Produto vectorial. Produto misto (ou triplo) em $\mathbb{R}^3$. Interpretação geométrica do determinante

0.1 Produto vectorial em $\mathbb{R}^3$

Comecemos por recordar o que é o **produto vectorial** de dois vectores em $\mathbb{R}^3$. Dados dois vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$, define-se o **produto vectorial** $\mathbf{x} \times \mathbf{x}'$, de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{x}'$, como sendo o seguinte vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{x}' \overset{\text{def}}{=} (yz' - y'z)\,\mathbf{i} + (zx' - z'x)\,\mathbf{j} + (xy' - x'y)\,\mathbf{k} \tag{0.1.1}$$

O produto vectorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, pode ser obtido desenvolvendo segundo a primeira linha, o determinante formal:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{bmatrix}$$

A seguir indicam-se as propriedades mais importantes deste produto vectorial, todas elas de demonstração simples (que deve ser feita como exercício).

- <u>O produto vectorial é bilinear</u>:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} &= \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \\ \lambda\,\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \mathbf{x} \times \lambda\,\mathbf{y} = \lambda\,(\mathbf{x} \times \mathbf{y}), \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{0.1.2}$$

- <u>O produto vectorial é antissimétrico</u>:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x} \tag{0.1.3}$$

- <u>Além disso, se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, são ambos não nulos</u>, então:

  1. $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é perpendicular a $\mathbf{x}$ e a $\mathbf{y}$, i.e.:

  $$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = 0 = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \tag{0.1.4}$$

  Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente independentes, $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é perpendicular ao plano gerado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

  2. $$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin\theta \tag{0.1.5}$$

  onde θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Portanto, $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ é igual à área do paralelogramo cujos lados adjacentes são $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

  3. $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente dependentes.

4. O produto vectorial <u>não é</u> associativo. De facto:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x} \tag{0.1.6}$$

enquanto que:

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} \tag{0.1.7}$$

Em particular, se consideramos o paralelogramo de lados adjacentes $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}$, contido no plano $z = 0$, vemos que a respectiva área é dada por:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \times \mathbf{x}'\| &= \left| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ x' & y' & 0 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} x & y \\ x' & y' \end{bmatrix} \right| \\ &= xy' - x'y \\ &= \text{área do paralelogramo gerado por } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{x}' \end{aligned} \tag{0.1.8}$$

Uma equação (cartesiana) para o plano vectorial $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, gerado por dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, linearmente independentes, é:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{0.1.9}$$

0.2 Produto misto (ou triplo) em $\mathbb{R}^3$

Definamos agora, ainda em $\mathbb{R}^3$, o chamado produto misto (ou triplo).

Dados três vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ em $\mathbb{R}^3$, define-se o **produto misto (ou triplo)** $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$, de $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ (<u>por esta ordem</u>), através de:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \equiv \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \tag{0.2.1}$$

É fácil ver que $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ é dado por:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] &= \det [\mathbf{x} \;\; \mathbf{y} \;\; \mathbf{z}] \\ &= \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{0.2.2}$$

Eis algumas propriedades do produto triplo:

- São válidas as igualdades seguintes, que se deduzem das propriedades sobre determinantes:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] &= [\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}] = [\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}] \\ &= -[\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}] \end{aligned} \tag{0.2.3}$$

- O volume vol $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, do paralelipípedo de lados adjacentes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}_3$, é igual ao módulo do produto misto:
$$\text{vol}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = |[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]| \tag{0.2.4}$$
Com efeito, o volume de um paralelipípedo é igual ao produto da área da base pela sua altura. A base é o paralelogramo de lados adjacentes $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e por isso, a sua área é $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$. A altura é igual à norma da projecção de $\mathbf{z}$ sobre um vector perpendicular à base. Mas $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é perpendicular à base, e, portanto, a projecção de $\mathbf{z}$ sobre $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, é igual a:
$$\frac{\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|_2} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \tag{0.2.5}$$
donde se deduz fàcilmente o resultado.

Quando $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$ são linearmente independentes, de tal forma que:
$$\det\,[\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \ \mathbf{x}_3] \neq 0$$
dizemos que a **base ordenada** $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ é **positiva** se $\det\,[\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \ \mathbf{x}_3] > 0$, e **negativa** se $\det\,[\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \ \mathbf{x}_3] < 0$.

0.3 Interpretação geométrica do det A

Consideremos agora uma aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. A imagem do cubo $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$, gerado pelos vectores da base canónica (que é positiva) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:
$$\mathcal{Q} = \{a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 : 0 \le a, b, c \le 1\}$$
é o paralelipípedo $\mathbf{A}(\mathcal{Q})$, de lados adjacentes $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1), \mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3)$.

Pondo $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = a_1^1\mathbf{e}_1 + a_1^2\mathbf{e}_2 + a_1^3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2) = a_2^1\mathbf{e}_1 + a_2^2\mathbf{e}_2 + a_2^3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3) = a_3^1\mathbf{e}_1 + a_3^2\mathbf{e}_2 + a_3^3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{bmatrix}$ sabemos que o volume deste paralelipípedo é igual a:
$$\begin{aligned} \text{vol}\,\mathbf{A}(\mathcal{Q}) &= |[\mathbf{A}(\mathbf{e}_1), \mathbf{A}(\mathbf{e}_2), \mathbf{A}(\mathbf{e}_3)]| \\ &= |\det\,[\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) \ \ \mathbf{A}(\mathbf{e}_2) \ \ \mathbf{A}(\mathbf{e}_3)]| \\ &= \left|\det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix}\right| \\ &= |\det \mathbf{A}| \end{aligned} \tag{0.3.1}$$

Portanto:
$$\text{vol}\,\mathbf{A}(\mathcal{Q}) = |\det \mathbf{A}| \tag{0.3.2}$$

Mais geralmente, se $\mathcal{P}$ é um paralelipípedo gerado pelos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, então a imagem $\mathbf{A}(\mathcal{P})$ é o paralelipípedo gerado por $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{y})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{z})$, e é fácil provar que o volume dessa imagem é igual a:
$$\begin{aligned} \text{vol}\,\mathbf{A}(\mathcal{P}) &= |[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{y}), \mathbf{A}(\mathbf{z})]| \\ &= |\det\,[\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \ \mathbf{A}(\mathbf{y}) \ \ \mathbf{A}(\mathbf{z})]| \\ &= |\det \mathbf{A}| \ \ \text{vol}\,(\mathcal{P}) \end{aligned} \tag{0.3.3}$$

Em particular, se os vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são linearmente independentes, de tal forma que $\operatorname{vol}\mathcal{P} \neq 0$, então:

$$|\det \mathbf{A}| = \frac{\operatorname{vol}\mathbf{A}(\mathcal{P})}{\operatorname{vol}\mathcal{P}} \tag{0.3.4}$$

Diz-se que uma aplicação linear inversível $\mathbf{A} : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ **preserva a orientação** (ou é positiva) se $\det \mathbf{A} > 0$, e que **inverte a orientação** (ou é negativa) se $\det \mathbf{A} < 0$.