\mathcal{V}$, de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{k}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbf{C}$), e um operador linear $P : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, tal que $P^2 = P$ e $P \neq \text{Id}$.

a.) Mostre que $\mathcal{V} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$.

b.) Mostre que para o operador $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $L(x, y) = (x - y, y - x)$ é verdade que $\mathbb{R}^2 = \ker L \oplus \operatorname{im} L$, embora $L^2 \neq L$.

Resolução ...

a.) Se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, então $P^2\mathbf{v} = P\mathbf{v}$ o que implica que $P(\mathbf{v} - P\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, isto é, $(\mathbf{v} - P\mathbf{v}) \in \ker P$. Por outro lado, como $\mathbf{v} = (\mathbf{v} - P\mathbf{v}) + P\mathbf{v}$ e $P\mathbf{v} \in \operatorname{im} P$, concluímos que $\mathcal{V} = \ker P + \operatorname{im} P$. Mas a soma é directa porque, se $\mathbf{w} \in \ker P \cap \operatorname{im} P$, então $P\mathbf{w} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{w} = P\mathbf{u}$, para algum $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Viria então que $\mathbf{w} = P\mathbf{u} = P^2\mathbf{u} = \P\mathbf{w} = \mathbf{0}$, como se pretendia.

b.) $\ker L = \text{span}\{(1, 1)\}$ e $\operatorname{im} L = \text{span}\{(1, -1)\}$, donde $\mathbb{R}^2 = \ker L \oplus \operatorname{im} L$. Como:

$$L^2(x, y) = L(x - y, y - x) = (x - y - y + x, y - x - x + y) = 2(x - y, y - x) = 2L(x, y)$$

$L^2 \neq L$.

Exercício ... **a.)** Calcule a intersecção dos planos α e β, em $\mathbb{R}^3$, onde α é o plano perpendicular a $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ e que passa no ponto $A = (-1, 2, 1)$, e β é o plano gerado pelos vectores $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$, e que passa no ponto $B = (2, -1, 0)$.

b.) Calcule as equações paramétricas da recta ℓ que passa no ponto $P = (2, -1, -1)$ e é perpendicular ao plano α da alínea anterior.

c.) Calcule o ponto de intersecção da recta ℓ com o plano α da alínea anterior., e ainda a distância de P a α.

Resolução ...

a). Se $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \alpha$, então $(\mathbf{x} - \overrightarrow{OA}) \cdot \mathbf{n} = 0$, isto é:

$$((x, y, z) - (-1, 2, 1)) \cdot (1, -2, 3) = 0, \quad \Rightarrow \quad (x + 1) - 2(y - 2) + 3(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y + 3z = -2$$

Se $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \beta$, então $\mathbf{x} - \overrightarrow{OB} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, para certos escalares $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto $(x - 2, y + 1, z) = a(0, 1, -1) + b(-1, 0, 1)$ e daí que:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} & & -b & = & x - 2 \\ a & & & = & y + 1 \\ -a & + & b & = & z \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcrcr} a & & & = & y + 1 \\ & & -b & = & x - 2 \\ & & 0 & = & x + y + z - 1 \end{array}\right.$$

isto é, $x+y+z=1$ é a equação cartesiana de β. A intersecção de α com β é constituída pelos $\mathbf{x}=(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$ tais que:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & -2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccl} x & = & -5t/3 \\ y & = & 2t/3+1 \\ z & = & t \end{array}\right.$$

que é a equação paramétrica da recta gerada por $(-5/3, 2/3, 1)$ e que passa no ponto $C=(0,1,0)$.

b). Se $\mathbf{x}=(x,y,z)\in \ell$, então $(\mathbf{x}-\overrightarrow{OP})=t\mathbf{n}$, isto é:

$$((x,y,z)-(2,-1,-1))=t(1,-2,3), \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccl} x & = & t+2 \\ y & = & -2t-1 \\ z & = & 3t-1 \end{array}\right., \qquad t\in\mathbb{R}$$

c). O ponto de intersecção de ℓ com α, por ser de ℓ será da forma $(t+2,-2t-1,3t-1)$ e por ser de α terá de verificar a equação de α, $x-2y+3z=-2$. Portanto:

$$(t+2)-2(-2t-1)+3(3t-1)=-2 \quad \Rightarrow \quad t=-3/14$$

O ponto de intersecção tem coordenadas $1/14\,(25,-8,-23)$.

A distância de P a α é dada por $\|(2,-1,-1)-1/14\,(25,-8,-23)\,\|$.

Exercício ... Considere no espaço $\mathcal{V}=C([0,1],\mathbb{R})$ das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$, o seguinte produto interno:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

a.) Calcule uma base e a dimensão do subespaço:

$$\mathcal{S}=span\{1+x, 2+x+x^2, x^2-x\}$$

b.) Aplique o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormada para $\mathcal{S}$.
c.) Calcule o elemento de $\mathcal{S}$ que está mais próximo de x^3.

Resolução ...

a). As funções que geram $\mathcal{S}$ são linearmente dependentes, já que:

$$a(1+x)+b(2+x+x^2)+c(x^2-x)=0 \quad \Rightarrow \quad (a+2b)+(a+b-c)x+(b+c)x^2=0$$

donde:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & & & = & 0 \\ a & + & b & - & c & = & 0 \\ & & b & + & c & = & 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccr} a & = & 2t \\ b & = & -t \\ c & = & t \end{array}\right.$$

Por exemplo, para $t=1$, obtemos $x^2-x=-2(1+x)+(2+x+x^2)$. Portanto $\mathcal{S}=span\{1+x,2+x+x^2\}$ e como estas duas funções são já linearmente independentes, elas constituem uma base para $\mathcal{S}$. Portanto $\dim\mathcal{S}=2$.

b).

$$e_1(x)=\frac{1+x}{\|1+x\|}$$

onde $\|1+x\|=\left(\int_0^1(1+x)^2dx\right)^{1/2}$.

$$f_2(x)=(2+x+x^2)-\frac{\langle(2+x+x^2)|(1+x)\rangle}{\|1+x\|^2}(1+x)$$

$$e_2(x) = \frac{f_2(x)}{\|f_2(x)\|}$$

c). Esse elemento é a projecção ortogonal de x^3 sobre $\mathcal{S}$ e é dado por:

$$\langle x^3 | e_1(x)\rangle e_1(x) + \langle x^3 | e_2(x)\rangle e_2(x)$$

Exercício ... Considere a aplicação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$.
a.) Calcule o núcleo $\ker F$ e a imagem $\operatorname{im} F$, definido-os por equações cartesianas e identificando-os geomètricamente.
b.) Calcule bases para o núcleo $\ker F$ e para a imagem $\operatorname{im} F$, respectivamente.
c.) Calcule a matriz A, que representa F relativamente à base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,-2),(2,-1,-1)\}$.
d.) Calcule a imagem $F(\mathbf{v})$, onde $\mathbf{v} = (1,-1,2)$, usando a matriz A, calculada na alínea anterior

---

Resolução ...
a).

$$\ker F = \left\{ (x,y,z) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ x & & & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -2t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array} \right. . \right\}$$

que é a recta gerada por $(-2,1,1)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{im} F &= span\{F(1,0,0), F(0,1,0), F(0,0,1)\} \\ &= span\{(1,0,1),(2,1,0),(0,-1,2)\} \\ &= \{(x,y,z) : \quad (x,y,z) = a(1,0,1) + b(2,1,0) + c(0,-1,2)\} \end{aligned}$$

Daí que:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & & & = & x \\ & & b & - & c & = & y \\ a & & & + & 2c & = & z \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & & & = & x \\ & & b & - & c & = & y \\ & & & & 0 & = & -x+2y+z \end{array} \right.$$

e portanto $\operatorname{im} F$ é o plano de equação cartesiana $-x+2y+z=0$.

b). Uma base para $\ker F$ é, por exemplo, constituída pelo vector $(-2,1,1)$.
Uma base para $\operatorname{im} F$ é, por exemplo, constituída pelos vectores $(0,1,-2)$ e $(1,0,1)$.

c).

$$\begin{array}{lclcl} F(1,0,1) & = & (1,-1,3) & = & a(1,0,1) + b(0,1,-2) + c(2,-1,-1) \\ F(0,1,-2) & = & (2,3,-4) & = & d(1,0,1) + e(0,1,-2) + f(2,-1,-1) \\ F(2,-1,-1) & = & (0,0,4) & = & g(1,0,1) + h(0,1,-2) + k(2,-1,-1) \end{array}$$

donde:

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F) = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{bmatrix}$$

d). $\mathbf{v} = 1,-1,2) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,-2) + \gamma(2,-1,-1)$, donde:

$$F(v)_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

isto é:

$$F(v)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Falta fazer os cálculos, que são imediatos....

Exercício ... Considere a aplicação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$F(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$$

a.) Calcule os valores próprios de F.
b.) Calcule bases para cada um dos espaços próprios de F.
c.) Diga, justificando, se F é ou não diagonalizável.

Resolução ...

a).

$$\det(A-\lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)-2]+[2(2-\lambda)-2] = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

e os valores próprios de F são $\lambda = 1, \lambda = 2$ e $\lambda = 3$.

b). Cálculos de rotina

c). F é diagonalizável por ter 3 valores próprios distintos e estar derinida em $\mathbb{R}^3$, que tem dimensão 3...