

FCUP  
Dep. Matemática Pura

**CURSO de GEOMETRIA DIFERENCIAL**

**RESUMO das Aulas Teóricas e Práticas**

3.º ano da licenciatura em Matemática

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dA = \chi_M = C_0(f) - C_1(f) + C_2(f) = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{p_i}(X)$$

---

**João Nuno Tavares**

Dept. Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Univ. Porto, 4050 Porto, Portugal<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>E-mail adress: jntavar@fc.up.pt

## Introdução

Estas notas devem ser encaradas como um mero “guião” para as aulas, e portanto não são um substituto da bibliografia indicada e muito menos das aulas. Pretendem porém ser um incentivo ou um guia para a consulta da bibliografia indicada.

Incluem com detalhe os principais conceitos e resultados do curso, e ainda os enunciados dos exercícios propostos para as aulas práticas. Espera-se que sejam um auxiliar valioso para o curso, que em particular permita uma maior liberdade na explicação teórica dos assuntos, substituindo uma exposição com grande detalhe formal por uma que realce os aspectos geométricos e intuitivos desses mesmos conceitos e respectivas inter-relações, e que por outro lado sejam um estímulo à atenção e participação activa dos alunos. Finalmente pretende-se com este texto garantir uma maior uniformidade nas notações usadas e nos enunciados de definições e teoremas (aliás um dos problemas desta disciplina é exactamente o peso excessivo das notações, pelo que se impõe uma escolha criteriosa e um uso uniforme de uma “boa” notação!).

O programa está estruturado assumindo alguns preliminares dos quais destaco:

- conhecimentos gerais de Álgebra Linear.
- um conhecimento detalhado de Cálculo Diferencial em  $\mathbb{R}^n$ , nomeadamente, a noção de diferencial, regra da cadeia, os teoremas da função inversa e da função implícita e o da mudança de variáveis em integrais múltiplos.
- o teorema da existência, unicidade e dependência diferenciável das condições iniciais, para soluções de equações diferenciais ordinárias.
- noções básicas de topologia.
- a tradicional “maturidade matemática” que se espera dos alunos do terceiro ano da licenciatura em Matemática.

É no entanto previsível que alguns dos tópicos acima referidos exijam exposições prévias, o que evidentemente será feito sempre que necessário.

BOA SORTE!

# ÍNDICE:

<b>1</b>	<b>Variedades em <math>\mathbf{R}^n</math></b>	<b>6</b>
1.1	Revisão e Complementos de Cálculo Diferencial . . . . .	6
1.1.1	Derivadas direccionais e derivadas parciais . . . . .	6
1.1.2	Diferencial. Gradiente . . . . .	8
1.1.3	Diferencial. Matriz Jacobiana . . . . .	11
1.1.4	Teorema da Inversão Local . . . . .	14
1.1.5	Imersões e Submersões. Exemplos . . . . .	14
1.2	Variedades em $\mathbf{R}^n$ . . . . .	19
1.2.1	Definição. Exemplos . . . . .	19
1.2.2	Exemplos e Exercícios. Alguns Grupos de Lie clássicos . . . . .	20
1.2.3	Parametrizações locais . . . . .	24
1.2.4	Exemplos e Exercícios . . . . .	25
1.3	Funções e aplicações diferenciáveis . . . . .	29
1.3.1	Mudança de coordenadas locais . . . . .	29
1.3.2	Funções diferenciáveis . . . . .	30
1.3.3	Exemplos e Exercícios . . . . .	31
1.4	O Espaço Tangente . . . . .	32
1.4.1	Definição . . . . .	32
1.4.2	Exemplos e Exercícios . . . . .	37
1.5	Diferenciais e aplicações tangentes . . . . .	46
1.5.1	Diferenciais . . . . .	46
1.5.2	Exemplos e Exercícios . . . . .	48
1.5.3	Mais exemplos. Envolventes, superfícies regradas e desenvolvíveis . . . . .	51
1.5.4	Apêndice: Geometria (local) Euclideana de curvas orientadas em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	57
1.6	Métricas Riemannianas. Comprimento de arco. Isometrias. . . . .	60
1.6.1	Métricas Riemannianas . . . . .	60
1.6.2	Exemplos . . . . .	61
1.6.3	Comprimento de Arco . . . . .	62

1.6.4	Isometrias . . . . .	63
1.6.5	Exemplos e Exercícios . . . . .	65
1.7	Campos de Vectores . . . . .	71
1.7.1	Definição. Parêntesis de Lie . . . . .	71
1.7.2	Pontos Críticos. Funções de Morse. Lema de Morse . . . . .	73
1.7.3	Exemplos e Exercícios . . . . .	75
1.8	Campos de Vectores e Fluxos . . . . .	78
1.9	Variedades orientáveis . . . . .	83
1.9.1	Orientação . . . . .	83
1.9.2	Exemplos e Exercícios . . . . .	86
<b>2</b>	<b>Formas diferenciais</b>	<b>90</b>
2.1	Formas exteriores . . . . .	90
2.1.1	Definição e exemplos . . . . .	90
2.1.2	A álgebra exterior $\mathcal{A}(V)$ . Produto exterior. . . . .	93
2.1.3	Pull-back de formas . . . . .	94
2.2	Formas Diferenciais . . . . .	95
2.2.1	Definição e exemplos . . . . .	95
2.2.2	Pull-back e derivada exterior de formas diferenciais . . . . .	99
2.2.3	Exercícios . . . . .	104
2.3	Cálculo de Cartan . . . . .	105
2.4	Integração das Formas. Fórmula de Stokes . . . . .	115
2.4.1	Preliminares geométricos . . . . .	115
2.4.2	Integração de $k$ -formas em $\mathbf{R}^k$ . . . . .	119
2.4.3	Integração de formas diferenciais em cadeias . . . . .	120
2.4.4	Integração em variedades . . . . .	123
2.4.5	Variedades com bordo . . . . .	125
2.4.6	Apêndice: integração de formas em variedades (uso das partições da unidade) . . . . .	134
2.5	Lema de Poincaré . . . . .	137
<b>3</b>	<b>Teoria do Grau</b>	<b>140</b>
3.1	Transversalidade . . . . .	140
3.2	Estabilidade . . . . .	142
3.3	Grau de uma aplicação . . . . .	145
3.4	Índice orientado de intersecção . . . . .	150
3.5	Grau como um integral . . . . .	151
3.6	O grau de um campo de vectores numa hipersuperfície fechada de $\mathbf{R}^{n+1}$ . . . . .	154

3.7	Curvatura de Gauss de uma hipersuperfície fechada em $\mathbb{R}^{n+1}$ . . . . .	155
3.8	Índice de um ponto singular de um campo de vectores . . . . .	157
3.9	O Índice total de um campo de vectores . . . . .	160
3.10	O coeficiente de enlace . . . . .	161
<b>4</b>	<b>Geometria Riemanniana das Superfícies. Método de Cartan</b>	<b>163</b>
4.1	Paralelismo. Derivação covariante . . . . .	163
4.2	Conexão de Levi-Civita . . . . .	168
4.2.1	Exemplos e exercícios . . . . .	170
4.3	Transporte paralelo. Holonomia . . . . .	171
4.4	Geodésicas . . . . .	174
4.4.1	Exemplos e exercícios . . . . .	175
4.5	Curvatura de Gauss. Teorema Egregium . . . . .	179
4.5.1	Exemplos e exercícios . . . . .	183
4.6	Curvatura geodésica. Fórmula de Gauss-Bonnet. . . . .	189
4.7	Teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	192
4.8	Teorema do Índice de Hopf . . . . .	196
4.9	Teorema de Morse . . . . .	199
4.10	Apêndice: interpretação cinemática da conexão de Levi-Civita . . . . .	201
4.10.1	O grupo $SE(3)$ . Referenciais móveis ortonormados . . . . .	201
4.10.2	Cinemática dos espaços móveis . . . . .	202
4.10.3	Rolamento de uma superfície móvel sobre uma superfície fixa . . . . .	203
4.10.4	Rolamento de uma esfera sobre um plano . . . . .	204
4.10.5	Rolamento de uma superfície sobre um plano . . . . .	206
4.11	Apêndice: Convenções de álgebra linear . . . . .	207

## Bibliografia

- [Car1] ... Carmo M. “*Differential Geometry of Curves and Surfaces*”. Prentice Hall (1978).
- [Car2] ... Carmo M. “*Differential Forms and Applications*”. Springer-Verlag (1994).
- [DNF] ... Doubrovine B., Novikov S., Fomenko A. “*Géométrie Contemporaine, Méthodes et Applications*”, vol.1. Éditions Mir, Moscou (1982).
- [Edw] ... Edwards C.H. Jr. “*Advanced Calculus of Several Variables*”. Academic Press (1973).
- [GP] ... Guillemin V., Pollack A. “*Differential Topology*”. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1974).

- 
- [GS] ... Gockeler M., Schücker T., “*Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity*”. Cambridge University Press (1987).
  - [LS] ... Lehmann D., Sacré C. “*Géométrie et Topologie des Surfaces*”. Presses Universitaires de France (1982).
  - [MR] ... J. E. Marsden, T. S. Ratiu, “*Introduction to Mechanics and Symmetry*”, TAM 17, Springer-Verlag, 1994.
  - [Nab] ... G. L. Naber, “*Topology, Geometry, and Gauge Fields*”, TAM 25 Springer-Verlag, 1997.
  - [Nak] ... Nakahara M. “*Geometry, Topology and Physics*”. Adam Hilger (1989).
  - [NS] ... C. Nash, S. Sen, “*Topology and Geometry for and Physicists*”, Academic Press, Inc. 1983.
  - [O’N] ... B. O’Neill, “*Semi-Riemannian Geometry, with applications to Relativity*”, Academic Press, Inc., 1983.
  - [PVA] ... P.Ventura Araújo “*Geometria Diferencial*”.
  - [Spv] ... Spivak M. “*Calculus on Manifolds*”. W.A. Benjamin, Inc.(1965).
  - [Spv1] ... Spivak M. “*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*”, vol.1. Publish or Perish, Inc. Berkeley (1979).
  - [Spv3] ... Spivak M. “*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*”, vol.3. Publish or Perish, Inc. Berkeley (1979).
  - [SiTh] ... Singer I.M., Thorpe J.A. “*Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*”. Scott, Foresman and Company (1967).
  - [vWest] ... von Westenholz C. “*Differential Forms in Mathematical Physics*”. North-Holland Publishing Company (1978).

# Capítulo 1

## Variedades em $\mathbb{R}^n$

### 1.1 Revisão e Complementos de Cálculo Diferencial

#### 1.1.1 Derivadas direccionais e derivadas parciais

Comecemos com um exemplo para motivar as definições que daremos em breve. Consideremos uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Como sabemos, o respectivo gráfico  $\mathbf{gr} f$  é o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ :

$$S \equiv \mathbf{gr} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

que representa uma “superfície” em  $\mathbb{R}^3$ , situada “sobre” o plano  $(x, y)$  (ver a figura 1.1).

Figure 1.1: A “superfície”  $S \equiv \mathbf{gr} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$

Consideremos um vector não nulo  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  no plano  $\mathbb{R}^2$ , das coordenadas  $(x, y)$ , e um ponto qualquer  $\mathbf{p}$  também nesse plano (e no domínio de  $f$ ).

A recta que passa em  $\mathbf{p}$  e é paralela a  $\mathbf{v}$ , consiste dos pontos de  $\mathbb{R}^2$ , da forma:

$$\{\mathbf{p} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$$

e a intersecção do plano vertical (paralelo ao eixo dos  $zz$ ), que contém esta recta, com  $S = \mathbf{gr} f$ , é uma curva análoga ao gráfico da função  $\phi$ , real de variável real, definida por (ver a figura 1.1):

$$\phi(t) \equiv f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.1.1}$$

Esta curva está contida na “superfície”  $S \equiv \mathbf{gr} f$ . Por isso uma medida da “suavidade” dessa “superfície”, no ponto  $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ , e na direcção do vector  $\mathbf{v}$ , é dada pela existência da derivada  $\phi'(0)$ . Se esta derivada existe, ela representa a variação instantânea da restrição da função  $f$ , à recta acima descrita. Isto motiva a seguinte definição:

♣ **Definição 1.1** ... Seja  $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  um campo escalar definido num subconjunto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{p}$  um ponto interior de  $\mathcal{U}$ , e  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  um vector de  $\mathbb{R}^n$ .

Define-se a **derivada direccional de  $f$ , em  $\mathbf{p}$ , na direcção de  $\mathbf{v}$** , notada por  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$ , através de:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t} \quad (1.1.2)$$

Portanto  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) = \phi'(0)$ , onde  $\phi$  é definida por (1.1.1).

De especial interesse é o caso em que  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ , onde  $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$ , é a base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso,  $D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{p})$  diz-se a  **$i$ -derivada parcial de  $f$  em  $\mathbf{p}$** , e nota-se por  $\partial_i f(\mathbf{p})$ , ou por  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p})$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{p}) = \partial_i f(\mathbf{p}) = D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{p})$$

Se  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x}) = \partial_i f(\mathbf{x}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^1, \dots, x^i + t, \dots, x^n) - f(x^1, x^2, \dots, x^n)}{t} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

o que significa que para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(\mathbf{x})$ , devemos derivar a função  $f$ , considerando-a apenas como função de uma única variável real  $x^i$ , mantendo as outras variáveis fixas.

A noção de derivada direccional é manifestamente insuficiente. De facto, pode acontecer que uma função admita num ponto, uma derivada direccional na direcção de um qualquer vector, sem que por isso seja necessariamente contínua nesse ponto.

♣ **Exemplo 1.1** ... Consideremos o campo escalar definido por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Seja  $\mathbf{v} = (a, b)$  um qualquer vector de  $\mathbb{R}^2$ . Temos então que, para  $t \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{0} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})}{t} &= \frac{f((0, 0) + t(a, b)) - f((0, 0))}{t} \\ &= \frac{f(ta, tb)}{t} = \frac{ab^2}{a^2 + t^2b^4} \end{aligned}$$

e portanto:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{0}) = D_{(a,b)}f((0, 0)) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = 0 \\ \frac{b^2}{a} & \text{se } a \neq 0 \end{cases}$$

Isto é,  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{0})$  existe para todo o  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Por outro lado,  $f$  toma o valor constante e igual a  $1/2$ , quando restrita à parábola  $x = y^2$  (excepto na origem), e por isso não é contínua em  $\mathbf{0}$ , já que  $f(\mathbf{0}) = 0$ ,  $\square$ .



Se não se impõe qualquer hipótese de continuidade sobre as derivadas direccionais pode acontecer que não haja qualquer ligação entre as derivadas direccionais num certo ponto, segundo os diversos vectores. Note que no exemplo anterior a aplicação  $\mathbf{v} \rightarrow D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$  não é contínua.

Notemos que se  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$  existe, também existe  $D_{\lambda\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , e:

$$D_{\lambda\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) = \lambda D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$$

No entanto, não é verdade que, para  $\mathbf{p}$  fixo, a aplicação:

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mapsto D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$$

seja linear, como mostra o exemplo anterior, com  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ .

O defeito da derivada direccional  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$ , reside no facto de apenas considerar o comportamento de  $f$ , ao longo das rectas que passam em  $\mathbf{p}$ , enquanto que uma boa noção de derivada, deve reflectir o comportamento global de  $f$ , em toda uma vizinhança de  $\mathbf{p}$ .

Por todos estes motivos, somos conduzidos à noção de diferencial, que a seguir trataremos.

### 1.1.2 Diferencial. Gradiente

Consideremos de novo, uma função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Como já vimos, o respectivo gráfico  $\mathbf{gr} f$  é o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ :

$$S \equiv \mathbf{gr} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

que representa uma “superfície” em  $\mathbb{R}^3$ , situada “sobre” o plano  $(x, y)$  (ver a figura 1.2).

Figure 1.2: A “superfície”  $S \equiv \mathbf{gr} f$ , e o plano tangente

Uma medida da suavidade desta “superfície”, sobre uma vizinhança de um ponto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ , é dada pela existência de um plano tangente, que passe no ponto  $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p})) \in S$ , e que seja uma aproximação óptima de  $S$ , numa vizinhança de  $\mathbf{p}$ .

Um tal plano, se existir, pode ser representado como o gráfico de uma forma afim  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $T(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$ . Se  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , está próximo de  $\mathbf{p}$ , então a diferença:

$$f(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x})$$

representa o “desvio” entre o valor exacto  $f(\mathbf{x})$ , avaliado em  $S = \mathbf{gr} f$ , e o “valor aproximado”  $T(\mathbf{x})$ , avaliado no plano  $\mathbf{gr} T$ .

Quando este desvio converge mais rapidamente para 0 do que  $h = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ , diz-se que  $f$  é diferenciável em  $\mathbf{p}$ . Mais formalmente:

♣ **Definição 1.2** ... Seja  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar, definido num subconjunto aberto  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Fixemos um qualquer ponto  $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ .

Diz-se que  $f$  é **diferenciável (ou derivável) em  $\mathbf{p}$** , se existe uma função afim  $T_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (que depende de  $f$  e de  $\mathbf{p}$ ), tal que:

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p}) \quad (1.1.4)$$

e que satisfaz a condição:

$$\lim_{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} = 0 \quad (1.1.5)$$

Neste caso, a função afim  $T_{\mathbf{p}}$  diz-se a **aproximação afim óptima** de  $f$  em  $\mathbf{p}$ , e o seu gráfico  $\text{gr } T_{\mathbf{p}}$ , diz-se o **hiperplano tangente** a  $S = \text{gr } f$ , no ponto  $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ .

A parte linear de  $T_{\mathbf{p}}$ , diz-se a **diferencial** de  $f$  em  $\mathbf{p}$ , e nota-se por  $df_{\mathbf{p}}$ . Portanto a diferencial  $df_{\mathbf{p}}$ , é uma forma linear:

$$df_{\mathbf{p}} : \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \mapsto df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) \in \mathbb{R}$$

$f$  diz-se **diferenciável** em  $\mathcal{U}$ , se o é em todo o ponto  $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ , e neste caso diz-se que  $S = \text{gr } f$  é uma **hipersuperfície** (ou uma **variedade diferenciável** de dimensão  $n$ ) em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , de equação  $z = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ .

É fácil ver que se existe uma função afim  $T_{\mathbf{p}}$ , que satisfaz (1.1.5), então ela é única, e portanto a diferencial  $df_{\mathbf{p}}$ , está univocamente determinada.

Como  $df_{\mathbf{p}}$  é a parte linear de  $T_{\mathbf{p}}$ ,  $T_{\mathbf{p}}$  é da forma:

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = df_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) + c$$

Pondo  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{h}$ , com  $h = \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ , e atendendo a que  $T_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$ , podemos escrever que:

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) + f(\mathbf{p}) \quad (1.1.6)$$

e o limite (1.1.5), pode então ser escrito na forma:

$$\lim_{h=\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad (1.1.7)$$

ou ainda na forma:

$$\boxed{f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) + o(\|\mathbf{h}\|)} \quad (1.1.8)$$

onde  $\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{o(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|} = 0$ . Esta última fórmula diz-se a **fórmula de Taylor de primeira ordem** para  $f$ , em  $\mathbf{p}$ .

Podemos portanto dar a seguinte definição alternativa de diferenciabilidade de um campo escalar:

♣ **Definição 1.3** ... Seja  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  um campo escalar, definido num subconjunto aberto  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Fixemos um qualquer ponto  $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ .

Diz-se que  $f$  é **diferenciável (ou derivável) em  $\mathbf{p}$** , se existe uma aplicação linear:

$$df_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

(que depende de  $f$  e de  $\mathbf{p}$ ), tal que:

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad (1.1.9)$$

Esta aplicação linear  $df_{\mathbf{p}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (que é única), diz-se a **diferencial** de  $f$  em  $\mathbf{p}$ .

$f$  diz-se **diferenciável** em  $\mathcal{U}$ , se o é em todo o ponto  $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$ , e neste caso diz-se que  $S = \mathbf{gr} f$  é uma **variedade diferenciável** de dimensão  $n$ , em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , de equação  $z = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ .

♣ **Exemplo 1.2** ... Se  $f = L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação linear, então  $L$  é diferenciável em todo o ponto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  e:

$$dL_{\mathbf{p}} = L \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \quad (1.1.10)$$

Com efeito, o numerador em (1.1.7) é neste caso igual a (pondo  $df_{\mathbf{p}} = dL_{\mathbf{p}} = L$ ):

$$|f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h})| = |L(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - L(\mathbf{p}) - L(\mathbf{h})| = 0$$

uma vez que estamos a supôr que  $L$  é linear (e portanto,  $L(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = L(\mathbf{p}) + L(\mathbf{h})$ ),  $\square$ .

♣ **Exemplo 1.3** ... Seja  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  uma forma quadrática, onde  $\mathbf{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação linear simétrica.

Então  $f$  é diferenciável em todo o ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , e a diferencial  $df_{\mathbf{x}}$ , é dada por:

$$df_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{S}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{x} \quad (1.1.11)$$

Com efeito, substituindo (1.1.11) no numerador de (1.1.7), obtemos (com  $\mathbf{p} = \mathbf{x}$ ):

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - df_{\mathbf{x}}(\mathbf{h})| &= |\mathbf{S}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - \mathbf{S}\mathbf{x} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{S}\mathbf{h} \cdot \mathbf{x}| \\ &= |\mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{S}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{S}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} - \\ &\quad \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{h}) - \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} - \mathbf{S}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{x}| \\ &= |\mathbf{S}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}| \end{aligned}$$

Resta agora provar que:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|\mathbf{S}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Diagonalizando  $f$  numa base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ , obtemos:

$$f(\mathbf{h}) = \lambda_1(h^1)^2 + \lambda_2(h^2)^2 + \cdots + \lambda_n(h^n)^2$$

onde  $h^1, \dots, h^n$  são as coordenadas de  $\mathbf{h}$  na base referida. Daqui se deduz que:

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{h})| = |\mathbf{S}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}| &= |\lambda_1(h^1)^2 + \lambda_2(h^2)^2 + \cdots + \lambda_n(h^n)^2| \\ &\leq (\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|)((h^1)^2 + \cdots + (h^n)^2) \\ &= M \|\mathbf{h}\|^2 \end{aligned}$$

onde  $M = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ . Portanto (se  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ):

$$\frac{|\mathbf{S}(\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \frac{M \|\mathbf{h}\|^2}{\|\mathbf{h}\|} = M \|\mathbf{h}\|$$

o que prova o que se pretendia,  $\square$ .

## 1.1.3 Diferencial. Matriz Jacobiana

A definição 1.3 pode ser generalizada para funções vectoriais de várias variáveis. Assim temos a seguinte:

♣ **Definição 1.4** ... Seja  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação definida num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Fixemos um qualquer ponto  $p \in U$ .

Diz-se que  $F$  é **diferenciável em  $p$** , se existe uma aplicação linear:

$$dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

(que depende de  $F$  e de  $p$ ), tal que:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|F(p+h) - F(p) - dF_p(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (1.1.12)$$

Esta aplicação linear  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (que é única), diz-se a **diferencial de  $F$  em  $p$** .

$F$  diz-se **diferenciável em  $U$** , se o é em todo o ponto  $p \in U$ .

A fórmula (1.1.12), pode ainda ser escrita na forma:

$$F(p+h) = F(p) + dF_p(h) + o(\|h\|) \quad \text{onde} \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0 \quad (1.1.13)$$

Esta última fórmula diz-se a **fórmula de Taylor de primeira ordem** para  $F$ , em  $p$ . Da mesma forma, podemos generalizar o conceito de derivada direccional:

♣ **Definição 1.5** ... Seja  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação definida num subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p$  um ponto interior de  $U$ , e  $\mathbf{v} \neq 0$  um vector de  $\mathbb{R}^n$ .

Define-se a **derivada direccional de  $F$  em  $p$ , na direcção de  $\mathbf{v}$** , notada por  $D_{\mathbf{v}}F(p)$ , através de:

$$D_{\mathbf{v}}F(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p+t\mathbf{v}) - F(p)}{t} \in \mathbb{R}^m \quad (1.1.14)$$

De especial interesse é o caso em que  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$ , onde  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$ , é a base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Neste caso,  $D_{\mathbf{e}_i}F(p)$  diz-se a  **$i$ -derivada parcial de  $F$  em  $p$** , e nota-se por  $\partial_i F(p)$ , ou por  $\frac{\partial F}{\partial x^i}(p)$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(p) = \partial_i F(p) = D_{\mathbf{e}_i}F(p) \in \mathbb{R}^m$$

É fácil ver que se  $F$  é diferenciável em  $p$ , com diferencial  $dF_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , então a derivada direccional  $D_{\mathbf{v}}F(p)$  existe, para todo o vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , e:

$$D_{\mathbf{v}}F(p) = dF_p(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$$

No entanto o recíproco é falso - podem existir todas as derivadas direccionais  $D_{\mathbf{v}}F(p)$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , mas  $F$  pode não ser diferenciável em  $p$ .

Suponhamos agora que  $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ , e que  $F = (F^1, \dots, F^m)$ . Obtemos então que:

$$\begin{aligned} dF_p(\mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^m dF_p^i(\mathbf{v}) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left( dF_p^i \left( \sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j \right) \right) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n v^j dF_p^i(\mathbf{e}_j) \right) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right) \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

Em particular, se  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$ , obtemos:

$$dF_p(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \mathbf{e}_i \quad (1.1.16)$$

o que significa que a matriz da aplicação linear  $dF_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , relativamente às bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ , é a matriz  $(m \times n)$ :

$$\mathbf{Jac} F(p) = \left[ \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1}(p) & \frac{\partial F^1}{\partial x^2}(p) & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n}(p) \\ \frac{\partial F^2}{\partial x^1}(p) & \frac{\partial F^2}{\partial x^2}(p) & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial x^n}(p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1}(p) & \frac{\partial F^m}{\partial x^2}(p) & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix} \quad (1.1.17)$$

Esta matriz diz-se a **matriz Jacobiana de  $F$  em  $p$** . Note que as colunas desta matriz são as componentes das derivadas parciais  $\frac{\partial F}{\partial x^j}(p)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), na base canônica de  $\mathbb{R}^m$ .

Uma aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (campo vectorial), definida no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , diz-se de classe  $C^k$  em  $U$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ), se todas as derivadas parciais até à ordem  $k$  (inclusivé), das funções componentes de  $F$ , existem e são contínuas em  $U$ .

Se  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , é de classe  $C^1$  em  $U$ , então  $F$  é diferenciável em todo o ponto de  $U$ . No entanto o recíproco é falso.

♣ **Proposição 1.1 “Regra da Cadeia”** ... *Seja  $G : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma aplicação definida num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $F : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  uma outra aplicação, definida num aberto  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ , tal que  $G(U) \subset V$ .*

*Se  $G$  é diferenciável em  $p \in U$ , e se  $F$  é diferenciável em  $G(p) \in V$ , então  $F \circ G : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  é diferenciável em  $p$ , e:*

$$d(F \circ G)_p = dF_{G(p)} \circ dG_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad (1.1.18)$$

*Neste caso, a matriz Jacobiana de  $F \circ G$ , em  $p$ , é igual ao produto das matrizes Jacobianas:*

$$\mathbf{Jac}(F \circ G)(p) = \mathbf{Jac} F(G(p)) \cdot \mathbf{Jac} G(p) \quad (1.1.19)$$

A regra da cadeia (1.1.18), pode ser aplicada para calcular a diferencial de uma aplicação diferenciável, da seguinte forma. Se  $F : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  é uma aplicação diferenciável, definida num aberto  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ , para calcular a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  de  $F$  num ponto  $p \in V$ , consideramos uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow V$ , definida num intervalo aberto  $I \subseteq \mathbb{R}$  que contem 0, e tal que  $\alpha(0) = p$  e ainda  $\alpha'(0) = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  (por exemplo  $\alpha(t) = p + t\mathbf{v}$ ,  $t \in I$ ). Pela regra da cadeia  $F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^k$  é diferenciável e:

$$dF_p(\mathbf{v}) = (F \circ \alpha)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F \circ \alpha)(t) \in \mathbb{R}^k \quad (1.1.20)$$

expressão que é bastante útil para o cálculo de  $dF_p$  e que será utilizada várias vezes no nosso curso.

♣ **Exemplo 1.4** ... Seja  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  uma forma quadrática. Para calcular  $df_{\mathbf{x}}$ , podemos utilizar (1.1.20) (supondo já sabido que  $f$  é de facto diferenciável). Assim, consideremos uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , derivável tal que  $\alpha(0) = \mathbf{x}$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . Então, por (1.1.20), temos que:

$$\begin{aligned} df_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) &= (f \circ \alpha)'(0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{S}\alpha(t) \cdot \alpha(t) \\ &= \mathbf{S}\alpha'(0) \cdot \alpha(0) + \mathbf{S}\alpha(0) \cdot \alpha'(0) \\ &= \mathbf{S}\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{S}\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \\ &= \mathbf{S}\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}\mathbf{x} \quad \text{já que } \mathbf{S} \text{ é simétrica} \\ &= 2\mathbf{S}\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Em particular, deduzimos que  $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{S}\mathbf{x}$ ,  $\square$ .

♣ **Exemplo 1.5** ... Seja  $f(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  um campo escalar definido em  $\mathbb{R}^3$  (onde  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  são vectores fixos em  $\mathbb{R}^3$ ).

Uma vez mais (supondo já sabido que  $f$  é de facto diferenciável), consideremos uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , derivável tal que  $\alpha(0) = \mathbf{x}$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . Então, por (1.1.20), temos que:

$$\begin{aligned} df_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) &= (f \circ \alpha)'(0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha(t) \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= [\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] \end{aligned}$$

Em particular, deduzimos que  $\nabla f(\mathbf{p}) \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,  $\square$ .

♣ **Exemplo 1.6** ... Seja  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2-n}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\emptyset\}$ , onde  $n \geq 3$ .

Então,  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^n - \{\emptyset\}$ , e se  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{\emptyset\}$  é uma curva, derivável tal que  $\alpha(0) = \mathbf{x}$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ , temos que:

$$\begin{aligned} df_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) &= (f \circ \alpha)'(0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|\alpha(t)\|^{2-n} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\alpha(t) \cdot \alpha(t)]^{\frac{2-n}{2}} \\ &= \frac{2-n}{2} [\alpha(0) \cdot \alpha(0)]^{\frac{-n}{2}} 2(\alpha(0) \cdot \alpha'(0)) \\ &= (2-n)\|\mathbf{x}\|^{-n}\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Em particular vemos que  $\nabla f(\mathbf{x}) = (2-n)\|\mathbf{x}\|^{-n}\mathbf{x}$ ,  $\square$ .

### 1.1.4 Teorema da Inversão Local

Começemos por recordar o que acontece para funções reais de variável real. Assim, suponhamos que  $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$ , no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}$ , e seja  $p \in U$  um ponto onde  $f'(p) \neq 0$ . Se por exemplo  $f'(p) > 0$ , então  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x$  em algum intervalo aberto  $I \subseteq U$ , que contem  $p$ . Portanto  $f$  é estritamente crescente em  $I$ , e existe uma inversa local  $g$ , definida em algum intervalo aberto  $J$ , que contem  $f(p)$ , isto é  $g : J \rightarrow I$  é uma função tal que:

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in I \quad e \quad f(g(y)) = y, \quad \forall y \in J$$

Além disso,  $g$  é de classe  $C^1$  em  $J$  e:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad \forall y \in J$$

Uma situação análoga ocorre para funções de várias variáveis, embora a demonstração seja bastante mais elaborada. Mais precisamente é válido o seguinte teorema:

♣ **Proposição 1.2** “**Teorema da Inversão Local**” ... *Suponhamos que  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ), no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , e seja  $p \in U$  um ponto onde:*

$$\det \mathbf{Jac} F(p) \neq 0 \tag{1.1.22}$$

*isto é, onde a diferencial  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação linear inversível (ou um isomorfismo linear).*

*Então  $F$  é localmente inversível em  $p$ , isto é, existe um aberto  $V \subseteq U$ , que contem  $p$ , um aberto  $W$  que contem  $F(p)$ , e uma aplicação  $G : W \rightarrow V$ , de classe  $C^k$ , tal que:*

$$G(F(x)) = x, \quad \forall x \in V \quad e \quad F(G(y)) = y, \quad \forall y \in W$$

*Além disso:*

$$dG_y = [dF(G(y))]^{-1} \quad \forall y \in W \tag{1.1.23}$$

*ou em termos das matrizes Jacobianas:*

$$\mathbf{Jac} G(y) = [\mathbf{Jac} F(G(y))]^{-1} \quad \forall y \in W \tag{1.1.24}$$

### 1.1.5 Imersões e Submersões. Exemplos

No nosso curso vamos essencialmente restringir a nossa atenção a aplicações de classe  $C^\infty$ , pelo que de aqui em diante:

**Diferenciabilidade refere-se sempre à classe  $C^\infty$**

Vamos para já introduzir algumas definições básicas.

♣ **Definição 1.6** ... *Seja  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável  $C^\infty$ , definida num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , e para cada  $p \in U$  seja  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  a respectiva diferencial em  $p$ . Então:*

- $F$  diz-se uma “**imersão em  $p$** ”, se  $dF_p$  é **injectiva**.  $F$  diz-se uma “**imersão**” se  $dF_p$  é injectiva  $\forall p \in U$ . Note que neste caso deveremos ter  $n \leq m$ .
- $F$  diz-se uma “**submersão em  $p$** ”, se  $dF_p$  é **sobrejectiva**.  $F$  diz-se uma “**submersão**” se  $dF_p$  é sobrejectiva  $\forall p \in U$ . Note que neste caso deveremos ter  $n \geq m$ .
- $F$  diz-se um “**mergulho**” se  $F$  é uma **imersão injectiva** que é também um **homeomorfismo sobre a imagem**  $F(U) \subset \mathbb{R}^m$ , quando nesta se considera a topologia induzida pela topologia de  $\mathbb{R}^m$ .
- Um ponto  $p \in N$  diz-se um “**ponto crítico**” de  $F$  se  $dF_p$  tem característica  $< m$ . Um “**valor crítico**” de  $F$  é imagem de um ponto crítico de  $F$ .
- Um ponto  $y \in \mathbb{R}^m$  diz-se um “**valor regular**” de  $F$  se  $y \notin F(U)$  ou se  $y \in F(U)$  e a diferencial  $dF_x$  é **sobrejectiva** em todos os pontos  $x \in F^{-1}(\{y\})$ .

♣ **Exemplo 1.7** ... Uma curva diferenciável  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definida num aberto  $I \subseteq \mathbb{R}$  será uma **imersão** quando o seu vector velocidade  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$ . Isto significa que a imagem admite em cada ponto  $\alpha(t)$  uma recta tangente  $\alpha : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) + \lambda\alpha'(t)$ .

♣ **Exemplo 1.8** ...  $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) \in \mathbb{R}^3$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . A imagem é uma hélice sobre um cilindro de eixo  $zz$  (ver a figura 1.3a).

♣ **Exemplo 1.9** ...  $\alpha(t) = (\frac{1}{t} \cos 2\pi t, \frac{1}{t} \sin 2\pi t, t) \in ]1, +\infty[$ . A imagem é uma espiral que converge para  $(0,0)$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , e para  $(1,0)$  quando  $t \rightarrow 1^-$  (ver a figura 1.3b).

♣ **Exemplo 1.10** ...  $\alpha(t) = (\frac{t+1}{2t} \cos 2\pi t, \frac{t+1}{2t} \sin 2\pi t, t) \in ]1, +\infty[$ . A imagem é uma espiral que se “acumula” sobre a circunferência de centro  $(0,0)$  e raio  $1/2$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ , e que converge para  $(1,0)$  quando  $t \rightarrow 1^-$  (ver a figura 1.3c).

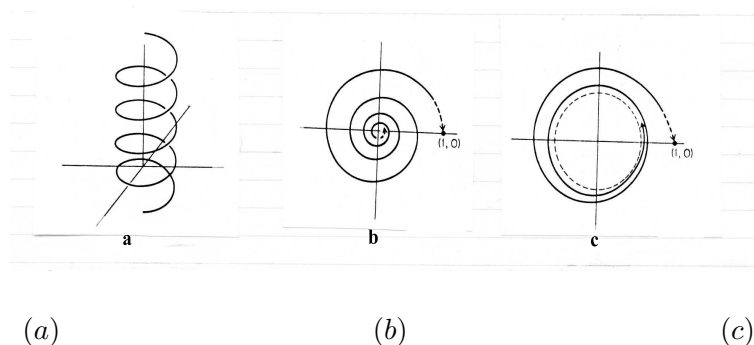


Figure 1.3: Exemplos 2, 3 e 4

♣ **Exemplo 1.11** ...  $\alpha(t) = (2 \cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2}))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . A imagem é a figura “oito”, percorrida no sentido indicado. O ponto móvel  $\alpha(t)$  percorre um circuito completo, começando na origem, quando  $t$  varia de  $0$  a  $2\pi$  (ver a figura 1.4a).



♣ **Exemplo 1.12** ...  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tem imagem igual à do exemplo anterior, mas com uma diferença essencial: passamos uma única vez em  $(0, 0)$ , quando  $t = 0$  e para  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $\beta(t)$  converge para  $(0, 0)$  da maneira indicada na figura 1.4b. A imersão correspondente é obtida reparametrizando a do exemplo anterior. Para isso consideramos uma função  $g(t)$  estritamente crescente com  $g(0) = \pi$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 2\pi$ . Por exemplo  $g(t) = \pi + \arctan t$ , e pômos  $\beta = \alpha \circ g$ :

$$\beta(t) = \left( 2 \cos\left(g(t) - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(g(t) - \frac{\pi}{2}\right) \right), t \in \mathbb{R}$$

♣ **Exemplo 1.13** ...

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{t}, \sin \pi t\right) & 1 \leq t < \infty \\ (0, t+2) & -\infty < t \leq -1 \end{cases}$$

A imagem de  $\alpha$  é uma curva com uma lacuna como na figura 1.4c. Para  $-1 \leq t \leq 1$  ligamos os dois bocados por uma curva a tracejado de forma a obter uma curva diferenciável como na figura 1.4c.

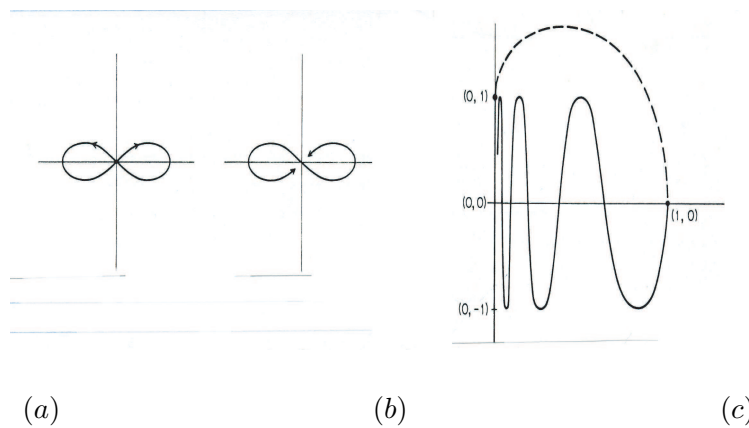


Figure 1.4: Exemplos 5,6 e 7

□

Os exemplos anteriores mostram que uma imersão não é necessariamente injectiva, embora seja localmente injectiva como veremos. Por outro lado, mesmo que uma imersão seja injectiva ela não é necessariamente um homeomorfismo sobre a imagem, quando nesta se considera a topologia induzida. Os exemplos 5 e 6 assim o demonstram. No exemplo 6 a imagem  $\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$  como subespaço de  $\mathbb{R}^2$  não é localmente conexo em todo o ponto: por exemplo o ponto  $(0, 1/2)$  não contém vizinhanças conexas por mais pequenas que sejam. Por isso  $\alpha$  não é um homeomorfismo de  $\mathbb{R}$  sobre a sua imagem  $\alpha(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ , isto é  $\alpha$  não é um mergulho.

Se  $U$  e  $V$ , são abertos em  $\mathbb{R}^n$ , uma aplicação  $\varphi : U \rightarrow V$  diz-se um **difeomorfismo** de classe  $C^\infty$ , se  $\varphi$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ , que admite uma inversa  $\varphi^{-1} : V \rightarrow U$ , também de classe  $C^\infty$ .

O nosso objectivo agora é analisar a forma local das imersões e submersões.

♣ **Teorema 1.1 “Forma local das imersões”** ... Seja  $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $n \leq m$ ), uma aplicação diferenciável  $C^\infty$ , definida num aberto  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ , e suponhamos que  $dF_p$  é injectiva em  $p$  (e portanto injectiva numa certa vizinhança de  $p$ , isto é,  $F$  é uma imersão numa certa vizinhança de  $p$ ).

Então existem difeomorfismos locais  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ , com  $p \in U \subseteq \mathcal{O}$ ,  $F(p) \in V$ , tais que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \subset \mathcal{O} & \xrightarrow{F} & V \subset \mathbb{R}^m \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\iota} & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \end{array}$$

onde  $\iota : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$  é a inclusão natural (ver a figura 1.5):

$$\iota : \underbrace{(x^1, \dots, x^n)}_x \mapsto \underbrace{(x^1, \dots, x^n)}_x \underbrace{(0, \dots, 0)}_0$$

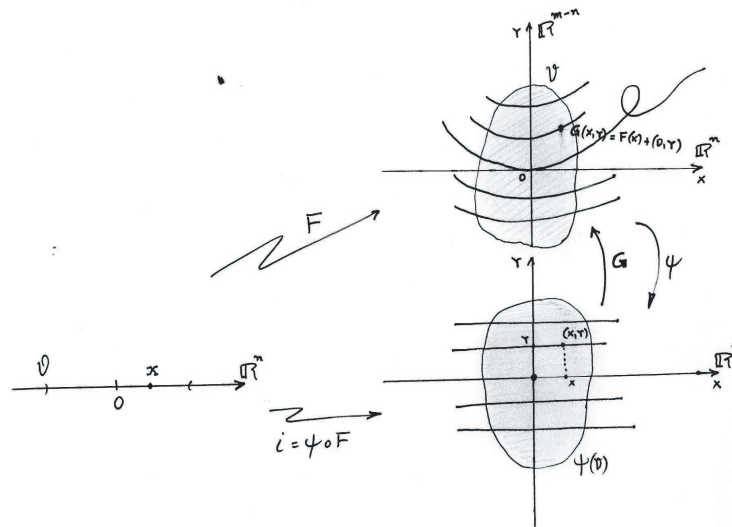


Figure 1.5: Forma local das imersões

- **Dem.:** Podemos sempre supôr (se necessário compondo com translacções apropriadas) que  $p = 0 \in \mathbb{R}^n$  e  $F(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ . Podemos ainda supôr (mudando coordenadas se necessário em  $\mathbb{R}^m$ ) que a imagem  $dF_0(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$  é o primeiro factor em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \cong \mathbb{R}^m$ . Portanto, durante a prova  $\mathbb{R}^m$  será considerado como  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$  e a inclusão  $\iota$  será  $\iota(x) = (x, 0)$ , com  $x \in \mathbb{R}^n$ . Consideremos agora a aplicação, definida numa certa vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ , através de:

$$G(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} F(x) + (0, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

Então  $G(x, 0) = F(x)$ . Por outro lado, usando (1.1.20) é fácil provar que  $dG_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a identidade, o que implica pelo teorema da inversão local, que  $G$  é um difeomorfismo local numa certa vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^m$ . Seja  $\psi = G^{-1}$ , o difeomorfismo inverso. Então, numa certa vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^m$  temos que:

$$\psi F(x) = \psi G(x, 0) = (x, 0)$$

■

O corolário seguinte, cuja demonstração decorre da demonstração do teorema anterior, mostra que uma imersão é sempre localmente um mergulho sobre a sua imagem:

♣ **Corolário 1.1** ... Seja  $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $n \leq m$ ), uma aplicação diferenciável  $C^\infty$ , definida num aberto  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ , e suponhamos que  $dF_p$  é injectiva em  $p$ .

Então existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $F : U \rightarrow F(U)$  é um homeomorfismo e o inverso  $F^{-1} : F(U) \rightarrow U$  é a restrição de uma aplicação  $C^\infty$ ,  $\Psi : W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U$ , onde  $W$  é uma vizinhança de  $F(p)$  em  $\mathbb{R}^m$ .

♣ **Teorema 1.2** “Forma local das submersões” ... Seja  $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $n \geq m$ ), uma aplicação diferenciável  $C^\infty$ , definida num aberto  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ , e suponhamos que  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é sobrejectiva em  $p$  (e portanto sobrejectiva numa certa vizinhança de  $p$ , isto é,  $F$  é uma submersão numa certa vizinhança de  $p$ ).

Então existem difeomorfismos locais  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ , com  $p \in U \subseteq \mathcal{O}$ ,  $F(p) \in V$ , tais que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \subset \mathcal{O} & \xrightarrow{F} & V \subset \mathbb{R}^m \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi} & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \end{array}$$

onde  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a projecção nas últimas  $m$  coordenadas (ver a figura 1.6):

$$\pi : \underbrace{(x^1, \dots, x^{n-m})}_x, \underbrace{(x^{n-m+1}, \dots, x^n)}_y \mapsto \underbrace{(x^{n-m+1}, \dots, x^n)}_y$$

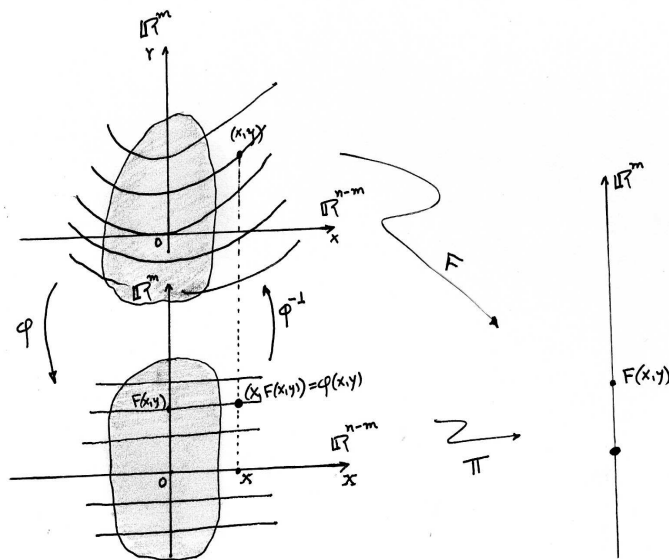


Figure 1.6: Forma local das submersões

- **Dem.:** Tal como no teorema anterior, podemos sempre supôr (se necessário compondo com translações apropriadas) que  $p = 0 \in \mathbb{R}^n$  e  $F(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ . Podemos ainda supôr (mudando coordenadas se necessário em  $\mathbb{R}^n$ ) que o núcleo  $\ker dF_0 \subset \mathbb{R}^n$  é o primeiro factor em  $\mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ . Portanto, durante a prova  $\mathbb{R}^n$  será considerado como  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$  e a projecção  $\pi$  será a projecção no segundo factor  $\pi(x, y) = y$ .

Consideremos agora a “**aplicação de rectificação**” (ver a figura 1.6), definida numa certa vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$  e com valores em  $\mathbb{R}^n$ , através de:

$$\varphi(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, F(x, y)) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$$

Então  $\varphi(0, 0) = 0$  e  $d\varphi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejectiva e portanto é um isomorfismo. Pelo teorema da inversão local,  $\varphi$  é um difeomorfismo local numa certa vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$ . Seja  $\varphi^{-1}$ , o difeomorfismo inverso. Como  $\varphi$  fixa a primeira coordenada  $x$ , a sua inversa tem a mesma propriedade:  $\varphi^{-1}(x, y) = (x, K(x, y))$ , e portanto, numa certa vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$  temos que:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (\varphi \circ \varphi^{-1})(x, y) = \varphi(x, K(x, y)) \\ &= (x, F(x, K(x, y))) \\ &= (x, (F \circ \varphi^{-1})(x, y)) \implies (F \circ \varphi^{-1})(x, y) = y \end{aligned}$$

■

♣ **Corolário 1.2** ... *Toda a submersão é uma aplicação aberta.*

Geomètricamente, o que o teorema anterior afirma é que, perto de um ponto  $p$  onde a diferencial  $dF_p$  é uma aplicação linear sobrejectiva, e a menos de uma “mudança de coordenadas” (o que por definição, é um difeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ), a função  $F$  pode ser “rectificada”, isto é, os conjuntos de nível de  $F$  são, perto de  $p$ , planos de dimensão  $k = n - m$  (ver a figura 1.6). De facto, note que a aplicação de rectificação  $\varphi$  transforma cada conjunto de nível  $F^{-1}(c)$ ,  $c \in \mathbb{R}^m$  no conjunto “horizontal”  $\{(x, c) : x \in \mathbb{R}^{n-m}\}$  (que é um conjunto de nível da aplicação  $\pi = F \circ \varphi^{-1}$ ).

## 1.2 Variedades em $\mathbb{R}^n$

### 1.2.1 Definição. Exemplos

♣ **Definição 1.7** ... *Um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  diz-se uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$  ( $k$  inteiro:  $0 \leq k \leq n$ ), se para cada ponto  $p \in M$ , existe um aberto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ , que contém  $p$ , um aberto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ , e um difeomorfismo (de classe  $C^\infty$ ),  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{V}$  tal que (ver a figura 1.7):*

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{O} \cap M) &= \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \\ &= \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{V} : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\} \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Intuitivamente, uma variedade de dimensão  $k$ , em  $\mathbb{R}^n$ , é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , que é localmente como um aberto de  $\mathbb{R}^k$ , deformado de “maneira regular”.

Como casos particulares extremos da definição anterior, temos: (i)... um conjunto discreto de pontos em  $\mathbb{R}^n$ , que é uma variedade em  $\mathbb{R}^n$ , de dimensão 0, e (ii)... um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , que é uma variedade em  $\mathbb{R}^n$ , de dimensão  $n$ .

Exemplos mais interessantes podem ser obtidas aplicando a importante proposição seguinte:

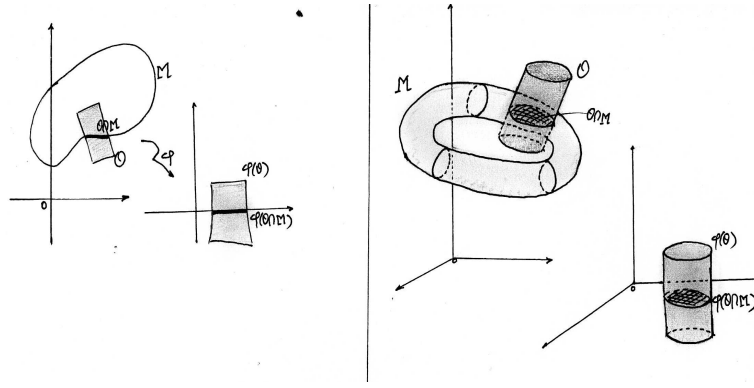


Figure 1.7: Variedades em  $\mathbb{R}^n$

♣ **Teorema 1.3** ... Seja  $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação  $C^\infty$ , e  $c \in \mathbb{R}^m$  um valor regular de  $F$  (isto é, a diferencial  $dF_p$  é sobrejectiva em todos os pontos  $p \in F^{-1}(\{c\})$ ).

Então  $M = F^{-1}(\{c\})$  é uma variedade de codimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^n$  (e portanto de dimensão  $k = n - m$  em  $\mathbb{R}^n$ ).

- **Dem.:** Seja  $p \in M = F^{-1}(\{c\})$ . Então  $dF_p$  é sobrejectiva, e pela forma local das submersões, existem difeomorfismos locais  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$  em  $M$ , com  $p \in U \subseteq \mathcal{O}$ ,  $F(p) = c \in V$ , tais que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \subset \mathcal{O} & \xrightarrow{F} & V \subset \mathbb{R}^m \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\pi} & \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m \end{array}$$

onde  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é a projecção nas últimas  $m$  coordenadas:

$$\pi : \underbrace{(x^1, \dots, x^{n-m})}_x, \underbrace{(x^{n-m+1}, \dots, x^n)}_y \mapsto \underbrace{(x^{n-m+1}, \dots, x^n)}_y$$

Podemos ainda supôr que  $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$  e que  $\psi(c) = 0 \in \mathbb{R}^m$ . Portanto:

$$\pi \circ \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : (x, y) \mapsto y \in \mathbb{R}^m \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$$

Concluimos então que  $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-m} \times \{0\})$ , o que mostra que  $M$  é variedade de dimensão  $k = n - m$  em  $\mathbb{R}^n$ . ■

Notemos que se  $F = (F^1, \dots, F^m)$ , então  $c$  é valor regular de  $F$  se e só se, em cada ponto  $p \in M \equiv F^{-1}(c)$ , os vectores gradiente  $\nabla F^1(p), \dots, \nabla F^m(p)$  são linearmente independentes. Quando  $m = 1$  esta condição significa que  $\nabla F(p) \neq 0, \forall p : F(p) = c$ .

### 1.2.2 Exemplos e Exercícios. Alguns Grupos de Lie clássicos

♣ **Exercício 1.1** “Esferas  $S^n$ ” ... Mostrar que a esfera:

$$S^n \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é uma variedade de codimensão 1 em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

- **Resolução** ... De facto, se  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ , então  $\mathbf{S}^n = f^{-1}(\{1\})$ , e 1 é valor regular de  $f$ . Com efeito,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ , temos que  $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})$  que é uma aplicação linear sobrejectiva sempre que  $\mathbf{x} \neq 0$ . Note que  $\nabla f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

♣ **Exercício 1.2 “O grupo ortogonal  $O(n)$ ”** ... Uma matriz quadrada ( $n \times n$ ) de entradas reais  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , diz-se “**ortogonal**” se  $AA^t = \mathbf{1}_n$  (ou de forma equivalente, se  $A^t = A^{-1}$ ). O conjunto constituído por essas matrizes:

$$O(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^t A = \mathbf{1}\}$$

tem estrutura de grupo a que chamamos o “**grupo ortogonal**” real em dimensão  $n$ .

Mostrar que  $O(n)$  é uma variedade de dimensão  $\frac{1}{2}n(n-1)$  em  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

- **Resolução** ... Como  $A^t A$  é uma matriz simétrica, e como o conjunto  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  das matrizes simétricas reais ( $n \times n$ ) pode ser identificado com  $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ , é natural considerar a aplicação:

$$F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

definida por:

$$F(A) = A^t A$$

A respectiva diferencial num ponto  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  é dada por:

$$dF_A(\xi) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} F(A + s\xi) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (A + s\xi)^t (A + s\xi) = A^t \xi + \xi^t A$$

onde  $\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ , e é sobrejectiva  $\forall A \in F^{-1}(\mathbf{1}_n)$  (i.e.,  $\mathbf{1}_n$  é valor regular de  $F$ ). Com efeito, se  $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  então pondo  $\xi = \frac{1}{2}AC$ , vem que:

$$dF_A(\xi) = dF_A\left(\frac{1}{2}AC\right) = A^t \frac{1}{2}AC + \left(\frac{1}{2}AC\right)^t A = C$$

já que  $A^t A = \mathbf{1}_n$ .

Note que se  $A \in O(n)$  então  $AA^t = \mathbf{1}$  e portanto  $\det(AA^t) = 1$ , isto é  $(\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$ . A componente conexa de  $O(n)$  que contem a matriz identidade  $\mathbf{1}$ , é um subgrupo de  $O(n)$ , e é também uma variedade de dimensão  $\frac{1}{2}n(n-1)$  em  $\mathbb{R}^{n^2}$ , que se diz o “**grupo ortogonal especial**” em dimensão  $n$ . Nota-se por  $SO(n)$ :

$$SO(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : AA^t = \mathbf{1} \text{ e } \det A = 1\}$$

♣ **Exercício 1.3 “O grupo especial complexo  $SL(2, \mathbb{C})$ ”** ... Por definição este grupo é constituído pelas matrizes  $(2 \times 2)$  de entradas complexas cujo determinante é igual a 1:

$$SL(2, \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} : \det A = \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\} \quad (1.2.2)$$

Mostrar que  $SL(2, \mathbb{C})$  é uma variedade de dimensão  $8 - 2 = 6$  em  $\mathbb{R}^8$ .

- **Resolução** ... Seja  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  o espaço vectorial constituído por todas as matrizes  $(2 \times 2)$  de entradas complexas, que identificamos com  $\mathbb{R}^8$ , e consideremos a aplicação:

$$\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad A \mapsto \det A$$

Temos então que:

$$SL(2, \mathbb{C}) = \det^{-1}(\{1\})$$

Calculemos a diferencial  $d(\det)_A$ . Se  $\xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8$  e  $A \in SL(2, \mathbb{C})$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 d(\det)_A(\xi) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(A + t\xi) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det[(\mathbf{1} + t\xi A^{-1})A] \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\det(\mathbf{1} + t\xi A^{-1}) \cdot \det A] \\
 &= (\det A) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\mathbf{1} + t \operatorname{tr}(\xi A^{-1}) + o(t^2)) \\
 &= (\det A) \operatorname{tr}(\xi A^{-1}) \\
 &= \operatorname{tr}(\xi A^{-1}) \quad \text{porque } \det A = 1
 \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

onde em (1.2.3), utilizamos o facto de que  $\det(\mathbf{1} + tC) = \mathbf{1} + t \operatorname{tr}(C) + \dots + t^n \det(C)$ .

Portanto  $d(\det)_A$  é uma aplicação linear sobrejectiva  $\forall A \in SL(2, \mathbb{C})$ , o que mostra que  $SL(2, \mathbb{C})$  é uma variedade de dimensão  $8 - 2 = 6$  em  $\mathbb{R}^8$ .

♣ **Exercício 1.4** “O grupo especial unitário  $SU(2)$ ” ... Por definição este grupo é constituído pelas matrizes  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  tais que  $AA^\dagger = \mathbf{1}$  e  $\det A = 1$ , onde  $A^\dagger = \overline{A}^t$  é a conjugada transposta da matriz  $A$ .

Mostar que  $SU(2)$  é a esfera  $\mathbf{S}^3$  em  $\mathbb{R}^4$  e portanto é uma variedade de dimensão 3 em  $\mathbb{R}^4$ .

• **Resolução** ... Um cálculo fastidioso mostra que  $SU(2)$  é dado por:

$$SU(2) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ A = \begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } \det A = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \tag{1.2.4}$$

Pondo  $\alpha = x + iy$  e  $\beta = z + iw$  e se identificarmos cada matriz  $A$  do tipo  $\begin{bmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + iy & -z + iw \\ z + iw & x - iy \end{bmatrix}$  com o vector de  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ , vemos que  $A \in SU(2)$  se e só se o correspondente vector de  $\mathbb{R}^4$  satisfaz a condição  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ . Portanto  $SU(2)$  é exactamente a esfera  $\mathbf{S}^3$  em  $\mathbb{R}^4$  e portanto é uma variedade de dimensão 3 em  $\mathbb{R}^4$ .

♣ **Exercício 1.5** ... Seja  $A$  uma matriz real simétrica ( $n \times n$ ) e  $0 \neq c \in \mathbb{R}$ . Mostre que a quádrica  $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^t A \mathbf{x} \equiv c\}$  é uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^n$  (uma subvariedade de codimensão 1).

♣ **Exercício 1.6** ... Seja  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação de classe  $C^\infty$ . Mostrar que o gráfico de  $F$ :

$$\text{gr } F \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{y} = F(\mathbf{x})\}$$

é uma variedade de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

♣ **Exercício 1.7** ... Mostre que o “ $n$ -Toro”:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}^n &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{x} = (x^1, y^1, x^2, y^2, \dots, x^n, y^n) \in \mathbb{R}^{2n} : \\
 &\quad (x^1)^2 + (y^1)^2 = 1, (x^2)^2 + (y^2)^2 = 1, \dots, (x^n)^2 + (y^n)^2 = 1 \}
 \end{aligned}$$

é uma subvariedade de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^{2n}$ .

♣ **Exercício 1.8** ... Mostre que o “grupo unitário”:

$$U(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : AA^\dagger = \mathbf{1}\}$$

é uma subvariedade de dimensão  $n^2$  em  $\mathbb{R}^{2n^2}$ .

♣ **Exercício 1.9** \*... Mostre que o conjunto  $M \stackrel{\text{def}}{=} M_{k,d}^{(r)}(\mathbb{R})$  das matrizes  $(k \times d)$  (com  $1 \leq k \leq d$ ) que têm característica constante e igual a  $r$  (onde  $1 \leq r \leq k$ ) é uma subvariedade de codimensão  $(k-r)(d-r)$  em  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{kd}$ , e portanto de dimensão  $\dim M = r(d+k-r)$ .

• **Resolução** ... Com efeito, seja  $\mathbf{m} \in M$ .  $\mathbf{m}$  representa uma aplicação linear  $\mathbf{m} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ , e escolhendo bases apropriadas para  $\mathbb{R}^d$  e  $\mathbb{R}^k$ , podemos supôr que  $\mathbf{m}$  tem a forma:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

onde  $\mathbf{a} \in Gl(r, \mathbb{R})$  é uma matriz  $r \times r$  inversível. O conjunto:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix} : \mathbf{x} \text{ matriz } r \times r \text{ inversível} \right\}$$

é um aberto em  $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{kd}$  que contem  $\mathbf{m}$ . Por outro lado:

A matriz  $\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \in U$  tem característica  $r$ , se e só se  $\mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{0}$

Com efeito, a matriz  $k \times k$ ,  $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ -\mathbf{z}\mathbf{x}^{-1} & \mathbf{1}_{k-r} \end{bmatrix}$  é inversível e:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ -\mathbf{z}\mathbf{x}^{-1} & \mathbf{1}_{k-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\text{característica} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \text{característica} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix} = r$$

se e só se  $\mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , como se pretendia.

Consideremos agora a aplicação  $f : U \rightarrow \mathcal{M}_{(k-r)(d-r)}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(k-r)(d-r)}$ , definida por:

$$f\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix}\right) = \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$$

Se  $\mathbf{0}$  fôr valor regular de  $f$ , fica provado que  $U \cap M$  é uma subvariedade de codimensão  $(k-r)(d-r)$  em  $\mathbb{R}^{kd}$ , isto é,  $M$  é localmente uma subvariedade de codimensão  $(k-r)(d-r)$  em  $\mathbb{R}^{kd}$  (e portanto globalmente). Resta apenas notar que para  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$  fixos, a aplicação  $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$  é um difeomorfismo de  $\mathcal{M}_{(k-r)(d-r)}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(k-r)(d-r)}$  e portanto  $f$  é uma submersão.

♣ **Exercício 1.10** ... Mostre que o “grupo simplético”:

$$Sp(2n, \mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) : A^t \mathfrak{J} A = \mathfrak{J}\}$$

onde  $\mathfrak{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , é uma subvariedade em  $\mathbb{R}^{4n^2}$ , e calcule a sua dimensão.



♣ **Exercício 1.11** ... Mostre que o “grupo especial unitário”:

$$SU(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : AA^\dagger = \mathbf{1} \text{ e } \det A = 1\}$$

é uma subvariedade em  $\mathbb{R}^{2n^2}$ , e calcule a sua dimensão.

♣ **Exercício 1.12** \* ... Considere a “variedade de Stiefel”  $St_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , constituída por todos os  $k$ -referenciais ortonormados em  $\mathbb{R}^n$  (relativamente à estrutura Euclídeana usual em  $\mathbb{R}^n$ ).

Mostre que  $St_k(\mathbb{R}^n)$  é uma variedade compacta de dimensão  $nk - \frac{k(k+1)}{2}$ , em  $\mathbb{R}^{nk}$ .

### 1.2.3 Parametrizações locais

Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Cada ponto  $p \in M$  necessita de  $k$  números para que a sua posição seja unívocamente determinada em  $M$ . Analisemos esta ideia com mais rigor, dando a seguinte caracterização alternativa de variedades em  $\mathbb{R}^n$ :

♣ **Teorema 1.4** ... Um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , se e só se para cada ponto  $p \in M$ , existe um aberto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ , que contem  $p$ , um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ , e uma aplicação  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que (ver a figura 1.8):

- $\Phi$  é injectiva.
- $\Phi(U) = M \cap \mathcal{O}$ , (isto é,  $\Phi(U)$  é aberto em  $M$ , quando em  $M$  se considera a topologia induzida pela topologia usual de  $\mathbb{R}^n$ ).
- $d\Phi_u$  tem característica  $k$ ,  $\forall u \in U \subset \mathbb{R}^k$ .

Uma tal aplicação  $\Phi$  diz-se uma “parametrização local” (regular), ou uma “carta local” da variedade  $M$  em torno de  $p$ .

As coordenadas  $(u^1, \dots, u^k)$  de cada ponto  $u = \Phi^{-1}(q) \in U \subset \mathbb{R}^k$ , onde  $q \in M \cap \mathcal{O}$ , dizem-se as “coordenadas locais” (intrínsecas) de  $q$ , associadas à parametrização local  $\Phi$ .

• **Dem.:**

Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , de acordo com a definição 1.2.1.

Então, para cada ponto  $p \in M$  existe um aberto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ , que contem  $p$ , um aberto  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ , e um difeomorfismo  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{V}$  tal que:

$$\varphi(\mathcal{O} \cap M) = \mathcal{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}\})$$

Façamos então  $U = \{u \in \mathbb{R}^k : (u, \mathbf{0}) \in \mathcal{V}\}$ , e definamos  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , através de:

$$\Phi(u) = \varphi^{-1}(u, \mathbf{0})$$

Resta provar que  $d\Phi_u$  tem característica  $k$ ,  $\forall u \in U \subset \mathbb{R}^k$  (i.e., é injectiva). Para isso, seja  $\Psi = \pi \circ \varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , onde  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  é a projecção nas primeiras  $k$  coordenadas. Temos então que  $\Psi(\Phi(u)) = u$ ,  $\forall u \in U$ , e portanto  $d\Psi_{\Phi(u)} \circ d\Phi_u = \text{Id}$ , donde se deduz que  $d\Phi_u$  tem que ter característica  $k$ .

O recíproco é consequência directa do teorema 1.1 sobre a forma local das imersões.

■

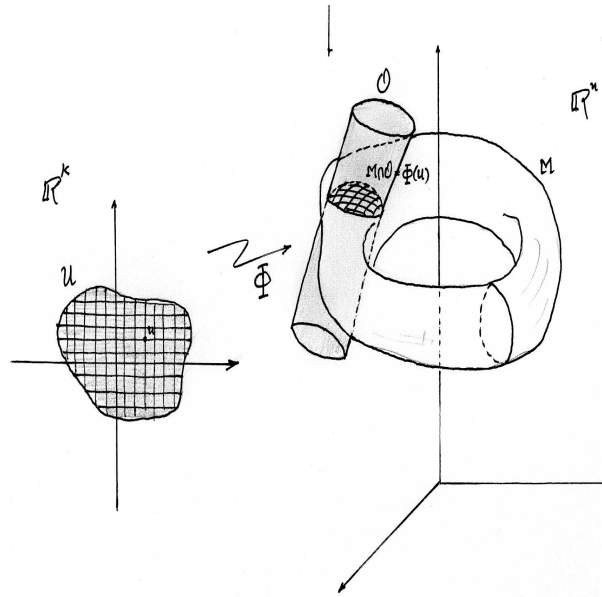


Figure 1.8: Parametrizações locais

### 1.2.4 Exemplos e Exercícios

♣ **Exemplo 1.14** ... Como já referimos, um aberto de  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade de  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $n$ . Em particular, é usual utilizar as seguintes coordenadas locais:

- **“Coordenadas polares em  $\mathbb{R}^2$ ”** ... Neste caso podemos por exemplo tomar  $U \subset \mathbb{R}^2_{(r,\theta)}$ ,  $V \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ , definidos por:

$$U = \{(r, \theta) : r > 0 \text{ e } 0 < \theta < 2\pi\}$$

$$V = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

e a parametrização  $\Phi : U \rightarrow V$ , definida por:

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (1.2.5)$$

$(r, \theta)$  dizem-se as coordenadas polares de  $(x, y) = \Phi(r, \theta)$ .

- **“Coordenadas esféricas em  $\mathbb{R}^3$ ”** ... Neste caso podemos por exemplo tomar  $U \subset \mathbb{R}^3_{(r,\theta,\varphi)}$ ,  $V \subset \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ , definidos por:

$$U = \{(r, \theta, \varphi) : r > 0, \ 0 < \theta < \pi \text{ e } 0 < \varphi < 2\pi\}$$

$$V = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$$

e a parametrização  $\Phi : U \rightarrow V$ , definida por:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad (1.2.6)$$

$(r, \theta, \varphi)$  dizem-se as coordenadas esféricas de  $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi)$

- **“Coordenadas cilíndricas em  $\mathbb{R}^3$ ”** ... Neste caso podemos por exemplo tomar  $U \subset \mathbb{R}^3_{(r,\theta,z)}$ ,  $V \subset \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ , definidos por:

$$U = \{(r, \theta, z) : r > 0, \ 0 < \theta < 2\pi\}$$

$$V = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$$

e a parametrização  $\Phi : U \rightarrow V$ , definida por:

$$\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \quad (1.2.7)$$

$(r, \theta, z)$  dizem-se as coordenadas cilíndricas de  $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z)$

♣ **Exercício 1.13** ... Mostre que:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (1.2.8)$$

definida no aberto:

$$U = \{(\theta, \varphi) : 0 < \theta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi\} \subset \mathbb{R}_{(\theta, \varphi)}^2$$

é uma parametrização local da esfera:

$$\mathbf{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 = 1\}$$

As coordenadas  $(\theta, \varphi)$  dizem-se “coordenadas geográficas”:  $\theta$  diz-se a “colatitude” e  $\varphi$  a “longitude” do ponto  $\Phi(\theta, \varphi) \in \mathbf{S}^2$  (ver a figura 1.9).

Figure 1.9: Coordenadas geográficas

• **Resolução** ...  $\Phi$  é uma bijecção de  $U$  sobre o aberto:

$$\Phi(U) = \mathbf{S}^2 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \quad x \geq 0\} \subset \mathbf{S}^2$$

A matriz Jacobiana de  $\Phi$  em  $(\theta, \varphi) \in U$ , é igual a:

$$\mathbf{Jac} \Phi(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\ -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.9)$$

e tem característica 2, em todo o ponto  $(\theta, \varphi) \in U$ . Com efeito, a característica de  $\mathbf{Jac} \Phi(\theta, \varphi)$  é 2, sse pelo menos um dos seus menores de ordem 2 fôr  $\neq 0$ . Os menores de ordem 2, são:

$$\cos \theta \sin \theta, \quad \sin^2 \theta \cos \varphi \quad e \quad \sin^2 \theta \sin \varphi$$

Se eles se anulassem simultâneamente, então viria que:

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + \sin^4 \theta \sin^2 \varphi = \sin^2 \theta = 0$$

o que é impossível em  $U$ , onde  $0 < \theta < \pi$ . É fácil verificar que as restantes condições para que  $\Phi$  seja uma parametrização local de  $\mathbf{S}^2$  são satisfeiras.

♣ **Exercício 1.14** ... Consideremos um círculo no plano  $yz$ , com centro em  $(0, a, 0)$  ( $a > 0$ ), e raio  $r$  com  $0 < r < a$ . Este círculo é dado pelas equações:

$$(y - a)^2 + z^2 = r^2 \quad e \quad x = 0$$

(i). Mostre que os pontos da superfície  $\mathfrak{T}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ , obtida rodando este círculo em torno do eixo dos  $zz$ , satisfazem a equação:

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$$

(ii). Mostre que se consideramos a função, definida em  $\mathbb{R}^3$ , através de:

$$f(x, y, z) = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 - z^2$$

então 0 é valor regular de  $f$ , e que portanto  $\mathfrak{T}^2 \equiv f^{-1}(0)$ , é uma variedade de dimensão 2 em  $\mathbb{R}^3$ , chamada um “**Toro**” bidimensional.

(iii). Mostre que uma parametrização local para  $\mathfrak{T}^2$ , é por exemplo dada por (ver a figura 1.10):

$$\Phi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u) \quad (1.2.10)$$

definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}_{(u,v)}^2$ :

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi \quad 0 < v < 2\pi\}$$

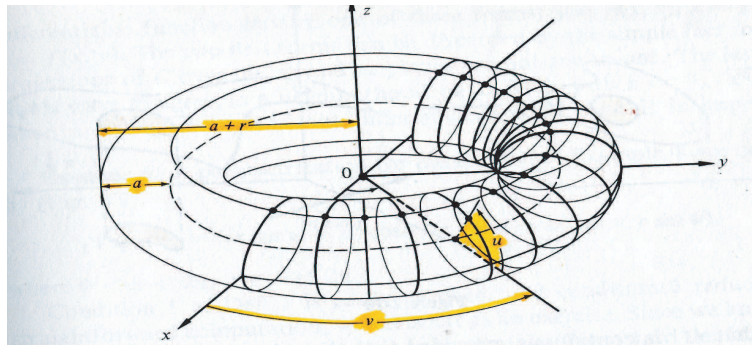


Figure 1.10: Parametrização local para um toro bidimensional

♣ **Exercício 1.15** ... Seja  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma função de classe  $C^\infty$ , definida num aberto  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , e considere o gráfico de  $F$ :

$$M = \mathbf{gr} F = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \mathbf{y} = F(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in U\}$$

Mostre que  $M$  pode ser parametrizada (globalmente) por:

$$\Phi : \mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x}, F(\mathbf{x})) \quad \mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$$

♣ **Exercício 1.16** ... Uma “superfície de revolução”  $M$ , é obtida rodando uma curva plana regular  $C$ , em torno de uma linha nesse plano, que não intersecte a curva  $C$ . Tomemos o referido plano, como sendo o plano  $xz$ , e o eixo da rotação como sendo o eixo dos  $zz$ .

Suponha que:

$$x = f(v) \quad z = g(v) \quad \text{com } a < v < b \text{ e } f(v) > 0$$

é uma parametrização regular para a curva  $C$ , e representemos por  $\varphi$  o ângulo da rotação em torno do eixo dos  $zz$ . Mostre que:

$$\Phi(\varphi, v) = (f(v) \cos \varphi, f(v) \sin \varphi, g(v)) \quad (1.2.11)$$

definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}_{(\varphi, v)}^2$ :

$$U = \{(\varphi, v) : 0 < \varphi < \pi \text{ e } a < v < b\}$$

é uma parametrização local de  $M$  (ver a figura 1.11):

Figure 1.11: Parametrização local de uma superfície de revolução

♣ **Exercício 1.17** ... Mostre que:

$$\Phi(\theta, \phi) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi), \quad (\theta, \phi) \in ]0, 2\pi[^2$$

é uma parametrização local do toro:

$$\mathfrak{T}^2 = \{x^1, y^1, x^2, y^2\} \in \mathbb{R}^4 : (x^1)^2 + (y^1)^2 = 1, (x^2)^2 + (y^2)^2 = 1\}$$

♣ **Exercício 1.18** \*... Considere o espaço de todas as matrizes  $n \times n$ , reais anti-simétricas  $\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\mathfrak{o}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \xi = -\xi^t\}$$

Note que  $\mathfrak{o}(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ . Para  $\xi \in \mathfrak{o}(n)$  define-se a **transformada de Cayley** de  $\xi$  através de:

$$\Psi(\xi) = (\mathbf{1} - \xi)(\mathbf{1} + \xi)^{-1}, \quad \xi \in \mathfrak{o}(n)$$

(i). Mostre que  $\Psi$  está bem definida e é de classe  $C^\infty$  numa vizinhança  $U \subset \mathfrak{o}(n) \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$  suficientemente pequena de  $\mathbf{0} \in \mathfrak{o}(n)$ . Mostre ainda que:  $A = \Psi(\xi) \in O(n)$ ,  $\forall \xi \in U$ , isto é, que  $A^t = A^{-1}$ .

(ii). Calcule uma fórmula para  $\xi$  em função de  $A = \Psi(\xi)$ , e mostre que  $\Psi^{-1}$  está bem definida em  $V \cap SO(n)$ , onde  $V$  é uma vizinhança de  $\mathbf{1} \in SO(n)$  em  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ . Portanto, se  $U = \Psi^{-1}(V \cap SO(n))$ ,  $\Psi : U \rightarrow V \cap SO(n)$  é uma bijecção.

(iii). Calcule  $d\Psi_{\mathbf{0}}$  e mostre que  $\Psi$  é uma imersão em  $\mathbf{0}$ .

(iv). Mostre que a aplicação  $\Psi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^9$ , dada por:

$$\Psi : (x, y, z) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ -x & 1 & z \\ -y & -z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ -x & 1 & z \\ -y & -z & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

é uma parametrização de  $SO(3)$  numa vizinhança da identidade  $\mathbf{1} \in SO(3)$ .

### 1.3 Funções e aplicações diferenciáveis

#### 1.3.1 Mudança de coordenadas locais

Consideremos uma variedade  $M$  de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , e uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida em  $M$ .

Se  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$  é uma parametrização local de  $M$ , podemos definir uma função no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}_u^k$  através de:

$$f \circ \Phi : \begin{array}{ccc} U \subseteq \mathbb{R}_u^k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u = (u^1, \dots, u^k) & \longmapsto & (f \circ \Phi)(u^1, \dots, u^k) \end{array} \quad (1.3.1)$$

Esta função diz-se a “**representação local**” de  $f$  no sistema de coordenadas locais  $u^i$ , associadas à parametrização local  $\Phi$ .

Mas suponhamos agora que temos uma outra parametrização local  $\Psi : V \subseteq \mathbb{R}_v^k \rightarrow M$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$ .

A cada ponto  $p \in U \cap V$  ficam associadas dois sistemas de coordenadas locais: as coordenadas  $u^i$  de  $\Phi^{-1}(p) \in U \subseteq \mathbb{R}_u^k$  e as coordenadas  $v^i$  de  $\Psi^{-1}(p) \in V \subseteq \mathbb{R}_v^k$ . Como se relacionam essas coordenadas entre si? A figura 1.12 é completamente esclarecedora. As aplicações  $\Phi^{-1} \circ \Psi$ , definida no aberto  $\Psi^{-1}(U \cap V) \subset \mathbb{R}_v^k$ , e  $\Psi^{-1} \circ \Phi$  definida no aberto  $\Phi^{-1}(U \cap V) \subset \mathbb{R}_u^k$ , dizem-se por isso as “**aplicações de mudança de coordenadas locais**” (ver a figura 1.12).

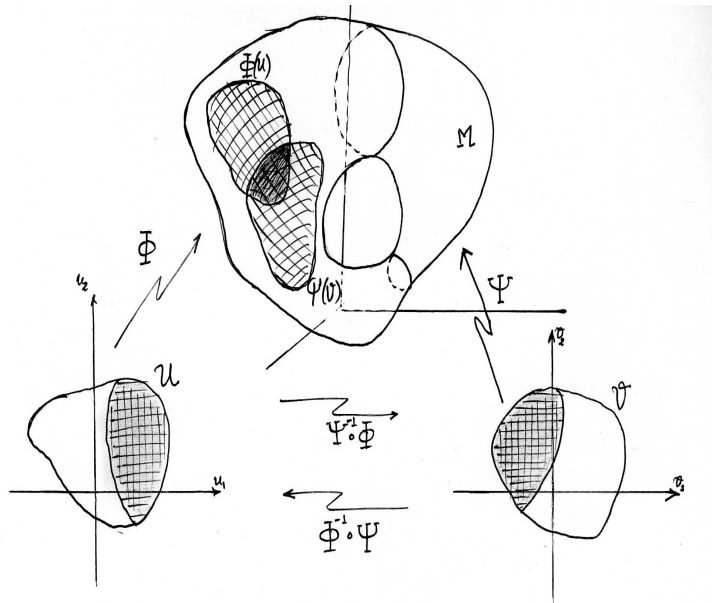


Figure 1.12: Mudança de coordenadas

Claramente que  $\Psi^{-1} \circ \Phi$  é um homeomorfismo de  $\Phi^{-1}(U \cap V)$  sobre  $\Psi^{-1}(U \cap V)$ , com inversa igual a  $\Phi^{-1} \circ \Psi$ . Mais ainda:

♣ **Teorema 1.5** ... As aplicações de mudança de coordenadas  $\Psi^{-1} \circ \Phi$  e  $\Phi^{-1} \circ \Psi$ , são difeomorfismos de classe  $C^\infty$ .

- **Dem.:** Consequência (da demonstração) do teorema 1.4. ■

### 1.3.2 Funções diferenciáveis

♣ **Definição 1.8** ... Seja  $M$  uma variedade de  $\mathbb{R}^n$ , e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em  $M$ .  $f$  diz-se “**diferenciável**” (de classe  $C^\infty$ ) se para todo o ponto  $p \in M$  existe uma parametrização local  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$ , com  $p \in \Phi(U)$ , tal que a representação local de  $f$ :

$$f \circ \Phi : \begin{array}{ccc} U \subseteq \mathbb{R}_u^k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u = (u^1, \dots, u^k) & \longmapsto & (f \circ \Phi)(u^1, \dots, u^k) \end{array}$$

é diferenciável de classe  $C^\infty$  no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ .

É importante notar que esta definição não depende da parametrização local  $\Phi$ . De facto, se  $\Psi : V \subseteq \mathbb{R}_v^k \rightarrow M$  é uma outra parametrização local de  $M$ , e se  $p \in \Phi(U) \cap \Psi(V)$ , então:

$$f \circ \Phi = (f \circ \Psi) \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi)$$

e:

$$f \circ \Psi = (f \circ \Phi) \circ (\Phi^{-1} \circ \Psi)$$

e concluímos, usando a regra da cadeia e o facto de que as aplicações de mudança de coordenadas são de classe  $C^\infty$ , que  $f \circ \Phi$  é diferenciável sse  $f \circ \Psi$  o é.

A proposição seguinte, cuja demonstração é imediata, fornece vários exemplos de funções diferenciáveis numa variedade  $M$  de  $\mathbb{R}^n$ :

♣ **Proposição 1.3** ... Seja  $M$  uma variedade de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{O}$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$  que contém  $M$ .

Se  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em  $\mathcal{O}$ , então a restrição de  $f$  a  $M$ ,  $f|_M$  é uma função diferenciável em  $M$ .

O conceito de diferenciabilidade pode ser generalizado para aplicações entre duas variedades:

♣ **Definição 1.9** ... (i). Sejam  $M \subset \mathbb{R}^n$  e  $N \subset \mathbb{R}^m$  duas variedades, e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação definida e contínua em  $M$ .  $f$  diz-se diferenciável em  $M$  se para todo o ponto  $p \in M$  existem parametrizações locais  $\Phi : U \rightarrow M$  e  $\Psi : V \rightarrow N$  com  $p \in \Phi(U)$  e  $F(p) \in \Psi(V)$ , tais que a representação local:

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$$

é diferenciável.

(ii). Duas variedades  $M$  e  $N$  (da mesma dimensão) dizem-se “**difeomorfas**” se existe um difeomorfismo  $F : M \rightarrow N$ , i.e., uma aplicação  $F : M \rightarrow N$  diferenciável com inversa  $F^{-1} : N \rightarrow M$  também diferenciável.

## 1.3.3 Exemplos e Exercícios

♣ **Exemplo 1.15** ... Seja  $M$  uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{v}$  um vector fixo não nulo em  $\mathbb{R}^3$ . A função altura relativa ao plano vectorial perpendicular a  $\mathbf{v}$ , é a função:

$$h : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(p) = p \cdot \mathbf{v}$$

onde  $\cdot$  representa o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ . É diferenciável em  $M$ , pela proposição anterior.

♣ **Exemplo 1.16** ... Seja  $M$  uma variedade em  $\mathbb{R}^n$  e  $p_0$  um ponto fixo em  $\mathbb{R}^n$ . A função  $f(p) = \|p - p_0\|^2$ ,  $p \in M$  é diferenciável em  $M$ , pela proposição anterior.

♣ **Exercício 1.19** ... Mostrar que é possível cobrir a esfera  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  com as imagens de duas parametrizações locais, dadas como as inversas de duas projecções estereográficas a partir dos pólos norte e sul, respectivamente. Calcular as aplicações de mudança de coordenadas.

Generalizar para as esferas  $\mathbf{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

- **Resolução** ... Definamos  $\Phi_N : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbf{S}^2 - \{N\}$  e  $\Phi_S : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbf{S}^2 - \{S\}$ , onde  $N = (0, 0, 1)$  e  $S = (0, 0, -1)$  são os pólos norte e sul da esfera, respectivamente, e  $\Phi_N = \Pi_N^{-1}$  e  $\Phi_S = \Pi_S^{-1}$ , onde:

$$\Pi_N : \mathbf{S}^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}_{(u,v)}^2 - \{0\}$$

e:

$$\Pi_S : \mathbf{S}^2 - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}_{(r,s)}^2 - \{0\}$$

são as projecções estereográficas a partir do pólo norte e sul, respectivamente (ver a figura 1.13).

Figure 1.13: Projecções estereográficas

Um pouco de geometria analítica no espaço permite deduzir as fórmulas seguintes:

$$\Pi_N : (x, y, z) \in \mathbf{S}^2 - \{N\} \mapsto \left( u = \frac{x}{1-z}, v = \frac{y}{1-z} \right) \in \mathbb{R}_{(u,v)}^2 - \{0\}$$

$$\Pi_S : (x, y, z) \in \mathbf{S}^2 - \{S\} \mapsto \left( r = \frac{x}{1+z}, s = \frac{y}{1+z} \right) \in \mathbb{R}_{(r,s)}^2 - \{0\}$$

$$\Phi_N : (u, v) \in \mathbb{R}_{(u,v)}^2 - \{0\} \mapsto \left( x = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, y = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, z = \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right) \in \mathbf{S}^2 - \{N\}$$

$$\Phi_S : (r, s) \in \mathbb{R}_{(r,s)}^2 - \{0\} \mapsto \left( x = \frac{2r}{1+r^2+s^2}, y = \frac{2s}{1+r^2+s^2}, z = \frac{1-r^2-s^2}{1+r^2+s^2} \right) \in \mathbf{S}^2 - \{S\}$$

donde se deduzem as aplicações de mudança de coordenadas seguintes:

$$\Phi_N^{-1} \circ \Phi_S : (r, s) \in \mathbb{R}_{(r,s)}^2 - \{0\} \mapsto \left( u = \frac{r}{r^2+s^2}, v = \frac{s}{r^2+s^2} \right) \in \mathbb{R}_{(u,v)}^2 - \{0\}$$



e:

$$\Phi_S^{-1} \circ \Phi_N : (u, v) \in \mathbb{R}_{(u,v)}^2 - \{0\} \mapsto \left( r = \frac{u}{u^2 + v^2}, s = \frac{v}{u^2 + v^2} \right) \in \mathbb{R}_{(r,s)}^2 - \{0\}$$

que são evidentemente difeomorfismos de classe  $C^\infty$ .

## 1.4 O Espaço Tangente

### 1.4.1 Definição

♣ **Definição 1.10** ... Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . O espaço tangente a  $M$  num ponto  $p \in M$ , é o subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^n$ , notado por  $T_pM$ , e que pode ser descrito das seguintes duas formas equivalentes:

- **(A)**. Consideramos uma parametrização local de  $M$  em torno de  $p$ :

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Se  $\Phi(u) = p$ , põmos então:

$$T_pM \stackrel{\text{def}}{=} d\Phi_u(\mathbb{R}^k) \quad (1.4.1)$$

- **(B)**. Consideramos todas as curvas de classe  $C^\infty$ ,  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tais que:

$$\alpha(t) \in M, \quad \forall t \in I \quad e \quad \alpha(0) = p$$

Põmos então:

$$T_pM \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{V}_p = \alpha'(0) : \alpha \text{ nas condições indicadas} \} \quad (1.4.2)$$

Vejamus a equivalência das duas definições anteriores. A definição **(A)**, apresenta  $T_pM$  como um subespaço vectorial de dimensão  $k$ , em  $\mathbb{R}^n$ , (uma vez que  $d\Phi_u$  é injectiva), mas tem o inconveniente de depender da parametrização  $\Phi$  escolhida em (1.4.1). Não está claro que se tomarmos uma outra parametrização  $\Psi$ , com  $\Psi(r) = p$ , se tem:

$$d\Phi_u(\mathbb{R}^k) = d\Psi_r(\mathbb{R}^k) \quad (1.4.3)$$

Por outro lado, a definição **(B)**, embora não dependa da parametrização, não torna claro que  $T_pM$  seja de facto um subespaço vectorial de dimensão  $k$ , em  $\mathbb{R}^n$ . Ambos os inconvenientes ficam resolvidos, provando que **(A)** e **(B)**, conduzem ao mesmo conjunto.

Com efeito, seja  $\mathbf{V}_p \in d\Phi_u(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$ . Temos então que  $\mathbf{V}_p = d\Phi_u(\mathbf{v})$  para algum vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ , e é evidente que  $\mathbf{V}_p = \alpha'(0)$ , onde  $\alpha$  é a curva:

$$\alpha(t) = \Phi(u + t\mathbf{v}) \quad t \in I$$

que satisfaz as condições referidas em **(B)**.

Reciprocamente, seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva de classe  $C^\infty$ , tal que  $\alpha(t) \in M, \forall t \in I$ ,  $\alpha(0) = p \in M$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{V}_p$ . Podemos supôr que  $I$  é suficientemente pequeno, para que  $\alpha(I) \subset \Phi(U) = \mathcal{O} \cap M$  (ver a definição de parametrização local). Temos então que a curva:

$$\beta = \Phi^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^k$$

é de classe  $C^\infty$ , e como  $\Phi \circ \beta = \alpha$ , a regra da cadeia dá que:

$$\alpha'(0) = d\Phi_{\beta(0)}(\beta'(0)) = d\Phi_u(\beta'(0))$$

isto é,  $\mathbf{V}_p \stackrel{\text{def}}{=} \alpha'(0) = d\Phi_u(\beta'(0)) \in d\Phi_u(\mathbb{R}^k)$ , como se pretendia provar.

Habitualmente visualiza-se o espaço tangente  $T_pM$ , como sendo o subespaço afim paralelo a  $T_pM$ , passando por  $p$ , como na figura 1.14. Mas não esqueçamos que  $T_pM$ , tal como o definimos, é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^n$  (passando sempre na origem) (ver a figura 1.14).

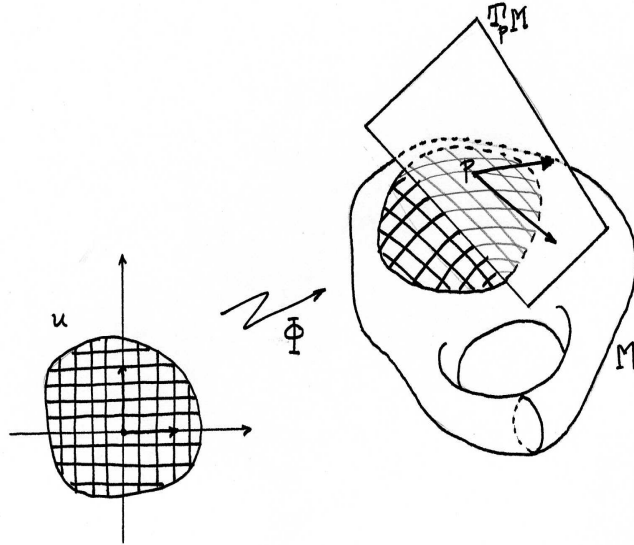


Figure 1.14: Espaço tangente  $T_pM$

Dada uma parametrização local:

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}_u^k \rightarrow \mathbb{R}_x^n$$

com  $\Phi(u) = p \in M$ , recordemos que a matriz da aplicação linear  $d\Phi_u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ , relativamente às bases canónicas de  $\mathbb{R}^k$  e  $\mathbb{R}^n$ , é a matriz Jacobiana ( $n \times k$ ):

$$\mathbf{Jac} \Phi(u) = \left[ \frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j}(u) \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^1}(u) & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^2}(u) & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial u^k}(u) \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^1}(u) & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^2}(u) & \dots & \frac{\partial \Phi^2}{\partial u^k}(u) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^1}(u) & \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^2}(u) & \dots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial u^k}(u) \end{bmatrix} \quad (1.4.4)$$

cujas colunas são as componentes das derivadas parciais vectoriais  $\frac{\partial \Phi}{\partial u^i}(u)$  ( $i = 1, \dots, k$ ), na base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

Como  $d\Phi_u$  tem característica  $k$ ,  $\forall u \in U$ , as colunas dessa matriz são vectores linearmente independentes, em  $\mathbb{R}^n$  e podemos por isso definir a base para o espaço tangente  $T_pM$ , constituída

pelos  $k$  vectores seguintes de  $\mathbb{R}^n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u^1}(u) \\ \frac{\partial}{\partial u^2} \Big|_p \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u^k}(u) \end{array} \right. \quad (1.4.5)$$

onde  $\mathbb{R}_u^k$  está munido das coordenadas cartesianas  $u^1, \dots, u^k$ .

As coordenadas de um vector  $\mathbf{V}_p \in T_p M$ , na base (1.4.5), ditas **coordenadas intrínscas** de  $\mathbf{V}_p$ , são determinadas da seguinte forma: como vimos,  $\mathbf{V}_p$  é da forma  $\mathbf{V}_p = \alpha'(0)$  para alguma curva de classe  $C^\infty$  da forma  $\alpha(t) = \Phi(\beta(t))$ ,  $t \in \mathbf{I}$ , com  $\beta(0) = u = \Phi^{-1}(p)$  e onde:

$$\beta(t) = (u^1(t), \dots, u^k(t))$$

é a chamada “**expressão local nas coordenadas locais  $u^i$ , da curva  $\alpha$** ” (ver a figura 1.15).

Figure 1.15: Coordenadas intrínscas de um vector tangente

Usando a regra da cadeia, temos então que:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_p &= \alpha'(0) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi \circ \beta) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(u^1(t), \dots, u^k(t)) \\ &= (u^1)'(0) \frac{\partial \Phi}{\partial u^1}(u) + \dots + (u^k)'(0) \frac{\partial \Phi}{\partial u^k}(u) \\ &= (u^1)'(0) \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p + \dots + (u^k)'(0) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Portanto na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right\}_{i=1, \dots, k}$  para  $T_p M$ , associada à parametrização local  $\Phi$ , as coordenadas intrínscas de um vector  $\mathbf{V}_p \in T_p M$ , são  $((u^1)'(0), \dots, (u^k)'(0))$ , onde  $(u^1(t), \dots, u^k(t))$ , é a expressão local nas coordenadas locais  $u^i$ , de uma curva  $\alpha$  nas condições indicadas.

Vejamos agora como mudam as coordenadas intrínscas de um vector  $\mathbf{V}_p \in T_p M$ , quando escolhemos um outro sistema de coordenadas locais para  $p \in M$ .

Assim suponhamos que temos duas parametrizações locais de  $M$ ,  $\Phi : U \subset \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$  e  $\Psi : V \subset \mathbb{R}_v^k \rightarrow M$ , com  $p \in \Phi(U) \cap \Psi(V) \neq \emptyset$ . Em  $T_p M$  temos então duas bases associadas respectivamente a  $\Phi$  e a  $\Psi$ :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p \right\} \quad \text{onde} \quad \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p = \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}(u), \quad i = 1, \dots, k$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial v^k} \Big|_p \right\} \quad \text{onde} \quad \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p = \frac{\partial \Psi}{\partial v^i}(v), \quad i = 1, \dots, k \quad (1.4.7)$$

É claro que deveremos ter uma relação do tipo:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p = \sum_{i=1}^k A_j^i(p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p \quad (1.4.8)$$

Para calcular os coeficientes  $A_j^i(p)$ , basta observar que  $\Phi = \Psi \circ (\Psi^{-1} \circ \Phi)$  e aplicar a regra da cadeia para obter:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u^j}(u) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Psi}{\partial v^i}(v) \frac{\partial (\Psi^{-1} \circ \Phi)^i}{\partial u^j}(u), \quad \text{onde} \quad v = \Psi^{-1} \circ \Phi(u)$$

isto é:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p = \sum_{i=1}^k \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p} \quad (1.4.9)$$

onde usamos a notação:

$$\boxed{\frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial (\Psi^{-1} \circ \Phi)^i}{\partial u^j}(u)} \quad (1.4.10)$$

para a matriz Jacobiana da aplicação de mudança de coordenadas  $\Psi^{-1} \circ \Phi$ , das  $u$ -coordenadas para as  $v$ -coordenadas.

De (1.4.9) deduzimos ainda que:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial v^j} \Big|_p = \sum_{i=1}^k \frac{\partial u^i}{\partial v^j}(p) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p} \quad (1.4.11)$$

onde:

$$\boxed{\frac{\partial u^i}{\partial v^j}(p) = \left[ \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) \right]^{-1}} \quad (1.4.12)$$

é a matriz Jacobiana da aplicação de mudança das  $v$ -coordenadas para as  $u$ -coordenadas (que é a inversa da matriz Jacobiana da aplicação de mudança das  $u$ -coordenadas para as  $v$ -coordenadas, como é evidente!).

Se agora  $\mathbf{V}_p \in T_p M$ , então:

$$\mathbf{V}_p = \sum_{i=1}^k V^i \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p \quad (1.4.13)$$

enquanto que, por outro lado:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_p &= \sum_{j=1}^k U^j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \\
 &= \sum_{j=1}^k U^j \sum_{i=1}^k \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p && \text{por (1.4.9)} \\
 &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^k U^j \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) \right) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p
 \end{aligned}$$

Comparando com (1.4.13), deduzimos finalmente que:

$$\boxed{V^i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) U^j} \quad (1.4.14)$$

Quando a variedade  $M$  é dada como imagem inversa de um valor regular, o espaço tangente pode ser calculado através do seguinte teorema:

♣ **Teorema 1.6** ... Seja  $F : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma aplicação de classe  $C^\infty$ , definida num aberto  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq m$ .

Suponhamos que  $c \in \mathbb{R}^m$  é **valor regular** de  $F$ , (isto é,  $dF_x$  é sobrejectiva  $\forall x \in M \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(c)$ ), de tal forma que  $M$  é uma variedade em  $\mathbb{R}^n$ , de dimensão  $k = n - m$ . Então  $\forall p \in M$ :

$$\boxed{T_p M = \ker dF_p} \quad (1.4.15)$$

- **Dem.:** Seja  $\mathbf{V}_p \in T_p M$ . Então  $\mathbf{V}_p = \alpha'(0)$  para alguma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\alpha(t) \in M$ ,  $\forall t \in I$  e  $\alpha(0) = p$ .

Portanto, atendendo a que  $F \circ \alpha \equiv c$  (constante), obtemos, aplicando a regra da cadeia, que:

$$dF_{\alpha(0)}(\alpha'(0)) = dF_p(\mathbf{V}_p) = 0$$

o que significa que  $\mathbf{V}_p \in \ker dF_p$ ,  $\forall \mathbf{V}_p \in T_p M$ . Finalmente, atendendo a que as dimensões de  $T_p M$  e  $\ker dF_p$  são ambas iguais a  $k = n - m$ , obtemos (1.4.15). ■

Recordemos que se  $F = (F^1, \dots, F^m)$ , então  $c$  é valor regular de  $F$  se e só se, em cada ponto  $p \in M = F^{-1}(c)$ , os vectores gradiente  $\nabla F^1(p), \dots, \nabla F^m(p)$  são linearmente independentes. A demonstração anterior mostra que estes vectores são ortogonais ao espaço tangente a  $M$  em  $p \in M$ . Portanto,  $T_p M$  é o suplementar ortogonal em  $\mathbb{R}^n$  do subespaço gerado por  $\nabla F^1(p), \dots, \nabla F^m(p)$ :

$$\boxed{T_p M = \langle \nabla F^1(p), \dots, \nabla F^m(p) \rangle^\perp} \quad (1.4.16)$$

## 1.4.2 Exemplos e Exercícios

♣ **Exemplo 1.17** ... A base para o espaço tangente  $T_p\mathbb{R}^2$ , num ponto  $p = \Phi(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ , associada à parametrização local em coordenadas polares (ver (1.2.5)), é constituída pelos dois vectores seguintes:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \theta) \\ &= (\cos \theta, \sin \theta) \\ &= \cos \theta \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + \sin \theta \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

e:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &= (-r \sin \theta, r \cos \theta) \\ &= -r \sin \theta \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + r \cos \theta \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

♣ **Exemplo 1.18** ... A base para o espaço tangente  $T_p\mathbb{R}^3$ , num ponto  $p = \Phi(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ , associada à parametrização local em coordenadas esféricas (ver (1.2.6)), é constituída pelos três vectores seguintes:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ &= (\sin \theta \cos \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (\sin \theta \sin \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p + (\cos \theta) \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p \\ \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r, \theta, \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \cos \theta) \\ &= (r \cos \theta \cos \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (r \cos \theta \sin \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p - (r \cos \theta) \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p \\ \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(r, \theta, \varphi) = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) \\ &= (-r \sin \theta \sin \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (r \sin \theta \cos \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

♣ **Exemplo 1.19** ... A base para o espaço tangente  $T_p\mathbb{R}^3$ , num ponto  $p = \Phi(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ , associada à parametrização local em coordenadas cilíndricas (ver (1.2.7)), é constituída pelos três vectores seguintes:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, \theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ &= \cos \theta \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + \sin \theta \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \\ \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(r, \theta, z) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0) \\ &= (-r \sin \theta) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (r \cos \theta) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \\ \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial z}(r, \theta, z) = (0, 0, 1) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

♣ **Exemplo 1.20** ... A base para o espaço tangente  $T_p\mathbf{S}^2$ , num ponto  $p = \Phi(\theta, \varphi) \in \mathbf{S}^2$ , associada à parametrização local  $\Phi$ , em coordenadas geográficas (ver (1.2.8)), é constituída pelos dois vectores seguintes (ver a figura 1.16):

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\
 &= (\cos \theta \cos \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (\cos \theta \sin \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p - (\sin \theta) \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p \\
 \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) \\
 &= (-\cos \theta \sin \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (\sin \theta \cos \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p
 \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Figure 1.16: Espaço tangente a uma esfera

♣ **Exemplo 1.21** ... A base para o espaço tangente  $T_p\mathfrak{T}^2$ , num ponto  $p = \Phi(u, v) \in \mathfrak{T}^2$ , associada à parametrização local  $\Phi$  dada por (1.2.10), é constituída pelos dois vectores seguintes:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) \\
 &= (-r \sin u \cos v) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (-r \sin u \sin v) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p + (r \cos u) \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p \\
 \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p &\stackrel{def}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = -(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0) \\
 &= -(a + r \cos u) \sin v \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + ((a + r \cos u) \cos v) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p
 \end{aligned} \tag{1.4.22}$$

♣ **Exemplo 1.22** ... A base para o espaço tangente  $T_pM$ , num ponto  $p = \Phi(\varphi, v) \in M$ , associada à parametrização local  $\Phi$  de uma superfície de revolução  $M$ , dada por (1.2.11), é constituída pelos dois

vectores seguintes:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \right|_p &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\varphi, v) = (-f(v) \sin \varphi, f(v) \cos \varphi, 0) \\
 &= (-f(v) \sin \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (f(v) \cos \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p \\
 \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial v}(\varphi, v) = (f'(v) \cos \varphi, f'(v) \sin \varphi, g'(v)) \\
 &= (f'(v) \cos \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_p + (f'(v) \sin \varphi) \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_p + g'(v) \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_p
 \end{aligned} \tag{1.4.23}$$

♣ **Exercício 1.20** ... Como já vimos no exercício 1.2, o grupo ortogonal  $O(n)$  real em dimensão  $n$  é uma variedade de dimensão  $\frac{1}{2}n(n-1)$  em  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Mostre que o espaço tangente a  $O(n)$  na unidade  $\mathbf{1} \in O(n)$ , é constituído por todas as matrizes  $\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  que são anti-simétricas:

$$\boxed{o(n) \stackrel{\text{def}}{=} T_{\mathbf{1}}O(n) = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \xi = -\xi^t\}} \tag{1.4.24}$$

- **Resolução** ... De facto  $O(n) = F^{-1}(\mathbf{1})$  onde:

$$F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}, \quad A \mapsto F(A) = AA^t$$

A diferencial de  $F$  num ponto  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  é dada por:

$$dF_A(\xi) = A^t \xi + \xi^t A$$

onde  $\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ . Portanto  $T_{\mathbf{1}}O(n) = \ker dF_{\mathbf{1}} = \{\xi : \xi + \xi^t = \mathbf{0}\}$ , e o espaço tangente na unidade  $\mathbf{1} \in O(n)$  é dado por (1.4.24).

O espaço vectorial real (de dimensão  $\frac{1}{2}n(n-1)$ ),  $o(n) = T_{\mathbf{1}}O(n)$  quando munido do parêntesis de Lie de comutação de matrizes:

$$[\xi, \eta] \stackrel{\text{def}}{=} \xi \eta - \eta \xi, \quad \xi, \eta \in o(n) \tag{1.4.25}$$

diz-se a “**álgebra de Lie**” do grupo de Lie  $O(n)$ . É fácil ver que este parêntesis de Lie verifica as propriedades seguintes:

$$\begin{aligned}
 [\xi_1 + \xi_2, \eta] &= [\xi_1, \eta] + [\xi_2, \eta] \\
 [a\xi, \eta] &= a[\xi, \eta], \quad a \in \mathbb{R} \\
 [\xi, \eta] &= -[\eta, \xi] \\
 [\xi, [\eta, \chi]] &= [[\xi, \eta], \chi] + [\eta, [\xi, \chi]] \quad (\text{Identidade de Jacobi})
 \end{aligned} \tag{1.4.26}$$

De forma análoga:

$$\boxed{so(n) \stackrel{\text{def}}{=} T_{\mathbf{1}}SO(n) = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \xi = -\xi^t\}} \tag{1.4.27}$$



quando munido do parêntesis de Lie de comutação de matrizes (1.4.25) diz-se a “**álgebra de Lie**” do grupo de Lie  $SO(n)$ . Por exemplo uma base para a álgebra de Lie do grupo de Lie  $SO(3)$ , cuja dimensão é 3, é constituída pelas “**rotações infinitesimais**”:

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que verificam as relações de comutação seguintes:

$$[\xi_1, \xi_2] = \xi_3, \quad [\xi_2, \xi_3] = \xi_1, \quad [\xi_3, \xi_1] = \xi_2$$

♣ **Exercício 1.21** ... Recorde que no exercício 1.4 vimos que o grupo especial unitário  $SU(2)$  é constituído pelas matrizes  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  tais que  $AA^\dagger = \mathbf{1}$  e  $\det A = 1$ , onde  $A^\dagger = \overline{A}^t$  é a conjugada transposta da matriz  $A$ :

$$SU(2) \stackrel{def}{=} \left\{ A = \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } \det A = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \quad (1.4.28)$$

Mostre que o espaço tangente a  $SU(2)$  na unidade  $\mathbf{1} \in SU(2)$ , é constituído por todas as matrizes  $\xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  que são anti-hermitianas (i.e.,  $\xi = -\xi^\dagger$ ) e que têm traço nulo.

$$su(2) \stackrel{def}{=} T_1SU(2) = \{ \xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \xi = -\xi^\dagger \text{ e } \operatorname{tr} \xi = 0 \} \quad (1.4.29)$$

- **Resolução** ... Consideremos uma curva  $t \mapsto \alpha(t)$  de classe  $C^\infty$  em  $SU(2)$  tal que  $\alpha(0) = \mathbf{1}$  e  $\alpha'(0) = \xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Como  $\alpha(t) \in SU(2)$ ,  $\forall t$ :

$$\alpha(t)\alpha(t)^\dagger = \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \det \alpha(t) = 1$$

Derivando em ordem a  $t$  estas relações, temos que para  $t = 0$ :

$$\alpha'(0)\alpha(0)^\dagger + \alpha(0)\alpha'(0)^\dagger = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tr} \alpha'(0) = 0$$

e como  $\alpha(0) = \mathbf{1}$  e  $\alpha'(0) = \xi$ :

$$\xi = -\xi^\dagger \quad \text{e} \quad \operatorname{tr} \xi = 0$$

Quando munido do parêntesis de Lie de comutação de matrizes, o espaço vectorial real  $su(2)$  de dimensão 3, definido por (1.4.29), diz-se a “**álgebra de Lie**” do grupo de Lie  $SU(2)$ . Uma base para  $su(2)$  é constituída pelas matrizes  $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$  onde:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.4.30)$$

são as chamadas “**matrizes de Pauli**”. São válidas as relações de comutação seguintes:  $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$  (+ permutações cíclicas).

♣ **Exercício 1.22** ... Como vimos antes, no exercício 1.3, o grupo especial complexo  $SL(2, \mathbb{C})$  é constituído pelas matrizes  $(2 \times 2)$  de entradas complexas cujo determinante é igual a 1.

Mostre que o espaço tangente a  $SL(2, \mathbb{C})$  na unidade  $\mathbf{1} \in SL(2, \mathbb{C})$ , é constituído por todas as matrizes  $\xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  que têm traço nulo:

$$sl(2, \mathbb{C}) \stackrel{def}{=} T_1SL(2, \mathbb{C}) = \{ \xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \operatorname{tr} \xi = 0 \} \quad (1.4.31)$$

- **Resolução** ... De facto  $SL(2, \mathbb{C}) = \det^{-1}(1)$ , onde:

$$\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad A \mapsto \det A$$

A diferencial  $d(\det)_A$  é dada por:

$$d(\det)_A(\xi) = \operatorname{tr}(\xi A^{-1})$$

onde  $\xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , e portanto o espaço tangente na unidade  $\mathbf{1} \in SL(2, \mathbb{C})$  é dado por:

$$sl(2, \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} T_{\mathbf{1}}SL(2, \mathbb{C}) = \ker(d(\det)_{\mathbf{1}}) = \{\xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \operatorname{tr}\xi = 0\}$$

Quando munido do parêntesis de Lie de comutação de matrizes, (1.4.31) diz-se a “**álgebra de Lie**” do grupo de Lie  $SL(2, \mathbb{C})$ . Uma base para  $sl(2, \mathbb{C})$ , cuja dimensão real é 6, é constituída pelas matrizes  $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{i}{2}\sigma_1 & \rho_2 &= -\frac{i}{2}\sigma_2 & \rho_3 &= -\frac{i}{2}\sigma_3 \\ \beta_1 &= \frac{1}{2}\sigma_1 & \beta_2 &= \frac{1}{2}\sigma_2 & \beta_3 &= \frac{1}{2}\sigma_3 \end{aligned}$$

onde  $\sigma_i$  são as “**matrizes de Pauli**” (1.4.30). São válidas as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\rho_1, \rho_2] &= \rho_3 & [\rho_2, \rho_3] &= \rho_1 & [\rho_3, \rho_1] &= \rho_2 \\ [\beta_1, \rho_2] &= \beta_3 & [\beta_2, \rho_3] &= \beta_1 & [\beta_3, \rho_1] &= \beta_2 \\ [\beta_1, \beta_2] &= -\rho_3 & [\beta_2, \beta_3] &= -\rho_1 & [\beta_3, \beta_1] &= -\rho_2 \end{aligned} \quad (1.4.32)$$

♣ **Exercício 1.23** ... Considere a esfera  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  e as duas parametrizações locais  $\Phi_N : \mathbb{R}_{(u,v)}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbf{S}^2 - \{N\}$  e  $\Phi_S : \mathbb{R}_{r,s}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbf{S}^2 - \{S\}$ , dadas pelas inversas das projecções estereográficas a partir dos pólos norte  $N = (0, 0, 1)$  e sul  $S = (0, 0, -1)$ , respectivamente.

Seja  $\mathbf{V}_p \in T_p\mathbf{S}^2$  um vector tangente que nas coordenadas locais  $(u, v)$ , é representado por:

$$\mathbf{V}_p = a \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_p + b \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p$$

Qual a representação desse mesmo vector nas coordenadas locais  $(r, s)$ ? Faça o cálculo explícito quando  $p = \left(u = \frac{\sqrt{3}}{2}, v = \frac{1}{2}\right)$  e calcule ainda as coordenadas de  $\mathbf{V}_p$  em  $\mathbb{R}^3$ .

♣ **Exercício 1.24** ... Seja  $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ , onde  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , com  $(n > m)$ , é uma aplicação diferenciável e  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$  é valor regular de  $F$ . Mostre que:

$$TM \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ e } dF_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de dimensão  $2(n - m)$ .

Explícite a situação quando  $M = \mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

♣ **Exercício 1.25** ... Considere o grupo de Lie  $SO(3) = \{A \in Gl(3, \mathbb{R}) : AA^t = A^t A = \mathbf{1} \text{ e } \det A = 1\}$  e a respectiva álgebra de lie  $so(3) = so(3, \mathbb{R}) = \{\xi \in gl(3, \mathbb{R}) : \xi = -\xi^t\}$ .

(i). Considere a base para  $so(3)$  constituída pelas matrizes:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e a álgebra de Lie  $(\mathbb{R}^3, \times)$ , onde  $\times$  é o produto vectorial usual em  $\mathbb{R}^3$  (com a orientação usual), isto é:  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ . Mostre que a aplicação:

$$\widehat{\cdot}: \mathbb{R}^3 \rightarrow so(3), \quad \mathbf{x} = (x^i) \mapsto \widehat{\mathbf{x}} = x^i \widehat{\mathbf{e}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^2 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie, isto é:

$$[\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}}] = \widehat{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}$$

(ii). Mostrar que sob a identificação anterior, o produto interno usual  $\cdot$  em  $\mathbb{R}^3$ , corresponde ao produto interno em  $so(3)$ , definido por:

$$\xi \cdot \eta \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \text{tr}(\xi\eta)$$

isto é:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{y}})$$

(iii). Mostre que todo o elemento  $A \in SO(3)$  é uma rotação em  $\mathbb{R}^3$  em torno de um eixo.

(iv). Mostrar que se  $\widehat{\xi} \in so(3)$ , com  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , então  $\exp(t\widehat{\xi})$  é uma rotação em  $\mathbb{R}^3$  em torno do eixo gerado por  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , e de ângulo  $t\|\xi\|$ .

(v). Demonstre a “fórmula de Rodrigues” seguinte:

$$\exp(\widehat{\xi}) = \mathbf{1} + \frac{\sin \|\xi\|}{\|\xi\|} \widehat{\xi} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \left( \frac{\|\xi\|}{2} \right)}{\frac{\|\xi\|}{2}} \right]^2 \widehat{\xi}^2$$

onde  $\xi \in \mathbb{R}^3$ .

□

Antes de enunciar o próximo exercício, vamos recordar algumas noções sobre o corpo  $\mathbb{H}$  (não comutativo) dos quaterniões.

Por definição  $\mathbb{H}$  é a álgebra real associativa gerada por:

$$\mathbf{1} \quad \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{ij}$$

submetida às relações:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

Dado um quaterniões:

$$h = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \tag{1.4.33}$$

definimos:

- a “parte real”  $\text{Re}(h) = a$  e a “parte imaginária”  $\text{Im}(h) = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ .

- o “conjugado” de  $h$ :

$$\bar{h} \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

- a “norma” de  $h$ :

$$N(h) = h\bar{h} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

É fácil ver que:

$$N(hh') = N(h)N(h') \quad \forall h, h' \in \mathbb{H} \quad (1.4.34)$$

e que  $(\mathbb{H}, N)$  é linearmente isométrico a  $(\mathbb{R}^4, \|\cdot\|^2)$ , onde  $\|\cdot\|$  é a norma euclideana usual em  $\mathbb{R}^4$ . Além disso,  $\mathbb{H}$  é um corpo não comutativo. Todo o  $h \in \mathbb{H} - \{0\}$  tem um inverso dado por  $h^{-1} = \frac{\bar{h}}{N(h)}$ .

♣ **Exercício 1.26** \*... Considere o grupo de Lie  $Sp(1)$  constituído pelos quaterniões de norma unitária:

$$Sp(1) = \{x = x^0\mathbf{1} + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k} \in \mathbb{H} : N(x) = x\bar{x} = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$$

(i). Mostre que a álgebra de Lie de  $Sp(1)$  é:

$$sp(1) = \text{Im } \mathbb{H} = \mathbb{R}^3$$

e que com a identificação  $\text{Im } \mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ , dada por  $\xi = \xi^1\mathbf{i} + \xi^2\mathbf{j} + \xi^3\mathbf{k} \in \text{Im } \mathbb{H} \mapsto \xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3$ , o parêntesis de Lie é dado por  $[\xi, \eta] = 2\xi \times \eta$ .

(ii). Considere o grupo de Lie  $SU(2) = SU(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : AA^\dagger = \mathbf{1} \quad e \quad \det A = 1\}$  e a respectiva álgebra de Lie  $su(2) = \{\xi \in gl(2, \mathbb{C}) : \xi = -\xi^\dagger \quad e \quad \text{tr } \xi = 0\}$ .

Mostre que a aplicação  $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , dada por:

$$x \in \mathbb{H} \mapsto \gamma(x) = \begin{pmatrix} x^0 + ix^3 & x^2 + ix^1 \\ -x^2 + ix^1 & x^0 - ix^3 \end{pmatrix}. \quad (1.4.35)$$

onde  $x = x^0\mathbf{1} + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$ , é um homomorfismo real de álgebras:  $\gamma$  é  $\mathbb{R}$ -linear,  $\gamma(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  e  $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$ . Mostre ainda que:

$$\gamma(\bar{x}) = (\gamma(x))^\dagger$$

(iii). Considere as “matrizes de Pauli” seguintes:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mostre que  $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$  (+ permutações cíclicas). Mostre que  $\gamma(\mathbf{i}) = i\sigma_1$ ,  $\gamma(\mathbf{j}) = i\sigma_2$ ,  $\gamma(\mathbf{k}) = i\sigma_3$ , onde  $\gamma$  é a aplicação (1.4.35), e que portanto  $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$  formam uma base para  $su(2)$ .

(iv). Mostre que (1.4.35) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= x^0\mathbf{1} + i \sum_k x^k \sigma_k \\ &\stackrel{\text{def}}{=} x^0 + i \mathbf{x} \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

onde  $x = x^0\mathbf{1} + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k} = x^0 + \mathbf{x} \in \mathbb{H}$ , com  $\mathbf{x} \in \text{Im } \mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ , e  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

(v). Considere o conjunto  $\mathcal{H}_o$  das matrizes hermitianas que têm traço nulo:

$$\mathcal{H}_o = \left\{ \begin{bmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Mostre que a aplicação  $\tilde{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_o$ , definida por:

$$\tilde{\cdot} : \mathbf{x} = (x^k) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \tilde{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^3 x^k \sigma_k = \begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo linear (que permite identificar  $\mathcal{H}_o$  com  $\mathbb{R}^3$ ). Mostre ainda que:

$$\det \tilde{\mathbf{x}} = -\|\mathbf{x}\|^2, \quad (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{1} = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{x}\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{y}\mathbf{x}})$$

$$\|\mathbf{x}\|^2\mathbf{1} = \tilde{\mathbf{x}}^2 \quad \widetilde{\mathbf{x} \times \mathbf{y}} = \frac{i}{2}(\widetilde{\mathbf{x}\mathbf{y}} - \widetilde{\mathbf{y}\mathbf{x}}) = \frac{i}{2}[\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}]$$

e ainda:

$$\widetilde{\mathbf{x}\mathbf{y}} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{1} + i\widetilde{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}$$

Esta última igualdade escreve-se habitualmente na forma:

$$\boxed{(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}})(\tilde{\mathbf{y}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = (\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{y}})\sigma_o + i(\tilde{\mathbf{x}} \times \tilde{\mathbf{y}}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$$

onde se põs  $\sigma_o = \mathbf{1}$  e  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Isto é, o produto de dois elementos  $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{H}_o$ , é um elemento de  $\mathbb{R}\mathbf{1} + i\mathcal{H}_o$ , cuja “parte real” é o produto interno, e a “parte imaginária” é o produto vectorial.

(vi). Mostre que os valores próprios de  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}_o$  são  $\pm\|\mathbf{x}\|$ , e deduza que cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$  induz uma decomposição de  $\mathbb{C}^2$  em soma directa:

$$\mathbb{C}^2 = \mathcal{S}_{\mathbf{x}}^+ \oplus \mathcal{S}_{\mathbf{x}}^-$$

Calcule essa decomposição quando  $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$ . Mostre ainda que essa decomposição fica inalterada quando substituimos  $\mathbf{x}$  por  $a\mathbf{x}$ , onde  $a > 0$  é um número real positivo arbitrário, isto é, cada direcção  $\mathbb{R}^+\{\mathbf{x}\} = \{a\mathbf{x} : a > 0\}$  em  $\mathbb{R}^3$  (onde  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ), determina (unívocamente) uma decomposição de  $\mathbb{C}^2$  da forma referida <sup>(1)</sup>.

(vii). Considere agora, para cada  $A \in SU(2)$ , a aplicação:

$$\psi_A : \mathcal{H}_o \cong \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \cong \mathcal{H}_o$$

definida por:

$$\psi_A(\tilde{\mathbf{x}}) = A\tilde{\mathbf{x}}A^\dagger \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}_o$$

Mostre que  $\psi_A$  está bem definida, e que  $\psi_A$  é uma transformação ortogonal em  $\mathbb{R}^3$ .

(viii). Deduza a “fórmula de Euler” seguinte:

$$\psi_A(\tilde{\mathbf{x}}) = ((a^0)^2 - \|\mathbf{a}\|^2)\tilde{\mathbf{x}} + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\tilde{\mathbf{a}} - 2a^0(\widetilde{\mathbf{a} \times \mathbf{x}})$$

ou em termos do isomorfismo  $\mathbb{R}^3 \cong \mathcal{H}_o$ :

$$\boxed{\mathbf{y} = \psi_A(\mathbf{x}) = ((a^0)^2 - \|\mathbf{a}\|^2)\mathbf{x} + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} - 2a^0(\mathbf{a} \times \mathbf{x})} \quad (1.4.36)$$

onde  $A = \gamma(a) = a^0\mathbf{1} + i\sum_k a^k\sigma_k = a^0 + i\mathbf{a} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \in SU(2)$ , e  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}_o = \mathbb{R}^3$ . Deduzir que  $\psi_A$  é uma rotação de  $\mathbb{R}^3$  de eixo gerado por  $\mathbf{a}$ .

**Nota...** Como  $\det A = (a^0)^2 + \|\mathbf{a}\|^2 = 1$ , podemos escolher  $\theta$  tal que:  $a^0 = \cos \frac{\theta}{2}$  e  $\|\mathbf{a}\| = \sin \frac{\theta}{2}$ . Temos então duas possíveis escolhas para a orientação do eixo da rotação, dadas respectivamente pelos vectores unitários  $\mathbf{u} = \pm \frac{\mathbf{a}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ . Uma vez escolhido o ângulo  $\theta$  e o vector  $\mathbf{u}$ , a fórmula de Euler toma a forma:

$$\boxed{\mathbf{y} = \psi_A(\mathbf{x}) = (\cos \theta)\mathbf{x} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})\mathbf{u} + (\sin \theta)(\mathbf{u} \times \mathbf{x})} \quad (1.4.37)$$

<sup>1</sup>A interpretação física deste facto, é a seguinte:  $\mathbb{C}^2$  representa o espaço de estados internos de um sistema quântico, uma partícula de spin  $\frac{1}{2}$ , localizada perto da origem  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$  (por exemplo, um electrão). A existência de um campo magnético, determina uma direcção  $\mathbb{R}^+\{\mathbf{x}\} = \{a\mathbf{x} : a > 0\}$  em  $\mathbb{R}^3$ . Neste campo o sistema terá dois estados estacionários, que são precisamente  $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^+$  e  $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^-$ . Se por exemplo, a direcção  $\mathbb{R}^+\{\mathbf{x}\}$  corresponde à parte positiva do eixo dos  $zz$ , então o estado  $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^+$  diz-se o estado com “ projecção de spin  $+\frac{1}{2}$ , ao longo do eixo dos  $zz$ ” (ou “spin up”), enquanto que  $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}^-$  se diz o estado com “ projecção de spin  $-\frac{1}{2}$ , ao longo do eixo dos  $zz$ ” (ou “spin down”).

que representa uma rotação de eixo gerado por  $\mathbf{u}$ , e ângulo  $\theta$  no sentido directo.

(ix). Mostrar que  $\psi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ , definida por  $A \mapsto \psi_A$ , é um homomorfismo de grupos. Mostrar que se  $\mathbf{R}_{(\mathbf{u};\varphi)}$  é a rotação de eixo gerado pelo vector unitário  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ , e de ângulo  $\varphi$ , então  $A = \cos \theta \mathbf{1} - i \sin \theta \tilde{\mathbf{u}} \in SU(2)$  é tal que  $\Psi(\pm A) = \mathbf{R}_{(\mathbf{u};\varphi)}$ , e em particular  $\psi$  é sobrejectivo.

**Nota...** Por exemplo, temos que:

$$\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_1 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.4.38)$$

$$\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_2 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.4.39)$$

$$\cos \frac{\theta}{2} \mathbf{1} - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_3 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.40)$$

(x). Mostrar que  $\ker \psi = \{\pm \mathbf{1}\} = \mathbb{Z}_2$  e que  $SO(3)$  é isomorfo a  $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ .

(xi). Para cada  $A = \gamma(a) = a^0 \mathbf{1} + i \sum_k a^k \sigma_k = a^0 + i \mathbf{a} \cdot \vec{\sigma} \in SU(2)$ , definem-se os chamados “parâmetros de Cayley-Klein” (também chamados parâmetros de Euler, ou ainda de Euler-Rodrigues), através das notações mais usuais seguintes:

$$a^0 = \rho \quad \mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

Mostre utilizando a fórmula de Euler (1.4.36), que a matriz de  $\psi_A$  (notada por  $\mathbf{R}(\rho, \alpha, \beta, \gamma)$ ), na base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , é a matriz:

$$\mathbf{R}(\rho, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \rho^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 & 2(\alpha\beta - \gamma\rho) & 2(\alpha\gamma + \beta\rho) \\ 2(\alpha\beta + \gamma\rho) & \rho^2 + \beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 & 2(\beta\gamma - \alpha\rho) \\ 2(\alpha\gamma - \beta\rho) & 2(\beta\gamma - \alpha\rho) & \rho^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 \end{bmatrix}.$$

**Nota...** Desta forma obtemos uma parametrização das rotações de  $SO(3)$  através dos 4 parâmetros de Cayley-Klein  $\rho, \alpha, \beta, \gamma$ , que satisfazem a condição  $\rho^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

♣ **Exercício 1.27** ... Seja  $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, \cdot)$  o espaço Euclideano de dimensão 3. O grupo Euclideano especial  $SE(3)$  é o grupo constituído pelos movimentos rígidos que preservam a orientação usual de  $\mathbb{E}^3$ . Um tal movimento rígido  $g \in SE(3)$  é a composta de uma translacção  $t_{\mathbf{r}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{r}$ , com uma rotação  $R \in SO(3)$ :

$$g(\mathbf{x}) = (t_{\mathbf{r}} \circ R)\mathbf{x} = R\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

(i). Mostre que o grupo  $\mathbb{E}(3)$  pode ser identificado com o subgrupo de  $SL(4, \mathbb{R})$  constituído pelas matrizes da forma:

$$g = \begin{bmatrix} R & \mathbf{r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad R \in SO(3), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.4.41)$$

(ii). Mostre que a álgebra de Lie  $\mathfrak{se}(3)$  do grupo Euclideano  $SE(3)$  é a subálgebra de Lie de  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$  constituída pelas matrizes da forma:

$$\xi = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \mathbf{y} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cong (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{com} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.4.42)$$

onde usamos o isomorfismo:

$$\widehat{\cdot}: \mathbb{R}^3 \rightarrow so(3), \quad \mathbf{x} \mapsto \widehat{\mathbf{x}} = x^i \widehat{\mathbf{e}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}$$

entre a álgebra de Lie  $(\mathbb{R}^3, \times)$  (onde  $\times$  é o produto vectorial usual em  $\mathbb{R}^3$  com a orientação usual, isto é:  $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ ), e a álgebra de Lie de  $SO(3)$ :  $so(3) = so(3, \mathbb{R}) = \{\xi \in gl(3, \mathbb{R}) : \xi = -\xi^t\}$ , de tal forma que:

$$[\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}}] = \widehat{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}$$

(iii). Mostre que, usando as identificações anteriores, o parêntesis de Lie em  $se(3)$  é dado por:

$$[(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}', \mathbf{y}')] = [\mathbf{x} \times \mathbf{x}', \mathbf{x} \times \mathbf{y}' - \mathbf{x}' \times \mathbf{y}]$$

## 1.5 Diferenciais e aplicações tangentes

### 1.5.1 Diferenciais

♣ **Definição 1.11** ... Seja  $M$  uma variedade em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. A “diferencial de  $f$  num ponto  $p \in M$ ” é a aplicação linear:

$$df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.5.1)$$

que se define do seguinte modo: Consideremos uma parametrização local  $\Phi : U \rightarrow M$  de  $M$  em torno de  $p$ . Dado um vector tangente  $\mathbf{V}_p \in T_p M$ , seja  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$  o único vector de  $\mathbb{R}^k$  tal que  $d\Phi_u(\mathbf{v}) = \mathbf{V}_p$ , onde  $\Phi(u) = p$ . Pômos então por definição:

$$\begin{aligned} df_p(\mathbf{V}_p) &\stackrel{\text{def}}{=} d(f \circ \Phi)_u(\mathbf{v}) \\ &= D_{\mathbf{v}}(f \circ \Phi)(u) \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

onde  $D_{\mathbf{v}}$  representa a derivada direccional na direcção de  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ .

Note que esta definição não depende da parametrização escolhida. Com efeito se  $\Psi : V \rightarrow M$  é uma outra parametrização local de  $M$  em torno de  $p$ , com  $\Psi(y) = p$ , seja  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$  o único vector de  $\mathbb{R}^k$  tal que  $d\Psi_y(\mathbf{w}) = \mathbf{V}_p$ . Como sabemos as aplicações de mudança de coordenadas locais são difeomorfismos locais. Portanto as respectivas diferenciais são isomorfismos, donde se conclui que:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= d(\Psi^{-1} \circ \Phi)_u(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v} &= d(\Phi^{-1} \circ \Psi)_y(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} df_p(\mathbf{V}_p) &\stackrel{\text{def}}{=} d(f \circ \Phi)_u(\mathbf{v}) \\ &= d(f \circ \Psi \circ \Psi^{-1} \circ \Phi)_u(\mathbf{v}) \\ &= d(f \circ \Psi)_{(\Psi^{-1} \circ \Phi)(u)} \circ d(\Psi^{-1} \circ \Phi)_u(\mathbf{v}) \\ &= d(f \circ \Psi)_y(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

como se pretendia. Note que  $df_p$  é um funcional linear em  $T_pM$ , isto é,  $df_p$  é um covector ou um elemento do espaço dual  $T_p^*M$ .

A diferencial de  $f$  num ponto  $p \in M$  pode ainda ser calculada da seguinte forma útil na prática: dado  $\mathbf{V}_p \in T_pM$  consideremos uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{V}_p$ . Pômos então:

$$\boxed{df_p(\mathbf{V}_p) = (f \circ \alpha)'(0)} \quad (1.5.3)$$

É fácil verificar que esta definição não depende da curva  $\alpha$  escolhida (satisfazendo as condições indicadas).

Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , e  $\Phi : U \subset \mathbb{R}_u^k \rightarrow V \subseteq M$  uma parametrização local de  $M$ . Suponhamos  $\mathbb{R}_u^k$  munido das coordenadas usuais  $u^1, \dots, u^k$ , de tal forma que cada  $u^i$  é um funcional linear em  $\mathbb{R}^k$  dado por:

$$u^i(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = a_i$$

Cada uma das funções  $u^i \circ \Phi^{-1}$  é diferenciável em  $V \subseteq M$ . A respectiva diferencial num ponto  $p \in V$  tal que  $\Phi(u) = p$ , é dada por:

$$\begin{aligned} d(u^i \circ \Phi^{-1})_p(\mathbf{V}_p) &= d(u^i \circ \Phi^{-1} \circ \Phi)_u(\mathbf{v}) \\ &= (du^i)_u(\mathbf{v}) \\ &= u^i(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o único vector de  $\mathbb{R}^k$  tal que  $d\Phi_u(\mathbf{v}) = \mathbf{V}_p$ . As diferenciais  $d(u^i \circ \Phi^{-1})_p \in T_p^*M$ ,  $i = 1, \dots, k$  notam-se usualmente pelos símbolos:

$$\boxed{du^i|_p \stackrel{\text{def}}{=} d(u^i \circ \Phi^{-1})_p \in T_p^*M, i = 1, \dots, k} \quad (1.5.5)$$

São elementos de  $T_p^*M$  e além disso  $\{du^1|_p, du^2|_p, \dots, du^k|_p\}$  é a base de  $T_p^*M$  dual à base  $\{\frac{\partial}{\partial u^i}|_p\}_{i=1, \dots, k}$  de  $T_pM$ , isto é:

$$du^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \right) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Com efeito, usando (1.5.4), vem que:

$$du^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \right) = u^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$$

Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável e se  $p \in M$  então  $df_p \in T_p^*M$  e portanto existem escalares únicos  $a_i$  tais que:

$$df_p = a_1 du^1|_p + a_2 du^2|_p + \dots + a_k du^k|_p$$

De facto, se  $\Phi(u) = p$ :

$$\begin{aligned} a_i &= df_p \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) \\ &= d(f \circ \Phi)_u(\mathbf{e}_i) \\ &= \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u^i}(u) \end{aligned} \quad (1.5.6)$$



É usual designar  $\frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u^i}(u)$  pelo símbolo abreviado  $\frac{\partial f}{\partial u^i}(p)$ :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial u^i}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u^i}(u)} \quad (1.5.7)$$

e com estas notações  $df_p$  tem a seguinte expressão:

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial u^1}(p) du^1|_p + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u^k}(p) du^k|_p \quad (1.5.8)$$

ou mais simplesmente:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial u^1} du^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u^k} du^k} \quad (1.5.9)$$

A definição 1.11 pode ser generalizada para aplicações diferenciáveis  $F : M \rightarrow N$ , onde  $M$  e  $N$  são variedades em  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  respectivamente:

♣ **Definição 1.12** ... Seja  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável entre variedades  $M \subset \mathbb{R}^n$  e  $N \subset \mathbb{R}^m$ . Define-se a “**diferencial de  $F$  em  $p \in M$** ” ou “**aplicação linear tangente a  $F$  em  $p$** ”, como sendo a aplicação linear:

$$dF_p = F_{*p} : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

definida por:

$$F_{*p}(\mathbf{V}_p) \stackrel{\text{def}}{=} (F \circ \alpha)'(0) \quad (1.5.10)$$

onde  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma curva  $C^\infty$  em  $M$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{V}_p \in T_p M$ .

## 1.5.2 Exemplos e Exercícios

♣ **Exemplo 1.23** ... Seja  $M$  uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{v}$  um vector fixo não nulo em  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos a função altura relativa ao plano vectorial perpendicular a  $\mathbf{v}$ :

$$h : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(p) = p \cdot \mathbf{v}$$

onde  $\cdot$  representa o produto interno usual em  $\mathbb{R}^3$ . Como já sabemos  $f$  é diferenciável. Para calcular a respectiva diferencial  $dh_p$ , consideremos uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{V}_p \in T_p M$ . Temos então que:

$$\begin{aligned} dh_p(\mathbf{V}_p) &= (h \circ \alpha)'(0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha(t) \cdot \mathbf{v}) \\ &= \alpha'(0) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

Portanto  $dh_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  é a aplicação linear definida por  $dh_p : \mathbf{V}_p \mapsto \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{v}$ . Note que  $dh_p(\mathbf{V}_p) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{v} = 0$ . Portanto os pontos críticos de  $h$  são exactamente os pontos  $p \in M$  onde  $T_p M$  é perpendicular a  $\mathbf{v}$ .

♣ **Exercício 1.28** ... Mostre que a aplicação linear tangente  $dF_p = F_{*p} : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$ , dada por (1.5.10), não depende da curva  $\alpha$  e é de facto  $\mathbb{R}$ -linear.

♣ **Exercício 1.29** ... Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Suponhamos que  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$  é uma parametrização local em torno de  $p \in M$ , que  $\Psi : V \subseteq \mathbb{R}_v^k \rightarrow N$  é uma parametrização local em torno de  $F(p) \in M$ , e que nessas coordenadas locais a representação local de  $F$  é dada por:

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi : (u^1, \dots, u^k) \mapsto (v^1(u^1, \dots, u^k), \dots, v^k(u^1, \dots, u^k))$$

Mostre que:

$$F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \Big|_{F(p)}$$

onde  $\left[ \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \right]$  é a chamada “a matriz Jacobiana” de  $F$  em  $p$ .

♣ **Exercício 1.30 Método dos multiplicadores de Lagrange I...** Seja  $M = g^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ , uma hipersuperfície regular, em  $\mathbb{R}^n$ , onde:

$$g : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma função de classe  $C^\infty$ , tal que  $\nabla g(p) \neq \mathbf{0}$ ,  $\forall p \in M$ , e seja:

$$f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável em  $\mathcal{O}$ .

Mostre que se a restrição de  $f$  à hipersuperfície  $M$ ,  $f|_M$ , tem um máximo ou um mínimo local num ponto  $x_0 \in M$ , então existe um número real  $\lambda$  (um **multiplicador de Lagrange**) tal que:

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

- **Resolução** ... Seja  $\mathbf{V} \in T_{x_0}M$ , um qualquer vector do espaço tangente a  $M$  em  $x_0$ . Como assinalamos antes,  $\mathbf{V}$  é o vector velocidade de uma curva diferenciável  $\alpha : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $\alpha(\mathbf{I}) \subset M$  e  $\alpha(0) = x_0$ :  $\mathbf{V} = \alpha'(0)$ .

É claro que  $f \circ \alpha$  tem um extremo local em  $t = 0$ , e por isso:

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \nabla f(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \mathbf{V}$$

o que significa que  $\nabla f(x_0)$  é ortogonal a  $T_{x_0}M$  (uma vez que  $\mathbf{V}$  é arbitrário).

Mas,  $T_{x_0}M$  é o subespaço de  $\mathbb{R}^n$  ortogonal a  $\nabla g(x_0)$ , e portanto existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

♣ **Exercício 1.31 Método dos multiplicadores de Lagrange II...** Seja  $G : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , uma aplicação de classe  $C^\infty$ , definida num aberto  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq m$ . Suponhamos que  $c \in \mathbb{R}^m$  é **valor regular** de  $G$ , de tal forma que  $M = G^{-1}(c)$  é uma variedade em  $\mathbb{R}^n$ , de dimensão  $k = n - m$ .

Seja  $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $\mathcal{O}$ .

Mostre que se a restrição de  $f$  à variedade  $M$ ,  $f|_M$ , tem um máximo ou um mínimo local num ponto  $x_0 \in M$ , então existem um números reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  (**multiplicadores de Lagrange**), tais que:

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_m \nabla G_m(x_0)$$

♣ **Exercício 1.32** ... Seja  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um endomorfismo simétrico de  $\mathbb{R}^n$ , e  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a forma quadrática associada a  $S$ , definida por  $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot S(\mathbf{x})$ .

Mostre que existe um base ortonormada  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ , de  $\mathbb{R}^n$ , constituída por vectores próprios de  $S$ , (isto é:  $S(\mathbf{u}_k) = \lambda_k \mathbf{u}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ), tal que, para cada  $k = 1, \dots, n$ ,  $\lambda_k = q(\mathbf{u}_k)$  é o valor máximo de  $q$ , restrita à esfera unitária no subespaço de  $\mathbb{R}^n$ , perpendicular aos vectores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ .

- **Resolução** ... Escolhamos  $\mathbf{u}_1$  como sendo um máximo condicionado da restrição de  $q$ , à esfera  $\mathbf{S}_1 \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$  (isto é sempre possível...). Consideremos o subespaço de  $\mathbb{R}^n$ , perpendicular a  $\mathbf{u}_1$ :

$$V(\mathbf{u}_1) = \langle \mathbf{u}_1 \rangle^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0\}$$

e escolhamos  $\mathbf{u}_2$  como sendo um máximo condicionado da restrição de  $q$ , à esfera  $\mathbf{S}_2 \equiv \{\mathbf{x} \in V(\mathbf{u}_1) : \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$  (isto é sempre possível...). Consideremos de seguida, o subespaço de  $\mathbb{R}^n$ , perpendicular a  $\mathbf{u}_1$  e a  $\mathbf{u}_2$ :

$$V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2\}$$

e escolhamos  $\mathbf{u}_3$  como sendo um máximo condicionado da restrição de  $q$ , à esfera  $\mathbf{S}_3 \equiv \{\mathbf{x} \in V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) : \|\mathbf{x}\|^2 = 1\}$  (isto é sempre possível...).

Procedendo sucessivamente desta forma, conseguimos  $n$  vectores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  que são evidentemente ortonormais. Resta provar que eles são vectores próprios de  $S$ .

Como por construção,  $q$  tem um máximo condicionado em  $\mathbf{u}_1$ , quando restrita à esfera  $\mathbf{S}_1$ , existe um multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$ , tal que:

$$\nabla q(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \nabla g(\mathbf{u}_1) \tag{1.5.11}$$

onde  $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 - 1$ . Mas o gradiente de  $q$  é dado por  $\nabla q(\mathbf{x}) = 2S(\mathbf{x})$ , e em particular  $\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ . Portanto a condição (1.5.11) é equivalente a:

$$S(\mathbf{u}_1) = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

o que significa exactamente que  $\mathbf{u}_1$  é vector próprio associado ao valor próprio  $\lambda_1$ .

O mesmo argumento pode ser utilizado sucessivamente, para concluir que  $\mathbf{u}_k$  é vector próprio de  $S$ .

A forma quadrática associada a  $S$  pode então ser escrita na forma diagonal:

$$q(\mathbf{x}) = q(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \tag{1.5.12}$$

e é claro que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

- ♣ **Exercício 1.33** ... Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Considere o conjunto:

$$TM \stackrel{def}{=} \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M\} \tag{1.5.13}$$

(i). Mostre que  $TM$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $2k$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .  $TM$  diz-se o **fibrado tangente de  $M$** .

(ii). Se  $F : M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável, onde  $N$  é uma variedade diferenciável, defina aplicação  $TF : TM \rightarrow TN$  através de:

$$TF(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (F(\mathbf{x}), dF_{\mathbf{x}}(\mathbf{v})), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in TM$$

Mostre que  $F$  é diferenciável. Calcule  $TF$  em coordenadas locais.

(iii). Mostre que  $\pi : TM \rightarrow M, (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{x}$ , é uma submersão.

- ♣ **Exercício 1.34** ... Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Considere o conjunto:

$$TM^\perp \stackrel{def}{=} \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M^\perp\} \tag{1.5.14}$$

(i). Mostre que  $TM^\perp$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .  $TM^\perp$  diz-se o **fibrado normal de  $M$** .

(ii). Mostre que  $\pi : TM^\perp \rightarrow M, (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{x}$ , é uma submersão.

♣ **Exercício 1.35** ... Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Considere o conjunto:

$$T^1M \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M, \|\mathbf{v}\| = 1\} \quad (1.5.15)$$

Mostre que  $T^1M$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $2k - 1$  em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .  $T^1M$  diz-se o **fibrado esférico de  $M$** . Mostre que  $\pi : T^1M \rightarrow M, (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{x}$ , é uma submersão.

♣ **Exercício 1.36** ... Seja  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável entre variedades  $M \subset \mathbb{R}^n$  e  $N \subset \mathbb{R}^m$ .  $F$  diz-se uma **submersão** se  $dF_p = F_{*p} : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  é sobrejectiva  $\forall p \in M$ .

(i). Mostre que uma submersão é uma aplicação aberta.

(ii). Mostre que se  $F : M \rightarrow N$  é uma submersão e se  $M$  é compacta e  $N$  conexa, então  $F$  é sobrejectiva.

(iii). Mostre que não existe qualquer submersão  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ , onde  $M$  é variedade compacta.

♣ **Exercício 1.37** ... Seja  $p$  um polinómio homogéneo de  $n$  variáveis:

$$p(tx^1, tx^2, \dots, tx^n) = t^m p(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

onde  $m$  é um inteiro  $\geq 2$ . Mostre que se  $c \neq 0$ ,  $M_c = p^{-1}(\{c\})$  é uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que todas as hipersuperfícies  $\{M_c\}_{c>0}$  são difeomorfas entre si, bem como todas as hipersuperfícies  $\{M_c\}_{c<0}$ .

♣ **Exercício 1.38** \*... Seja  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável entre variedades  $M$  e  $N$  da mesma dimensão, e suponha que  $c \in N$  é um valor regular de  $F$  e ainda que  $M$  é compacta.

Mostre que  $F^{-1}(\{c\})$  é um conjunto finito  $\{x_1, \dots, x_N\} \subset M$ , e que existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $c$  em  $N$ , tal que  $F^{-1}(V)$  é reunião disjunta  $U_1 \cup \dots \cup U_N$ , onde cada  $U_i$  é uma vizinhança aberta de  $x_i$  que é transformada por  $F$  difeomorficamente sobre  $V$ .

### 1.5.3 Mais exemplos. Envolventes, superfícies regradas e desenvolvíveis

♣ **Exemplo 1.24 Envolventes...** Consideremos uma função de classe  $C^\infty$ :

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \alpha) \mapsto F(\mathbf{x}, \alpha) \quad (1.5.16)$$

e, para cada valor do “parâmetro”  $\alpha \in \mathbb{R}$ , definamos a função parcial:

$$F_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto F_\alpha(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \alpha) \quad (1.5.17)$$

Portanto  $F$  pode ser vista como uma família  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  de funções, parametrizada por  $\alpha$ .

Suponhamos ainda que, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $0$  é valor regular de  $F_\alpha$ , de tal forma que:

$$M_\alpha = F_\alpha^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$$

é uma hipersuperfície regular em  $\mathbb{R}^n$  (para  $n = 2$ , uma curva, para  $n = 3$ , uma superfície, etc...).

É fácil ver que  $0$  é também valor regular de  $F$ , de tal forma que  $M = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície regular em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para  $n = 2$ ,  $M = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , constituída pela reunião das curvas  $M_\alpha \times \{\alpha\}$ :

$$M = \cup_\alpha M_\alpha \times \{\alpha\}$$

Recorde que  $T_{(\mathbf{x},\alpha)}M = \ker dF_{(\mathbf{x},\alpha)}$ . Este espaço tangente será vertical, isto é, será paralelo ao eixo dos  $\alpha$ 's, exactamente quando  $(0, \dots, 0, 1) \in \ker dF_{(\mathbf{x},\alpha)}$ , isto é, quando  $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\mathbf{x}, \alpha) = 0$ . Para  $n = 2$ , a curva em  $\mathbb{R}^3$  definida pelas equações:

$$\begin{cases} F(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \quad (1.5.18)$$

onde pusemos  $\mathbf{x} = (x, y)$ , é a chamada **dobra de  $M$**  - é a curva de  $M$  ao longo da qual a superfície, quando vista na direcção do eixo dos  $\alpha$ 's, parece dobrar-se. A projecção da dobra de  $M$  no plano  $(x, y)$  é a chamada **envolvente da família  $F = \{F_\alpha\}$** . Em geral temos a seguinte:

♣ **Definição 1.13** ... A **envolvente** ou o **discriminante** da família  $F = \{F_\alpha\}$  é por definição o conjunto:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_F \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{tal que } \begin{cases} F(\mathbf{x}, \alpha) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\mathbf{x}, \alpha) = 0 \end{cases}, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}. \right\} \quad (1.5.19)$$

### Exemplos ...

- $F(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - 1$ . As curvas  $M_\alpha = F_\alpha^{-1}(0)$  são circunferências de raio 1, centradas nos pontos  $(\alpha, 0)$  do eixo dos  $yy$ . Temos então que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{tal que } \begin{cases} (x - \alpha)^2 + y^2 - 1 = 0 \\ -2(x - \alpha) = 0 \end{cases}, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}. \right\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm 1\} \end{aligned}$$

isto é,  $\mathcal{E}$  é a reunião das rectas  $y = \pm 1$ .

- $F(x, y, \alpha) = 2\alpha^3 + \alpha(1 - 2y) - x$ . As curvas  $M_\alpha = F_\alpha^{-1}(0)$  são as normais à parábola  $y = x^2$ . Temos então que:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{tal que } \begin{cases} 2\alpha^3 + \alpha(1 - 2y) - x = 0 \\ -2(x - \alpha) = 0 \end{cases}, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}. \right\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 27x^2 = 2(2y - 1)^3\} \end{aligned}$$

que é a envolvente das normais à parábola  $y = x^2$  (ver a figura 1.17).

Figure 1.17: Envolvente das normais à parábola  $y = x^2$

♣ **Exemplo 1.25 Contorno aparente de superfícies...** Em vez de começar, como no exemplo anterior, com uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ ,  $M = \cup_\alpha M_\alpha \times \{\alpha\}$ , formada pela reunião das curvas  $M_\alpha \times \{\alpha\}$ , podemos começar com uma qualquer superfície  $M = F^{-1}(0)$ , onde  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^\infty$  e 0 é valor regular

de  $F$ . Representando de novo por  $(x, y, \alpha)$  as coordenadas usuais em  $\mathbb{R}^3$ , podemos então seccionar  $M$  por planos horizontais  $\alpha = \text{constante}$ , e projectar sobre o plano  $xy$  para obter uma família de curvas nesse plano.

Não há qualquer motivo para supôr que estas curvas são todas regulares. De facto 0 não será valor regular de  $F_\alpha$  quando  $\frac{\partial F_\alpha}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$  e  $\frac{\partial F_\alpha}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$  ambas se anulam em  $(x, y, \alpha)$ , para algum  $(x, y) \in M_\alpha = F_\alpha^{-1}(0)$ . No entanto, quando isto acontece, certamente que  $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$  não será nula, e portanto o plano tangente a  $M$  em  $(x, y, \alpha)$  não será vertical (de facto será horizontal).

Concluindo: os pontos  $(x, y, \alpha)$  de  $M$  nos quais o plano tangente é vertical são todos pontos regulares da função  $F_\alpha$ , e portanto a curva correspondente  $M_\alpha = F_\alpha^{-1}(0)$  é regular. A envolvente destas curvas, isto é, a envolvente de  $F$  restrita ao conjunto dos pontos onde  $\frac{\partial F}{\partial x}$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}$  não se anulam simultaneamente, é o chamado **contorno aparente** de  $M$ , na  $\alpha$ -directção.

♣ **Exercício 1.39** ... Mostre que a equação da normal à parábola  $y^2 = 4(2 - x)$ , no ponto  $(2 - \alpha^2, -2\alpha)$ , é  $F(x, y, \alpha) = \alpha^3 + \alpha x + y = 0$ . Verifique que 0 é valor regular de  $F_\alpha$ ,  $\forall \alpha$ , e que  $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 27y^2 + 4x^3 = 0\}$ .

♣ **Exercício 1.40** ... Mostre que a equação da tangente a  $y = x^3$ , no ponto  $(\alpha, \alpha^3)$ , é  $F(x, y, \alpha) = y - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = 0$ . Calcule a envolvente de  $F$ .

♣ **Exercício 1.41** ... Suponha que 0 é valor regular de  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e que  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um difeomorfismo (em particular  $h' \neq 0$ ). Defina  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  através de  $G(\mathbf{x}, \alpha) = F(\mathbf{x}, h(\alpha))$ . Mostre que 0 é valor regular de cada  $G_\alpha$  e que  $\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_F$ .

♣ **Exercício 1.42** ... Seja  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada por arco. Para cada valor do parâmetro  $\alpha = s$ , calcule a equação cartesiana  $F(x, y, s) = 0$ , da normal à curva no ponto  $f(s)$ . Mostre que 0 é valor regular de cada  $F_s$ , e calcule a envolvente de  $F$ .

- **Resolução** ... A equação da normal à curva no ponto  $f(s)$ , é  $F(x, y, s) = (\mathbf{x} - f(s)) \cdot f'(s) = 0$ . 0 é valor regular de cada  $F_s$  porque nunca se tem simultaneamente  $F = 0 = \frac{\partial F}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F}{\partial y}$ . Como:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -f' \cdot f' + (\mathbf{x} - f) \cdot f'' = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{x} - f) \cdot k\mathbf{n} = -1 + (\mathbf{x} - f) \cdot k\mathbf{n}$$

onde  $\mathbf{t}$  representa a tangente unitária de  $f$  e  $k$  a curvatura. Portanto:

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{existe } s \in \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} (\mathbf{x} - f(s)) \cdot \mathbf{t}(s) & = 0 \\ -1 + (\mathbf{x} - f(s)) \cdot k(s)\mathbf{n}(s) & = 0 \end{cases} \right\}$$

A primeira equação diz que  $\mathbf{x} - f(s) = a(s)\mathbf{n}(s)$  e portanto da segunda equação obtemos:  $-1 + a\mathbf{n} \cdot k\mathbf{n} = 0$ , isto é,  $a = 1/k$  (note que a segunda equação implica que  $k \neq 0$ ). Portanto a equação da envolvente das normais a  $f$  é:

$$\mathbf{x} = f(s) + \frac{1}{k(s)}\mathbf{n}(s)$$

que é a chamada **evoluta** de  $f$  (o lugar geométrico dos centros de curvatura da curva  $f$ ),  $\square$ .

♣ **Exercício 1.43** ... Seja  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada por arco. Calcule a envolvente da família de circunferências centradas nos pontos de  $f(I)$  e de raio fixo igual a  $r > 0$ .

♣ **Exercício 1.44** ... Seja  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada por arco, com curvatura  $k(s) \neq 0, \forall s$ . Recorde que o **plano osculador** a  $f$  em  $f(s)$ , é o plano afim que passa em  $f(s)$  e que é gerado pela tangente unitária  $\mathbf{t}$  e pela normal principal  $\mathbf{n}$ . Calcule a envolvente destes planos osculadores.

- **Resolução** ... A família dos planos osculadores é dada por:

$$F(\mathbf{x}, s) = (\mathbf{x} - f(s)) \cdot \mathbf{b}(s) = 0, \quad (\mathbf{x}, s) \in \mathbb{R}^3 \times I$$

onde  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  é a binormal. Como  $\frac{\partial F}{\partial s} = -f' \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{x} - f) \cdot \mathbf{b}' = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{x} - f) \cdot (-\tau \mathbf{n}) = -(\mathbf{x} - f) \cdot \tau \mathbf{n}$ , vem que:

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{tal que } \begin{cases} (\mathbf{x} - f(s)) \cdot \mathbf{b}(s) = 0 \\ (\mathbf{x} - f(s)) \cdot \tau(s) \mathbf{n}(s) = 0 \end{cases}, \text{ para algum } s \in I. \right\}$$

onde  $\tau$  é a torção de  $f$ . A primeira equação diz que  $\mathbf{x} - f = a\mathbf{t} + b\mathbf{n}$  e portanto da segunda equação obtemos  $0 = (a\mathbf{t} + b\mathbf{n}) \cdot \tau \mathbf{n} = b\tau$ , isto é,  $\tau = 0$  ou  $b = 0$ . Portanto a envolvente destes planos osculadores é dada por:

$$\mathbf{x} = f(s) + a\mathbf{t}(s) + b\mathbf{n}(s), \quad \text{onde } \tau(s) = 0 \text{ ou } b = 0$$

e consiste pois dos planos osculadores por inteiro, nos pontos de torção nula, juntamente com todas as linhas tangentes a  $f$   $\square$ .

♣ **Exercício 1.45** ... Suponha de novo que  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\mathbf{x}, \alpha) \mapsto F(\mathbf{x}, \alpha)$  é de classe  $C^\infty$ , e que 0 é valor regular de  $F$ , de tal forma que  $M = F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície regular em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Represente por  $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\mathbf{x}, \alpha) \mapsto \mathbf{x}$  a projecção no primeiro factor, e considere a restrição  $\pi = \Pi|_M : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

(i). Mostre que  $\pi$  é um difeomorfismo local em  $p \in M$  se e só se  $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(p) \neq 0$  (note que esta é precisamente a condição para que o espaço tangente  $T_p M$  não seja vertical).

(ii). Recorde que um **ponto crítico** de  $\pi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é um ponto  $p \in M$  onde  $d\pi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  não é um isomorfismo, enquanto que um **valor crítico** de  $\pi$ , é um ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  que é imagem por  $\pi$  de algum ponto crítico.

O conjunto  $\Sigma \subset M$  constituído por todos os pontos críticos de  $\pi$  diz-se o **conjunto dobra** de  $F$  (ou de  $M$ ). À projecção  $\mathcal{E} = \pi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^n$  chama-se a **envolvente** ou o **discriminate** de  $F$ .

Considere agora a aplicação:

$$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\mathbf{x}, \alpha) \mapsto (F(\mathbf{x}, \alpha), \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\mathbf{x}, \alpha)) \quad (1.5.20)$$

de tal forma que  $\Sigma = G^{-1}(0)$ . Mostre que, se  $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}(\mathbf{x}, \alpha) \neq 0$ , então  $G$  é uma submersão e que portanto  $\Sigma = G^{-1}(0)$  é, neste caso, uma subvariedade de dimensão  $n - 1$  em  $M$ .

(iii). Considere a família  $F$  de circunferências no plano que passam todas no ponto  $(0, 1/4)$  e cujos centros estão sobre a parábola  $y = x^2$ . Calcule o conjunto dobra  $\Sigma$  de  $F$  e a envolvente de  $F$ .

### ♣ Exemplo 1.26 Superfícies regradas e superfícies desenvolvíveis...

Uma superfície regradada  $M \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície gerada por uma família a um parâmetro  $\alpha = t \in I \subseteq \mathbb{R}$  de rectas:  $\{D_t\}_{t \in I}$ . Estas rectas dizem-se as **geratrizes** (rectilíneas) de  $M$ . Como exemplos simples, temos os cilindros e os cones. Uma parametrização de uma superfície regradada é do tipo:

$$\Phi(t, \lambda) = \mathbf{p}(t) + \lambda \mathbf{v}(t), \quad t \in I, \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.5.21)$$

Para cada  $t$  fixo,  $\lambda \mapsto \Phi(t, \lambda) = \mathbf{p}(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$  é uma parametrização da geratriz  $D_t$ , que é portanto uma recta em  $\mathbb{R}^3$  que passa em  $\mathbf{p}(t)$  e é paralela ao vector  $\mathbf{v}(t)$  ( $\lambda$  é um parâmetro que selecciona um ponto sobre essa geratriz). Podemos sempre supôr que  $\|\mathbf{v}(t)\| = 1, \forall t$ . A curva  $t \mapsto \mathbf{p}(t)$  diz-se a **directriz** de  $M$ .

Exemplo ...

- Considere a superfície do hiperbolóide  $M \subset \mathbb{R}^3$ , definido pela equação  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . A aplicação  $\Phi : ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por:

$$\begin{aligned}\Phi(t, \lambda) &= \mathbf{p}(t) + \lambda \mathbf{v}(t) \\ &= (\cos t, \sin t, 0) + \lambda(-\sin t, \cos t, 1)\end{aligned}$$

é uma parametrização local de  $M$ , que exhibe  $M$  como superfície regradada,  $\square$ .

O espaço tangente num ponto  $p = \Phi(t, \lambda) \in M$ , é gerado pelos dois vectores  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{p}'(t) + \lambda \mathbf{v}'(t)$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \mathbf{v}(t)$ :

$$T_p M = \langle \mathbf{p}'(t) + \lambda \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t) \rangle_{\mathbb{R}}, \quad p = \Phi(t, \lambda)$$

onde  $' = \frac{d}{dt}$ . Portanto  $M$  será regular em  $p$  sse estes vectores forem linearmente independentes. Note que, num ponto regular, o espaço tangente é paralelo à geratriz que passa nesse ponto.

Vejam sob que condições é que o espaço tangente em dois pontos distintos  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ , de uma mesma geratriz  $D_t$ , é o mesmo. Como  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in D_t$ , podemos pôr:  $\mathbf{p}_1 = \Phi(t, \lambda_1)$  e  $\mathbf{p}_2 = \Phi(t, \lambda_2)$  (o mesmo  $t$  em ambos). Os dois espaços tangentes contêm ambos o vector  $\mathbf{v}(t)$  e, respectivamente, os vectores  $\mathbf{p}'(t) + \lambda_1 \mathbf{v}'(t)$  e  $\mathbf{p}'(t) + \lambda_2 \mathbf{v}'(t)$ . Eles coincidem se e só se os vectores:

$$\{\mathbf{p}'(t) + \lambda_1 \mathbf{v}'(t), \mathbf{p}'(t) + \lambda_2 \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}(t)\}$$

são linearmente dependentes, ou, de forma equivalente, se e só se os vectores  $\{\mathbf{p}'(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t)\}$  são linearmente dependentes, ou ainda sse  $[\mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t), \mathbf{p}'(t)] = \mathbf{v}(t) \cdot (\mathbf{v}'(t) \times \mathbf{p}'(t)) = 0$ . Note que esta condição é independente de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Portanto, se ela se verifica, o espaço tangente será sempre o mesmo em todos os pontos da geratriz  $D_t$ . Quando esta condição se verifica para todas as geratrizes de uma superfície regradada, diz-se que ela é planificável ou desenvolvível.

♣ **Definição 1.14** ... Uma superfície regradada  $M \subset \mathbb{R}^3$ , parametrizada por  $\Phi(t, \lambda) = \mathbf{p}(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$  diz-se **planificável** ou **desenvolvível**, se:

$$[\mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t), \mathbf{p}'(t)] = 0 \quad (1.5.22)$$

### Exemplos ...

- **Superfícies cilíndricas...** neste caso  $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}$  (constante independente de  $t$ ):

$$\Phi(t, \lambda) = \mathbf{p}(t) + \lambda \mathbf{v}$$

Como  $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{0}$ , a condição (1.5.22) é evidentemente satisfeita.

- **Superfícies cónicas...** neste caso  $\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{p}$  (constante independente de  $t$ ), que é o vértice do cone (deve ser excluído para obter uma superfície regular):

$$\Phi(t, \lambda) = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v}(t)$$

Como  $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{0}$ , a condição (1.5.22) é evidentemente satisfeita.

Consideremos de novo uma superfície desenvolvível  $M \subset \mathbb{R}^3$ , parametrizada por  $\Phi(t, \lambda) = \mathbf{p}(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$ , com  $[\mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t), \mathbf{p}'(t)] = 0$ . Suponhamos ainda que  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{v}'(t)$  são linearmente independentes  $\forall t$ .

Vamos mostrar que existe uma curva  $\gamma$  traçada em  $M$ , com uma parametrização do tipo:

$$f : \alpha \mapsto f(t) = \mathbf{p}(t) + \lambda(t) \mathbf{v}(t) \quad (1.5.23)$$

que satisfaz a condição seguinte: em todo o ponto  $f(t) \in M$ , o vector tangente correspondente  $f'(t)$  é paralelo à direcção  $\mathbf{v}(t)$  da geratriz  $D_t$ , que contém  $f(t)$ .



Com efeito, calculemos  $\lambda(t)$ , de tal forma a que:

$$f'(t) = \mathbf{p}'(t) + \lambda'(t) \mathbf{v}(t) + \lambda(t) \mathbf{v}'(t)$$

seja colinear com  $\mathbf{v}(t)$ , isto é:

$$\begin{aligned} f'(t) \times \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} &= (\mathbf{p}'(t) + \lambda'(t) \mathbf{v}(t) + \lambda(t) \mathbf{v}'(t)) \times \mathbf{v}(t) \\ &= \mathbf{p}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \lambda(t) \mathbf{v}'(t) \times \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

Recorde que suposemos que  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{v}'(t)$  são linearmente independentes  $\forall t$  (isto é,  $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{v}'(t) \neq \mathbf{0}$ ), e que  $\{\mathbf{v}(t), \mathbf{v}'(t), \mathbf{p}'(t)\}$  são linearmente dependentes. Logo estes três vectores pertencem ao plano gerado por  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{v}'(t)$ , e a relação vectorial (1.5.24) é portanto uma relação de vectores colineares, ambos perpendiculares a esse plano, que permite pois determinar a função  $\lambda(t)$  pretendida.

A curva que acabamos de construir diz-se a **curva de regressão** da superfície desenvolvível  $M \subset \mathbb{R}^3$ .

♣ **Exemplo 1.27 Superfície desenvolvível tangente a uma curva em  $\mathbb{R}^3$ ...**

Seja  $t \mapsto f(t)$  uma curva parametrizada regular em  $\mathbb{R}^3$ , de classe  $C^\infty$ , tal que  $f'(t)$  e  $f''(t)$  são linearmente independentes  $\forall t$ . Representemos por  $D_t$  a recta afim tangente a  $f$  em  $f(t)$ . Esta recta pode ser representada parametricamente por:

$$\lambda \mapsto f(t) + \lambda f'(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e a família dessas rectas pode ser “reunida” na aplicação:

$$F(t, \lambda) = f(t) + \lambda f'(t)$$

que é fácil ver que é uma parametrização de uma superfície desenvolvível que se diz a **superfície desenvolvível tangente à curva  $f$** .

♣ **Exemplo 1.28 Superfície desenvolvível osculadora...**

Suponhamos que  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ , e que  $s \mapsto f(s)$  é uma curva em  $S$ , parametrizada por arco. Consideremos a família  $\{T_{f(s)}S\}$  de espaços tangentes a  $S$ , ao longo da curva  $f$ . Se  $0 \neq h \in \mathbb{R}$  é pequeno, os espaços tangentes  $T_{f(s)}S$  e  $T_{f(s+h)}S$  intersectam-se ao longo de uma recta, paralela ao vector:

$$\frac{N(s) \times N(s+h)}{h}$$

e, quando  $h \rightarrow 0$ , esta recta converge para uma posição limite, paralela ao vector:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(s) \times N(s+h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} N(s) \times \frac{N(s+h) - N(s)}{h} \\ &= N(s) \times N'(s) \end{aligned} \quad (1.5.25)$$

Suponhamos que  $N'(s) \neq \mathbf{0}$ ,  $\forall s$ , e consideremos a superfície regradada  $M$ , parametrizada por:

$$\Phi(s, \lambda) = f(s) + \lambda \frac{N(s) \times N'(s)}{\|N'(s)\|} \quad (1.5.26)$$

(note que  $\|N(s) \times N'(s)\| = \|N'(s)\|$ ). As geratrizes de  $M$  são portanto as rectas limite de intersecção de planos “infinitesimalmente próximos” da família  $\{f(s) + T_{f(s)}S\}$ .  $M$  diz-se a **superfície desenvolvível osculadora a  $S$ , ao longo da curva  $f$** .

Para provar que  $M$  é de facto desenvolvível, vamos ver que é válida a condição (1.5.22), com  $\mathbf{p} = f$  e  $\mathbf{v} = \frac{N \times N'}{\|N'\|}$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}, \mathbf{v}', f'] &= \left( \frac{N \times N'}{\|N'\|} \times \left( \frac{N \times N'}{\|N'\|} \right)' \right) \cdot f' \\ &= \left( \frac{N \times N'}{\|N'\|} \times \frac{(N \times N')'}{\|N'\|} \right) \cdot f' \\ &= \frac{1}{\|N'\|^2} (N \times N' \cdot N'') N \cdot f' \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.5.27}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \Phi_s \times \Phi_\lambda &= f'(s) \times \frac{N(s) \times N'(s)}{\|N'(s)\|} \\ &= (f'(s) \cdot N'(s)) \frac{N(s)}{\|N'(s)\|} \\ &= -(f''(s) \cdot N(s)) \frac{N(s)}{\|N'(s)\|} \end{aligned} \tag{1.5.28}$$

onde aplicamos a fórmula  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ . Portanto se  $f''(s) \cdot N(s) \neq \mathbf{0}$  podemos concluir que  $M$  é regular numa vizinhança de  $\lambda = 0$ , e que, além disso,  $M$  é tangente a  $S$  ao longo de  $f$ .

♣ **Exercício 1.46** ... Calcular a superfície desenvolvível osculadora a uma esfera de raio 1, ao longo de um paralelo de colatitude constante  $\theta \equiv a$ .

♣ **Exercício 1.47** ... Uma família diferenciável a um parâmetro de planos  $\{f(t), N(t)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ , é uma correspondência que associa, a cada  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ , um ponto  $f(t) \in \mathbb{R}^3$  juntamente com um vector unitário  $N(t) \in T_{f(t)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ , de tal forma que  $f$  e  $N$  são aplicações  $C^\infty$  em  $I$ , tais que  $f'(t) \neq \mathbf{0}$ ,  $N'(t) \neq \mathbf{0}$  e ainda  $f'(t) \cdot N(t) = 0, \forall t \in I$ .

(i). Mostre que uma família diferenciável a um parâmetro de planos  $\{f(t), N(t)\}$  em  $\mathbb{R}^3$ , determina uma família diferenciável a um parâmetro de rectas  $\{f(t), \frac{N(t) \times N'(t)}{\|N'(t)\|}\}$  em  $\mathbb{R}^3$ , que por sua vez gera uma superfície desenvolvível  $M$ , parametrizada por:

$$\Phi(t, \lambda) = f(t) + \lambda \frac{N(t) \times N'(t)}{\|N'(t)\|}$$

Esta superfície diz-se a **envolvente da família de planos**  $\{f(t), N(t)\}$ .

(ii). Mostre que se  $f'(t) \times (N(t) \times N'(t)) \neq \mathbf{0}, \forall t \in I$ , então a envolvente  $M$  é regular numa vizinhança de  $\lambda = 0$ , e que a normal unitária a  $M$  em  $\Phi(t, 0)$  é  $N(t)$ .

(iii). Seja  $s \mapsto \alpha(s)$  uma curva em  $\mathbb{R}^3$ , parametrizada por arco, cuja curvatura  $k(s)$  e torção  $\tau(s)$  nunca se anulam. Mostre que a família de planos osculadores  $\{\alpha(s), \mathbf{b}(s)\}$  é uma família diferenciável a um parâmetro de planos em  $\mathbb{R}^3$ , e que a envolvente desta família é a superfície desenvolvível tangente a  $\alpha$  (ver o exemplo 1.27).

### 1.5.4 Apêndice: Geometria (local) Euclideana de curvas orientadas em $\mathbb{R}^3$

Consideremos uma parametrização natural  $f : s \in S \mapsto f(s) \in \mathbb{R}^3$ , de uma curva regular em  $\mathbb{R}^3$ , de classe  $C^m$  ( $m \geq 3$ ), de tal forma que  $\|f'(s)\| \equiv 1$ . O vector  $f'(s)$ , diz-se o **vector unitário tangente** em  $s$ , à curva (orientada) representada por  $f$ , e nota-se por  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = f'(s)$ . Notemos que, por mudança de orientação, o vector tangente muda o seu sentido. Como  $\|f'(s)\|^2 = f'(s) \cdot f'(s) \equiv 1 \quad \forall s$ , obtemos por derivação, que:

$$f''(s) \cdot f'(s) = f''(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0 \quad \forall s \tag{1.5.29}$$

o que significa que o vector aceleração  $f''(s) = \mathbf{t}'(s)$ , é sempre perpendicular ao vector tangente  $\mathbf{t} = f'$ . Definimos então a **curvatura de  $f$  em  $s$** , notada por  $k(s)$ , como sendo o número ( $\geq 0$ ):

$$k(s) \equiv \|f''(s)\| = \|\mathbf{t}'(s)\| \quad (1.5.30)$$

Quando  $k(s) \neq 0$ , chama-se **raio de curvatura** de  $f$  em  $s$ , ao número

$$\rho(s) \equiv \frac{1}{k(s)} \quad (1.5.31)$$

Geomètricamente, a curvatura  $k(s)$  fornece uma medida de quão ràpidamente a curva  $f$ , se afasta da sua linha tangente em  $s$ , numa vizinhança de  $s$ .

Assim por exemplo, se  $f(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v}$  (onde  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  são vectores fixos em  $\mathbb{R}^3$ , com  $\|\mathbf{v}\| = 1$ ) é uma recta em  $\mathbb{R}^3$ , então  $k \equiv 0$ . Recìprocamente, se  $k(s) = \|f''(s)\| \equiv 0$ , então por integração deduzimos que  $f(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v}$ , e portanto  $f$  é uma linha recta.

Notemos que  $f''$  e a curvatura permanecem invariantes, se mudarmos a orientação da curva  $f$ . Nos pontos em que  $k(s) \neq 0$ , podemos definir um vector unitário  $\mathbf{n}(s)$ , na direcção do vector aceleração  $f''(s)$ , através de:

$$\mathbf{n}(s) \equiv \frac{f''(s)}{k(s)} \quad (1.5.32)$$

e que é, como já vimos, perpendicular ao vector tangente  $\mathbf{t}(s) = f'(s)$ . O vector  $\mathbf{n}(s)$  diz-se por isso, o **vector normal unitário**, em  $s$ , e o plano que passa em  $f(s)$  e é determinado por  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s)$ , diz-se o **plano osculador**, em  $s$ . Este plano consiste portanto dos pontos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , tais que  $\mathbf{x} - f(s)$  é perpendicular a  $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ , isto é:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad [\mathbf{x} - f(s), f'(s), f''(s)] = 0 \quad (1.5.33)$$

Nos pontos em que  $k(s) = 0$  (que se dizem **pontos de inflexão**), o vector normal e o plano osculador não estão definidos.

Para prosseguir a análise local de  $f$ , vamos supôr que  $k(s) \neq 0, \forall s$ . O vector unitário  $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ , é perpendicular ao plano osculador, e chama-se o **vector binormal**, em  $s$ . Calculemos  $\mathbf{b}'(s)$ . Para isso, observemos que, por um lado  $\mathbf{b}'(s)$  é ortogonal a  $\mathbf{b}(s)$  (uma vez que  $\|\mathbf{b}(s)\|^2 = \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 1$ ), e por outro lado (atendendo a que  $\mathbf{t}'(s) = f''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'(s) &= \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= k(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

o que implica que  $\mathbf{b}'(s)$  é perpendicular também ao vector tangente unitário  $\mathbf{t}(s)$ . Isto significa que  $\mathbf{b}'(s)$  deve ser um múltiplo escalar de  $\mathbf{n}(s)$ , i.e.,  $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s)$ , para alguma função  $\tau(s)$ .

Quando  $f : s \in S \mapsto f(s) \in \mathbb{R}^3$  é uma parametrização natural de uma curva regular em  $\mathbb{R}^3$ , de classe  $C^m$  ( $m \geq 3$ ), tal que  $f''(s) \neq 0, \forall s$ , chama-se **torção** de  $f$  em  $s$ , e nota-se por  $\tau(s)$ , ao número definido por:

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\mathbf{n}(s) \quad (1.5.35)$$

Geomètricamente,  $|\tau(s)| = \|\mathbf{b}'(s)\|$  fornece uma medida de quão ràpidamente a curva  $f$ , se afasta do seu plano osculador em  $s$ , numa vizinhança de  $s$ . Por exemplo, se  $\tau \equiv 0$  (e  $k \neq 0$ ), então  $\mathbf{b}(s) \equiv \mathbf{b}_o =$  constante, e portanto:

$$\frac{d}{ds}(f(s) \cdot \mathbf{b}_o) = f'(s) \cdot \mathbf{b}_o = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}_o = 0$$

isto é,  $f(s) \cdot \mathbf{b}_o =$  constante, o que significa que  $f(s)$  está contida num plano perpendicular a  $\mathbf{b}_o$ , e portanto  $f$  é uma curva plana (contida no seu plano osculador). A recíproca é também válida.

Notemos que, por mudança de orientação, o vector binormal  $\mathbf{b}$  muda de sinal, uma vez que  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ . Deduzimos por isso que  $\mathbf{b}'$ , e portanto a torção  $\tau$ , permanecem invariantes sob mudança de orientação de  $f$ .

Vamos resumir o que fizemos até agora:

- (i)... A cada valor do parâmetro natural  $s$ , associamos um referencial móvel constituído por três vectores unitários, ortogonais entre si:

$$\begin{cases} \mathbf{t}(s) = f'(s) & \text{vector unitário tangente} \\ \mathbf{n}(s) = \frac{f''(s)}{k(s)} & \text{vector unitário normal} \\ \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) & \text{binormal} \end{cases} \quad (1.5.36)$$

O referencial:

$$\{f(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\} = \left\{ f(s); [E_1 \ E_2 \ E_3] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x' & x''/k & (y'z'' - z'y'')/k \\ y' & y''/k & (z'x'' - x'z'')/k \\ z' & z''/k & (x'y'' - y'x'')/k \end{bmatrix}}_{R(s)} \right\} \quad (1.5.37)$$

diz-se o **triedro de Frenet** de  $f$  em  $s$ .

- (ii)... Em seguida, exprimimos as derivadas  $\mathbf{t}'(s)$  e  $\mathbf{b}'(s)$ , de  $\mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{b}(s)$ , na base  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= k(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s) \mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

obtendo deste modo, certas entidades geométricas (a curvatura  $k(s)$ , e a torção  $\tau(s)$ ), que dão informação sobre o comportamento de  $f$ , numa vizinhança de  $s$ .

- (iii)... Calculemos finalmente a derivada  $\mathbf{n}'(s)$ , exprimindo-a na base  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ . Como  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(s) &= \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s) \\ &= \tau(s) \mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times k(s) \mathbf{n}(s) \\ &= -\tau(s) \mathbf{b}(s) - k(s) \mathbf{t}(s) \end{aligned} \quad (1.5.38)$$

e obtemos de novo a curvatura e a torção.

As equações acima obtidas:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & k(s) \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) = & -k(s) \mathbf{t}(s) & -\tau(s) \mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = & \tau(s) \mathbf{n}(s) \end{cases}$$

ou em forma matricial:

$$[\mathbf{t}' \ \mathbf{n}' \ \mathbf{b}'] = [\mathbf{t} \ \mathbf{n} \ \mathbf{b}] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \quad (1.5.39)$$

dizem-se as **equações de Frenet** da curva  $f$ . Por (1.5.37), vem que:

$$[\mathbf{t} \ \mathbf{n} \ \mathbf{b}] = E \cdot R(s) \quad \Rightarrow \quad E = [\mathbf{t} \ \mathbf{n} \ \mathbf{b}] \cdot R(s)^{-1}$$

onde  $E = [E_1 \ E_2 \ E_3]$  é a base canónica de  $\mathbb{R}^3$ , e derivando em ordem  $s$  obtemos:

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}' \ \mathbf{n}' \ \mathbf{b}'] &= E \cdot R' \\ &= [\mathbf{t} \ \mathbf{n} \ \mathbf{b}] \cdot R^{-1}R' \end{aligned} \quad (1.5.40)$$

isto é:

$$R^{-1}R' = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \in so(3) \quad (1.5.41)$$

Finalmente, o plano que passa em  $f(s)$  e é determinado pelo par  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\}$ , diz-se o **plano rectificante** em  $s$ , e o plano que passa em  $f(s)$  e é determinado pelo par  $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ , diz-se o **plano normal** em  $s$ . A seguinte proposição, mostra que a curvatura e a torção descrevem completamente o comportamento local da curva, a menos de um movimento rígido em  $\mathbb{R}^3$ :

♣ **Teorema 1.7** (Teorema fundamental da teoria local das curvas em  $\mathbb{R}^3$ ) ... Dadas funções diferenciáveis  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$ ,  $s \in \mathbf{I}$ , existe uma curva parametrizada regular  $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $s$  é o parâmetro comprimento de arco,  $k(s)$  é a curvatura e  $\tau(s)$  a torção de  $f$ .

Além disso, qualquer outra curva  $\bar{f}$ , que satisfaz as mesmas condições, difere de  $f$  por um movimento rígido em  $\mathbb{R}^3$ , isto é, existe uma transformação ortogonal  $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (com determinante positivo), e um vector  $c \in \mathbb{R}^3$ , tais que  $\bar{f} = c + R \circ f$ .

## 1.6 Métricas Riemannianas. Comprimento de arco. Isometrias.

### 1.6.1 Métricas Riemannianas

Começemos por recordar que um “**produto interno**” (Euclideano) num espaço vectorial real  $\mathcal{V}$ , é uma aplicação:

$$g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.6.1}$$

que verifica as condições seguintes:

- $g$  é simétrica:

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} \tag{1.6.2}$$

- $g$  é bilinear:

$$g(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \tag{1.6.3}$$

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \tag{1.6.4}$$

$$g(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) \tag{1.6.5}$$

- $g$  é não degenerada e definida positiva:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad e \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{1.6.6}$$

$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . A “**norma**” (associada a  $g$ ) de um vector  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , define-se então por  $\|\mathbf{v}\| \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$

♣ **Definição 1.15** ... Seja  $M$  uma variedade em  $\mathbb{R}^n$ . Uma “**métrica Riemanniana**” em  $M$ , é uma aplicação  $g$ , que a cada ponto  $p \in M$ , associa um produto interno  $g_p$  no espaço tangente  $T_pM$ , e que varia diferenciavelmente, no sentido seguinte:

- Se  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma parametrização local de  $M$ , em torno de  $p \in M$ , consideremos para cada  $q = \Phi(u) \in \Phi(U)$ , a base de  $T_qM$ , associada à parametrização  $\Phi$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial u^i} \right|_q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}(u) \quad i = 1, \dots, k$$

onde  $\Phi(u) = \Phi(u^1, \dots, u^k) = q \in M$ .

- Definamos então as funções  $g_{ij} : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ , através de:

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^k) \stackrel{\text{def}}{=} g_q \left( \left. \frac{\partial}{\partial u^i} \right|_q, \left. \frac{\partial}{\partial u^j} \right|_q \right) \tag{1.6.7}$$

Exige-se então que estas funções sejam de classe  $C^\infty$ .

As funções definidas por (1.6.7), dizem-se os “coeficientes da métrica  $g$ ”, na parametrização  $\Phi$ , ou nas coordenadas locais associadas  $u^1, \dots, u^k$ .

A  $g$  dá-se por vezes o nome de “tensor métrico” ou ainda “primeira forma fundamental”. É usual utilizar a notação seguinte (cujo significado analisaremos em breve), para a expressão local de  $g$ , nas coordenadas locais  $u^1, \dots, u^k$ :

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} g(u^1, \dots, u^k) = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(u^1, \dots, u^k) du^i du^j \quad (1.6.8)$$

onde as funções  $g_{ij}$  são dadas por (1.6.7).

Uma situação particularmente importante, é a seguinte. Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Como sabemos, o espaço tangente  $T_p M$ , em cada ponto  $p \in M$ , é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^n$ . Definamos então um produto interno em cada  $T_p M$ , restringindo a  $T_p M$  o produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ , isto é:

$$g_p(\mathbf{U}_p, \mathbf{V}_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U}_p \cdot \mathbf{V}_p \quad \forall \mathbf{U}_p, \mathbf{V}_p \in T_p M \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.6.9)$$

Quando  $M$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , e:

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}_{(u,v)}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é uma parametrização local de  $M$ , os coeficientes da métrica definida por (1.6.9), são em geral escritos na forma:

$$\begin{aligned} E(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} g_{11}(u, v) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \\ F(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} g_{12}(u, v) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \\ G(u, v) &\stackrel{\text{def}}{=} g_{22}(u, v) = \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

e são funções diferenciáveis em  $U$ , com  $E > 0$ ,  $G > 0$  e ainda  $EG - F^2 > 0$ . É usual escrever a expressão local da métrica  $g$ , nas coordenadas locais  $(u, v)$ , com a seguinte notação:

$$g = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \quad (1.6.11)$$

## 1.6.2 Exemplos

♣ **Exemplo 1.29** ... A expressão local (1.6.8), para a métrica euclídeana usual em  $\mathbb{R}^2$ , em coordenadas polares, tem o aspecto seguinte:

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} g(r, \theta) = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (1.6.12)$$

♣ **Exemplo 1.30** ... A expressão local (1.6.8), para a métrica euclídeana usual em  $\mathbb{R}^3$ , em coordenadas esféricas, tem o aspecto seguinte:

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} g(r, \theta, \varphi) = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (1.6.13)$$

♣ **Exemplo 1.31** ... A expressão local (1.6.8), para a métrica euclideana usual em  $\mathbb{R}^3$ , em coordenadas cilíndricas, tem o aspecto seguinte:

$$ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} g(r, \theta, z) = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \quad (1.6.14)$$

Note que nestes exemplos  $g_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , isto é, os vectores das base para os espaços tangentes considerados, são ortogonais entre si. Neste caso diz-se que as coordenadas locais são ortogonais.

♣ **Exemplo 1.32** ... Consideremos a esfera de raio 1,  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , e a parametrização local em coordenadas geográficas:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

Como vimos antes, a base para o espaço tangente  $T_p \mathbf{S}^2$ , num ponto  $p = \Phi(\theta, \varphi) \in \mathbf{S}^2$ , associada à parametrização local  $\Phi$ , é constituída pelos dois vectores seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = (-\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

e portanto, os coeficientes da métrica usual em  $\mathbf{S}^2$ , nestas coordenadas esféricas, são:

$$\begin{aligned} E(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta = 1 \\ F(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \\ G(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

e a expressão local da métrica  $g$  nas coordenadas locais  $(\theta, \varphi)$ , é:

$$\begin{aligned} g = ds^2 &= E d\theta^2 + 2F d\theta d\varphi + G d\varphi^2 \\ &= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

Portanto, se  $\mathbf{V}_p$  é um vector tangente à esfera, num ponto  $p = \Phi(\theta, \varphi)$ , cujas coordenadas na base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_p \right\}$  de  $T_p \mathbf{S}^2$ , são:

$$\mathbf{V}_p = a \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p + b \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big|_p$$

então o quadrado do comprimento de  $\mathbf{V}_p$  é igual a:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_p\|^2 &= E(\theta, \varphi) a^2 + 2F(\theta, \varphi) ab + G(\theta, \varphi) b^2 \\ &= a^2 + b^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

### 1.6.3 Comprimento de Arco

Consideremos de novo uma variedade  $M$  de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , e uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  por pedaços.

Suponhamos que  $\alpha(t) \in M$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , e que  $M$  está munida de uma métrica riemanniana  $g$ . Nestas condições define-se o “**comprimento de  $\alpha$** ”, através de:

$$\ell(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt \quad (1.6.19)$$

Suponhamos que  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma parametrização local de  $M$ , tal que  $\alpha([a, b]) \subset \Phi(U)$ , e que:

$$\alpha(t) = \Phi(\beta(t)) = \Phi(u^1(t), \dots, u^k(t)) \quad (1.6.20)$$

isto é,  $\beta(t) = \Phi^{-1}(\alpha(t)) = (u^1(t), \dots, u^k(t))$  é a expressão local da curva  $\alpha$ , nas coordenadas locais  $u^1, \dots, u^k$ .

Temos então que (pela regra da cadeia):

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \sum_{i=1}^k \frac{du^i}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial u^i}(\alpha(t)) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}M \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

e portanto:

$$\begin{aligned} g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) &= g_{\alpha(t)} \left( \sum_{i=1}^k \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\alpha(t)}, \sum_{i=1}^k \frac{du^i}{dt} \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\alpha(t)} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} g_{\alpha(t)} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{\alpha(t)}, \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{\alpha(t)} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(u^1(t), \dots, u^k(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

Para uma curva  $\alpha$  nas condições indicadas, define-se a função “**comprimento de arco**”,  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , através de:

$$s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt \quad (1.6.23)$$

Em coordenadas locais é dada por (atendendo a (1.6.22):

$$s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^t \left[ \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(u^1(t), \dots, u^k(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right]^{1/2} dt \quad (1.6.24)$$

Esta última expressão conduz à notação frequentemente utilizada para o tensor métrico  $g$ , e que já antes foi referida:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(u^1, \dots, u^k) du^i du^j$$

### 1.6.4 Isometrias

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades e  $F : M \rightarrow N$  um difeomorfismo local (de tal forma que  $F_{*p} : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$  é um isomorfismo  $\forall p \in M$ ).

Suponhamos que  $N$  está munida de uma métrica Riemanniana  $h$ . Podemos então definir uma métrica Riemanniana em  $M$ , chamada o “**pull-back**” de  $h$  por  $F$ , e notada por  $F^*h$ , através de:

$$(F^*h)_p(\mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p) \stackrel{\text{def}}{=} h_{F(p)}(F_{*p}(\mathbf{V}_p), F_{*p}(\mathbf{W}_p)), \quad \forall p \in M, \forall \mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p \in T_pM \quad (1.6.25)$$



Suponhamos que  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$  é uma parametrização local em torno de  $p \in M$ , e que  $\Psi : V \subseteq \mathbb{R}_v^k \rightarrow N$  é uma parametrização local em torno de  $F(p) \in M$ . Nestas coordenadas locais a representação local de  $F$  é dada por:

$$\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi : (u^1, \dots, u^k) \longmapsto (v^1(u^1, \dots, u^k), \dots, v^k(u^1, \dots, u^k))$$

e a matriz Jacobiana de  $dF_p = F_{*p}$  é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \end{bmatrix}$$

É fácil ver que:

$$F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \Big|_{F(p)}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} (F^*h)_{ij}(u^1, \dots, u^k) &= (F^*h)_p \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \right) \\ &= h_{F(p)} \left( F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right), F_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \right) \right) \\ &= h_{F(p)} \left( \frac{\partial v^m}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^m} \Big|_{F(p)}, \frac{\partial v^\ell}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^\ell} \Big|_{F(p)} \right) \\ &= \frac{\partial v^m}{\partial u^i} \frac{\partial v^\ell}{\partial u^j} h_{F(p)} \left( \frac{\partial}{\partial v^m} \Big|_{F(p)}, \frac{\partial}{\partial v^\ell} \Big|_{F(p)} \right) \\ &= \frac{\partial v^m}{\partial u^i} \frac{\partial v^\ell}{\partial u^j} h_{m\ell}(v^1, \dots, v^k) \end{aligned}$$

isto é:

$$\boxed{(F^*h)_{ij}(u^1, \dots, u^k) = \sum_{m,\ell} \frac{\partial v^m}{\partial u^i} \frac{\partial v^\ell}{\partial u^j} h_{m\ell}(v^1, \dots, v^k)} \quad (1.6.26)$$

♣ **Definição 1.16** ... Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades munidas de métricas Riemannianas  $g$  e  $h$ , respectivamente. Um difeomorfismo  $F : M \rightarrow N$  diz-se uma “**isometria**” entre  $(M, g)$  e  $(N, h)$  se  $g = F^*h$ , isto é se:

$$\boxed{g_p(\mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p) = (F^*h)_p(\mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p) = h_{F(p)}(F_{*p}(\mathbf{V}_p), F_{*p}(\mathbf{W}_p)), \quad \forall p \in M, \forall \mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p \in T_p M} \quad (1.6.27)$$

♣ **Definição 1.17** ... Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades em  $\mathbb{R}^n$  munidas de métricas Riemannianas  $g$  e  $h$ , respectivamente, e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável.  $F$  diz-se uma “**isometria local**” se para cada ponto  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$  e uma vizinhança  $V$  de  $F(p)$  em  $N$  tal que  $F : U \rightarrow V$  é uma isometria.

$M$  e  $N$  dizem-se “**localmente isométricas**” se existir uma isometria local de  $M$  em  $N$  e uma isometria local de  $N$  em  $M$ .

É evidente que se  $F : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo e uma isometria local então  $F$  é uma isometria global. No entanto pode acontecer que duas variedades sejam localmente isométricas sem o serem globalmente.

Em particular, se  $(M, g)$  é uma variedade munida de uma métrica Riemanniana  $g$ , uma isometria (local) de  $M$  é um difeomorfismo (local)  $F : M \rightarrow M$  tal que  $g = F^*g$ . Em termos de coordenadas locais, atendendo a (1.6.26), esta condição escreve-se na forma:

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^k) = \sum_{m, \ell} \frac{\partial v^m}{\partial u^i} \frac{\partial v^\ell}{\partial u^j} g_{m\ell}(v^1, \dots, v^k) \quad (1.6.28)$$

onde  $(u^1, \dots, u^k) \mapsto (v^1(u^1, \dots, u^k), \dots, v^k(u^1, \dots, u^k))$  é a representação local de  $F$ , nessas coordenadas locais.

### 1.6.5 Exemplos e Exercícios

♣ **Exemplo 1.33** ... Seja  $M = \mathbb{R}^2$  com a métrica usual e  $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  o cilindro em  $\mathbb{R}^3$  munido da métrica induzida.  $M$  e  $N$  não são difeomorfos (nem homeomorfos), mas são localmente isométricos.

Se  $\Phi : U \rightarrow V$  é a aplicação  $\Phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$  definida no aberto  $U = ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ , então  $\Phi$  é uma isometria. De facto a expressão local da métrica  $g_N$  na parametrização  $\Phi$  é:

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

como é fácil ver.

♣ **Exercício 1.48** ... Consideremos a curva  $\alpha$  na esfera  $\mathbf{S}^2$ , cuja expressão local em coordenadas geográficas é:

$$\beta : t \rightarrow (\theta(t) = \frac{\pi}{2} - t, \varphi(t) = \log \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}))$$

com  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Calcule o seu comprimento (supondo  $\mathbf{S}^2$  munida da métrica riemanniana usual). Mostre que a curva  $\alpha$ , intersecciona os paralelos  $\theta \equiv c$  (constante), segundo um ângulo constante ( $\alpha$  diz-se uma curva loxodrómica).

- **Resolução** ... Atendendo a que a expressão local da métrica usual  $g$ , nas coordenadas locais  $(\theta, \varphi)$ , é:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

e como:

$$\frac{d\theta}{dt} = -1$$

e ainda:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\operatorname{cosec}^2(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})}{2 \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - t)}$$

vem que:

$$\begin{aligned} \ell(\alpha) &\equiv \int_a^b \left( \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(u_1(t), \dots, u_k(t)) \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} \right)^{1/2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( E(\theta(t), \varphi(t)) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2F(\theta(t), \varphi(t)) \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + G(\theta(t), \varphi(t)) \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{\sin^2 \theta(t)}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - t)} \right)^{1/2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Mostremos agora que a curva  $\alpha$  intersecta os paralelos  $\theta \equiv c$  (constante), segundo um ângulo constante. De facto, designando esse ângulo por  $\phi$ , temos que:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{\left( \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\| \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\|} \\ &= \frac{\frac{d\theta}{dt} F + \frac{d\varphi}{dt} G}{\|\alpha'\| \sqrt{G}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}-t)} \sin^2(\frac{\pi}{2}-t)}{\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2}-t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

♣ **Exercício 1.49 Métrica esférica em  $\mathbb{R}^2$  ...** Considere a esfera  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  munida da métrica Riemanniana usual  $h$ . Consideremos o plano equatorial  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ , e seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2 - \{N\}$  a inversa da projecção estereográfica de  $\mathbf{S}^2 - \{N\}$  sobre o plano equatorial  $\mathbb{R}^2$ , a partir do pólo norte  $N$ . Note que  $F$  é um difeomorfismo.

(i). Construa uma métrica Riemanniana  $g$  em  $\mathbb{R}^2$  de tal forma que  $F$  seja uma isometria, isto é, construa  $g = F^*h$ .

(ii). Considere a curva em  $\mathbb{R}^2$ :

$$\alpha : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0)$$

Calcule seu comprimento quando em  $\mathbb{R}^2$  se considera a métrica esférica contruída em (i).

• **Resolução** ... (i). A métrica  $g$  que se pretende é definida pela condição:

$$g_p(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = F_{*p}(\mathbf{V}) \cdot F_{*p}(\mathbf{W})$$

$\forall p \in \mathbb{R}^2, \forall \mathbf{V}, \mathbf{W} \in T_p\mathbb{R}^2$ . Vamos calcular uma fórmula explícita para  $g$ . Seja  $p \in \mathbb{R}^2$ . A recta que une  $(p, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$  a  $N = (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$  tem por equação:

$$\gamma(t) = (tp, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Esta recta intersecta  $\mathbf{S}^2 - \{N\}$ , quando  $t = \frac{2}{1+\|p\|^2}$  e portanto  $F$  é dada por:

$$F(p) = \left( \frac{2p}{1+\|p\|^2}, \frac{\|p\|^2-1}{1+\|p\|^2} \right) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

Seja agora  $\mathbf{V} \in T_p\mathbb{R}^2$  e  $\alpha(t) = p + t\mathbf{V}$ ,  $t \in I$  uma curva tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{V}$ . Temos então que:

$$\begin{aligned} F_{*p}(\mathbf{V}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(p + t\mathbf{V}) \\ &= \left( \frac{2(\|p\|^2 + 1)\mathbf{V} - 4(p \cdot \mathbf{V})p}{(\|p\|^2 + 1)^2}, \frac{4(p \cdot \mathbf{V})}{(\|p\|^2 + 1)^2} \right) \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} g_p(\mathbf{V}, \mathbf{W}) &= F_{*p}(\mathbf{V}) \cdot F_{*p}(\mathbf{W}) \\ &= \frac{4}{(\|p\|^2 + 1)^2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}, \quad \forall \mathbf{V}, \mathbf{W} \in T_p\mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{1.6.29}$$

A “métrica esférica”  $g$  em  $\mathbb{R}^2$  é portanto dada por (nas coordenadas usuais  $x, y$  de  $\mathbb{R}^2$ ):

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} (dx^2 + dy^2)} \tag{1.6.30}$$

Por vezes é útil usar notações complexas. Assim se  $z = x + iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , e pondo:

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy, \quad dzd\bar{z} = dx^2 + dy^2 \quad (1.6.31)$$

podemos escrever (1.6.30) na forma:

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z}}{[1+|z|^2]^2} \quad (1.6.32)$$

(ii). Considere a curva em  $\mathbb{R}^2$  munido da métrica esférica (1.6.30):

$$\alpha : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0)$$

O seu comprimento é dado por:

$$\begin{aligned} \ell(\alpha) &= \int_0^\infty \left( \frac{4}{(1+x(t)^2+y(t)^2)^2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \right)^{1/2} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{2}{1+x(t)^2+y(t)^2} \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{2 dt}{1+t^2} \\ &= 2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^\infty = \pi \end{aligned}$$

♣ **Exercício 1.50** “Semi-plano de Poincaré. Métrica Hiperbólica” ... Considere o semi-plano superior  $H^+$ :

$$H^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

e a “métrica hiperbólica de Poincaré”:

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2) \quad (1.6.33)$$

$H^+$  munido desta métrica diz-se o “semi-plano de Poincaré”. Considere agora a curva em  $H^+$  dada por:

$$\alpha : [0, 1[ \rightarrow H^+, \quad \alpha(t) = (x(t), y(t)) = (0, 1-t)$$

Calcule  $\ell(\alpha)$ .

• **Resolução** ... O comprimento de  $\alpha$  é:

$$\begin{aligned} \ell(\alpha) &= \int_0^1 \left( \frac{1}{y(t)} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] \right)^{1/2} dt \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{(1-t)^2} (0 + (-1)^2) \right]^{1/2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1-t} = +\infty \end{aligned}$$

♣ **Exercício 1.51** ... Mostre que o cone de uma folha (sem o vértice):

$$z = +k\sqrt{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

(onde  $k$  é uma constante  $> 0$ ) munido da métrica induzida, é localmente isométrico ao plano  $\mathbb{R}^2$  com a métrica usual.

Figure 1.18: Isometria local

- **Resolução** ... Com efeito, suponhamos que  $2\alpha \in ]0, \pi[$  é o ângulo no vértice do cone, i.e.,  $\cotg \alpha = k$  (ver a figura 1.18).

Consideremos a aplicação  $F$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}_{(\rho, \theta)}^2$ ,  $U = \{(\rho, \theta) : 0 < \rho < +\infty, 0 < \theta < 2\pi \sin \alpha\}$ , através de:

$$F(\rho, \theta) = \left( \rho \sin \alpha \cos \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \rho \sin \alpha \sin \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \rho \cos \alpha \right)$$

É claro que  $F$  é um difeomorfismo de  $U$  sobre o cone menos uma geratriz. A métrica do cone nas coordenadas locais  $(\rho, \theta)$  associadas à parametrização  $\Phi$  é dada por:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \theta^2$$

que é a expressão da métrica usual de  $\mathbb{R}^2$  em coordenadas polares.

- ♣ **Exercício 1.52** ... Considere o semi-plano de Poincaré  $H^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ , munido da métrica hiperbólica de Poincaré:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{-4dzd\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}$$

(onde usamos as notações complexas (1.6.31)). Considere ainda o grupo  $SL(2, \mathbb{R})$  constituído por todas as matrizes reais  $2 \times 2$ , de determinante 1:

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \det g = 1 \right\}$$

- (i). Defina-se uma acção de  $SL(2, \mathbb{R})$  em  $H^+$ , através de:

$$(g, z) \mapsto g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1.6.34)$$

Mostre  $(gh) \cdot z = g \cdot (h \cdot z)$  e que  $\mathbf{1} \cdot z = z$ ,  $\forall g, h \in SL(2, \mathbb{R})$ ,  $\forall z \in H^+$ .

- (ii). Mostre que cada aplicação  $\phi_g : H^+ \rightarrow H^+$ , definida por:

$$\phi_g(z) = g \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

é uma isometria de  $H^+$ .

(iii). Mostre que a acção (1.6.34) é transitiva, isto é, que dados dois pontos quaisquer  $z, w \in H^+$ , existe sempre  $g \in SL(2, \mathbb{R})$  tal  $\phi_g(z) = g \cdot z = w$ .

(iv). Mostre que o subgrupo de isotropia de um qualquer ponto de  $H^+$  é isomorfo a  $SO(2)$ .

• **Resolução ...**

(i). Cálculo directo.

(ii). É extremamente conveniente utilizar notações complexas, quando trabalhamos com métricas definidas num aberto de  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , cuja representação nas coordenadas usuais  $x, y$  de  $\mathbb{R}^2$  tem a forma:

$$ds^2 = \mathbf{g}(x, y) = F(x, y) (dx^2 + dy^2)$$

onde  $F$  é uma função real estritamente positiva de classe  $C^\infty$ . Estas métricas dizem-se “**métricas conformes**” à métrica usual de  $\mathbb{R}^2$  (ver o exercício 1.56) <sup>(2)</sup>. Em notações complexas, estas métricas têm a forma:

$$ds^2 = \mathbf{g}(z) = \lambda^2(z, \bar{z}) dzd\bar{z} \tag{1.6.35}$$

onde  $\lambda^2(z, \bar{z}) = F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$ . A norma de um vector tangente  $\xi \in T_z\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ , relativamente à métrica  $\mathbf{g}$ , é igual à norma Euclideana de  $\xi$ ,  $|\xi|$ , multiplicada pelo “factor de escala”  $\lambda(z, \bar{z})$ .

Suponhamos agora que:

$$z \mapsto w = \phi(z)$$

é uma função holomorfa definida num aberto  $U$  de  $\mathbb{C}$  e tal que  $\phi'(z) \neq 0, \forall z \in U$ . Então  $\phi$  é uma aplicação localmente conforme, isto é,  $\phi$  preserva os ângulos usuais de  $\mathbb{R}^2$  (ver o exercício 1.56).

Quando é que  $\phi$  é uma isometria local? Se  $\xi \in T_z\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ , é um vector tangente a  $\mathbb{C}$  em  $z$ , a sua norma, relativamente à métrica  $\mathbf{g}$ , é igual a  $\lambda(z, \bar{z})|\xi|$ . Este vector é transformado pela diferencial de  $\phi$ , no vector  $\phi'(z)\xi \in T_{\phi(z)}\mathbb{C}$ , cuja norma, relativamente à métrica  $\mathbf{g}$ , é igual a  $\lambda(\phi(z), \overline{\phi(z)})|\phi'(z)\xi|$ . Portanto  $\phi$  será isometria em  $z$  sse a diferencial de  $\phi$  preserva normas, isto é, sse:

$$\boxed{\lambda(z, \bar{z}) = \lambda(\phi(z), \overline{\phi(z)}) \cdot |\phi'(z)|} \tag{1.6.36}$$

No nosso caso  $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} = \frac{1}{(\text{Im}z)^2} dzd\bar{z}$  e o factor de escala é  $\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im}z}, z \in H^+$ . Por outro lado  $\phi'_g(z) = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$  e portanto:

$$\begin{aligned} \lambda(\phi_g(z)) \cdot |\phi'_g(z)| &= \frac{1}{\text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} \left| \frac{1}{(cz+d)^2} \right| \\ &= \frac{4i}{\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}} \cdot \frac{1}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} \\ &= \frac{1}{\text{Im}z} \\ &= \lambda(z) \end{aligned}$$

o que mostra que  $\phi_g$  é uma isometria global, já que  $\phi_g$  é bijectiva e  $\phi'_g(z) \neq 0, \forall z \in H^+$ .

(iii). Note que  $\phi_g(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{bd+ac}{c^2+d^2} + i\frac{1}{c^2+d^2}$ . Por outro lado, dado  $u + iv$  com  $v > 0$ , existe sempre  $\phi_g : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  tal que  $\phi_g(i) = u + iv$ . Basta pôr  $a = \frac{u}{\sqrt{v}}, b = -\sqrt{v}, c = \frac{1}{\sqrt{v}}, d = 0$ .

(iv). O grupo de isotropia de  $z = i$  é por definição constituído por todos os  $g \in SL(2, \mathbb{R})$  tais que  $\phi_g(i) = i$ , i.e.:

$$\frac{ai+b}{ci+d} = i \Leftrightarrow a = d \text{ e } b = -c$$

<sup>2</sup>É um facto, conhecido sob o nome de teorema de Beltrami, que toda a métrica analítica real definida num aberto de  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , é localmente conforme à métrica usual de  $\mathbb{R}^2$  (ver [DNF], vol.1).

o que juntamente com a condição de que  $\det g = ad - bc = a^2 + b^2 = 1$ , mostra que esse grupo de isotropia é  $SO(2)$ . Por outro lado, por (iii), a acção é transitiva e portanto todos os grupos de isotropia são conjugados entre si e portanto todos isomorfos a  $SO(2)$ .

♣ **Exercício 1.53** ... Considere o plano  $\mathbb{R}^2$  munido da métrica esférica dada por (1.6.30):

$$ds^2 = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}(dx^2+dy^2) = \frac{dzd\bar{z}}{[1+|z|^2]^2}$$

Considere o grupo  $SU(2)$ :

$$SU(2) = \left\{ g = \begin{bmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } \det g = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

(i). Defina-se uma acção de  $SU(2)$  em  $\mathbb{R}^2$ , através de:

$$(g, z) \mapsto g \cdot z = \frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}} \tag{1.6.37}$$

Mostre  $(gh) \cdot z = g \cdot (h \cdot z)$  e que  $\mathbf{1} \cdot z = z, \forall g, h \in SU(2), \forall z \in \mathbb{C}$ .

(ii). Mostre que cada aplicação  $\phi_g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por:

$$\phi_g(z) = g \cdot z = \frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}$$

é uma isometria do plano  $\mathbb{R}^2$  munido da métrica esférica.

(iii). Mostre que a acção (1.6.37) é transitiva.

(iv). Calcule o subgrupo de isotropia de  $z = 0$ .

♣ **Exercício 1.54** ... Considere o disco unitário  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ , munido da métrica:

$$ds^2 = \frac{4}{[1-x^2-y^2]^2}(dx^2+dy^2) = \frac{4dzd\bar{z}}{[1-|z|^2]^2}$$

(i). Calcule o comprimento do círculo  $\alpha(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ .

(ii). Mostre que cada aplicação  $\phi_g : D \rightarrow D$ , definida por:

$$\phi_g(z) = \frac{\alpha z + \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad \text{onde } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$$

é uma isometria de  $(D, ds^2)$ .

♣ **Exercício 1.55** ... Mostre que a aplicação  $F : H^+ \rightarrow D$ , definida por:

$$F(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad \text{onde } z \in H^+$$

é uma isometria entre  $(H^+, ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2})$  e  $(D, ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{[1-|z|^2]^2})$ .

♣ **Exercício 1.56 “Aplicações conformes”**... Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades munidas de métricas Riemannianas  $g$  e  $h$ , respectivamente. Um difeomorfismo  $F : M \rightarrow N$  diz-se uma “**aplicação conforme**” entre  $(M, g)$  e  $(N, h)$  se  $g = \lambda^2 F^*h$ , isto é:

$$g_p(\mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p) = \lambda(p)^2 (F^*h)_p(\mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p) = \lambda(p)^2 h_{F(p)}(F_{*p}(\mathbf{V}_p), F_{*p}(\mathbf{W}_p)), \forall p \in M, \forall \mathbf{V}_p, \mathbf{W}_p \in T_pM$$

onde  $\lambda \in C^\infty(M)$ .

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades em  $\mathbb{R}^n$  munidas de métricas Riemannianas  $g$  e  $h$ , respectivamente, e  $F : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável.  $F$  diz-se uma “**aplicação conforme local**” se para cada ponto  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$  e uma vizinhança  $V$  de  $F(p)$  em  $N$  tal que  $F : U \rightarrow V$  é uma aplicação conforme.

$M$  e  $N$  dizem-se “**(localmente) conformes**” se existir uma aplicação conforme (local) de  $M$  em  $N$ .

(i). Mostre que a esfera  $\mathbf{S}^2$  munida da métrica usual, é localmente conforme ao plano  $\mathbb{R}^2$ , com a métrica usual.

(ii). Mostre que  $F : M \rightarrow N$  é uma aplicação conforme (local) se e só se  $F$  preserva ângulos (não orientados).

♣ **Exercício 1.57 “Projecção de Mercator”**... Considere a parametrização local da esfera (ver exercício 1.13):  $\mathbf{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|^2 = 1\}$  em coordenadas geográficas  $(\theta, \varphi)$ .

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

definida no aberto  $U = \{(\theta, \varphi) : 0 < \theta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi\} \subset \mathbb{R}_{(\theta, \varphi)}^2$ .

(i). Considere a aplicação  $F : U \subset \mathbb{R}_{(\theta, \varphi)}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{(u, v)}^2$ , definida por:

$$F(\theta, \varphi) = \left( u = \varphi, v = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)$$

e mostre que uma nova parametrização de  $\Phi(U) = V \subset \mathbf{S}^2$  pode ser dada por:

$$\Psi(u, v) = (\operatorname{sech} u \cos v, \operatorname{sech} u \sin v, \operatorname{tgh} u)$$

(ii). Mostre que  $\Psi^{-1} : V \subset \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação conforme.

(iii). Mostre que  $\Psi^{-1}$  transforma os meridianos  $\varphi = \text{const}$  em linhas rectas paralelas ao eixo dos  $uu$ , e as loxodrómicas da esfera (ver exercício 1.48),  $C\varphi = \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + c$ ,  $c = \text{const}$ , em linhas rectas de equação  $v + Cu = c$ , onde  $C = \cot 1$ .

Estas propriedades explicam porque é que a projecção de Mercator é tão usada no desenho de mapas da superfície terrestre, e em particular em navegação marítima.

## 1.7 Campos de Vectores

### 1.7.1 Definição. Parêntesis de Lie

♣ **Definição 1.18** ... Seja  $M$  uma variedade em  $\mathbb{R}^n$ . Um “**campo de vectores**” em  $M$  é uma aplicação  $X$  que associa um vector tangente  $X_p \in T_p M$ , a cada ponto  $p \in M$ :

$$X : p \mapsto X_p = X(p) \in T_p M$$

Dada uma parametrização local  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$  de  $M$ , para cada ponto  $p = \Phi(u)$ ,  $u \in U$  temos uma base para  $T_p M$  associada à parametrização  $\Phi$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial u^1} \right|_p \cdots \left. \frac{\partial}{\partial u^k} \right|_p$$



Portanto o vector  $X(p) = X_p$  pode escrever-se como combinação linear dos elementos dessa base:

$$X(p) = X^1(u) \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p + \cdots + X^k(u) \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p \quad (1.7.1)$$

ficando assim definidas  $k$  funções reais  $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ , no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$ . A expressão (1.7.1) diz-se a “**expressão local**” do campo  $X$  nas coordenadas locais  $u^i$  (associadas à parametrização local  $\Phi$ ). O campo  $X$  diz-se de classe  $C^\infty$  em  $p \in M$  se existir uma parametrização local em torno de  $p$  na qual as funções reais  $X^i$  da expressão local de  $X$  (1.7.1) são de classe  $C^\infty$ . Esta definição não depende da parametrização local  $\Phi$ . Com efeito se  $\Psi : V \subseteq \mathbb{R}_v^k \rightarrow M$  é uma outra parametrização local em torno de  $p \in M$ , e se:

$$X(p) = Y^1(v) \frac{\partial}{\partial v^1} \Big|_p + \cdots + Y^k(v) \frac{\partial}{\partial v^k} \Big|_p$$

é a expressão local do campo  $X$  nas coordenadas locais  $v^i$  (associadas à parametrização local  $\Psi$ ), deduzimos de (1.4.14) que:

$$\boxed{Y^i(v) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(u) X^j(u)} \quad (1.7.2)$$

onde:

$$\frac{\partial v^i}{\partial u^j}(u) = \frac{\partial (\Psi^{-1} \circ \Phi)^i}{\partial u^j}(u)$$

é a matriz Jacobiana da aplicação de mudança das  $u$ -coordenadas para as  $v$ -coordenadas.

O campo  $X$  diz-se de classe  $C^\infty$  no aberto  $V \subseteq M$  se o fôr em todo o ponto  $p \in V$ . Representaremos por  $\mathfrak{X}(V)$  o conjunto de todos os campos de vectores de classe  $C^\infty$  no aberto  $V \subseteq M$ .

Um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  define uma derivação da álgebra  $C^\infty(M)$ , i.e., uma aplicação  $\mathbb{R}$ -linear:

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

definida por:

$$(Xf)(p) \stackrel{\text{def}}{=} X_p(f) = df_p(X_p), \quad p \in M \quad (1.7.3)$$

que verifica a regra de Leibniz seguinte:

$$X(fg) = fX(g) + gX(f), \quad \forall f, g \in C^\infty(M) \quad (1.7.4)$$

Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  são vistos como derivações em  $C^\infty(M)$ , então:

$$\boxed{[X, Y] \stackrel{\text{def}}{=} XY - YX} \quad (\text{parêntesis de Lie de } X \text{ e } Y) \quad (1.7.5)$$

é ainda uma derivação de  $C^\infty(M)$  que define um único campo de vectores em  $\mathfrak{X}(M)$ , que se chama o parêntesis de Lie de  $X$  e  $Y$ . Com efeito é válida a seguinte:

♣ **Proposição 1.4** ... *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  dois campos de vectores  $C^\infty$  em  $M$ . Então existe um único campo de vectores  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  tal que:*

$$Zf = (XY - YX)f, \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

$Z$  nota-se por  $[X, Y]$  e diz-se o “**parêntesis de Lie de  $X$  e  $Y$** ”.

- **Dem.:** Em primeiro lugar, se  $Z$  existe é único. Com efeito, seja  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$  uma parametrização local de  $M$ , e:

$$X = \sum_i X^i(u) \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Y = \sum_i Y^i(u) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

as expressões locais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, nas coordenadas locais  $u^i$  (associadas à parametrização local  $\Phi$ ). Então:

$$\begin{aligned} XYf &= X \left( \sum_j Y^j(u) \frac{\partial f}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \\ YXf &= Y \left( \sum_i X^i(u) \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) = \sum_{i,j} Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \end{aligned}$$

donde:

$$(XY - YX)f = \sum_j \left( \sum_i \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j} \right) f$$

isto é:

$$\boxed{[X, Y] = \sum_j \left( \sum_i \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^j}} \quad (1.7.6)$$

Portanto se existir  $Z$  com as propriedades referidas,  $Z$  deverá ser expresso em coordenadas locais pela expressão anterior, e por isso é único.

Para provar a existência, defina-se  $Z$  localmente pela expressão (1.7.6). Por unicidade as definições deverão coincidir nas intersecções de duas quaisquer vizinhanças coordenadas, o que permite definir  $Z = [X, Y]$  globalmente em todo o  $M$ , ■

♣ **Proposição 1.5** ... *O parêntesis de Lie define uma aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear,  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , que verifica as seguintes propriedades:*

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -[Y, X] \\ [aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z], \quad a, b \in \mathbb{R} \\ [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= 0 \quad \text{“identidade Jacobi”} \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

e que portanto mune  $\mathfrak{X}(M)$  de estrutura de álgebra de Lie. Além disso:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \quad (1.7.8)$$

onde, se  $f \in C^\infty(M)$ ,  $fX \in \mathfrak{X}(M)$  designa o campo  $(fX)_p = f(p)X_p$ .

### 1.7.2 Pontos Críticos. Funções de Morse. Lema de Morse

Nesta secção vamos por simplicidade de exposição, restringirmo-nos a funções definidas em superfícies (variedades de dimensão 2). A generalização a dimensões superiores utiliza argumentos análogos e não apresenta dificuldades adicionais.

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$  definida numa superfície  $M$ . Como já vimos um ponto crítico de  $f$  é um ponto  $p \in M$  onde a diferencial  $df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  é nula:  $df_p = 0$ . Suponhamos que  $\Phi : U \subset \mathbb{R}_{(u,v)}^2 \rightarrow M$  é uma parametrização local em torno de  $p$ , definida

num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}_{(u,v)}^2$ , e tal que  $\Phi(0,0) = p$ . Podemos então considerar o desenvolvimento de Taylor de ordem 2, centrado no ponto  $(0,0)$ , da função  $f \circ \Phi$ :

$$\begin{aligned} (f \circ \Phi)((0,0) + (h,k)) &= (f \circ \Phi)(0,0) + \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u}(0,0) h + \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial v}(0,0) k + \\ &+ \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial u^2}(0,0) h^2 + 2 \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial u \partial v}(0,0) h k + \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial v^2}(0,0) k^2 \\ &+ \text{termos de ordem } > 2 \text{ em } h \text{ e } k \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

Como estamos a supôr que  $p$  é ponto crítico de  $f$ , então  $(0,0)$  é ponto crítico de  $f \circ \Phi$  e portanto a parte linear de (1.7.9) anula-se já que:

$$\frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial v}(0,0) = \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial v}(0,0) = 0$$

Em geral num ponto  $p$  não crítico a forma quadrática definida em  $T_p M$  por:

$$h \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_p + k \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p \longmapsto \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial u^2}(0,0) h^2 + 2 \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial u \partial v}(0,0) h k + \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial v^2}(0,0) k^2$$

depende da parametrização local  $\Phi$ . No entanto quando  $p$  é ponto crítico de  $f$  essa forma quadrática está bem definida (não depende de  $\Phi$ ).

♣ **Proposição 1.6** ... *Seja  $p$  é ponto crítico de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Define-se então uma forma bilinear  $\text{Hess}f(p) : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  através de:*

$$\boxed{\text{Hess}f(p)(X_p, Y_p) \stackrel{\text{def}}{=} X_p(Yf)} \quad (1.7.10)$$

onde  $X_p, Y_p \in T_p M$  e  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  é um qualquer campo de vectores tal que  $Y(p) = Y_p$ . Esta definição não depende do campo  $Y$  escolhido, e  $\text{Hess}f(p)$  é uma forma bilinear simétrica em  $T_p M$ .

• **Dem.:** Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é um campo de vectores tal que  $X(p) = X_p$ , então:

$$\begin{aligned} X_p(Yf) &= X(Yf)(p) \\ &= (Y(Xf) + [X, Y]f)(p) \\ &= Y_p(Xf) + [X, Y]_p f \\ &= Y_p(Xf) + df_p([X, Y]_p) \\ &= Y_p(Xf) \quad (\text{porque } p \text{ é ponto crítico de } f) \end{aligned}$$

Como  $Y_p(Xf)$  apenas depende de  $Y_p$  e não de  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $Y(p) = Y_p$ , o mesmo acontece a  $X_p(Yf)$ . Por outro lado a igualdade anterior  $X_p(Yf) = Y_p(Xf)$  mostra que  $\text{Hess}f(p)$  é bilinear simétrica. ■

À forma bilinear simétrica definida na proposição anterior (ou à forma quadrática associada  $X_p \mapsto \text{Hess}f(p)(X_p, X_p)$ , chama-se o “**Hessiano de  $f$  no ponto crítico  $p$** ”. Se  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  é uma parametrização local em torno de  $p$ , definida num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}_{(u,v)}^2$ , e tal que

$\Phi(0, 0) = p$ , então:

$$\begin{aligned} \text{Hess}f(p) \left( \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_p \right) &= \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial u^2}(0, 0) \\ \text{Hess}f(p) \left( \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p \right) &= \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial u \partial v}(0, 0) \\ \text{Hess}f(p) \left( \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial v} \right|_p \right) &= \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial v^2}(0, 0) \end{aligned}$$

o que mostra que o Hessiano é de facto a parte quadrática do desenvolvimento de Taylor (1.7.9). No entanto a fórmula (1.7.10) mostra que a definição do Hessiano é intrínseca (não depende das coordenadas locais em torno de  $p$ ).

### ♣ Definição 1.19 ...

- Um ponto crítico  $p$  de  $f$  diz-se “**não degenerado**” se o Hessiano  $\text{Hess}f(p)$  é uma forma bilinear não degenerada.
- O “**índice**  $\text{ind}_f(p)$ ” de um ponto crítico não degenerado  $p$ , é o índice da forma bilinear não degenerada  $\text{Hess}f(p)$ , i.e., o número de sinais  $(-)$  quando decompomos a forma quadrática  $\text{Hess}f(p)$  numa soma ou diferença de quadrados.
- Uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  diz-se uma “**função de Morse**” se todos os seus pontos críticos são não degenerados.

O Lema seguinte cuja demonstração omitimos, dá uma forma local de uma função de Morse na vizinhança de um ponto crítico  $p$  (não degenerado).

♣ **Teorema 1.8 “Lema de Morse” ...** Seja  $p$  um ponto crítico não degenerado de  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Então existe uma parametrização local em torno de  $p$ , definida num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}_{(u,v)}^2$ , tal que  $\Phi(0, 0) = p$ , e dois números  $\epsilon_p = \pm 1$  e  $\epsilon'_p = \pm 1$  tais que:

$$\boxed{(f \circ \Phi)(u, v) = (f \circ \Phi)(0, 0) + \epsilon_p u^2 + \epsilon'_p v^2 \quad \forall (u, v) \in U} \quad (1.7.11)$$

### 1.7.3 Exemplos e Exercícios

♣ **Exemplo 1.34 ...** Vamos estudar a posição de uma superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$  relativamente ao seu plano afim tangente.

Localmente  $M$  pode ser sempre dada como o gráfico de uma função  $z = f(x, y)$ . Seja  $p = (a, b, f(a, b)) \in M$ . O plano afim tangente  $p + T_p M$  tem por equação:

$$(x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + (z - f(a, b))(-1) = 0$$

O nosso objectivo é estudar o sinal da função (ver a figura 1.19):

$$h(x, y) = f(x, y) - f(a, b) - (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

Figure 1.19: Posição de  $M$  relativamente ao seu plano afim tangente.

Suponhamos que:

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2 \neq 0$$

Como  $h$  e  $f$  têm as mesmas segundas derivadas e como:

$$h(a, b) = \frac{\partial h}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial h}{\partial y}(a, b) = 0$$

o Lema de Morse permite concluir que existe um aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  que contém  $(a, b)$  e coordenadas locais  $(u, v)$  tais que, nestas novas coordenadas:

$$h|_U = \pm u^2 \pm v^2$$

Portanto:

- Se  $\text{ind}_{(a,b)} h = 0$ , então  $h|_U = u^2 + v^2$ , e localmente  $M$  fica por cima do plano afim tangente, apenas intersectando-o em  $p$ .
- Se  $\text{ind}_{(a,b)} h = 2$ , então  $h|_U = -u^2 - v^2$ , e localmente  $M$  fica por baixo do plano afim tangente, apenas intersectando-o em  $p$ .
- Se  $\text{ind}_{(a,b)} h = 1$ , então  $h|_U = u^2 - v^2$ , por exemplo, e localmente  $M$  intersecta o plano afim tangente ao longo das curvas  $u = v$  e  $u = -v$  (ver a figura 1.20).

Figure 1.20: Posição de  $M$  relativamente ao seu plano afim tangente.

♣ **Exemplo 1.35** ... Note que quando  $p$  é ponto crítico degenerado, nada pode ser dito quanto à posição relativa de  $M$  e de  $p + T_pM$ . De facto, os gráficos das funções seguintes  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mostram diferentes comportamentos relativamente ao plano  $xy$  (ver a figura 1.21):

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 \\ f_2(x, y) &= x^2y^2 \\ f_3(x, y) &= x(x^2 - 3y^2) \\ f_4(x, y) &= e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Figure 1.21: Posição de  $M$  relativamente ao seu plano afim tangente.

♣ **Exercício 1.58** ... Demonstrar a proposição 1.5.

♣ **Exercício 1.59** ... Em  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$  considere os campos de vectores  $X = x \frac{\partial}{\partial x} - x^2z \frac{\partial}{\partial z}$  e  $Y = y \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial}{\partial y}$ , e as funções  $f(x, yz) = x^2yz$  e  $g(x, y, z) = x + y^3$ . Calcule:

$$[X, Y], \quad Xf, \quad Yg, \quad [fX, gY]$$

♣ **Exercício 1.60** ... Considere o toro  $\mathfrak{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$  descrito no exercício 1.14, com  $a = 2$  e  $r = 1$ , e a função  $f : \mathfrak{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(p) = \text{distância de } p \text{ ao plano } y = 3, \quad p \in \mathfrak{T}^2$$

Calcule os pontos críticos de  $f$ , verifique quais são não degenerados e calcule os seus índices.

♣ **Exercício 1.61** ... Seja  $M$  uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , e seja  $f \in C^\infty(M)$ . Defina-se o “campo gradiente de  $f$ ”, como sendo o campo de vectores  $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$  tal que:

$$\langle (\nabla f)_p, \mathbf{V}_p \rangle = df_p(\mathbf{V}_p), \quad \forall p \in M, \forall \mathbf{V}_p \in T_pM \tag{1.7.12}$$

(i). Calcule as componentes de  $\nabla f$  em função das componentes  $g_{ij}$  de  $g$  em coordenadas locais, e prove que  $\nabla f$  é um campo  $C^\infty$ .

(ii). Mostre que  $(\nabla f)_p = \mathbf{0}$  se e só se  $p$  é ponto crítico de  $f$ .

(iii). Mostre que  $f$  é estritamente crescente ao longo de cada curva integral não singular de  $\nabla f$ , e deduza que  $\nabla f$  não possui órbitas fechadas.

(iv). Mostre que as curvas integrais de  $\nabla f$  são ortogonais às hipersuperfícies de nível de  $f$  em  $M$ .

(v). Fixemos  $p \in M$ , tal que  $\nabla f \neq \mathbf{0}$  e consideremos a esfera unitária  $\mathbf{S} = \{\mathbf{V}_p \in T_pM : \|\mathbf{V}_p\| = 1\} \subset T_pM$ . Mostre que a função  $\mathbf{V}_p \in \mathbf{S} \mapsto df_p(\mathbf{V}_p)$  atinge um máximo em  $\mathbf{V}_p = \frac{(\nabla f)_p}{\|(\nabla f)_p\|}$ , e que portanto  $(\nabla f)_p$  dá a direcção de máxima variação de  $f$  em  $p$ .

## 1.8 Campos de Vectores e Fluxos

♣ **Definição 1.20** ... Um **fluxo** numa variedade (diferenciável)  $M$ , é uma aplicação (diferenciável):

$$\mathbf{Fl} : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M \quad (1.8.1)$$

que verifica:

$$\begin{aligned} \mathbf{Fl}(0, x) &= x \\ \mathbf{Fl}(t, \mathbf{Fl}(s, x)) &= \mathbf{Fl}(t + s, x) \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

$\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M$ .

Alternativamente um fluxo  $\mathbf{Fl}$  em  $M$ , pode ser visto como um **grupo a um parâmetro de difeomorfismos** de  $M$ , isto é, como um homomorfismo do grupo aditivo  $(\mathbb{R}, +)$  no grupo  $Diff(M)$  dos difeomorfismos de  $M$ :

$$\mathbf{Fl} : \mathbb{R} \longrightarrow Diff(M) \quad t \mapsto \mathbf{Fl}_t$$

que portanto verifica:

$$\mathbf{Fl}_0 = Id_M \quad \mathbf{Fl}_t \circ \mathbf{Fl}_s = \mathbf{Fl}_{t+s} \quad \mathbf{Fl}_{-t} = \mathbf{Fl}_t^{-1} \quad (1.8.3)$$

Para cada  $x \in M$ , a curva:

$$\alpha_x : \mathbb{R} \longrightarrow M \quad t \mapsto \alpha_x(t) = \mathbf{Fl}_t(x) \quad (1.8.4)$$

diz-se a **linha de fluxo** ou **curva integral** que passa em  $x$ . A imagem  $\alpha_x(\mathbb{R}) \subset M$  diz-se a **órbita** de  $x$ .

Por cada  $x \in M$  passa uma única órbita. Por outro lado, uma linha de fluxo apenas pode ser de um e um só dos seguintes tipos (prova?):

- uma **imersão injectiva**.
- uma **imersão periódica**, i.e.,  $\alpha_x : \mathbb{R} \rightarrow M$  é imersão e existe algum  $s > 0$  tal que  $\alpha_x(t + s) = \alpha_x(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .
- constante. Neste caso  $\alpha_x(t) \equiv x$  diz-se um **ponto fixo**.

♣ **Definição 1.21** ... Um **fluxo local** numa variedade (diferenciável)  $M$ , é uma aplicação diferenciável:

$$\mathbf{Fl} : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times M \longrightarrow M \quad (1.8.5)$$

definida num aberto  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times M$ , que verifica as condições seguintes:

- $\mathcal{O}$  contém  $\{0\} \times M$  e para cada  $x \in M$ , a intersecção  $I_x \stackrel{def}{=} \mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  que contém  $0 \in \mathbb{R}$ .
- $\mathbf{Fl}$  satisfaz:

$$\begin{aligned} \mathbf{Fl}(0, x) &= x \quad \forall x \in M \\ \mathbf{Fl}(t, \mathbf{Fl}(s, x)) &= \mathbf{Fl}(t + s, x) \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

$\forall t, s, x$  para os quais ambos os membros estão definidos.

Claramente que um fluxo local para o qual  $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times M$  é um fluxo (global). Note que para um fluxo local não podemos em geral falar do difeomorfismo  $\text{Fl}_t$  uma vez que para um  $t \neq 0$  fixo  $x \mapsto \text{Fl}_t(x)$  pode não estar definido em todo o  $M$ . A linha de fluxo  $\alpha_x : t \mapsto \alpha_x(t) = \text{Fl}_t(x)$  que passa em  $x$ , agora está definida num intervalo aberto  $I_x = \mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$  de  $\mathbb{R}$  que contem 0. No entanto podemos falar do difeomorfismo local  $\text{Fl}_t : U \rightarrow \text{Fl}(U)$  definido num certo aberto  $U$ , com  $U$  e  $t$  suficientemente pequenos.

♣ **Definição 1.22** ... Dado um fluxo (local ou global) em  $M$ , ao campo de vectores:

$$X : x \mapsto X_x \stackrel{\text{def}}{=} \alpha'_x(0) \in T_x M \tag{1.8.7}$$

chama-se o **campo de velocidades** ou o **gerador infinitesimal** de  $\text{Fl}$ .

♣ **Teorema 1.9** ... Todo o campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é gerador infinitesimal de um único fluxo local maximal  $\text{Fl}^X$  em  $M$ . Quando  $X$  tem suporte compacto,  $\text{Fl}^X$  é um fluxo global. Em particular, numa variedade compacta, todo o campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é gerador infinitesimal de um único fluxo global  $\mathbf{Fl}^X$  em  $M$ .

- **Dem.:** (esboço)
- O teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias implica que, para cada  $x \in M$  existe um intervalo aberto maximal  $I_x \subset \mathbb{R}$ , que contem 0, e uma única curva integral  $\alpha_x : I_x \rightarrow M$  de  $X$ , tal que  $\alpha_x(0) = x$ . Definimos então:

$$\text{Fl}_t^X(x) = \text{Fl}^X(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_x(t) \tag{1.8.8}$$

onde  $\alpha_x$  é a única curva integral  $\alpha_x : I_x \rightarrow M$  de  $X$ , acima referida.  $\text{Fl}^X(t, x)$  é uma função de classe  $C^\infty$ , atendendo ao teorema da dependência diferenciável das soluções de equações diferenciais ordinárias, relativamente às condições iniciais. Além disso, se  $\text{Fl}^X$  está definida em  $(t, x)$  também está definida para  $(s, y)$  próximo.

As condições  $\text{Fl}^X(0, x) = x$  e  $\text{Fl}^X(t, \text{Fl}^X(s, x)) = \text{Fl}^X(t + s, x)$  deduzem-se do facto de que, para cada  $y \in M$ ,  $\text{Fl}^X|_{I_y \times \{y\}}$  é uma curva integral de  $X$ . Com efeito, por (1.8.8) vem que  $\text{Fl}^X(0, x) = \alpha_x(0) = x$ . Por outro lado:

$$t \mapsto \text{Fl}^X(t + s, x) \quad \text{e} \quad t \mapsto \text{Fl}^X(t, \text{Fl}^X(s, x))$$

(para todo o  $t$  para o qual estão definidas) são duas curvas integrais maximais de  $X$ , que no instante  $t = 0$  passam ambas em  $\text{Fl}^X(s, x)$ , e por unicidade coincidem portanto.

Resta mostrar que:

$$\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\}$$

é um aberto que contem  $\{0\} \times M$  (claro!), e que  $\text{Fl}^X$  é diferenciável. A demonstração completa destes factos pode ser vista em [Sp], vol.1, por exemplo.

- Suponhamos finalmente que  $K = \text{supp}(X)$  é compacto. Então o compacto  $\{0\} \times K$  tem distância positiva relativamente ao conjunto fechado disjunto  $(\mathbb{R} \times M) - \mathcal{O}$  (se este for não vazio!). Portanto  $[-\epsilon, \epsilon] \times K \subset \mathcal{O}$ , para algum  $\epsilon > 0$ . Se  $x \notin K$  então  $X_x = 0$ , e por isso  $\text{Fl}^X(t, x) = x, \forall t$  e  $\mathbb{R} \times \{x\} \subset \mathcal{O}$ . Portanto  $[-\epsilon, \epsilon] \times M \subset \mathcal{O}$ . Como  $\text{Fl}^X(t + \epsilon, x) = \text{Fl}^X(t, \text{Fl}^X(\epsilon, x))$  existe para  $|t| \leq \epsilon$  (porque o segundo membro existe  $\forall t : |t| \leq \epsilon$ ), temos que  $[-2\epsilon, 2\epsilon] \times M \subset \mathcal{O}$ , e repetindo este argumento obtemos finalmente que  $\mathbb{R} \times M = \mathcal{O}$ .

■



Aproveitamos ainda esta secção para introduzir algumas derivadas de Lie ao longo de um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Nomeadamente para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , define-se:

- **Derivada de Lie de uma função :**

$$\mathcal{L}_X f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\text{Fl}_t^X(x)) = X_x f \quad f \in C^\infty(M) \quad (1.8.9)$$

- **Derivada de Lie de um campo de vectores :**

$$\mathcal{L}_X Y \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^X)^* Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (T(\text{Fl}_{-t}^X) \circ Y \circ \text{Fl}_t^X) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (1.8.10)$$

- ♣ **Exercício 1.62** ... Mostre que:

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

- ♣ **Exercício 1.63** ... Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  dois campos de vectores  $C^\infty$  numa variedade  $M$ , e  $x \in M$  um ponto onde  $X$  e  $Y$  não se anulam. Defina-se para  $t$  suficientemente pequeno, a curva  $\sigma$ :

$$\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fl}_{-t}^Y \text{Fl}_{-t}^X \text{Fl}_t^Y \text{Fl}_t^X(x)$$

Mostre que:

$$[X, Y]_x = \lim_{t \rightarrow 0} \sigma'(\sqrt{t})$$

- ♣ **Teorema 1.10** ... Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $Y \in \mathfrak{X}(N)$  dois campos  $\phi$ -relacionados, onde  $\phi : M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável. Então:

$$\phi \circ \text{Fl}_t^X = \text{Fl}_t^Y \circ \phi \quad (1.8.11)$$

sempre que ambos os membros estiverem definidos. Em particular, se  $\phi$  é um difeomorfismo, tem-se que:

$$\text{Fl}_t^{\phi^* Y} = \phi^{-1} \circ \text{Fl}_t^Y \circ \phi \quad (1.8.12)$$

e ainda:

$$\text{Fl}_t^{\phi_* X} = \phi \circ \text{Fl}_t^X \circ \phi^{-1} \quad (1.8.13)$$

- **Dem.:** Com efeito:

$$\left. \frac{d}{dt} (\phi \circ \text{Fl}_t^X) \right|_{t=0} = T\phi \circ \left. \frac{d}{dt} \text{Fl}_t^X \right|_{t=0} = T\phi \circ X \circ \text{Fl}_t^X = Y \circ \phi \circ \text{Fl}_t^X$$

e como  $\phi(\text{Fl}^X(0, x)) = \phi(x)$ , concluímos que  $t \mapsto \phi(\text{Fl}^X(t, x))$  é uma curva integral do campo de vectores  $Y$  em  $N$ , que no instante  $t = 0$  passa em  $\phi(x)$ . Portanto:

$$\phi(\text{Fl}^X(t, x)) = \text{Fl}^Y(t, \phi(x)) \quad \Rightarrow \quad \phi \circ \text{Fl}_t^X = \text{Fl}_t^Y \circ \phi$$

■

- ♣ **Exercício 1.64** ... Mostre que, se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , então as condições seguintes são equivalentes:

- $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = 0$
- $(\text{Fl}_t^X)^* Y = Y$ , sempre que definidos.

- $\text{Fl}_t^X \circ \text{Fl}_s^Y = \text{Fl}_s^Y \circ \text{Fl}_t^X$ , sempre que definidos.

Para finalizar esta secção vamos ainda demonstrar o seguinte resultado que será utilizado na secção seguinte:

♣ **Teorema 1.11** Teorema da rectificação local para campos de vectores ...

(i). Seja  $X$  um campo de vectores  $C^\infty$ , definido numa vizinhança de um ponto  $x \in M$ , e tal  $X_x \neq 0$ . Então existe uma carta local  $(U; x^1, \dots, x^n)$  em torno de  $x$ , tal que:

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \text{em } U$$

Mais geralmente:

(ii). Sejam  $X_1, \dots, X_k$  campos de vectores  $C^\infty$ , definidos e linearmente independentes numa vizinhança de um ponto  $x \in M$ . Então se:

$$[X_i, X_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, k \quad (1.8.14)$$

existe uma carta local  $(U; x^1, \dots, x^n)$  em torno de  $x$ , tal que:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{em } U \quad i = 1, \dots, k$$

• **Dem.:**

- (i). O resultado é local, e por isso podemos supôr que  $M = \mathbb{R}^n$  (munido das coordenadas usuais  $r^1, \dots, r^n$ ), que  $x = \mathbf{0}$ , e ainda que  $X(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial r^1}|_{\mathbf{0}}$ . A ideia da prova é utilizar o facto de que por cada ponto  $(0, r^2, \dots, r^n)$ , numa vizinhança de  $\mathbf{0}$ , passa (no instante  $t = 0$ ) uma única curva integral de  $X$ . Se  $p$  pertence à curva integral que passa em  $(0, r^2, \dots, r^n)$  (no instante  $t = 0$ ), então  $p = \text{Fl}_t^X(0, r^2, \dots, r^n)$  para um único  $t$ , e atribuímos a  $p$  as novas coordenadas  $(t, r^2, \dots, r^n)$ .

Mais detalhadamente, consideremos a aplicação:

$$\Phi(r^1, \dots, r^n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fl}_{r^1}^X(0, r^2, \dots, r^n)$$

que está definida e é diferenciável numa certa vizinhança de  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ . Podemos então calcular que, para  $i = 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\mathbf{0}}\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\mathbf{0}}(f \circ \Phi) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi(0, \dots, t, \dots, 0)) - f(\mathbf{0})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, \dots, t, \dots, 0) - f(\mathbf{0})}{t} \\ &= \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\mathbf{0}}(f) \end{aligned}$$

Por outro lado, para  $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$ :

$$\begin{aligned}
 d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{\mathbf{a}}\right)(f) &= \frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{\mathbf{a}}(f \circ \Phi) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi(a^1 + t, a^2, \dots, a^n)) - f(\Phi(\mathbf{a}))}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\text{Fl}_{a^1+t}^X(0, a^2, \dots, a^n)) - f(\Phi(\mathbf{a}))}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((\text{Fl}_t^X \circ \text{Fl}_{a^1}^X)(0, a^2, \dots, a^n)) - f(\Phi(\mathbf{a}))}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\text{Fl}_t^X(\Phi(\mathbf{a})) - f(\Phi(\mathbf{a})))}{t} \\
 &= X_{\Phi(\mathbf{a})}(f)
 \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

Em particular  $d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{\mathbf{0}}\right)(f) = X_{\Phi(\mathbf{0})}(f) = X_{\mathbf{0}}(f) = \frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{\mathbf{0}}(f)$ , já que suposemos por hipótese que  $X_{\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_{\mathbf{0}}$ . Fica assim demonstrado que a diferencial  $d\Phi_{\mathbf{0}}$  é a identidade, e portanto, pelo teorema da inversão local,  $\Phi^{-1}$  existe e é diferenciável numa certa vizinhança de  $\mathbf{0}$ . Podemos então usar  $\varphi = \Phi^{-1}$  como uma nova carta local numa vizinhança de  $x = \mathbf{0}$ . Se  $x^i$  são as correspondentes coordenadas locais, então (1.8.15) diz que  $d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\right) = X \circ \Phi$ , e isto implica que  $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ .

- (ii). Como antes, podemos supôr que  $M = \mathbb{R}^n$ , que  $x = \mathbf{0}$ , e ainda que:

$$X_i(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\mathbf{0}} \quad i = 1, \dots, k$$

(se necessário fazemos uma mudança linear de coordenadas). Suponhamos agora que  $\text{Fl}_t^{X_i}$  é o fluxo local de cada campo  $X_i$ , e consideremos a aplicação:

$$\Phi(r^1, \dots, r^n) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Fl}_{r^1}^{X_1} \circ \text{Fl}_{r^2}^{X_2} \circ \dots \circ \text{Fl}_{r^k}^{X_k})(0, \dots, 0, r^{k+1}, \dots, r^n)$$

que está definida e é diferenciável numa certa vizinhança de  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ . Calculando de forma análoga à parte (i), obtemos:

$$d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\mathbf{0}}\right) = \begin{cases} X_i(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\mathbf{0}} & i = 1, \dots, k \\ \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\mathbf{0}} & i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

o que significa que a diferencial  $d\Phi_{\mathbf{0}}$  é a identidade e portanto, pelo teorema da inversão local,  $\Phi^{-1}$  existe e é diferenciável numa certa vizinhança de  $\mathbf{0}$ . Podemos então usar  $\varphi = \Phi^{-1}$  como uma nova carta local numa vizinhança de  $x = \mathbf{0}$ . Se  $x^i$  são as correspondentes coordenadas locais, então:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

tal como em (i). Note que até aqui, não foi usada a hipótese (1.8.14). Mas pelo exercício 1.64, a hipótese (1.8.14) é equivalente à comutação dos fluxos  $\text{Fl}_t^{X_i}$ , ( $i = 1, \dots, k$ ), e em particular vemos que, para cada  $i = 1, \dots, k$ ,  $\Phi$  pode também ser escrita na forma:

$$\Phi(r^1, \dots, r^n) \stackrel{\text{def}}{=} (\text{Fl}_{r^i}^{X_i} \circ \text{Fl}_{r^1}^{X_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{r^k}^{X_k})(0, \dots, 0, r^{k+1}, \dots, r^n)$$

e o argumento anterior mostra que:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i = 1, \dots, k$$

■

## 1.9 Variedades orientáveis

### 1.9.1 Orientação

Nesta secção vamos discutir em que sentido e quando é que é possível orientar uma variedade em  $\mathbb{R}^n$ . Consideremos por exemplo o caso das superfícies em  $\mathbb{R}^3$ . Intuitivamente, uma vez que para cada ponto  $p \in M$  temos um espaço tangente  $T_pM$ , a escolha de uma orientação em  $T_pM$  induz uma orientação numa certa vizinhança de  $p$ , isto é, uma noção de movimento positivo em torno de curvas suficientemente pequenas que envolvem cada ponto nessa vizinhança (ver a figura 1.22).

Figure 1.22: Variedade orientável

Se fôr possível efectuar essa escolha para cada ponto  $p \in M$  de forma coerente, isto é, de tal forma que na intersecção de duas quaisquer vizinhanças as orientações coincidam, então  $M$  diz-se orientável. Caso contrário diz-se não orientável. O caso mais simples de uma superfície não orientável é a chamada tira de Moebius (ver a figura 1.25).

Antes de precisar estas ideias intuitivas, precisamos de alguns preliminares. Assim suponhamos que  $M$  é uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Duas parametrizações locais de  $M$ ,  $\Phi : U_\alpha \subset \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$  e  $\Psi : V \subset \mathbb{R}_v^k \rightarrow M$  dizem-se “coerentes” se  $U \cap V = \emptyset$  ou se  $U \cap V \neq \emptyset$  e a matriz Jacobiana da aplicação de mudança de coordenadas  $\Psi^{-1} \circ \Phi$ , tiver determinante positivo em todos os pontos  $u \in \Phi^{-1}(U \cap V)$ :

$$\det \mathbf{Jac} (\Psi^{-1} \circ \Phi) (u) > 0, \quad \forall u \in \Phi^{-1}(U \cap V) \quad (1.9.1)$$

Suponhamos que  $p = \Phi(u) = \Psi(v) \in U \cap V$ . Em  $T_pM$  temos duas bases  $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \right\}$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p \right\}$ , associadas respectivamente a  $\Phi$  e a  $\Psi$ . Por (1.4.9), temos que:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p = \sum_{i=1}^k \frac{\partial v^i}{\partial u^j} (p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p$$

onde  $\left[ \frac{\partial v^i}{\partial u^j} (p) \right]$  é a matriz Jacobiana da aplicação de mudança das  $u$ -coordenadas para as  $v$ -coordenadas.

Figure 1.23: Parametrizações locais coerentes

Portanto a condição de coerência de duas parametrizações locais  $\Phi : U \subset \mathbb{R}_u^k \rightarrow M$  e  $\Psi : V \subset \mathbb{R}_v^k \rightarrow M$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$ , é que:

$$\det \left[ \frac{\partial v^i}{\partial u^j} (p) \right] > 0, \quad \forall p \in \Phi(U) \cap \Psi(V)$$

o que significa que as bases  $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \right\}$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial v^j} \Big|_p \right\}$  pertencem à mesma classe de orientação de  $T_p M$ , como veremos em breve (ver exercício 1.68).

♣ **Definição 1.23** ... Uma variedade  $M$  diz-se “orientável” se existir uma coleção de parametrizações locais  $\{\Phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset M\}_\alpha$  de  $M$ , tais que  $M = \cup_\alpha V_\alpha$  e duas quaisquer dessas parametrizações forem coerentes.

Uma tal coleção  $\{\Phi_\alpha\}_\alpha$  (se existir) diz-se uma “orientação” para  $M$ .  $M$  diz-se não orientável quando não existe qualquer orientação. Finalmente  $M$  diz-se “orientada” se  $M$  for orientável e se foi feita uma escolha de orientação  $\{\Phi_\alpha\}_\alpha$ .

Dada uma variedade orientada  $(M, \{\Phi_\alpha\}_\alpha)$ , uma parametrização  $\Phi : U \rightarrow V \subset M$  diz-se “positiva” se  $\Phi$  é coerente com todas as parametrizações  $\Phi_\alpha$ .

Uma maneira alternativa de caracterizar orientações é através de campos de vectores normais (ver a figura 1.24).

♣ **Definição 1.24** ... Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . O espaço normal” a  $M$  em  $p \in M$  é definido por:

$$T_p M^\perp \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}_p = 0 \quad \forall \mathbf{V}_p \in T_p M \} \quad (1.9.2)$$

Um “campo de vectores normais” a  $M$ , é uma aplicação  $N$  que associa um vector normal  $N(p) = N_p \in T_p M^\perp$  a cada ponto  $p \in M$ :

$$N : p \mapsto N(p) = N_p \in T_p M^\perp \subset \mathbb{R}^n$$

$N$  diz-se de classe  $C^\ell$  ( $\ell \geq 0$ ) se a aplicação  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  for de classe  $C^\ell$ .

É claro que  $\dim T_p M^\perp = n - k =$  a codimensão de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ . Por exemplo, se  $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é  $C^\infty$  e se  $c \in \mathbb{R}^m$  é valor regular de  $F$ , então  $M = F^{-1}(c)$  é uma variedade

Figure 1.24: Campo de vectores normais a  $M$ 

de codimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^n$  e o espaço normal a  $M$  em  $p$  é o subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^n$  gerado pelos  $m$  vectores linearmente independentes:

$$\nabla F^1(p), \dots, \nabla F^m(p)$$

♣ **Teorema 1.12** ... *Se uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$  admite  $n - k$  campos de vectores normais contínuos  $N_1, \dots, N_{n-k}$ , linearmente independentes em cada ponto  $p \in M$ , então  $M$  é orientável.*

- **Dem.:** Seja  $\mathcal{A}$  a colecção de todas as parametrizações locais de  $M$ , do tipo  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , onde  $U$  é aberto conexo em  $\mathbb{R}^k$  e tais que  $\forall u = (u^1, \dots, u^k) \in U$ , com  $p = \Phi(u)$ , a matriz  $n \times n$ :

$$\mathbf{M}_\Phi(u) = \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p, N_1(p), \dots, N_{n-k}(p) \right]$$

cujas colunas são as componentes dos vectores indicados, na base canónica de  $\mathbb{R}^n$ , tem determinante positivo.

Para cada  $u \in U$ ,  $\mathbf{M}_\Phi(u)$  é inversível e como  $\mathbf{M}_\Phi$  depende continuamente de  $u$  o seu determinante não muda de sinal no aberto conexo  $U$ . Se para uma certa parametrização  $\Psi : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , com  $V$  conexo, tivermos  $\det \mathbf{M}_\Psi < 0$  podemos trocar o sinal de  $\Psi$  (por exemplo compondo  $\Psi$  com a reflexão  $(u^1, u^2, \dots, u^k) \mapsto (-u^1, u^2, \dots, u^k)$ ), e obter uma parametrização em  $\mathcal{A}$  com a mesma imagem de  $\Psi$ . Desta forma obtemos uma cobertura de  $M$  por imagens de parametrizações em  $\mathcal{A}$ . Resta então provar que  $\mathcal{A}$  é uma orientação para  $M$ , isto é, que duas quaisquer parametrizações em  $\mathcal{A}$  são coerentes.

Suponhamos então que  $\Phi : U \rightarrow M$  e  $\Psi : V \rightarrow M$  são duas parametrizações em  $\mathcal{A}$  e que  $p \in \Phi(U) \cap \Psi(V)$ . Como:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p = \sum_{i=1}^n A_i^j(p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_p$$

onde:

$$A = A_j^i(p) = \frac{\partial v^i}{\partial u^j}(p) = \frac{\partial(\Psi^{-1} \circ \Phi)^i}{\partial u^j}(u)$$

é a matriz Jacobiana da aplicação de mudança de coordenadas  $\Psi^{-1} \circ \Phi$ , temos que:

$$\mathbf{M}_\Phi(u) = \mathbf{M}_\Psi(v) \tilde{A}$$

onde:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Finalmente, como  $\det \mathbf{M}_\Phi(u) > 0$  e  $\det \mathbf{M}_\Psi(v) > 0$  resulta que:

$$0 < \det \tilde{A} = \det A$$

■

## 1.9.2 Exemplos e Exercícios

♣ **Exercício 1.65** ... Mostre que se  $M$  está definida como imagem inversa de um valor regular, então  $M$  é orientável.

♣ **Exercício 1.66 “Tira de Moebius”**... Considere um círculo  $S$  de equação  $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ , no plano  $xy$  de  $\mathbb{R}^3$ , e um segmento aberto  $AB$  no plano  $yz$ , dado por  $y = 2, |z| < 1$ . Move-se o centro  $c$  de  $AB$  ao longo do círculo  $S$ , rodando ao mesmo tempo  $AB$  em torno de  $c$ , no plano  $cz$ , de tal forma que quando  $c$  rodou um ângulo  $u$ ,  $AB$  rodou um ângulo  $u/2$ . Portanto, quando  $c$  completa uma volta inteira,  $AB$  regressa à sua posição inicial embora com as suas extremidades invertidas (ver a figura 1.25).

Figure 1.25: Tira de Moebius

(i). Construa parametrizações para a superfície  $M$  obtida pelo processo acima descrito, e mostre que  $M$  é variedade diferenciável.

(ii). Mostre que  $M$  não é orientável.

(iii). Será possível exibir a Tira de Moebius com imagem inversa de um valor regular?

• **Resolução** ... Uma parametrização para a Tira de Moebius, é dada por:

$$\Phi(u, v) = \left( \left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2}\right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right)$$

definida em  $U = \{(u, v) : 0 < u < 2\pi, -1 < v < 1\}$ .  $\Phi(U)$  omite os pontos do intervalo aberto  $\Phi(0, v)$ . Tomando agora novas coordenadas  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  onde  $\tilde{u}$  mede o ângulo relativamente ao eixo dos  $xx$ , obtemos uma outra parametrização:

$$\Psi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left( \left(2 - \tilde{v} \sin \frac{\tilde{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos \tilde{u}, - \left(2 - \tilde{v} \sin \frac{\tilde{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin \tilde{u}, \tilde{v} \cos \frac{\tilde{u}}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

definida em  $\tilde{U} = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) : 0 < \tilde{u} < 2\pi, -1 < \tilde{v} < 1\}$  e que agora omite o intervalo aberto  $\Phi(\pi/2, v)$ . Observemos agora que  $U \cap \tilde{U}$  tem duas componentes conexas:

$$W_1 = \left\{ \Phi(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \Phi(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2} \right\}$$

As mudanças de coordenadas são dadas por:

$$(u, v) \mapsto \left( \tilde{u} = u - \frac{\pi}{2}, \tilde{v} = v \right) \quad \text{em } W_1$$

$$(u, v) \mapsto \left( \tilde{u} = u + \frac{3\pi}{2}, \tilde{v} = -v \right) \quad \text{em } W_2$$

cujo determinante Jacobiano é igual a  $1 > 0$  em  $W_1$  e a  $-1 < 0$  em  $W_2$ .

Para provar que a Tira de Moebius  $M$  não é orientável, vamos supôr que é possível definir um campo diferenciável de vectores unitários normais a  $M$ ,  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Permutando  $u$  e  $v$  se necessário, podemos supôr que:

$$N(p) = \frac{\frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right\|}$$

$\forall p \in \Phi(U)$ . Anàlogamente, podemos supôr que:

$$N(p) = \frac{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}}{\left\| \frac{\partial}{\partial \tilde{u}} \times \frac{\partial}{\partial \tilde{v}} \right\|}$$

$\forall p \in \Psi(\tilde{U})$ . No entanto, o determinante Jacobiano da mudança de coordenadas deverá ser igual a  $-1$  ou em  $W_1$  ou em  $W_2$ . Se  $p$  é um ponto nessa componente, então  $N(p) = -N(p)$ , o que é absurdo.

♣ **Exercício 1.67** ... Seja  $M$  uma hipersuperfície em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Mostre que  $M$  é orientável se e só se existe um campo de vectores normais contínuo  $N$  em  $M$ , tal que  $N(p) \neq 0, \forall p \in M$ .

- **Resolução** ... Suponhamos que  $M$  é orientável. Definimos então um campo contínuo  $N$  de vectores normais unitários (de norma 1), e portanto não nulos, da seguinte forma: para cada  $p \in M$  existem dois vectores unitários normais a  $M$  em  $p$ , e escolhemos o que satisfaz a condição seguinte (e que designamos por  $N(p)$ ) - a matriz:

$$\mathbf{M}_\Phi(u) = \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p, N(p) \right]$$

tem determinante positivo, onde  $\Phi : U \rightarrow M$  é uma parametrização positiva com  $p = \Phi(u)$ . É fácil mostrar que esta condição não depende da parametrização positiva escolhida.

Resta provar que  $N$  é contínuo. Para isso observamos que  $M$  é localmente a imagem inversa  $F^{-1}(c)$  de um valor regular e portanto  $M$  pode ser coberta por vizinhanças conexas em cada uma das quais está definido um campo contínuo de vectores normais unitários  $\tilde{N}$  dado por:

$$\tilde{N}(p) = \frac{\nabla F(p)}{\|\nabla F(p)\|}$$

Dada uma parametrização positiva  $\Phi : U \rightarrow V$  ou:

$$\det \mathbf{M}_\Phi(u) = \det \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p, \tilde{N}(p) \right] > 0$$

$\forall u \in U$ , ou esse determinante é negativo em todo o ponto de  $U$ . No primeiro caso,  $\tilde{N}(p) = N(p)$  e no segundo caso  $\tilde{N}(p) = -N(p)$ . Em qualquer dos casos  $N$  é contínuo em  $U$  e como essas vizinhanças cobrem  $M$ ,  $N$  é contínuo em  $M$ .

O recíproco resulta do teorema anterior.



♣ **Exercício 1.68** “Orientação de um espaço vectorial”... Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vectorial real de dimensão  $k$  e seja  $\mathcal{B}$  o conjunto de todas as suas bases ordenadas. Dadas duas bases  $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$  e  $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k\}$  em  $\mathcal{B}$ , existe como sabemos uma única matriz não singular  $A = (A_j^i)$ , tal que:

$$\mathbf{f}_j = \sum_i A_j^i \mathbf{e}_i, \quad j = 1, \dots, k \quad (1.9.3)$$

Diz-se que duas bases  $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in \mathcal{B}$  estão “igualmente orientadas” quando a matriz  $A$  definida por (1.9.3) tem determinante positivo. Nesse caso escrevemos  $\mathbf{e} \sim \mathbf{f}$ .

(i). Mostre que  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\mathcal{B}$ , e que existem exactamente duas classes de equivalência para essa relação.

Cada uma dessas classes de equivalência diz-se uma “orientação” para  $V$ . Orientar  $V$  é escolher uma dessas orientações  $\mathcal{O}^+$ , que então se declara como “orientação positiva”. A outra será portanto a orientação negativa (ou oposta)  $\mathcal{O}^-$ . As bases de  $\mathcal{B}$  que pertencem a  $\mathcal{O}^+$  dizem-se “bases positivas” e as restantes bases negativas.

Se  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{W}$  são dois espaços vectoriais orientados da mesma dimensão, um isomorfismo  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  diz-se que “preserva orientação” (ou que é “positivo”), se  $T$  envia bases positivas de  $\mathcal{V}$  em bases positivas de  $\mathcal{W}$ . Caso contrário diz-se que  $T$  “inverte orientação” (ou que é negativo).

O espaço  $\mathbb{R}^n$  será sempre orientado exigindo que a base canónica seja positiva. Em particular um isomorfismo  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  será positivo se  $\det T > 0$ .

(ii). Consideremos agora uma variedade orientada  $M$  de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Em cada ponto  $p \in M$  definimos uma orientação  $\mathcal{O}_p^+$  para o espaço tangente  $T_p M$ , exigindo que a base associada a uma parametrização positiva  $\Phi : U \rightarrow M$ , com  $\Phi(u) = p$ , pertença a  $\mathcal{O}_p^+$ :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p \right\} \in \mathcal{O}_p^+$$

Mostre que  $\mathcal{O}_p^+$  não depende da parametrização positiva escolhida.

(iii). Reciprocamente, dada uma variedade  $M$  de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , suponhamos que é possível fazer uma escolha de uma orientação  $\mathcal{O}_p^+$  para cada  $T_p M$ ,  $p \in M$ , de tal forma que todo o ponto de  $M$  pertence à imagem de uma parametrização  $\Phi : U \rightarrow M$  tal que (pondo  $p = \Phi(u)$ ):

$$\Phi_{*p} : \mathbb{R}^k \rightarrow (T_p M, \mathcal{O}_p^+)$$

preserva orientação,  $\forall u \in U$ . Mostre que então  $M$  é orientável.

♣ **Exercício 1.69** ... Se  $M$  e  $N$  são duas variedades orientadas e se  $F : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo local, diz-se que  $F$  preserva orientação se  $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  preserva orientação,  $\forall p \in M$ . Caso contrário diz-se que  $F$  inverte orientação.

Seja  $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\}$  a  $n$ -esfera em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , e  $A : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{S}^n$  a aplicação antípoda:

$$A(p) = -p \quad p \in \mathbf{S}^n$$

(i). Mostre que  $\mathbf{S}^n$  é orientável.

(ii). Mostre que se  $n$  é ímpar,  $A$  preserva orientação, e que se  $n$  é par,  $A$  inverte orientação.

• **Resolução** ... Note que  $T_p \mathbf{S}^n \cong T_{-p} \mathbf{S}^n$  já que ambos são o hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  perpendicular a  $p \in \mathbf{S}^n$ .  $\mathbf{S}^n$  é orientável e orientamos  $\mathbf{S}^n$  escolhendo o campo de normais unitário “exterior”  $N(p) = p$ . Com esta orientação uma base  $\{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n\}$  de  $T_p \mathbf{S}^n \cong T_{-p} \mathbf{S}^n$  será positiva sse  $\det [\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n, N(p)] > 0$ . Concluimos portanto que, embora os espaços tangentes  $T_p \mathbf{S}^n$  e  $T_{-p} \mathbf{S}^n$  sejam o mesmo, as suas orientações são opostas:  $\mathcal{O}_{-p} = -\mathcal{O}_p$ .

Mas  $A_{*p}$  é multiplicação por  $-1$  e por isso  $\det A_{*p} = (-1)^n$ . Resulta então que em relação às orientações  $\mathcal{O}_p$  de  $T_p \mathbf{S}^n$  e  $\mathcal{O}_{-p} = -\mathcal{O}_p$  de  $T_{-p} \mathbf{S}^n$ ,  $A_{*p}$  é isomorfismo positivo se  $n$  é ímpar (e neste caso,  $A$  preserva orientação), e é isomorfismo negativo se  $n$  é par (e neste caso,  $A$  inverte orientação).

♣ **Exercício 1.70** ... Mostre que o fibrado tangente  $TM$  de uma variedade  $M$  (ver o exercício 1.33), é sempre orientável.

♣ **Exercício 1.71** ... Seja  $M$  uma variedade que pode ser coberta pelas imagens  $V_1, V_2$  de duas parametrizações, tais que  $V_1 \cap V_2$  é conexa. Mostre que  $M$  é orientável.

♣ **Exercício 1.72** ... Mostre que a esfera  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é orientável.

## Capítulo 2

# Formas diferenciais

### 2.1 Formas exteriores

#### 2.1.1 Definição e exemplos

Seja  $V$  um espaço vectorial real de dimensão finita  $n$ .

♣ **Definição 2.1** ... Uma “ $k$ -forma exterior”  $\omega$  em  $V$  é uma aplicação multilinear (linear em cada variável):

$$\omega : V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ factores}} \rightarrow \mathbb{R}$$

que é alternada ou anti-simétrica, i.e.:

$$\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k)$$

Representamos por:

$$\mathcal{A}^k(V)$$

o espaço vectorial das  $k$ -formas exteriores em  $V$ . Para  $k = 0$  define-se  $\mathcal{A}^0(V) = \mathbb{R}$ . Note que  $\mathcal{A}^1(V) = V^*$  é o dual de  $V$ .

Se  $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$  é uma  $k$ -forma exterior em  $V$  e se  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$  são linearmente dependentes, então  $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = 0$ . Com efeito, um dos vectores será combinação linear dos restantes, digamos  $\mathbf{v}_1 = \lambda^2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda^k \mathbf{v}_k$ , e portanto:

$$\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sum_{i=2}^k \lambda^i \omega(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = 0$$

já que  $\omega$  é alternada. Daqui se conclui que:

$$\mathcal{A}^k(V) = \{0\} \quad \text{se} \quad k > \text{dimensão } V$$

♣ **Exemplo 2.1** ... A aplicação  $\omega$  que a cada paralelepípedo  $n$ -dimensional em  $\mathbb{R}^n$  de arestas  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , associa o respectivo volume orientado:

$$\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] \quad (2.1.1)$$

é uma  $n$ -forma exterior em  $\mathbb{R}^n$ . Quando as arestas  $\mathbf{v}_i$  são linearmente independentes,  $\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  terá sinal  $+$  ou  $-$ , conforme  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  pertença ou não à orientação usual de  $\mathbb{R}^n$  definida pela sua base canónica.

♣ **Exemplo 2.2 “Forma Volume”**... Consideremos um espaço vectorial real  $V$  de dimensão  $n$ , orientado e munido de um produto interno euclídeano, que notamos por  $\cdot$ . Vamos definir uma  $n$ -forma  $\text{vol} \in \mathcal{A}^n(V)$ , chamada “forma volume” (associada ao produto interno  $\cdot$  e à orientação em  $V$ ), da seguinte maneira: seja  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  uma base ortonormada positiva de  $V$ . Pômos então:

$$\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det A \quad (2.1.2)$$

onde  $A = (A_j^i)$  é a matriz definida por  $\mathbf{v}_j = \sum_i A_j^i \mathbf{e}_i$ . De facto esta definição não depende da escolha da base ortonormada positiva  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Com efeito, consideremos a chamada matriz de Gramm:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j]$$

Como:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \sum_k \mathbf{v}_i \cdot (A_j^k \mathbf{e}_k) = \sum_k A_j^k (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_k A_j^k A_i^k$$

concluimos que:

$$G = A^t A$$

e portanto:

$$\det G = (\det A)^2$$

Em particular,  $\det G \geq 0$  e  $\det G = 0$  se e só se  $\det A = 0$ , isto é, se e só se os vectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  são linearmente dependentes. Concluimos finalmente que:

$$\boxed{\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \pm \sqrt{\det(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)}} \quad (2.1.3)$$

onde  $+$  ou  $-$  é o sinal de  $\det A$ . Assim  $\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) > 0$  se a base ordenada  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  fôr positiva, e  $\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) < 0$ , caso contrário. Claro que (2.1.3) mostra que  $\text{vol}$  não depende da escolha da base  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Note ainda que:

$$\boxed{\text{vol}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 1 \quad \text{para toda a base ortonormada positiva } \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\} \text{ de } V}$$

♣ **Exemplo 2.3** ... Sejam  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(V)$  duas 1-formas em  $V$ . À custa destas duas 1-formas vamos definir uma 2-forma em  $V$ , que notamos por  $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}^2(V)$ , a que chamamos produto exterior de  $\alpha$  com  $\beta$ , e que definimos por:

$$\alpha \wedge \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{bmatrix} \alpha(\mathbf{u}) & \beta(\mathbf{u}) \\ \alpha(\mathbf{v}) & \beta(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

Portanto  $\alpha \wedge \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  é igual à área orientada do paralelogramo em  $\mathbb{R}^2$  de arestas  $\mathbf{U} = (\alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{u}))$  e  $\mathbf{V} = (\alpha(\mathbf{v}), \beta(\mathbf{v}))$ .

Mais geralmente, se  $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in \mathcal{A}^1(V)$  são  $k$  1-formas em  $V$ , definimos o “produto exterior”  $\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \in \mathcal{A}^k(V)$  como sendo a  $k$ -forma em  $V$  dada por:

$$\boxed{\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \det[\alpha^i(\mathbf{v}_j)]} \quad (2.1.4)$$

que representa portanto o volume orientado do paralelepípedo  $k$ -dimensional em  $\mathbb{R}^k$ , cujas arestas são  $\mathbf{V}_1 = (\alpha^1(\mathbf{v}_1), \dots, \mathbf{V}_k = (\alpha^k(\mathbf{v}_k))$ .

♣ **Exemplo 2.4** ... Seja  $V = \mathbb{R}^3$ , munido de uma base qualquer  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , e da orientação definida por essa base. Consideremos a base de  $\mathbb{R}^{3*}$ ,  $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ , dual à base  $\mathcal{B}$ , isto é:

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Os produtos exteriores não nulos das 1-formas  $\mathbf{e}^i$  são:

$$\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 = -\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^2$$

e é fácil verificar que as 2-formas:

$$\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$$

são linearmente independentes em  $\mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$ . Além disso elas geram  $\mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$ . Com efeito dada uma qualquer 2-forma  $\omega \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$ , podemos escrever:

$$\omega = \omega_{12} \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + \omega_{13} \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 + \omega_{23} \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$$

onde  $\omega_{12} = \omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ,  $\omega_{13} = \omega(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$  e  $\omega_{23} = \omega(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Portanto  $\{\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3\}$  é uma base de  $\mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$  e  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3) = 3$ .

De forma análoga se prova que  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}^3(\mathbb{R}^3) = 1$  e que uma base para  $\mathcal{A}^3(\mathbb{R}^3)$  é dada pela 3-forma  $\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$ .

■

Este último exemplo admite a seguinte generalização:

♣ **Teorema 2.1** ... Seja  $V$  um espaço vectorial real de dimensão  $n$ , e  $\mathcal{A}^k(V)$  o espaço vectorial das  $k$ -formas exteriores em  $V$ . Então, se  $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$  é uma base para  $V^*$ :

$$\{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

é uma base para  $\mathcal{A}^k(V)$ . De facto, toda a  $k$ -forma  $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$  escreve-se na maneira única:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_k}$$

com  $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ , onde  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  é a base de  $V$  dual á base  $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ . Em particular:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A}^k(V) = \binom{n}{k}$$

- **Dem.:** Seja  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  a base de  $V$  dual á base  $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ , isto é,  $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$ . Para uma  $k$ -forma exterior  $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ , consideremos os números  $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ , onde  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ . Temos então que:

$$\omega(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_k}(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k})$$

para todos os  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ , uma vez que por (2.1.4)  $\mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_k}(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}) = \det[\mathbf{e}^{i_\ell}(\mathbf{e}_{j_m})]$  é igual a 1 quando cada  $i_\ell = j_\ell$ , e igual a 0 nos outros casos. Portanto as duas formas são iguais, o que implica que as formas  $\mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_k}$  geram  $\mathcal{A}^k(V)$ . Por outro lado, se a soma anterior é zero (i.e., se  $\omega = 0$ ), então cada um dos coeficientes  $\omega_{i_1 \dots i_k}$  é nulo, e as formas são linearmente independentes.

■

Em particular  $\dim \mathcal{A}^n(V) = 1$  se  $n = \dim V$  e portanto todas as  $n$ -formas em  $V$  são múltiplos de uma  $n$ -forma não nula. Uma vez que a função  $\det$  é exemplo de uma tal  $n$ -forma não nula, não é surpreendente encontrá-lo no teorema seguinte:

♣ **Teorema 2.2** ... *Seja  $V$  um espaço vectorial real de dimensão  $n$ ,  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  uma base de  $V$ , e  $\omega \in \mathcal{A}^n(V)$  uma  $n$ -forma. Se  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$  são  $n$  vectores quaisquer em  $V$ , com  $\mathbf{w}_j = \sum_i A_j^i \mathbf{v}_i$ ,  $j = 1, \dots, n$ , então:*

$$\boxed{\omega(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \det(A) \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)} \quad (2.1.5)$$

- **Dem.:** Representemos as colunas da matriz  $A$  por  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , que são vectores em  $\mathbb{R}^n$ , e definamos  $\mu \in \mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n)$  através de:

$$\mu(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(A_1^j \mathbf{v}_j, \dots, A_n^j \mathbf{v}_j) = \omega(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) \quad (2.1.6)$$

Então  $\mu \in \mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n)$  e portanto  $\mu = \lambda \cdot \det$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ , uma vez que  $\dim \mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n) = 1$  e  $\det \in \mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ . Mas, se  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  é a base canónica de  $\mathbb{R}^n$ :

$$\lambda \cdot \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \lambda = \mu(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

isto é,  $\lambda = \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  e finalmente, como  $\mu = \lambda \cdot \det$  e por (2.1.6), vem que:

$$\omega(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \mu(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(A) \omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$$

■

Este teorema permite uma caracterização alternativa do conceito de orientação de um espaço vectorial (ver o exercício 1.68). Com efeito o referido teorema mostra que uma  $n$ -forma não nula  $\omega \in \mathcal{A}^n(V)$ , num espaço vectorial real  $V$  de dimensão  $n$ , separa o conjunto de todas as bases (ordenadas) de  $V$ , em dois grupos disjuntos: aquelas para as quais  $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) > 0$  e aquelas para as quais  $\omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) < 0$ . Se  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  e  $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$  são duas bases de  $V$ , e se  $A$  é a matriz definida por  $\mathbf{w}_j = \sum_i A_j^i \mathbf{v}_i$ , então essas duas bases estão no mesmo grupo sse  $\det A > 0$ . Este último critério é independente de  $\omega \in \mathcal{A}^n(V) - \{0\}$  e pode ser utilizado para dividir as bases de  $V$  em dois grupos distintos. Cada um destes grupos diz-se uma “**orientação**” para  $V$ . Orientar  $V$  é escolher um desses grupos, cujas bases se declaram “**positivas**”.

### 2.1.2 A álgebra exterior $\mathcal{A}(V)$ . Produto exterior.

A álgebra exterior (ou de Grassmann) das formas exteriores em  $V$ , é por definição a  $\mathbb{R}$ -álgebra graduada:

$$\mathcal{A}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}^k(V)$$

munida do chamado **produto exterior de formas**,  $\wedge : \mathcal{A}^k(V) \times \mathcal{A}^\ell(V) \rightarrow \mathcal{A}^{k+\ell}(V)$ , definido por:

$$\boxed{\omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+\ell}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}) \eta(\mathbf{v}_{\sigma(k+1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k+\ell)})} \quad (2.1.7)$$

onde  $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ ,  $\eta \in \mathcal{A}^\ell(V)$  e a soma  $\sum_{\sigma}$  é feita sobre todas as permutações  $\sigma$  de  $\{1, \dots, k+\ell\}$ , tais que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$  e  $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+\ell)$ . Note que isto é o mesmo que:

$$\omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma} \text{sgn} \sigma \omega(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}) \eta(\mathbf{v}_{\sigma(k+1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k+\ell)})$$

onde agora a soma é feita sobre todas as permutações.

Assim por exemplo, se  $\omega, \eta \in \mathcal{A}^1(V) = V^*$  são 1-formas:

$$\omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \omega(\mathbf{v}_1)\eta(\mathbf{v}_2) - \omega(\mathbf{v}_2)\eta(\mathbf{v}_1)$$

e se  $\omega \in \mathcal{A}^1(V)$  e  $\eta \in \mathcal{A}^2(V)$ :

$$\omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \omega(\mathbf{v}_1)\eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) - \omega(\mathbf{v}_2)\eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + \omega(\mathbf{v}_3)\eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

É fácil ver que o produto exterior é bilinear e associativo. Por outro lado, deduzimos do teorema 2.1 que:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega, \quad \omega \in \mathcal{A}^k(V), \eta \in \mathcal{A}^\ell(V) \quad (2.1.8)$$

De facto, ambos os membros são bilineares, e coincidem quando  $\omega$  e  $\eta$  são elementos da base referida no teorema 2.1. Portanto coincidem  $\forall \omega, \eta$ . Em particular:

$$\omega \wedge \omega = 0 \quad \text{se } \omega \text{ é uma forma de grau ímpar}$$

♣ **Exemplo 2.5** ... Se  $\alpha = \alpha_1 \mathbf{e}^1 + \alpha_2 \mathbf{e}^2 + \alpha_3 \mathbf{e}^3$  e  $\beta = \beta_1 \mathbf{e}^1 + \beta_2 \mathbf{e}^2 + \beta_3 \mathbf{e}^3$  são duas 1-formas em  $\mathbb{R}^3$  então:

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$$

♣ **Exemplo 2.6** ... Se  $\omega = \omega_{12} \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + \omega_{34} \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4 \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^4)$  então:

$$\omega \wedge \omega = 2\omega_{12}\omega_{34} \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4$$

### 2.1.3 Pull-back de formas

Vamos agora definir uma operação muito importante em formas exteriores - o chamado **pull-back** de formas.

Consideremos dois espaços vectoriais reais de dimensão finita  $V$  e  $W$  e uma aplicação linear:

$$A : V \longrightarrow W$$

Se  $V^*$  e  $W^*$  representam os respectivos espaços duais, podemos definir uma aplicação linear naturalmente associada a  $A$ :

$$A^* : W^* \longrightarrow V^*$$

a que chamamos a **transposta de  $A$** , através de:

$$\langle A^*\theta, \mathbf{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \theta, A\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \theta \in W^* \quad (2.1.9)$$

onde  $\langle, \rangle$  representa a forma de dualidade usual entre  $V^*$  e  $V$  (isto é, para  $\alpha \in V^*$  e  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\langle \alpha, \mathbf{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$ ). Assim se  $\theta$  é uma 1-forma em  $W$ ,  $A^*\theta$  é uma 1-forma em  $V$ , que se diz o pull-back da forma  $\theta$  pela aplicação linear  $A$ .

Esta situação generaliza-se facilmente para  $k$ -formas. Assim se  $\omega \in \mathcal{A}^k(W)$  é uma  $k$ -forma em  $W$ , define-se  $A^*\omega \in \mathcal{A}^k(V)$  através de:

$$(A^*\omega)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(A\mathbf{v}_1, \dots, A\mathbf{v}_k) \quad \forall \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V \quad (2.1.10)$$

É fácil ver que de facto  $A^*\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ . Uma propriedade importante do pull-back de formas é que ele preserva o produto exterior de formas:

$$\boxed{A^*(\omega \wedge \eta) = (A^*\omega) \wedge (A^*\eta) \quad \forall \omega, \eta \in \mathcal{A}(W)} \quad (2.1.11)$$

e por isso, para o cálculo prático do pull-back, basta considerar o pull-back de 1-formas.

Assim suponhamos que  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  é uma base para  $V$ ,  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$  uma base para  $W$ , e sejam  $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$  e  $\{\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^m\}$  as bases duais para  $V^*$  e para  $W^*$ , respectivamente. Então:

$$A\mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{f}_j \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1.12)$$

enquanto que:

$$A^*\mathbf{f}^k = (A^*)_j^k \mathbf{e}^j \quad k = 1, \dots, m \quad (2.1.13)$$

Mas:

$$\langle A^*\mathbf{f}^k, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{f}^k, A\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{f}^k, A_i^j \mathbf{f}_j \rangle = A_i^j \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{f}_j \rangle = A_i^j \delta_j^k = A_i^k$$

enquanto que:

$$\langle A^*\mathbf{f}^k, \mathbf{e}_i \rangle = \langle (A^*)_j^k \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = (A^*)_j^k \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = (A^*)_j^k \delta_i^j = (A^*)_i^k$$

Portanto:

$$(A^*)_i^k = A_i^k$$

♣ **Exemplo 2.7** ... Designemos as bases canónicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  respectivamente por  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  e por  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ . Se  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dada por  $A(x, y) = (-x + y, 3x - y, 5x + 2y)$ , então  $A\mathbf{e}_1 = -\mathbf{f}_1 + 3\mathbf{f}_2 + 5\mathbf{f}_3$  e  $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3$ , e se  $\omega = 4\mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{f}^2 - 7\mathbf{f}^2 \wedge \mathbf{f}^3$ , então como:

$$[A_j^i] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

vem que:

$$\begin{aligned} A^*\omega &= A^*(4\mathbf{f}^1 \wedge \mathbf{f}^2 - 7\mathbf{f}^2 \wedge \mathbf{f}^3) \\ &= 4(A^*\mathbf{f}^1) \wedge (A^*\mathbf{f}^2) - 7(A^*\mathbf{f}^2) \wedge (A^*\mathbf{f}^3) \\ &= 4(A_1^1\mathbf{e}^1 + A_2^1\mathbf{e}^2) \wedge (A_1^2\mathbf{e}^1 + A_2^2\mathbf{e}^2) - 7(A_1^2\mathbf{e}^1 + A_2^2\mathbf{e}^2) \wedge (A_1^3\mathbf{e}^1 + A_2^3\mathbf{e}^2) \\ &= (-4\mathbf{e}^1 + 4\mathbf{e}^2) \wedge (3\mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^2) - (21\mathbf{e}^1 - 7\mathbf{e}^2) \wedge (5\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2) \\ &= -76\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \end{aligned}$$

## 2.2 Formas Diferenciais

### 2.2.1 Definição e exemplos

♣ **Definição 2.2** ... Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Uma **forma diferencial**  $\omega$  de grau  $\ell$  em  $M$ , é uma aplicação diferenciável que a cada  $p \in M$  associa uma  $\ell$ -forma exterior em  $T_pM$ :

$$\omega: p \mapsto \omega_p \in \mathcal{A}^\ell(T_pM)$$



Nesta definição  $\omega$  é uma aplicação diferenciável no sentido seguinte: numa parametrização local de  $M$ ,  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , com coordenadas locais  $u^i$ ,  $T_p^*M$  tem uma base  $du^1|_p, \dots, du^k|_p$  dual à base de vectores coordenados  $\frac{\partial}{\partial u^i}|_p$ , isto é  $du^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial u^j}|_p \right) = \delta_j^i$ . Portanto  $\omega_p$  escreve-se na forma:

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \dots < i_\ell} \omega_{i_1 \dots i_\ell}(u) du^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge du^{i_\ell}|_p$$

isto é, localmente em  $U$ , a  $\ell$ -forma diferencial  $\omega$  admite a representação local  $\omega_U$ , dada por:

$$\boxed{\omega_U = \sum_{i_1 < \dots < i_\ell} \omega_{i_1 \dots i_\ell} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_\ell}} \quad (2.2.1)$$

onde as funções  $\omega_{i_1 \dots i_\ell} \in C^\infty(U)$ . Se  $U \subseteq M$  é um aberto de  $M$ , representamos por:

$$\Omega^\ell(U)$$

o espaço das  $\ell$ -formas diferenciais de classe  $C^\infty$  em  $U$ . Se  $\ell = 0$  põe-se:

$$\Omega^0(M) = C^\infty(M)$$

isto é, uma 0-forma diferencial é uma função  $C^\infty$  em  $M$ . Se  $\ell > \text{dimensão} M$  então  $\Omega^\ell(M) = \{0\}$ . É claro que é possível definir várias operações de maneira natural sobre formas diferenciais em  $M$ . Assim:

- Se  $\alpha, \beta \in \Omega^\ell(M)$  são formas do mesmo grau, define-se a soma  $\alpha + \beta$  através de:

$$(\alpha + \beta)_p \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_p + \beta_p \quad \forall p \in M$$

- Se  $f \in C^\infty$  e  $\omega \in \Omega^\ell(M)$  define-se a  $\ell$ -forma  $f\omega \in \Omega^\ell(M)$  através de:

$$(f\omega)_p \stackrel{\text{def}}{=} f(p)\omega_p \quad \forall p \in M$$

- Se  $\alpha \in \Omega^r(M)$  e  $\beta \in \Omega^s(M)$  define-se o produto exterior  $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{r+s}(M)$  através de:

$$(\alpha \wedge \beta)_p \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_p \wedge \beta_p \quad \forall p \in M$$

♣ **Exemplo 2.8** ... Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^\infty$  a sua diferencial  $df$  é uma 1-forma diferencial:  $df \in \Omega^1(M)$ . Como já vimos  $df_p$  define-se por:

$$df_p(\mathbf{V}_p) = (f \circ \alpha)'(0)$$

onde  $\alpha : I \rightarrow M$  é uma curva  $C^\infty$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{V}_p \in T_pM$ . Numa parametrização local  $\Phi : U \rightarrow M$ ,  $df$  tem a expressão local (ver (1.5.8)):

$$df = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial u^i} du^i$$

onde se  $\Phi(u) = p$  (ver (1.5.9)):

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial u^i}(f \circ \Phi)(u)$$

♣ **Exemplo 2.9** ... Num aberto  $M$  de  $\mathbb{R}^3$ , munido das coordenadas cartesianas usuais  $x, y, z$ , temos a base para  $T_p M$ :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p \right\}$$

A correspondente base dual para  $T_p^* M$  é notada por:

$$\{dx|_p, dy|_p, dz|_p\}$$

As formas diferenciais em  $M$  são:

- as funções  $C^\infty f : M \rightarrow \mathbb{R}$  (formas de grau 0).
- as formas de grau 1:

$$\theta = a dx + b dy + c dz, \quad a, b, c \in C^\infty(M)$$

- as formas de grau 2:

$$\omega = a dx \wedge dy + b dx \wedge dz + c dy \wedge dz, \quad a, b, c \in C^\infty(M)$$

- as formas de grau 3:

$$\omega = a dx \wedge dy \wedge dz \quad a \in C^\infty(M)$$

♣ **Exemplo 2.10 “Forma Volume”** ... Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , orientada e munida de uma métrica riemanniana  $g$ .

Então para cada  $p \in M$ ,  $T_p M$  é um espaço vectorial orientado munido de um produto interno euclídeano  $g_p$ , e podemos portanto definir a respectiva forma volume  $\text{vol}_p \in \mathcal{A}^k(T_p M)$  através de (2.1.3):

$$\text{vol}_p(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k) = \pm \sqrt{\det[g_p(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j)]} \quad \mathbf{V}_i \in T_p M$$

isto é,  $\text{vol}_p(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k)$  é igual ao volume orientado do paralelepípedo em  $T_p M$  gerado por  $\{\mathbf{V}_i\}_{i=1, \dots, k}$ .

Definimos agora a  $k$ -forma  $\mu_g \in \Omega^k(M)$ , chamada a “**forma volume**” associada à métrica  $g$  e à orientação de  $M$ , através de

$$(\mu_g)_p = (dV)_p \stackrel{\text{def}}{=} \text{vol}_p$$

Numa parametrização local positiva  $\Phi : U \rightarrow M$ , com coordenadas locais  $u^i$ , (isto é,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right\}$  é uma base positiva de  $T_p M$ , para todo o ponto  $p \in \Phi(U) \subseteq M$ ), temos que:

$$\boxed{\mu_g = dV \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\det(g_{ij}(u))} du^1 \wedge \dots \wedge du^k, \quad u = (u^1, \dots, u^k) \in U} \quad (2.2.2)$$

onde:

$$g_{ij}(u) \stackrel{\text{def}}{=} g_p \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \right)$$

são os coeficientes da métrica  $g$  nas coordenadas locais  $u^i$ .

Assim por exemplo:

- a forma volume (área, neste caso) da esfera, com a métrica usual, dada em coordenadas geográficas  $(\theta, \varphi)$  por  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  (ver (1.6.17)), é:

$$dA = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (2.2.3)$$

- a forma de área do plano  $\mathbb{R}^2$  com a métrica esférica  $ds^2 = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}(dx^2 + dy^2) = \frac{1}{(1+|z|^2)^2}dzd\bar{z}$  (ver (1.6.30)), é:

$$dA = \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy \quad (2.2.4)$$

- a forma de área do semi-plano de Poincaré  $H^+$  com a métrica esférica  $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) = \frac{1}{(Imz)^2}dzd\bar{z}$  (ver (1.6.33)), é:

$$dA = \frac{1}{y} dx dy \quad (2.2.5)$$

♣ **Exemplo 2.11** ... Seja  $M$  uma superfície orientada mergulhada em  $\mathbb{R}^3$ , e  $N$  um campo  $C^\infty$  de vectores unitários normais a  $M$  tal que  $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$  é uma base positiva de  $T_pM$ ,  $p \in M$  se e só se  $\det[N(p), \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2] > 0$ .

Se  $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2 \in T_pM$ , então como  $N(p)$  tem norma 1 e é perpendicular a  $T_pM$ , o volume do paralelogramo gerado por  $\mathbf{W}_1$  e  $\mathbf{W}_2$ , é igual a:

$$|\det[N(p), \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2]|$$

Se  $\mu_g = \text{vol}$  é a forma volume de  $M$ , relativamente à métrica induzida em  $M$  pelo produto interno euclídeano usual em  $\mathbb{R}^3$ , então pelo exemplo anterior:

$$\text{vol}_p(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \det[N(p), \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2]$$

já que o sinal do determinante é o mesmo do da definição de  $\mu_g = \text{vol}$ .

Se  $N(p) = (n^1(p), n^2(p), n^3(p))$ ,  $\mathbf{W}_1 = (a, b, c)$  e  $\mathbf{W}_2 = (d, e, f)$ , então desenvolvendo o determinante segundo a primeira coluna, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{vol}_p(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) &= \det[N(p), \mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2] \\ &= \det \begin{bmatrix} n^1(p) & a & d \\ n^2(p) & b & e \\ n^3(p) & c & f \end{bmatrix} \\ &= n^1(p) \det \begin{bmatrix} b & e \\ c & f \end{bmatrix} - n^2(p) \det \begin{bmatrix} a & d \\ c & f \end{bmatrix} + n^3(p) \det \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$dy \wedge dz(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \det \begin{bmatrix} b & e \\ c & f \end{bmatrix}, dx \wedge dz(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \det \begin{bmatrix} a & d \\ c & f \end{bmatrix}, dx \wedge dy(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \det \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$\boxed{\mu_g = dA \stackrel{def}{=} n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy} \quad (2.2.6)$$

Por exemplo:

- se  $M = S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$  é a esfera de centro  $\mathbf{a}$  e raio  $r > 0$ , podemos tomar, para cada  $\mathbf{x} \in S^2$ :

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{r}$$

e portanto:

$$\boxed{dA = \frac{x-a}{r} dy \wedge dz + \frac{y-b}{r} dz \wedge dx + \frac{z-c}{r} dx \wedge dy}$$

- se  $M = F^{-1}(c)$  é uma superfície dada como imagem inversa do valor regular  $c \in \mathbb{R}$ , de uma função diferenciável  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , o elemento de área é dado por  $dA = \omega|_M$  onde:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\|\nabla F\|} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial F}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial F}{\partial z} dx \wedge dy \right]}$$

- se  $M = \mathbf{gr} f$  é uma superfície dada como o gráfico de uma aplicação diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , o elemento de área é dado por  $dA = \omega|_M$  onde:

$$\omega = \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx - dx \wedge dy \right]$$

onde  $a = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$ .

### 2.2.2 Pull-back e derivada exterior de formas diferenciais

Vamos agora definir o “**pull-back**” de formas diferenciais. Suponhamos que  $M$  e  $N$  são duas variedades e  $F : M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável. Dada uma  $\ell$ -forma  $\omega \in \Omega^\ell(N)$  em  $N$ , definimos uma  $\ell$ -forma  $F^*\omega \in \Omega^\ell(M)$  em  $M$ , através de:

$$(F^*\omega)_p \stackrel{\text{def}}{=} (dF_p)^*\omega_{F(p)} \quad \forall p \in M \tag{2.2.7}$$

ou mais explicitamente:

$$(F^*\omega)_p(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{F(p)}(dF_p(\mathbf{V}_1), \dots, dF_p(\mathbf{V}_\ell)) \tag{2.2.8}$$

$\forall p \in M$  e  $\forall \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_\ell \in T_pM$ . É fácil verificar as seguintes propriedades do pull-back de formas:

- $F^*(g) = g \circ F, \quad \forall g \in C^\infty(N)$ .
- $F^*(a\omega + \eta) = aF^*\omega + F^*\eta, \quad \forall \omega, \eta \in \Omega(N), \forall a \in \mathbb{R}$
- $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta), \quad \forall \omega, \eta \in \Omega(N)$ .
- $F^*(g\omega) = (g \circ F)F^*\omega, \quad \forall \omega \in \Omega(N), \forall g \in C^\infty(N)$ .
- Se  $F : M \rightarrow N$  e  $G : N \rightarrow P$  são diferenciáveis e se  $\omega \in \Omega(P)$  então:

$$(G \circ F)^*\omega = F^*G^*\omega$$

Passamos agora à definição do operador “**derivada exterior**”, que a cada forma  $\omega \in \Omega^\ell(M)$  de grau  $\ell$  em  $M$ , associa uma forma  $d\omega \in \Omega^{\ell+1}(M)$  de grau  $\ell+1$  em  $M$ . Começamos com formas definidas em abertos de  $\mathbb{R}^k$ .

♣ **Definição 2.3** ... Seja  $\omega \in \Omega^\ell(U)$  uma forma de grau  $\ell$  definida num aberto de  $\mathbb{R}^k$ , que nas coordenadas cartesianas usuais  $(u^1, \dots, u^k)$  de  $\mathbb{R}^k$ , é dada pela expressão:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_\ell} \omega_{i_1 \dots i_\ell} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_\ell}$$

onde as funções  $\omega_{i_1 \dots i_\ell} \in C^\infty(U)$ . A “**derivada exterior**” de  $\omega$  é a  $\ell + 1$  forma em  $U$  dada por:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_\ell} d\omega_{i_1 \dots i_\ell} \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_\ell} \\ &= \sum_{j, i_1 < \dots < i_\ell} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_\ell}}{\partial u^j} du^j \wedge du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_\ell} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

♣ **Exemplo 2.12** ... Se  $\omega = a dx + b dy \in \Omega^1(U)$  definida no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , com  $a, b \in C^\infty(U)$ , então:

$$\begin{aligned} d\omega &= (da \wedge dx) + (db \wedge dy) \\ &= \left( \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

♣ **Exemplo 2.13** ... Se  $\omega = a dx + b dy + c dz \in \Omega^1(U)$  definida no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , com  $a, b, c \in C^\infty(U)$ , então:

$$\begin{aligned} d\omega &= (da \wedge dx) + (db \wedge dy) + (dc \wedge dz) \\ &= \left( \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz \right) \wedge dy + \\ &\quad + \left( \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy + \frac{\partial c}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} \right) dx \wedge dz \end{aligned}$$

♣ **Exemplo 2.14** ... Se  $\omega = a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy \in \Omega^2(U)$  definida no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ , com  $a, b, c \in C^\infty(U)$ , então:

$$\begin{aligned} d\omega &= (da \wedge dy \wedge dz) + (db \wedge dz \wedge dx) + (dc \wedge dx \wedge dy) \\ &= \left( \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left( \frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy + \frac{\partial b}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx + \\ &\quad + \left( \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy + \frac{\partial c}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

□

♣ **Teorema 2.3** ... A derivada exterior definida por (2.2.9), verifica as propriedades seguintes:

(i). Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$  (uma 0-forma), então  $df \in \Omega^1(U)$  é a diferencial usual de  $f$ .

(ii).

$$\boxed{d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta} \quad (2.2.10)$$

(iii).

$$\boxed{dd\omega = 0 \quad \text{ou mais sucintamente} \quad d^2 = 0} \quad (2.2.11)$$

(iv).

$$\boxed{d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta} \quad (2.2.12)$$

(v).

$$\boxed{d(F^*\omega) = F^*(d\omega)} \quad (2.2.13)$$

- **Dem.:**

- (i). e (ii). são óbvias. Em virtude de (ii)., basta demonstrar as três propriedades seguintes no caso especial em que  $\omega$  e  $\eta$  são monómios do tipo:

$$\omega = a du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_\ell} \stackrel{\text{def}}{=} a du^I$$

$$\eta = b du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_m} \stackrel{\text{def}}{=} b du^J$$

onde usamos a notação simplificada indicada. Demonstremos então as três últimas propriedades:

- (iii).

$$\begin{aligned} \omega = a du^I &\Rightarrow d\omega = \sum_j \frac{\partial a}{\partial u^j} du^j \wedge du^I \\ &\Rightarrow dd\omega = \left( \sum_{k,j} \frac{\partial^2 a}{\partial u^k \partial u^j} du^k \wedge du^j \right) \wedge du^I \\ &\Rightarrow dd\omega = \left( \sum_{j < k} \left( \frac{\partial^2 a}{\partial u^j \partial u^k} - \frac{\partial^2 a}{\partial u^k \partial u^j} \right) du^j \wedge du^k \right) \wedge du^I = 0 \end{aligned}$$

em virtude de  $a \in C^\infty(U)$  e do Teorema de Schwarz.

- (iv).

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(a du^I \wedge b du^J) \\ &= d(ab du^I \wedge du^J) \\ &= (bda + adb) \wedge du^I \wedge du^J \\ &= b da \wedge du^I \wedge du^J + a db \wedge du^I \wedge du^J \\ &= (da \wedge du^I) \wedge b du^J + (-1)^{\deg \omega} a du^I \wedge (db \wedge du^J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

- (v). Suponhamos que  $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$  é de classe  $C^\infty$  e que  $\omega \in \Omega(V)$ . Comecemos com o caso em que  $\omega = g : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma 0-forma. Pela regra da cadeia temos então que  $\forall u \in U \subseteq \mathbb{R}^k$ :

$$d(g \circ F)_u(\mathbf{V}) = dg_{F(u)}(F_{*u}(\mathbf{V})) \quad \forall \mathbf{V} \in T_u U = \mathbb{R}^k$$

enquanto que por definição:

$$F^*(dg)_u(\mathbf{V}) = dg_{F(u)}(F_{*u}(\mathbf{V}))$$

Portanto:

$$F^*(dg) = d(g \circ F) = d(F^*g)$$

Consideremos agora uma forma do tipo  $\omega = a dv^{i_1} \wedge \cdots \wedge dv^{i_\ell} \stackrel{\text{def}}{=} a dv^I$  de grau  $\ell$  em  $V$ . Observemos para já que resulta das propriedades 4. e 3. e uma indução óbvia que se  $a, g_1, \dots, g_\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$  são  $C^\infty$ , então:

$$d(a dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell) = da \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_\ell$$

Recordando que  $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$ , obtemos:

$$\begin{aligned} F^*\omega &= F^*(a dv^{i_1} \wedge \cdots \wedge dv^{i_\ell}) \\ &= (F^*a) F^*(dv^{i_1}) \wedge \cdots \wedge F^*(dv^{i_\ell}) \\ &= (F^*a) dF^*(v^{i_1}) \wedge \cdots \wedge dF^*(v^{i_\ell}) \\ &= (F^*a) d(v^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(v^{i_\ell} \circ F) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 dF^*\omega &= d[(F^*a)d(v^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(v^{i_\ell} \circ F)] \\
 &= d(F^*a) \wedge d(v^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(v^{i_\ell} \circ F) \\
 &= F^*(da) \wedge F^*du^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^*du^{i_\ell} \\
 &= F^*(da \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_\ell}) \\
 &= F^*(d\omega)
 \end{aligned}$$

■

As propriedades do pull-back juntamente com as propriedades da derivada exterior  $d$ , permitem um cálculo rápido do pull-back de formas. Em vez de deduzir uma fórmula geral, vamos ilustrar o cálculo com alguns exemplos.

♣ **Exemplo 2.15** ... Se  $F : \mathbb{R}_{uv}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$  é  $C^\infty$  e se  $\omega = a dx + b dy + c dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ , então:

$$\begin{aligned}
 F^*\omega &= F^*(a dx + b dy + c dz) \\
 &= F^*(a dx) + F^*(b dy) + F^*(c dz) \\
 &= (a \circ F)F^*dx + (b \circ F)F^*dy + (c \circ F)F^*dz \\
 &= (a \circ F)d(F^*x) + (b \circ F)d(F^*y) + (c \circ F)d(F^*z) \\
 &= (a \circ F)d(F^*x) + (b \circ F)d(F^*y) + (c \circ F)d(F^*z) \\
 &= (a \circ F)d(x \circ F) + (b \circ F)d(y \circ F) + (c \circ F)d(z \circ F) \\
 &= (a \circ F)d(F^1) + (b \circ F)d(F^2) + (c \circ F)d(F^3) \quad \text{pondo } F^1 = x \circ F, F^2 = y \circ F, F^3 = z \circ F \\
 &= (a \circ F) \left[ \frac{\partial F^1}{\partial u} du + \frac{\partial F^1}{\partial v} dv \right] + (b \circ F) \left[ \frac{\partial F^2}{\partial u} du + \frac{\partial F^2}{\partial v} dv \right] + \\
 &\quad + (c \circ F) \left[ \frac{\partial F^3}{\partial u} du + \frac{\partial F^3}{\partial v} dv \right] \\
 &= \left[ (a \circ F) \frac{\partial F^1}{\partial u} + (b \circ F) \frac{\partial F^2}{\partial u} + (c \circ F) \frac{\partial F^3}{\partial u} \right] du + \\
 &\quad + \left[ (a \circ F) \frac{\partial F^1}{\partial v} + (b \circ F) \frac{\partial F^2}{\partial v} + (c \circ F) \frac{\partial F^3}{\partial v} \right] dv
 \end{aligned}$$

Por exemplo se  $F(u, v) = (u + v, u - v, uv)$  e se  $\omega = x dx - y dy + xz^2 dz$  e  $\alpha = x dy \wedge dz + y dx \wedge dz$ , então:

$$\begin{aligned}
 F^*\omega &= (u + v)d(u + v) - (u - v)d(u - v) + (u + v)(uv)^2 d(uv) \\
 &= (u + v)(du + dv) - (u - v)(du - dv) + (u^2v + uv^2)(v du + u dv) \\
 &= (2v + u^2v^2 + uv^3)du + (2u + u^3v + u^2v^2)dv
 \end{aligned}$$

enquanto que:

$$\begin{aligned}
 F^*\alpha &= (u + v)[(du - dv) \wedge (vdu + u dv)] + (u - v)[(du + dv) \wedge (vdu + u dv)] \\
 &= 2(u^2 + v^2)du \wedge dv
 \end{aligned}$$

É claro que se  $\beta$  é uma 3-forma em  $\mathbb{R}^3$ ,  $F^*\beta = 0$ .

♣ **Exemplo 2.16** ... Seja  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$  um caminho de classe  $C^\infty$  dado por:

$$\gamma(t) = (x \circ \gamma(t), y \circ \gamma(t), z \circ \gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (x(t), y(t), z(t))$$

Então se  $\omega = a dx + b dy + c dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma^*\omega &= (a \circ \gamma)d(x \circ \gamma) + (b \circ \gamma)d(y \circ \gamma) + (c \circ \gamma)d(z \circ \gamma) \\
 &= [a(x(t), y(t), z(t))x'(t) + b(x(t), y(t), z(t))y'(t) + c(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt
 \end{aligned}$$

♣ **Exemplo 2.17** ... Se  $\omega$  é a 1-forma em  $\mathbb{R}_{xy}^2 - \{0\}$ , definida por  $\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ , e se  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  então:

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega &= \frac{-\sin t d(\cos t) + \cos t d(\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= -\sin t(-\sin t dt) + \cos t(\cos t dt) = dt\end{aligned}$$

□

Vamos agora definir a derivada exterior de uma forma diferencial  $\omega \in \Omega^\ell(M)$ , definida numa variedade  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Para cada parametrização local  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$  de  $M$ , existe uma única forma:

$$d_\Phi \omega$$

de grau  $\ell + 1$  em  $\Phi(U) \subset M$ , tal que:

$$\Phi^*(d_\Phi \omega) = d(\Phi^* \omega) \quad (2.2.14)$$

uma vez que o pull-back  $\omega \mapsto \Phi^* \omega$  é uma bijecção do conjunto das formas em  $\Phi(U) \subset M$  sobre o conjunto das formas em  $U \subset \mathbb{R}^k$ . Vamos provar que se  $\Psi : V \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$  é uma outra parametrização tal que  $\Phi(U) \cap \Psi(V) \neq \emptyset$ , então:

$$d_\Phi \omega = d_\Psi \omega$$

em  $\Phi(U) \cap \Psi(V)$ . Com efeito  $\Phi = \Psi \circ F$  onde  $F = \Psi^{-1} \circ \Phi$  é a aplicação de mudança de coordenadas. Portanto  $\Phi^* = F^* \circ \Psi^*$  e daí que:

$$\begin{aligned}\Phi^*(d_\Psi \omega) &= F^* \circ \Psi^*(d_\Psi \omega) \\ &= F^* d(\Psi^* \omega) \quad \text{por (2.2.14)} \\ &= d(F^* \Psi^* \omega) \\ &= d\Phi^* \omega \\ &= \Phi^*(d_\Phi \omega) \quad \text{novamente por (2.2.14)}\end{aligned}$$

donde se conclui que de facto  $d_\Phi \omega = d_\Psi \omega$  em  $\Phi(U) \cap \Psi(V)$ . Por isso a definição seguinte é consistente:

♣ **Definição 2.4** ... Dada uma  $\ell$ -forma  $\omega \in \Omega^\ell(M)$ , a “derivada exterior”  $d\omega$  de  $\omega$  é a  $(\ell + 1)$ -forma  $d\omega \in \Omega^{\ell+1}(M)$ , cujo valor em cada ponto  $p \in M$  é dado por:

$$(d\omega)_p \stackrel{\text{def}}{=} (d_\Phi \omega)_p$$

onde  $\Phi$  é uma qualquer parametrização em torno de  $p$ .

As propriedades enunciadas no teorema 2.3, continuam válidas já que todas elas são locais.

Terminámos esta secção com uma fórmula que será útil no próximo capítulo, e cuja demonstração propomos como exercício.

É a seguinte:

$$\boxed{d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y])} \quad (2.2.15)$$

onde  $\theta \in \Omega^1(M)$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .



2.2.3 Exercícios

♣ **Exercício 2.1** ... (i). Considere as seguintes formas em  $\mathbb{R}^3$ :  $\alpha = x dx - y dy$ ;  $\beta = z dx \wedge dy + x dy \wedge dz$ ;  $\theta = z dy$ . Calcule  $\alpha \wedge \beta$ ;  $\theta \wedge \alpha \wedge \beta$ ;  $d\alpha$ ;  $d\beta$ ;  $d\theta$ .

(ii). Seja  $\omega = dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + \dots + dx^{2n-1} \wedge dx^{2n} \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$ . Calcule  $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n$ .

♣ **Exercício 2.2** ... Em  $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$  considere os campos de vectores  $X = xy \frac{\partial}{\partial x} - x^2 z \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $Y = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial}{\partial y}$  e as formas diferenciais  $\alpha = x^3 z^2 dx + x dy + dz$ ,  $\beta = xy^3 dx - zy dy + xz dz$ ,  $\omega = xy dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz$ . Calcule:

(i).  $[X, Y]$ ,  $\alpha \wedge \beta$ ,  $d(\alpha \wedge \omega)$ ,  $d\omega$ .

(ii).  $\alpha(X)$ ,  $Y\beta(X)$ ,  $d\alpha(X, Y)$ .

(iii). Se  $F : \mathbb{R}^2_{u,v} \rightarrow \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ ,  $(u, v) \mapsto (u - v^2, 2, uv^3 + u)$ , calcule  $F^*(\alpha)$  e  $F^*(d\omega)$ .

♣ **Exercício 2.3** ... Em  $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$  considere os campos de vectores  $X = x \frac{\partial}{\partial x} - x^2 z \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $Y = y \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial}{\partial y}$  e as formas diferenciais  $\alpha = z^3 dx + xy^2 dy + dz$ ,  $\beta = xy dx - dy + y^3 dz$ ,  $\omega = xy dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz$ . Calcule:

(i).  $[X, Y]$ ,  $\alpha \wedge \beta$ ,  $d(\alpha \wedge \omega)$ ,  $d\omega$ .

(ii).  $\alpha(X)$ ,  $Y\beta(X)$ ,  $d\alpha(X, Y)$ .

(iii). Se  $F : \mathbb{R}^2_{u,v} \rightarrow \mathbb{R}^3_{x,y,z}$ ,  $(u, v) \mapsto (u + v, 2, uv)$ , calcule  $F^*(\alpha)$  e  $F^*(d\omega)$ .

♣ **Exercício 2.4 “Operador estrela de Hodge”**... Dada uma  $k$ -forma diferencial  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ , define-se uma  $(n - k)$ -forma  $*\omega$  pondo:

$$*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = (-1)^\sigma (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}})$$

e prolongando por  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -linearidade, onde  $i_1 < \dots < i_k$ ,  $j_1 < \dots < j_{n-k}$ ,  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$  é uma permutação de  $(1, 2, \dots, n)$  e  $\sigma$  é 0 ou 1 conforme essa permutação é par ou ímpar, respectivamente. Mostrar que:

(i). Se  $\omega = a_{12} dx^1 \wedge dx^2 + a_{13} dx^1 \wedge dx^3 + a_{23} dx^2 \wedge dx^3 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ , então:

$$*\omega = a_{12} dx^3 - a_{13} dx^2 + a_{23} dx^1$$

(ii). Se  $\alpha = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$  então  $*\alpha = a_1 dx^2 - a_2 dx^1$ .

(iii).  $**\omega = (-1)^{n(n-k)}\omega$ .

♣ **Exercício 2.5 “Rotacional”**... Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  um campo de vectores  $C^\infty$ . O rotacional de  $X$  é por definição a  $(n - 2)$ -forma  $\mathbf{rot} X \in \Omega^{n-2}(\mathbb{R}^n)$  definida por:

$$X \mapsto X^\flat \mapsto dX^\flat \mapsto *(dX^\flat) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{rot} X$$

onde  $X \mapsto X^\flat$  é o isomorfismo entre campos e 1-formas induzido pela produto interno usual em  $\mathbb{R}^n$ .

(i). Mostre que  $\mathbf{rot} \mathbf{grad} f = 0$ .

(ii). Quando  $n = 3$ , a 1-forma  $\mathbf{rot} X$  corresponde a um campo de vectores que notamos ainda por  $\mathbf{rot} X$ . Mostre que:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \left( a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) &= \left( \frac{\partial a^3}{\partial x^2} - \frac{\partial a^2}{\partial x^3} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left( \frac{\partial a^1}{\partial x^3} - \frac{\partial a^3}{\partial x^1} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &\quad + \left( \frac{\partial a^2}{\partial x^1} - \frac{\partial a^1}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^3} \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

♣ **Exercício 2.6** ... Uma função  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  diz-se homogênea de grau  $k$  se  $g(tx, ty, tz) = t^k g(x, y, z)$ ,  $\forall t > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Mostre que:

(i). Se  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  é homogênea de grau  $k$  então:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = k f$$

(ii). Se a forma diferencial  $\omega = a dx + b dy + c dz$  é fechada (i.e.,  $d\omega = 0$ ) e se  $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  são homogêneas de grau  $k$ , então  $\omega = df$  onde:

$$f = \frac{ax + by + cz}{k + 1}$$

♣ **Exercício 2.7** ... Um campo de planos num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $P$  que a cada ponto  $p \in U$  associa um plano  $P(p) \subset T_p U$ . O campo diz-se  $C^\infty$  se os coeficientes da equação de  $P(p)$  são funções  $C^\infty$  de  $p$ . Uma superfície integral de  $P$  é uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $T_q S = P(q), \forall q \in S$ . Seja  $\omega \in \Omega^1(\mathbb{U})$  tal que  $\omega(q) \neq 0, \forall q \in U$ . Mostre que:

(i).  $\omega$  determina um campo de planos  $C^\infty$  através de  $P(p) = \ker \omega(p)$ .

(ii). Se  $S$  é uma superfície integral de  $P = \ker \omega$ , então  $i^*(\omega) = 0$ , onde  $i : S \hookrightarrow M$  representa a inclusão.

(iii). Se existe uma superfície integral  $S$  de  $P = \ker \omega$ , então existe uma 1-forma  $\sigma$  na vizinhança de cada ponto  $p \in S$ , tal que  $d\omega = \omega \wedge \sigma$ .

(iv). Se existe uma superfície integral  $S$  de  $P = \ker \omega$ , e se  $\omega = a dx + b dy + c dz$ , então:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) a + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) b + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) c = 0$$

(v). Suponha que  $\omega = x dx + y dy + z dz$  e  $P = \ker \omega$  em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ . Mostre que a superfície integral de  $P$  que passa em  $p$  é a esfera centrada na origem e que passa em  $p$ .

(vi). Se  $\omega = z dx + x dy + y dz$ , então  $P = \ker \omega$  não admite superfícies integrais.

♣ **Exercício 2.8** ... Demonstre a fórmula (2.2.15):

$$d\theta(X, Y) = X \theta(Y) - Y \theta(X) - \theta([X, Y])$$

onde  $\theta \in \Omega^1(M)$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

♣ **Exercício 2.9** ... Em  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$  considere os campos de vetores  $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - y^2 z \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $Y = y \frac{\partial}{\partial x} + yx \frac{\partial}{\partial y}$  e a forma diferencial  $\theta = z^3 dx + xy^2 dy + dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ . Calcule  $d\theta(X, Y)$  utilizando a fórmula (2.2.15).

## 2.3 Cálculo de Cartan

Existe uma definição alternativa de forma diferencial que é imprescindível para os nossos objetivos. Seja  $\mathfrak{X}(M)$  o módulo sobre o anel  $C^\infty(M)$ , dos campos de vetores  $C^\infty$  numa variedade  $M$ .

♣ **Definição 2.5** ... Uma  $k$ -forma diferencial em  $M$  é um campo tensorial covariante  $\omega$  de tipo  $(0, k)$  alternado ou anti-simétrico, i.e.:

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k \text{ factores}} \rightarrow C^\infty(M)$$

é  $C^\infty(M)$ -linear em cada variável, e  $\omega$  é anti-simétrica:

$$\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = -\omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k)$$

Representamos por:

$$\Omega^k(M)$$

o espaço das  $k$ -formas diferenciais em  $M$ . A álgebra exterior (ou de Grassmann) das formas diferenciais em  $M$ , é por definição a  $\mathbb{R}$ -álgebra graduada:

$$\Omega(M) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$$

munida do chamado **produto exterior de formas**, definido por:

$$\omega \wedge \eta(X_1, \dots, X_{k+\ell}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) \quad (2.3.1)$$

onde  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^\ell(M)$  e a soma  $\sum_{\sigma}$  é feita sobre todas as permutações  $\sigma$  de  $\{1, \dots, k+\ell\}$ , tais que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$  e  $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+\ell)$ .

Note que  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ . Pondo  $f \wedge \omega = f\omega$ , munimos  $\Omega(M)$  de estrutura de  $C^\infty(M)$ -módulo. Se  $(U; x^1, \dots, x^n)$  é uma carta local as  $n$  1-formas  $dx^i$ , definidas por  $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_j^i$ , constituem uma base local para o  $C^\infty(U)$ -módulo  $\Omega^1(U)$ . Cada forma  $\omega \in \Omega^k(M)$  admite a representação local:

$$\omega_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (2.3.2)$$

onde  $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ .

Mais geralmente se  $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$  são 1-formas linearmente independentes em  $U$  (um co-referencial móvel),  $\omega$  pode ser representado localmente:

$$\omega_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k} \quad (2.3.3)$$

onde  $f_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ .

Portanto a álgebra  $\Omega(M)$  é localmente gerada pelos seus elementos de grau 0 e 1. Daqui resulta que duas derivações ou anti-derivações locais da álgebra graduada  $\Omega(M)$ , que coincidam em  $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$  e  $\Omega^1(M)$ , são idênticas. Para isso é necessário e suficiente que elas coincidam em funções e diferenciais. Este facto será utilizado várias vezes de seguida.

Dada um  $k$ -forma diferencial  $\omega$  em  $M$ , de acordo com a primeira definição, i.e.,  $\omega : x \mapsto \mathcal{A}^k(T_x M)$ , então  $\omega$  dá origem a uma  $k$ -forma diferencial  $\tilde{\omega} : \mathfrak{X}(M)^k \rightarrow C^\infty(M)$ , definida por:

$$\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_k)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_x(X_{1x}, \dots, X_{kx}) \quad x \in M$$

e é claro que  $\tilde{\omega}$  é  $C^\infty$  se  $\omega$  o é. Reciprocamente, temos o seguinte:

♣ **Teorema 2.4 (Princípio fundamental de localização)** ... Seja  $\omega \in \Omega^k(M)$  e  $x \in M$ . Suponhamos que  $X_1, \dots, X_k$  e  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$  são campos de vectores tais que  $X_j(x) = \bar{X}_j(x)$  ( $1 \leq j \leq k$ ). Então:

$$\omega(\bar{X}_1 \dots, \bar{X}_k)(x) = \omega(X_1 \dots, X_k)(x)$$

- **Dem.:** É suficiente demonstrar o teorema para 1-formas  $\omega \in \Omega^1(M)$ . Por outro lado, basta provar que se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  é um campo de vectores que se anula em  $x \in M$ , então  $\omega(X)(x) = 0$ . Para isso consideremos uma carta local  $(U; x^i)$  em torno de  $x$ , e uma função “bump”  $f \in C^\infty(M)$ , com

suporte em  $U$  e tal que  $f \equiv 1$  numa certa vizinhança de  $x$ . Então  $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  onde  $a^i = X(x^i) \in C^\infty(U)$ , e  $a^i(x) = 0$ . Temos portanto que:

$$f^2 \omega(X) = \omega(f^2 X) = \omega(f a^i f \frac{\partial}{\partial x^i}) = f a^i \omega(f \frac{\partial}{\partial x^i})$$

e avaliando esta fórmula em  $x$ :

$$\omega(X)(x) = f^2(x) \omega(X)(x) = 0$$

uma vez que  $a^i(x) = 0$  e  $f(x) = 1$ . ■

Portanto uma  $k$ -forma diferencial  $\omega : \mathfrak{X}(M)^k \rightarrow C^\infty(M)$ , tem um valor bem determinado  $\omega_x$  num ponto  $x \in M$ , nomeadamente a  $k$ -forma exterior  $\omega_x \in \mathcal{A}^k(T_x M)$  definida da seguinte maneira: se  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in T_x M$  pômos:

$$\omega_x(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(X_1 \dots, X_k)(x)$$

onde  $X_1, \dots, X_k$  são quaisquer campos de vectores tais que  $X_j(x) = \mathbf{v}_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ).

Passemos agora à definição e cálculo com diversas operações fundamentais sobre formas diferenciais.

♣ **Definição 2.6 (Pull-back de formas)** ... Uma aplicação  $C^\infty$ ,  $\phi : M \rightarrow N$  induz uma transformação  $\phi^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ , dita o **pull-back de formas**, definida por:

$$\boxed{(\phi^* \omega)_x(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \omega_{\phi(x)}(d\phi_x(\mathbf{v}_1), \dots, d\phi_x(\mathbf{v}_k))} \quad (2.3.4)$$

$\forall \omega \in \Omega^k(N)$ ,  $\forall \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in T_x M$ , e que é compatível com o produto exterior, isto é:

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta) \quad (2.3.5)$$

$\forall \omega, \eta \in \Omega(M)$ . Em funções define-se  $\phi^*(f) = f \circ \phi$ ,  $\forall f \in C^\infty(N)$ .

• **Representação local...** Vejamos a expressão do pull-back em coordenadas locais. Suponhamos que:

$$\Phi : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (\phi^1(x^1, \dots, x^n), \dots, \phi^m(x^1, \dots, x^n))$$

é a representação local de  $\phi$  relativamente a cartas locais  $(U; x^i) \in \mathcal{F}_M$  e  $(V; y^j) \in \mathcal{F}_N$ , e suponhamos que  $\omega \in \Omega^k(N)$  tem a expressão local:

$$\omega_V = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1 \dots j_k} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

onde  $\omega_{j_1 \dots j_k} \in C^\infty(V)$ . Então  $\phi^* \omega$  induz uma  $k$ -forma em  $U$ , cuja expressão local é do tipo:

$$(\phi^* \omega)_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

expressão que é obtida a partir da expressão para  $\omega_V$  substituindo:

$$y^j = \phi^j(x^1, \dots, x^n) \quad e \quad dy^j = \sum_i \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} dx^i$$

De facto basta aplicar a propriedade (2.3.5) juntamente com o facto seguinte:

$$\phi^*(dy^j) = \sum_i \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} dx^i$$

♣ **Exemplo 2.18** ... Seja  $\omega = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$  uma 1-forma em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ . Então  $\phi^*\omega = a(t)dt$  é obtida substituindo  $x = \cos t, y = \sin t$ , e  $dx = -(\sin t)dt, dy = (\cos t)dt$  em  $\omega$ :

$$\phi^*\omega = a(t)dt = \frac{-(\sin t)(-(\sin t)dt) + (\cos t)((\cos t)dt)}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = dt$$

♣ **Exercício 2.10** ... Se  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por  $\phi(x, y, z) = (x+z, xy)$ , e  $\omega = e^v du + udv \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \eta = udu \wedge dv \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ , calcule  $\omega \wedge \eta, \phi^*\omega, \phi^*\eta$  e  $\phi^*\omega \wedge \phi^*\eta$ .

♣ **Teorema 2.5 (Produto Interior  $i_X$ )** ... Dado um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , existe uma única aplicação  $\mathbb{R}$ -linear  $i_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ , dita **produto interior por  $X$** , que a cada  $\omega \in \Omega^k(M)$  associa a  $(k-1)$ -forma  $i_X(\omega)$  definida por:

$$i_X(\omega)(X_2, \dots, X_k) \stackrel{def}{=} \omega(X, X_2, \dots, X_k) \quad (2.3.6)$$

e que verifica as propriedades seguintes:

$$\bullet i_{(X|_U)}(\omega|_U) = (i_X\omega)|_U \quad (2.3.7)$$

$$\bullet i_X(f) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad (2.3.8)$$

$$\bullet i_X(\theta) = \theta(X) \quad \forall \theta \in \Omega^1(M) \quad (2.3.9)$$

$$\bullet i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M) \quad (2.3.10)$$

$$\bullet i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge i_X(\eta)$$

isto é,  $i_X$  é uma **anti-derivação local de grau  $-1$** , em  $\Omega(M)$ .

- **Dem.:** A unicidade decorre do facto de que  $i_X$  é uma anti-derivação local, que está definida nos geradores de  $\Omega(M)$  através de (2.3.8) e (2.3.9). Vejamos agora que  $i_X$ , definida pela fórmula (2.3.6), satisfaz as propriedades acima referidas. Todas são evidentes com a excepção de (2.3.10). Demonstramos esta última, utilizando a definição de produto exterior (fórmula (2.3.1)). Vem então que, se  $\omega \in \Omega^k(M)$  e  $\eta \in \Omega^\ell(M)$ :

$$\begin{aligned} (i_X(\omega \wedge \eta))(X_2, \dots, X_{k+\ell}) &= (\omega \wedge \eta)(X, X_2, \dots, X_{k+\ell}) \\ &= \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \omega(X, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) + \\ &\quad + (-1)^k \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \omega(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}) \eta(X, X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) \\ &= \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma i_X \omega(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) + \\ &\quad + (-1)^k \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \omega(X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}) i_X \eta(X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}) \end{aligned}$$

- Isto é:

$$\begin{aligned} (i_X(\omega \wedge \eta))(X_2, \dots, X_{k+\ell}) &= \\ (i_X\omega \wedge \eta)(X_2, \dots, X_{k+\ell}) + (-1)^{\deg \omega} (\omega \wedge i_X\eta)(X_2, \dots, X_{k+\ell}) \end{aligned}$$

■

- **Representação local...** Se no aberto  $U \subseteq M$ ,  $\omega$  tem a representação local:

$$\omega_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k} \quad (2.3.11)$$

onde  $\{\theta^1, \dots, \theta^k\}$  são 1-formas linearmente independentes em  $U$  (um co-referencial móvel), e  $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ , e se  $X = X^i \mathbf{e}_i$ , onde  $\{\mathbf{e}_i\}$  é o referencial dual a  $\{\theta^i\}$ , e  $X^i \in C^\infty(U)$ , então  $i_X\omega$  tem a seguinte representação local:

$$(i_X\omega)_U = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ 1 \leq \ell \leq k}} X^{i_\ell} \omega_{i_1 \dots i_\ell \dots i_k} \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\theta^{i_\ell}} \wedge \dots \wedge \theta^{i_k}$$

Note ainda que,  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\forall f \in C^\infty(M)$ :

$$\begin{aligned} i_{X+Y} &= i_X + i_Y \\ i_f X &= f i_X \\ (i_X)^2 &= i_X i_X = 0 \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

♣ **Teorema 2.6 (Derivada de Lie  $\mathcal{L}_X$ )** ... Dado um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , seja  $\Phi_t = \text{Fl}_t^X$  o respectivo fluxo local. Então existe uma única aplicação  $\mathbb{R}$ -linear  $\mathcal{L}_X : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ , dita **derivada de Lie segundo  $X$** , que a cada  $\omega \in \Omega^k(M)$  associa a  $k$ -forma  $\mathcal{L}_X(\omega)$  definida por:

$$(\mathcal{L}_X\omega)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^*\omega)_x - \omega_x}{t} \quad (2.3.13)$$

e que verifica as propriedades seguintes:

$$\bullet \mathcal{L}_X|_U(\omega_U) = (\mathcal{L}_X\omega)|_U \quad (2.3.14)$$

$$\bullet \mathcal{L}_X(f) = Xf \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad (2.3.15)$$

$$\bullet \mathcal{L}_X(df) = d(Xf) \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad (2.3.16)$$

$$\bullet \mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

$$\bullet \mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta) \quad (2.3.17)$$

isto é,  $\mathcal{L}_X$  é uma derivação local de grau 0, em  $\Omega(M)$ .

- **Dem.:** A unicidade decorre do facto de que  $\mathcal{L}_X$  é uma derivação local, que está definida nos geradores de  $\Omega(M)$  através de (2.3.15) e (2.3.16). Vejamos agora que  $\mathcal{L}_X$ , definida pela fórmula (2.3.13), satisfaz as propriedades acima referidas. Todas resultam directamente da definição (2.3.13), e das propriedades do pull-back de formas, com a excepção de (2.3.16). Demonstramos esta última:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X df)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* df)_x - (df)_x}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d\Phi_t^* f)_x - (df)_x}{t} \\ &= d \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_t^* f)_x - f(x)}{t} \right) \\ &= d\mathcal{L}_X f \\ &= d(Xf) \end{aligned}$$

♣ **Proposição 2.1 ...**

$$\bullet \quad [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\omega = \mathcal{L}_{[X,Y]}\omega \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad \forall \omega \in \Omega(M) \quad (2.3.18)$$

$$\bullet \quad i_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y] \quad (2.3.19)$$

$$\bullet \quad (\mathcal{L}_X\omega)(X_1, \dots, X_k) = \\ = X\omega(X_1, \dots, X_k) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k) \quad (2.3.20)$$

- **Dem.:** Para provar (2.3.18), notamos que  $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$  é uma derivação local, já que  $\mathcal{L}_X$  e  $\mathcal{L}_Y$  o são. Também  $\mathcal{L}_{[X,Y]}$  é uma derivação local. Portanto para verificar que são iguais basta demonstrar que coincidem em funções  $f$  e diferenciais  $df$ , já que estas geram  $\Omega(M)$ .

Para provar (2.3.19), notamos que  $i_{[X,Y]}$  é uma anti-derivação local,  $\mathcal{L}_X$  é uma derivação local,  $i_Y$  é uma anti-derivação local, e portanto  $[\mathcal{L}_X, i_Y]$  é uma anti-derivação local. Vamos demonstrar que  $i_{[X,Y]}$  e  $[\mathcal{L}_X, i_Y]$  coincidem em funções  $f$  e diferenciais  $df$ . Se  $f \in C^\infty(M)$ ,  $i_{[X,Y]}f = 0$  e:

$$[\mathcal{L}_X, i_Y]f = \mathcal{L}_X i_Y f - i_Y \mathcal{L}_X f = -i_Y \mathcal{L}_X f = -i_Y(Xf) = 0$$

Se  $df \in \Omega^1(M)$ :

$$i_{[X,Y]}df = [X, Y]f$$

e:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_X, i_Y]df &= \mathcal{L}_X i_Y df - i_Y \mathcal{L}_X df \\ &= \mathcal{L}_X(Yf) - i_Y d(Xf) \\ &= (XY - YX)f = [X, Y]f \end{aligned}$$

Finalmente para provar (2.3.20), temos em virtude de (2.3.18):

$$i_{X_1} \mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_X i_{X_1} \omega - i[X, Y]\omega$$

Multiplicando à esquerda sucessivamente por  $i_{X_2}, \dots, i_{X_k}$  e iterando, obtemos:

$$i_{X_k} \cdots i_{X_1} \mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_X i_{X_k} \cdots i_{X_1} \omega - \sum_{i=1}^k i_{X_k} \cdots i_{[X, X_i]} \cdots i_{X_1} \omega$$

que é equivalente a (2.3.20).

- **Representação local...** Se numa carta local  $(U; x^i)$ , a expressão local de  $\omega$  é:

$$\omega_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

e se  $X = X^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}$ , então a expressão local de  $\mathcal{L}_X \omega$  é dada por (aplicando (2.3.20)):

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \omega)_U &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ 1 \leq \ell \leq n}} X^\ell \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\ell} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\ &\quad - \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ 1 \leq s \leq k}} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_s} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (2.3.21) \end{aligned}$$

♣ **Teorema 2.7 (Derivada Exterior)** ... Para cada  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , existe uma única aplicação  $\mathbb{R}$ -linear  $d = d_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ , chamada **derivação exterior de formas**, tal que:

$$\mathcal{L}_X \omega = (di_X + i_X d)\omega \quad \text{“Fórmula de Cartan”} \quad (2.3.22)$$

$\forall \omega \in \Omega(M), \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Dem.:**

- Unicidade... Se  $d'$  é um outro operador que satisfaz as condições do enunciado, então,  $\forall \omega \in \Omega(M)$ :

$$i_X(d' - d)\omega = (d - d')i_X\omega$$

Para  $k = 0$ ,  $i_X f = 0$  e  $i_X(d' - d)f = 0$ , e como isto se verifica  $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ , deduzimos que  $d = d'$  em  $C^\infty(M)$ . Suponhamos agora que  $d = d'$  em todas as formas de grau  $\leq k - 1$ . A igualdade anterior mostra que também  $i_X(d' - d)\omega = 0$ , para todas as formas de grau  $k$ . Portanto  $d = d'$  em  $\Omega^k(M)$ .

- Existência... A Fórmula de Cartan (2.3.22), mostra que se  $d$  existe, então terá que ser dada por:

$$(d\omega)(X_0, X_1, \dots, X_k) = (\mathcal{L}_{X_0}\omega)(X_1, \dots, X_k) - (di_{X_0}\omega)(X_1, \dots, X_k) \quad (2.3.23)$$

Vamos mostrar, usando indução no grau  $k = \text{deg } \omega$ , que (2.3.23) define de facto uma forma diferencial  $d\omega$ . Para  $k = 0$  isto é verdade, uma vez que se  $\omega = f \in C^\infty(M)$ , então:

$$(df)(X) = \mathcal{L}_X f = Xf$$

Suponhamos agora que  $d\omega$ , dada por (2.3.23), é uma forma diferencial,  $\forall \omega$  de grau  $\leq k - 1$ , e demonstremos que o mesmo acontece quando  $\omega$  tem grau  $k$ . Segundo a hipótese de indução,  $di_{X_0}\omega$  é  $C^\infty(M)$ -multilinear alternada relativamente a  $(X_1, \dots, X_k)$ , já que  $i_{X_0}\omega$  tem grau  $k - 1$ .  $\mathcal{L}_{X_0}\omega$  é também  $C^\infty(M)$ -multilinear alternada relativamente a  $(X_1, \dots, X_k)$ . Portanto  $d\omega$  é também  $C^\infty(M)$ -multilinear alternada relativamente a  $(X_1, \dots, X_k)$ . Resta provar que  $d\omega$  é  $C^\infty(M)$ -linear em  $X_0$  e alternada em  $X_0, X_1$ . Mas, usando (2.3.19):

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_0}\omega)(X_1, \dots, X_k) &= (i_{X_1}\mathcal{L}_{X_0}\omega)(X_2, \dots, X_k) \\ &= (\mathcal{L}_{X_0}i_{X_1}\omega)(X_2, \dots, X_k) - (i_{[X_0, X_1]}\omega)(X_2, \dots, X_k) \end{aligned}$$

e substituindo no segundo membro  $\mathcal{L}_{X_0}$  por  $di_{X_0} + i_{X_0}d$ , vem que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_0}\omega)(X_1, \dots, X_k) &= (di_{X_0}i_{X_1}\omega)(X_2, \dots, X_k) + \\ &\quad (di_{X_1}\omega)(X_0, X_2, \dots, X_k) - (i_{[X_0, X_1]}\omega)(X_2, \dots, X_k) \end{aligned}$$

Para  $X_0 = X_1$ , vem que  $(\mathcal{L}_{X_1}\omega)(X_1, \dots, X_k) = (di_{X_1}\omega)(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , e substituindo em (2.3.23), vemos que  $(d\omega)(X_1, X_1, \dots, X_k) = 0$ , isto é,  $d\omega$  é alternada em  $X_0$  e  $X_1$ . A linearidade em  $X_0$  resulta da linearidade em  $X_1$ . ■

É importante notar que na definição da derivação exterior intervem apenas a estrutura diferenciável de  $M$ . A derivação exterior é, como veremos em breve, invariante sob aplicações. Estas propriedades justificam a importância deste operador em muitas aplicações em Física e Geometria.

♣ **Proposição 2.2** ... Se  $\omega \in \Omega^k(M)$  é uma forma de grau  $k$ , então  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$  é uma forma de grau  $k + 1$ , definida por:

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) + \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned} \quad (2.3.24)$$



$\forall \omega \in \Omega^k(M)$ . Em particular se  $\theta \in \Omega^1(M)$  é uma 1-forma, então:

$$\boxed{d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)} \quad (2.3.25)$$

- **Dem.:** Utilizar indução, a fórmula de Cartan e ainda (2.3.20). ■

♣ **Teorema 2.8** *Existe uma única aplicação  $\mathbb{R}$ -linear  $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ , tal que:*

- $d_U(\omega|_U) = (d\omega)|_U$  (2.3.26)

- $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$  e  $d(\lambda\omega) = \lambda d(\omega)$  (2.3.27)

- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta$  (2.3.28)

- $df(X) = Xf$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$  (2.3.29)

- $d^2\omega = 0$   $\forall \omega \in \Omega(M)$  (2.3.30)

isto é,  $d$  é uma anti-derivação local de grau  $+1$ , em  $\Omega(M)$ .

- **Dem.:** A unicidade demonstra-se da maneira usual. Demonstramos agora que  $d$  existe e que é dada pela derivada exterior de formas. Basta provar que a derivada exterior definida através da fórmula de Cartan (2.3.22), verifica as propriedades referidas no teorema. Para mostrar (2.3.28), vamos usar indução, supondo que essa igualdade é válida para  $\omega \in \Omega^r(M)$  e  $\eta \in \Omega^s(M)$ , com  $r + s = k - 1$ , e provando que que ela continua válida para  $r + s = k$ . Se  $\omega \in \Omega^r(M)$  e  $\eta \in \Omega^s(M)$ , então:

$$(d(\omega \wedge \eta))(X_1, \dots, X_{r+s+1}) = (i_{X_1}d(\omega \wedge \eta))(X_2, \dots, X_{r+s+1})$$

Mas:

$$\begin{aligned} i_{X_1}d(\omega \wedge \eta) &= \mathcal{L}_{X_1}(\omega \wedge \eta) - di_{X_1}(\omega \wedge \eta) \\ &= \mathcal{L}_{X_1}\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_{X_1}\eta - d(i_{X_1}\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_{X_1}\eta) \\ &= \mathcal{L}_{X_1}\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_{X_1}\eta - di_{X_1}\omega \wedge \eta - (-1)^{r-1}i_{X_1}\omega \wedge d\eta - \\ &\quad - (-1)^r d\omega \wedge i_{X_1}\eta - (-1)^{r^2}\omega \wedge di_{X_1}\eta \end{aligned}$$

em virtude da hipótese de indução. Atendendo agora à fórmula de Cartan (2.3.22), vem que:

$$\begin{aligned} i_{X_1}d(\omega \wedge \eta) &= i_{X_1}d\omega \wedge \eta + (-1)^{r+1}d\omega \wedge i_{X_1}\eta + (-1)^r(i_{X_1}\omega \wedge d\eta + (-1)^r\omega \wedge i_{X_1}d\eta) \\ &= i_{X_1}(d\omega \wedge \eta) + (-1)^r i_{X_1}(\omega \wedge d\eta) \\ &= i_{X_1}(d\omega \wedge \eta) + (-1)^r \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

Esta fórmula é válida para  $r + s = 0, 1$ . Deduzimos assim, do que foi feito, que ela é válida  $\forall r, s$  e  $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ . Portanto:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta$$

Para demonstrar (2.3.30), é suficiente verificar para  $\omega = f \in C^\infty(M)$ , devido ao carácter local de  $d$ . De (2.3.22), vem que:

$$i_X d^2 f = \mathcal{L}_X df - di_X df = \mathcal{L}_X df - d\mathcal{L}_X f = 0$$

porque  $\mathcal{L}_X$  e  $d$  comutam sobre as funções diferenciáveis. ■

♣ **Proposição 2.3 ...**

$$\bullet \quad [\mathcal{L}_X, d] = \mathcal{L}_X d - d \mathcal{L}_X = 0 \quad (2.3.31)$$

$$\bullet \quad \varphi^* d\omega = d\varphi^*\omega, \quad \text{para toda a aplicação diferenciável } \varphi : M \rightarrow N \text{ e } \forall \omega \in \Omega(N) \quad (2.3.32)$$

- **Representação local...** Se  $\omega \in \Omega^k(M)$  admite a representação local:

$$\omega_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

então:

$$(d\omega)_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

♣ **Exercício 2.11 ...** Seja  $\omega = y^2 dx \wedge dz + \sin(xy) dx \wedge dy + e^x dy \wedge dz \in \Omega(\mathbb{R}^3)$ , e  $X = 3 \frac{\partial}{\partial x} + \cos z \frac{\partial}{\partial y} - x^2 \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ . Calcule  $d\omega$  e  $i_X \omega$ .

♣ **Exercício 2.12 ...** Seja  $M$  uma variedade orientável de dimensão  $n$ , e  $\mu \in \Omega^n(M)$  uma forma volume para  $M$  (isto é, uma  $n$ -forma  $\mu$  que nunca se anula e que portanto define uma orientação para  $M$ ). Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  então  $\mathcal{L}_X \mu \in \Omega^n(M)$  e portanto existe uma única função, notada por  $\mathbf{div}_\mu(X) \in C^\infty(M)$ , tal que:

$$\mathcal{L}_X \mu = \mathbf{div}_\mu(X) \mu$$

$\mathbf{div}_\mu(X)$  diz-se a “divergência de  $X$  relativamente a  $\mu$ ”.

(i). Mostre que  $\mathbf{div}_\mu(X) = 0$  se e só se  $(\text{Fl}_t^X)^* \mu = \mu$ . (Neste caso diz-se que o campo de vectores  $X$  preserva volume ou que é incompressível).

(ii). Prove as seguintes igualdades:

- $\mathbf{div}_{f\mu}(X) = \mathbf{div}_\mu(X) + \frac{Xf}{f} \quad \forall f \in C^\infty(M), f(x) \neq 0, \forall x \in M.$
- $\mathbf{div}_\mu(gX) = g \mathbf{div}_\mu(X) + Xg \quad \forall g \in C^\infty(M).$
- $\mathbf{div}_\mu([X, Y]) = X(\mathbf{div}_\mu(Y)) - Y(\mathbf{div}_\mu(X))$

## FORMULÁRIO

- $i_X(\omega)(X_2, \dots, X_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(X, X_2, \dots, X_k)$
- $i_X(f) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M)$
- $i_X(\theta) = \theta(X) \quad \forall \theta \in \Omega^1(M)$
- $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge i_X(\eta)$
- $\mathcal{L}_X(f) = Xf \quad \forall f \in C^\infty(M)$
- $\mathcal{L}_X(df) = d(Xf) \quad \forall f \in C^\infty(M)$
- $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta)$
- $\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + df \wedge i_X\omega$
- $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\omega = \mathcal{L}_{[X, Y]}\omega$
- $i_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$
- $\mathcal{L}_X i_X \omega = i_X \mathcal{L}_X \omega$
- $(\mathcal{L}_X \omega)(X_1, \dots, X_k) = X\omega(X_1, \dots, X_k) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)$
- $\mathcal{L}_X \omega = (di_X + i_X d)\omega$       **“Fórmula de Cartan”**
- 

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) + \\ - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

- $d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \theta \in \Omega^1(M)$
- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta$
- $df(X) = Xf$
- $d^2\omega = 0$
- $[\mathcal{L}_X, d] = \mathcal{L}_X d - d\mathcal{L}_X = 0$
- $\varphi^* d\omega = d\varphi^*\omega$
- $\varphi^*(i_X\omega) = i_{\varphi^*X}(\varphi^*\omega)$       onde  $\varphi$  é um difeomorfismo
- $\varphi^*(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_{\varphi^*X}(\varphi^*\omega)$       onde  $\varphi$  é um difeomorfismo

## 2.4 Integração das Formas. Fórmula de Stokes

O tipo de integração que vamos considerar em variedades, e que é suficiente para os nossos objectivos, envolve integração de  $\ell$ -formas diferenciais (contínuas) sobre  $\ell$ -cadeias singulares (diferenciáveis) numa variedade  $M$  de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Vejamos qual o significado destes objectos.

### 2.4.1 Preliminares geométricos

Designemos por:

$$\mathbf{I}^\ell = [0, 1]^\ell \stackrel{\text{def}}{=} \{(a^1, \dots, a^\ell) \in \mathbb{R}^\ell : 0 \leq a^i \leq 1\}$$

o “ $\ell$ -cubo standard em  $\mathbb{R}^\ell$ ”. Para  $\ell = 0$  põmos  $\mathbf{I}^0 = \{0\}$ . Consideremos ainda a injeção canónica:

$$I^\ell : \mathbf{I}^\ell \hookrightarrow \mathbb{R}^\ell, \quad I^\ell(p) = p$$

Figure 2.1:  $\ell$ -cubo standard em  $\mathbb{R}^\ell$

Em geral referir-nos-emos ao  $\ell$ -cubo singular como sendo o conjunto  $\mathbf{I} = [0, 1]^\ell$  ou a aplicação  $I^\ell$ , sem qualquer risco de confusão.

♣ **Definição 2.7** ... Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Um “ $\ell$ -cubo singular” (diferenciável) em  $M$ , é uma aplicação:

$$c : \mathbf{I}^\ell \rightarrow M$$

diferenciável ( $C^\infty$ ) em algum aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^\ell$  que contem  $\mathbf{I} = [0, 1]^\ell$ .

A palavra singular surge porque não exigimos que  $c$  seja injectiva. O “suporte” do  $\ell$ -cubo:

$$|c| \stackrel{\text{def}}{=} c([0, 1]^\ell)$$

não é portanto necessariamente uma variedade regular em  $M$ . Pode apresentar “pontos duplos”, “cantos” e até degenerar num único ponto.

Figure 2.2:  $\ell$ -cubo singular

♣ **Definição 2.8** ... Uma “ $\ell$ -cadeia singular em  $M$ ”, é uma combinação linear finita (formal) com coeficientes inteiros:

$$C = \sum_i a^i c_i, \quad a^i \in \mathbb{Z} \quad (2.4.1)$$

onde os  $c_i$  são  $\ell$ -cubos singulares em  $M$ .

O “suporte” da  $\ell$ -cadeia  $C = \sum_i a^i c_i$  define-se por:

$$|C| \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_i |c_i|$$

O grupo das  $\ell$ -cadeias singulares em  $M$ , com coeficientes inteiros, notado por:

$$\mathcal{C}_\ell(M, \mathbb{Z})$$

é o grupo abeliano livre gerado pelos  $\ell$ -cubos singulares em  $M$ . A soma de duas  $\ell$ -cadeias  $C = \sum a^i c_i$  e  $C' = \sum a'^j c'_j$  é portanto dada por:

$$C + C' = \sum a^i c_i + a'^j c'_j$$

Vamos agora definir o “bordo” de uma  $k$ -cadeia singular em  $M$ . Consideremos em primeiro lugar o  $\ell$ -cubo standard  $I^\ell : [0, 1]^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ . Como conjunto, o seu bordo  $\partial I^\ell$  é a reunião das suas  $2^\ell$  faces de dimensão  $(\ell - 1)$ , isto é, pelos os pontos  $(a^1, \dots, a^\ell) \in \mathbf{I}^\ell$  para os quais uma das coordenadas  $a_i$  ou é 0 ou 1. No entanto, para efeitos de teoria de integração (e não só ...) precisamos de considerar cada uma dessas faces munida de uma certa orientação. Por isso definimos:

♣ **Definição 2.9** ... Se  $I^\ell : [0, 1]^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell$  é o  $\ell$ -cubo standard em  $\mathbb{R}^\ell$  então para cada  $i = 1, \dots, \ell$ , define-se a:

- “ $(i, 0)$ -face de  $I^\ell$ ” através de:

$$(F_{(i,0)} I^\ell)(a^1, \dots, a^{\ell-1}) \stackrel{\text{def}}{=} I^\ell(a^1, \dots, a^{i-1}, 0, a^i, \dots, a^{\ell-1}) \quad (2.4.2)$$

e a:

- “ $(i, 1)$ -face de  $I^\ell$ ” através de:

$$(F_{(i,1)}I^\ell)(a^1, \dots, a^{\ell-1}) \stackrel{def}{=} I^\ell(a^1, \dots, a^{i-1}, 1, a^i, \dots, a^{\ell-1}) \quad (2.4.3)$$

Estas aplicações servem para induzir uma orientação em cada uma das faces do  $\ell$ -cubo, conforme se ilustra nos exemplos seguintes.

### Exemplos...

- (i). Faces do 2-cubo  $I^2$ :

$$\begin{aligned} (F_{(1,0)}I^2)(a^1) &= (0, a^1) & (F_{(1,1)}I^2)(a^1) &= (1, a^1) \\ (F_{(2,0)}I^2)(a^1) &= (a^1, 0) & (F_{(2,1)}I^2)(a^1) &= (a^1, 1) \end{aligned}$$

Figure 2.3: Faces do 2-cubo  $I^2$

- (i). Faces do 3-cubo  $I^3$ :

$$\begin{aligned} (F_{(1,0)}I^3)(a^1, a^2) &= (0, a^1, a^2) & (F_{(1,1)}I^3)(a^1, a^2) &= (1, a^1, a^2) \\ (F_{(2,0)}I^3)(a^1, a^2) &= (a^1, 0, a^2) & (F_{(2,1)}I^3)(a^1, a^2) &= (a^1, 1, a^2) \\ (F_{(3,0)}I^3)(a^1, a^2) &= (a^1, a^2, 0) & (F_{(3,1)}I^3)(a^1, a^2) &= (a^1, a^2, 1) \end{aligned}$$

Figure 2.4: Faces do 3-cubo  $I^3$

♣ **Definição 2.10** ... O “bordo do  $\ell$ -cubo singular  $I^\ell$ ” é por definição a  $(\ell - 1)$ -cadeia  $\partial I^\ell$ :

$$\partial I^\ell \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\ell} (-1)^i [F_{(i,0)} I^\ell - F_{(i,1)} I^\ell] \quad (2.4.4)$$

Por convenção põe-se  $\partial I^0 = \partial\{0\} = 1 \in \mathbb{Z}$ .

♣ **Exemplos 2.1** ... Representemos por  $F_{(i,\epsilon)} I^\ell = \mathbf{F}_{(i,\epsilon)}$  a  $(i, \epsilon)$ -face de  $\mathbf{I}^\ell$ . Então:

(i).  $\partial I^1 = -1\{0\} + 1\{1\}$

(ii).  $\partial I^2 = -\mathbf{F}_{(1,0)} + \mathbf{F}_{(1,1)} + \mathbf{F}_{(2,0)} - \mathbf{F}_{(2,1)}$

(iii).  $\partial I^3 = -\mathbf{F}_{(1,0)} + \mathbf{F}_{(1,1)} + \mathbf{F}_{(2,0)} - \mathbf{F}_{(2,1)} - \mathbf{F}_{(3,0)} + \mathbf{F}_{(3,1)}$

■

Consideremos agora um  $\ell$ -cubo singular numa variedade  $M$ ,  $c : \mathbf{I}^\ell \rightarrow M$ . Para cada  $i = 1, \dots, \ell$  definimos:

- “ $(i, 0)$ -face de  $c$ ” através de:

$$(F_{(i,0)} c)(a^1, \dots, a^{\ell-1}) \stackrel{\text{def}}{=} c(a^1, \dots, a^{i-1}, 0, a^i, \dots, a^{\ell-1}) \quad (2.4.5)$$

e a:

- “ $(i, 1)$ -face de  $I^\ell$ ” através de:

$$(F_{(i,1)} c)(a^1, \dots, a^{\ell-1}) \stackrel{\text{def}}{=} c(a^1, \dots, a^{i-1}, 1, a^i, \dots, a^{\ell-1}) \quad (2.4.6)$$

Note que estas faces são  $(\ell - 1)$ -cubos singulares em  $M$ , isto é:

$$F_{(i,0)} c, F_{(i,1)} c : \mathbf{I}^{\ell-1} \longrightarrow M$$

Por outro lado, estas aplicações  $F_{(i,0)}$  e  $F_{(i,1)}$  verificam as propriedades seguintes:

$$\begin{aligned} F_{(i,0)} F_{(j,0)} c &= F_{(j-1,0)} F_{(i,0)} c \\ F_{(i,1)} F_{(j,1)} c &= F_{(j-1,1)} F_{(i,1)} c \\ F_{(i,0)} F_{(j,1)} c &= F_{(j-1,1)} F_{(i,0)} c \\ F_{(i,1)} F_{(j,0)} c &= F_{(j-1,0)} F_{(i,1)} c \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

para todo o  $\ell$ -cubo singular  $c$  ( $\ell > 1$ ) e  $1 \leq i, j \leq \ell$ . O bordo do  $\ell$ -cubo singular  $c$ , define-se através de:

$$\partial c \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\ell} (-1)^i [F_{(i,0)} c - F_{(i,1)} c] \quad (2.4.8)$$

e finalmente, o “bordo de uma  $\ell$ -cadeia singular em  $M$ ”  $C = \sum_i a^i c_i$ , define-se através de:

$$\partial C = \sum_i a^i \partial c_i \quad (2.4.9)$$

A propriedade mais importante do operador bordo  $\partial : \mathcal{C}_\ell(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{C}_{\ell-1}(M, \mathbb{Z})$ , que se demonstra utilizando as igualdades (2.4.7), é a seguinte (ver Spivak):

♣ **Proposição 2.4** ... Se  $C$  é uma cadeia em  $M$ , então:

$$\partial \partial C = 0, \quad \forall C \in \mathcal{C}(M, \mathbb{Z}) \quad (2.4.10)$$

■

### 2.4.2 Integração de $k$ -formas em $\mathbb{R}^k$

Se representamos por  $y^1, \dots, y^k$  as coordenadas usuais cartesianas em  $\mathbb{R}^k$ , então:

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k$$

representa a forma volume de  $\mathbb{R}^k$  associada à métrica Euclideana e à orientação usual de  $\mathbb{R}^k$ .

Portanto se  $\omega \in \Omega^k(U)$  é uma  $k$ -forma diferencial, definida e contínua num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}_{y^j}^k$ , existe uma única função contínua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$\omega = f dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k$$

em  $U$ . Se  $A \subset U$  é um domínio de integração, põe-se por definição:

$$\begin{aligned} \int_A \omega &\stackrel{\text{def}}{=} \int_A f \\ &= \int_A f dy^1 \dots dy^k \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Recordemos do curso de Análise a fórmula da mudança de variáveis em integrais múltiplos:

“Seja  $A \subset \mathbb{R}_{x^i}^k$  um domínio de integração contido num aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$ ,  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  um difeomorfismo sobre um aberto  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}_{y^j}^k$ , e  $f : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então  $\phi(A)$  é um domínio de integração e:

$$\boxed{\int_{\phi(A)} f dy^1 \dots dy^k = \int_A (f \circ \phi) |\det \mathbf{Jac} \phi| dx^1 \dots dx^k} \quad (2.4.12)$$

Figure 2.5: Fórmula da mudança de variáveis em integrais múltiplos

Esta fórmula pode ser reformulada em termos de formas diferenciais. Vejamos para já uma proposição preliminar:

**♣ Proposição 2.5** ... Seja  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  um difeomorfismo do aberto  $U \subseteq \mathbb{R}_{x^i}^k$  sobre o aberto  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}_{y^j}^k$ . Então, se  $\omega = f dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k$  é uma  $k$ -forma diferencial contínua no aberto  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}_{y^j}^k$ :

$$\begin{aligned} \phi^*(\omega) &= \phi^*(f dy^1 \wedge \dots \wedge dy^k) \\ &= (f \circ \phi)(\det \mathbf{Jac} \phi) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \end{aligned} \quad (2.4.13)$$



**Dem.:** Como  $\phi^*(f dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k) = (f \circ \phi) \phi^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k)$ , basta provar que:

$$\phi^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k) = (\det \mathbf{Jac} \phi) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$$

Vem então que:

$$\begin{aligned} \phi^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k) \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) &= dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k \left( d\phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, d\phi_p \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \right) \\ &= dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k \left( \frac{\partial \phi^i}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^i}, \dots, \frac{\partial \phi^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \\ &= \det \left( \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j} \right) (dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^k) \left( \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \\ &= \det \mathbf{Jac} \phi \end{aligned}$$

em virtude do teorema (2.2), CQD.

Portanto, se  $\omega$  é uma  $k$ -forma diferencial contínua no aberto  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^k$ , e  $A \subset U$  um domínio de integração contido em  $U$ , então a definição 2.4.11 e a fórmula (2.4.13) permitem reescrever a fórmula da mudança de variáveis (2.4.12), na forma:

$$\begin{aligned} \int_{\phi(A)} \omega &= \int_{\phi(A)} f dy^1 \cdots dy^k \\ &= \int_A (f \circ \phi) |\det \mathbf{Jac} \phi| dx^1 \cdots dx^k \\ &= \pm \int_A \phi^* \omega \end{aligned}$$

ou, mais sucintamente:

$$\boxed{\int_{\phi(A)} \omega = \pm \int_A \phi^* \omega} \quad (2.4.14)$$

onde o sinal  $+$  ocorre quando  $\phi$  preserva orientação ( $\det \mathbf{Jac} \phi > 0$ ), e o sinal  $-$  ocorre quando  $\phi$  inverte a orientação ( $\det \mathbf{Jac} \phi < 0$ ).

### 2.4.3 Integração de formas diferenciais em cadeias

Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , e  $C$  uma  $\ell$ -cadeia singular em  $M$ . O nosso objectivo é definir o integral  $\int_C \omega$  onde  $\omega$  é uma  $\ell$ -forma diferencial (contínua) definida em  $M$ . Consideremos primeiro o caso em que  $C$  é um  $\ell$ -cubo singular em  $M$ ,  $c: \mathbf{I}^\ell \rightarrow M$ .

♣ **Definição 2.11** ... Seja  $c: \mathbf{I}^\ell \rightarrow M$  um  $\ell$ -cubo singular em  $M$ , e  $\omega$  uma  $\ell$ -forma diferencial (contínua) em  $M$ . Então:

- Se  $\ell = 0$ , o 0-cubo  $c$  reduz-se ao ponto  $c(0) \in M$ , e a 0-forma  $\omega$  é apenas uma função contínua em  $M$ . Pômos então por definição:

$$\int_c \omega \stackrel{def}{=} \omega(c(0)) \quad (2.4.15)$$

- Se  $\ell \geq 1$ , então  $c$  prolonga-se a uma aplicação  $C^\infty$ , definida num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^\ell$ , contendo  $\mathbf{I}^\ell = [0, 1]^\ell$ , e portanto podemos definir o pull-back  $c^* \omega$  que é uma  $\ell$ -forma diferencial contínua em  $U$ . Pômos então por definição:

$$\boxed{\int_c \omega \stackrel{def}{=} \int_{[0,1]^\ell} c^* \omega} \quad (2.4.16)$$

onde o segundo membro se define como em (2.4.11).

- Finalmente, se  $C = \sum_i a^i c_i$  é uma  $\ell$ -cadeia singular em  $M$ , põmos por definição:

$$\boxed{\int_C \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i a^i \int_{c_i} \omega} \quad (2.4.17)$$

Suponhamos que  $c \circ \phi$  é uma reparametrização do  $\ell$ -cubo singular  $c$ , isto é,  $\phi : [0, 1]^\ell \rightarrow [0, 1]^\ell$  é uma aplicação bijectiva  $C^\infty$  com  $\det \mathbf{Jac} \phi \neq 0$  em todo o ponto.

Figure 2.6:

Vejamos qual o efeito desta reparametrização sobre o integral da  $\ell$ -forma  $\omega$ , tal como o acabamos de definir em (2.4.16):

$$\begin{aligned} \int_{c \circ \phi} \omega &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{[0,1]^\ell} (c \circ \phi)^* \omega \\ &= \int_{[0,1]^\ell} \phi^* c^* \omega \\ &= \pm \int_{\phi([0,1]^\ell)} c^* \omega && \text{pela fórmula da mudança de variáveis (2.4.14)} \\ &= \pm \int_{[0,1]^\ell} c^* \omega && \text{porque } \phi([0,1]^\ell) = [0,1]^\ell \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \pm \int_c \omega \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

onde o sinal + ocorre quando  $\phi$  preserva orientação ( $\det \mathbf{Jac} \phi > 0$ ), e o sinal – ocorre quando  $\phi$  inverte a orientação ( $\det \mathbf{Jac} \phi < 0$ ). Portanto o integral é invariante sob reparametrizações que preservem a orientação ( $\det \mathbf{Jac} \phi > 0$ ).

Um dos teoremas mais importantes em integração de formas é o chamado teorema de Stokes, que constitui uma generalização importante do teorema fundamental do cálculo:

♣ **Teorema 2.9** “Teorema de Stokes” ... Seja  $C$  uma  $\ell$ -cadeia singular em  $M$  (com  $\ell \geq 1$ ), e  $\omega$  uma  $(\ell - 1)$ -forma diferencial de classe  $C^\infty$  em  $M$ . Então:

$$\boxed{\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega} \quad (2.4.19)$$

**Dem.:** Durante a prova usamos a notação seguinte para a  $(j, \epsilon)$ -face do  $\ell$ -cubo:

$$\iota_{j,\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} F_{(j,\epsilon)} I^\ell : \mathbf{I}^{\ell-1} \rightarrow \mathbb{R}^\ell$$

para cada  $j = 1, \dots, \ell$  e  $\epsilon = 0, 1$  (ver (2.4.2) e (2.4.3)):

$$\iota_{j,\epsilon}(x^1, \dots, x^{\ell-1}) = (x^1, \dots, x^{j-1}, \epsilon, x^{j+1}, \dots, x^{\ell-1})$$

A prova faz-se em 3 etapas:

(1).  $\omega$  é uma  $(\ell - 1)$ -forma em  $\mathbb{R}_{y^j}^\ell$ , e  $C = I^\ell$  é o  $\ell$ -cubo standard em  $\mathbb{R}_{x^i}^\ell$ .

Neste caso  $\omega$  é uma soma de  $(\ell - 1)$ -formas do tipo seguinte:

$$f dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^\ell$$

e por isso basta provar o teorema para uma dessas formas. Para isso, observamos primeiro que:

$$\int_{[0,1]^{\ell-1}} \iota_{j,\epsilon}^*(f dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^\ell) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i \\ \int_{[0,1]^\ell} f(x^1, \dots, \epsilon, \dots, x^{\ell-1}) dx^1 \dots dx^\ell & \text{se } j = i \end{cases}$$

De facto, se  $j \neq i$ ,  $\iota_{j,\epsilon}^* dy^j = d(y^j \circ \iota_{j,\epsilon}) = d\epsilon = 0$ , e se  $j = i$ , apenas se junta uma integração extra trivial na variável  $j = i$ , relativamente à qual  $f$  é constante e igual a  $\epsilon = 0$  ou  $1$ .

Portanto para  $C = I^\ell$ , um termo típico é:

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} &= \int_{\partial I^\ell} f dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^\ell \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{\epsilon=0,1} (-1)^{j+\epsilon} \int_{[0,1]^{\ell-1}} \iota_{j,\epsilon}^*(f dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^\ell) \\ &= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^\ell} f(x^1, \dots, 1, \dots, x^\ell) dx^1 \dots dx^\ell + \\ &\quad + (-1)^i \int_{[0,1]^\ell} f(x^1, \dots, 0, \dots, x^\ell) dx^1 \dots dx^\ell \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \int_C d\omega &= \int_{[0,1]^\ell} (I^\ell)^* d(f dy^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy^i} \wedge \dots \wedge dy^\ell) \\ &= \int_{[0,1]^\ell} \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^\ell \\ &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^\ell} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^\ell \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

onde na segunda igualdade, se usou o facto de que todos os outros termos são nulos (os que contêm termos do tipo  $dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^\ell$ , com  $j \neq i$ ). Usamos agora o teorema de Fubini sobre o cubo, para escrever o integral múltiplo (2.4.21), como um integral iterado e integramos relativamente à coordenada  $x^i$  para obter:

$$\begin{aligned} (2.4.21) &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^\ell \\ &= (-1)^{i-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 [f(x^1, \dots, 1, \dots, x^\ell) - f(x^1, \dots, 0, \dots, x^\ell)] dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^\ell \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

onde usamos o teorema fundamental do cálculo. Escrevemos agora o integral iterado como um integral múltiplo e adicionamos uma integração extra trivial relativamente à variável  $x^i$ , para obter:

$$\begin{aligned}
 (2.4.22) &= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^\ell} f(x^1, \dots, 1, \dots, x^\ell) dx^1 \dots dx^\ell + \\
 &\quad + (-1)^i \int_{[0,1]^\ell} f(x^1, \dots, 0, \dots, x^\ell) dx^1 \dots dx^\ell \\
 &= \int_{\partial C} \omega \quad \text{comparando com (2.4.20)}
 \end{aligned}$$

o que termina a prova no caso em que  $C = I^\ell$  é o  $\ell$ -cubo standard em  $\mathbb{R}^\ell$ .

(2).  $C$  é um  $\ell$ -cubo singular  $c : \mathbf{I}^\ell \rightarrow M$ , em  $M$ , e  $\omega$  é uma  $(\ell - 1)$ -forma em  $M$

Primeiro provamos facilmente que  $\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial \mathbf{I}^\ell} c^* \omega$ , usando as definições. Vem então que:

$$\int_c d\omega = \int_{\mathbf{I}^\ell} c^* d\omega = \int_{\mathbf{I}^\ell} d(c^* \omega) = \int_{\partial \mathbf{I}^\ell} c^* \omega = \int_{\partial c} \omega$$

onde na terceira igualdade se usou a parte 1. da prova.

(2).  $C = \sum_i a^i c_i$  é uma  $\ell$ -cadeia singular em  $M$ , e  $\omega$  é uma  $(\ell - 1)$ -forma em  $M$

$$\int_C d\omega = \sum_i a^i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a^i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial C} \omega$$

■

### 2.4.4 Integração em variedades

Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , orientável e orientada. Recorde que  $\mathbf{I}^k = [0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$ .

♣ **Definição 2.12** ... Uma  $k$ -célula orientada em  $M$  é um  $k$ -cubo (singular) da forma  $\sigma = \Phi|_{\mathbf{I}^k}$  onde  $\Phi : U \rightarrow M$  é uma parametrização local positiva definida num aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^k$  que contem  $\mathbf{I}^k$ .

$$\sigma = \Phi|_{\mathbf{I}^k} : \mathbf{I}^k \longrightarrow M$$

Como antes referir-nos-emos indistintamente à  $k$ -célula orientada como sendo quer a aplicação  $\sigma = \Phi|_{\mathbf{I}^k}$  quer a sua imagem (ou suporte)  $|\sigma| = \Phi|_{\mathbf{I}^k}(\mathbf{I}^k)$ .

Dada um  $k$ -forma em  $M$  definimos o integral de  $\omega$  sobre a  $k$ -célula orientada  $\sigma$  através de (2.4.16), isto é:

$$\int_\sigma \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{I}^k} \Phi^* \omega \tag{2.4.23}$$

A discussão que precede a definição 2.11 mostra que esta definição não depende da parametrização local positiva tal que  $|\sigma| = \Phi|_{\mathbf{I}^k}(\mathbf{I}^k)$ .

Figure 2.7:  $k$ -célula orientada em  $M$ 

♣ **Definição 2.13** ... Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , orientável e orientada. Uma  $k$ -cadeia fundamental orientada em  $M$  é uma cadeia do tipo:

$$\mathbf{C} = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$$

onde cada  $\sigma_i$  é uma  $k$ -célula orientada em  $M$ , tal que para todos os  $i, j = 1, \dots, r$  a intersecção  $|\sigma_i| \cap |\sigma_j|$  ou é vazia ou é a reunião de uma ou mais faces comuns a  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$ .

Uma **região fundamental**  $R$  em  $M$  é o suporte de alguma cadeia fundamental  $C = \sum \sigma_i$ :

$$R = \bigcup_i |\sigma_i|$$

Note que uma região fundamental  $R$  em  $M$  é sempre um conjunto compacto em  $M$ .

Figure 2.8: Região fundamental  $R$  em  $M$ 

Dada uma região fundamental  $R$  numa variedade orientada  $M$  de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , e uma  $k$ -forma diferencial  $\omega$  contínua em  $R$ , define-se o integral  $\int_R \omega$  através de:

$$\int_R \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^r \int_{\sigma_i} \omega \quad (2.4.24)$$

onde  $C = \sum \sigma_i$  é uma cadeia fundamental tal que  $R = \bigcup_i |\sigma_i|$ .

Note que esta definição não depende da cadeia fundamental  $C$ . De facto seja  $C' = \sum \sigma'_j$  uma outra cadeia fundamental tal que  $R = \bigcup_j |\sigma'_j|$ . Pondo  $A_{ij} = |\sigma_i| \cap |\sigma'_j|$ , seja  $B_{ij} = \sigma_i^{-1}(A_{ij})$

e  $B'_{ij} = \sigma_j'^{-1}(A_{ij})$ , de tal forma que  $\sigma_j'^{-1} \circ \sigma_i$  é um difeomorfismo de  $B_{ij}$  sobre  $B'_{ij}$ . Vem então que:

$$\begin{aligned} \int_{B'_{ij}} \sigma_j'^* \omega &= \int_{B_{ij}} (\sigma_j'^{-1} \circ \sigma_i)^* \sigma_j'^* \omega \\ &= \int_{B_{ij}} \sigma_i^* (\sigma_j'^{-1})^* \sigma_j'^* \omega \\ &= \int_{B_{ij}} \sigma_i^* \omega \end{aligned}$$

e portanto:

$$\int_R \omega = \sum_i \int_{\sigma_i} \omega = \sum_{i,j} \int_{B_{ij}} \sigma_i^* \omega = \sum_{i,j} \int_{B'_{ij}} \sigma_j'^* \omega = \sum_j \int_{\sigma_j'} \omega$$

como se tinha afirmado.

### 2.4.5 Variedades com bordo

Considere o **semi-espaço fechado superior**  $\mathbf{H}^k$  em  $\mathbb{R}^k$ :

$$\mathbf{H}^k \stackrel{\text{def}}{=} \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k : x^k \geq 0\}$$

É claro que  $\mathbf{H}^k$  não é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^k$ . No entanto, quer  $\text{Int } \mathbf{H}^k$  quer  $\partial \mathbf{H}^k$  são subvariedades de  $\mathbb{R}^k$  de dimensões  $k$  e  $k-1$ , respectivamente.

O interior de  $\mathbf{H}^k$  é:

$$\text{Int } \mathbf{H}^k = \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k : x^k > 0\}$$

e o seu **bordo** é:

$$\partial \mathbf{H}^k = \mathbf{H}^k - \text{Int } \mathbf{H}^k = \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k : x^k = 0\}$$

Os abertos de  $\mathbf{H}^k$  são subconjuntos  $A \subseteq \mathbf{H}^k$  que são da forma  $A = U \cap \mathbf{H}^k$  onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^k$ . Dado um aberto  $A \subseteq \mathbf{H}^k$  definimos o seu interior:

$$\text{Int } A = A \cap \text{Int } \mathbf{H}^k$$

e o seu bordo:

$$\partial A = A \cap \partial \mathbf{H}^k$$

Note que o bordo de  $A$  não é a fronteira de  $A$  (por exemplo,  $A = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \subset \mathbf{H}^2$ ). No entanto, quer  $\text{Int } A$  quer  $\partial A$  são subvariedades de dimensões  $k$  e  $k-1$ , como abertos de  $\text{Int } \mathbf{H}^k$  e  $\partial \mathbf{H}^k$ , respectivamente.

Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se suave se é a restrição de uma função suave  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida num aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$ , que contem  $A$ . A diferencial  $df_p : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida em todo o ponto  $p \in A$  (provar como exercício).

Se  $A$  e  $B$  são dois abertos de  $\mathbf{H}^k$  e  $f : A \rightarrow B$  é um difeomorfismo suave, então  $f(\partial A) = \partial B$  e  $\partial f \stackrel{\text{def}}{=} f|_{\partial A}$  é um difeomorfismo suave de  $\partial A$  sobre  $\partial B$  (provar como exercício).

♣ **Definição 2.14** ... Uma parametrização  $k$ -dimensional de um subconjunto  $V \subset \mathbb{R}^k$  é uma aplicação suave  $\phi : A \rightarrow V$ , definida num aberto  $A \subseteq \mathbf{H}^k$  tal que:

- $\phi$  é um homeomorfismo de  $A$  sobre  $V$
- $df_a : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  é injectiva para todo o ponto  $A \in A$

■

♣ **Definição 2.15** ... Uma variedade com bordo (real)  $M$  de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ , é um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  em que cada um dos seus pontos  $p$  pertence a um aberto  $V \subset M$  que é imagem de uma parametrização, suave  $\phi : A \rightarrow V$ , definida num aberto  $A \subset \mathbf{H}^k$ .

As aplicações de mudança de coordenadas continuam a ser difeomorfismos (provar como exercício).

♣ **Definição 2.16** ... Seja  $M$  uma variedade, com bordo, de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . O bordo de  $M$  é o conjunto  $\partial M$  constituído pelos pontos  $p \in M$  que são da forma  $p = \phi(u)$  com  $u \in \partial A$ , para alguma parametrização, suave  $\phi : A \rightarrow V$ , definida num aberto  $A \subset \mathbf{H}^k$ .

Esta definição não depende da parametrização  $\phi$  (provar como exercício). Se  $M$  é uma variedade com bordo, o seu interior define-se por  $\text{Int } M = M - \partial M$ .  $\text{Int } M$  é uma subvariedade (sem bordo) de dimensão  $k$  em  $M$  e  $\partial M$  é também uma subvariedade (sem bordo) de dimensão  $k - 1$  em  $M$ . A inclusão  $\iota : \partial M \hookrightarrow M$  é um mergulho suave (provar estes factos como exercício).

♣ **Proposição 2.6** ... Seja  $M$  uma variedade sem bordo, de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave tal que  $0$  é valor regular de  $f$ . Então:

$$N = \{p \in M : f(p) \leq 0\} \subseteq M$$

é uma subvariedade de dimensão  $k$  em  $M$ , com bordo  $\partial N = f^{-1}(0)$ .

**Dem.:**

Ver [GP].

■

♣ **Proposição 2.7** ... Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $m$ , com bordo  $\partial M$ ,  $N$  uma variedade de dimensão  $n$ , sem bordo, e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave.

Suponhamos que  $q \in N$  é valor regular de  $f$  e também de  $\partial f = F|_{\partial M}$ . Então  $f^{-1}(q)$  é uma variedade de dimensão  $m - n$ , com bordo dado por:

$$\partial(f^{-1}(q)) = f^{-1}(q) \cap \partial M$$

**Dem.:**

Ver [GP].

■

Seja  $M$  uma variedade, com bordo, de dimensão  $k$  em  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $p \in M$  (mesmo quando  $p \in \partial M$ ) define-se o espaço tangente  $T_p M$  através de:

$$T_p M = df_u(\mathbb{R}^k)$$

onde  $\phi : A \rightarrow V$  é uma parametrização, suave de  $M$ , definida num aberto  $A \subset \mathbf{H}^k$ , com  $p = \phi(u)$ . Como  $\partial \mathbf{H}^k = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \cong \mathbb{R}^{k-1}$ , é claro que:

$$T_p(\partial M) = d\phi_u(\mathbb{R}^{k-1}) \subset T_p M$$

Esta definições não dependem da parametrização  $\phi$  (provar como exercício).

♣ **Proposição 2.8** ... Seja  $M$  é uma variedade orientável com bordo. Então  $\partial M$  é orientável.

- **Dem.:** Observe que um difeomorfismo:

$$F = (F^1, \dots, F^k) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

tal que  $F(\mathbf{H}^k) \subseteq \mathbf{H}^k$  e  $F(\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ , isto é:

$$F^k(x^1, \dots, x^k) \geq 0, \quad \text{sempre que } x^k \geq 0$$

e:

$$F^k(x^1, \dots, x^{k-1}, 0) = 0$$

satisfaz,  $\forall j : 1 \leq j \leq k-1$ :

$$\frac{\partial F^k}{\partial x^j}(x^1, \dots, x^{k-1}, 0) = 0$$

e:

$$\frac{\partial F^k}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^{k-1}, 0) > 0$$

$\forall (x^1, \dots, x^{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ .

Portanto o determinante da matriz Jacobiana de  $F$  e o determinante da matriz Jacobiana da restrição de  $F$  a  $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$  (ambos não nulos), têm o mesmo sinal em todo o ponto de  $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ .

Concluimos então que, se todas as aplicações de mudança de coordenadas para  $M$  têm determinantes Jacobianos sempre positivos, o mesmo acontece para aplicações de mudança de coordenadas induzidas em  $\partial M$ . ■

Uma orientação para  $M$  induz naturalmente uma orientação em  $\partial M$ . Com efeito,  $\forall p \in M$  sabemos que  $T_p(\partial M)$  tem codimensão 1 em  $T_p M$ . Portanto existem exactamente dois vectores unitários em  $T_p M$  ortogonais a  $T_p(\partial M)$  - um deles,  $-\mathbf{n}_p$  aponta para o interior de  $M$  e o outro  $\mathbf{n}_p$  para o exterior. Mais precisamente, se  $\phi : A \rightarrow M$  é uma parametrização suave com  $p = \phi(u)$  então  $(df_u)^{-1} : T_p M \rightarrow T_u \mathbb{R}^n$  envia um desses vectores em  $\mathbf{H}^n$  (o que aponta "para dentro" de  $M$ ) e o outro em  $-\mathbf{H}^n$  (o que aponta "para fora" de  $M$ ). Mais uma vez estas definições não dependem da parametrização  $\phi$  (provar como exercício).

A **orientação induzida** em  $\partial M$  define-se da seguinte forma - uma base ordenada  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$  de  $T_p(\partial M)$  diz-se **positiva** sse a base ordenada  $\{\mathbf{n}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}\}$  de  $T_p M$  é positiva.

Figure 2.9:



Vamos definir o integral  $\int_M \omega$  de uma  $k$ -forma contínua  $\omega$  sobre  $M$ . A definição é análoga ao caso em que  $\partial M = \emptyset$ .

♣ **Definição 2.17** ... Um conjunto  $C \subset M$  diz-se uma  **$k$ -célula orientada** em  $M$ , se  $C$  é imagem do cubo  $\mathbf{I}^k$  sob uma parametrização local positiva  $\phi : A \rightarrow M$  definida num aberto  $A \subset \mathbf{H}^n$ .

Quando a célula  $C$  está contida em  $\text{Int } M$ ,  $C$  diz-se uma **célula interior**. Neste caso  $A$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  que contém  $\mathbf{I}^k$ . Mas quando o aberto  $A$  é aberto de  $\mathbf{H}^n$  que contém  $\mathbf{I}^k$ , então, designando por:

$$c = \phi|_{\mathbf{I}^k}$$

o  $k$ -cubo associado, exigimos explicitamente que:

$$C \cap \partial M = c_{(n,0)}(\mathbf{I}^k)$$

isto é, a célula  $C$  intersecciona o bordo de  $M$  exactamente na sua  $(n,0)$ -face.

Figure 2.10:

Em qualquer dos casos continuamos a definir:

$$\int_C = \int_{\mathbf{I}^k} \phi^* \omega$$

Para definir o integral de  $\omega$  sobre  $M$  podemos seguir duas vias:

- usar uma **partição celular orientada** de  $M$
- usar partições da unidade

Usamos a primeira via, por ser mais intuitiva e prestar-se mais rapidamente a cálculos concretos, remetendo a segunda via para um apêndice.

♣ **Definição 2.18** ... Seja  $M$  uma variedade suave compacta orientada com bordo. Uma **partição celular orientada** de  $M$  é uma colecção  $\mathfrak{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$  de  $k$ -células orientadas tais que:

- $M = \cup_{i=1}^r C_i$

- Se  $i \neq j$  então  $C_i \cap C_j$  ou é vazia ou consiste de uma única face comum  $F_{ij}$  a  $C_i$  e a  $C_j$ , sobre a qual  $C_i$  e  $C_j$  induzem orientações opostas.
- Se  $F$  é uma face de  $C_i$  e não existe qualquer outra célula que admita  $F$  como face, então  $F \subset \partial M$  e  $F$  é a  $(k, 0)$ -face de  $C_i$ . Além disso, o bordo de  $M$  é reunião de faces deste tipo.

Figure 2.11:

É possível provar que toda a variedade compacta orientada admite uma partição deste tipo. No entanto a demonstração ultrapassa o nível deste curso pelo que, do ponto de vista técnico, é preferível usar partições da unidade para "partir" a forma  $\omega$ .

O integral de uma  $k$ -forma define-se através de:

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^r \int_{C_i} \omega \quad (2.4.25)$$

Resta mostrar que esta definição não depende da partição celular orientada,  $\mathfrak{C}$ , de  $M$ .

Consideremos agora uma variedade suave  $M$  compacta orientável e orientada, de dimensão  $k$ , com bordo  $\partial M$ , munido da orientação induzida, e uma  $(k-1)$ -forma diferencial

$$\omega \in \Omega^{k-1}(M)$$

- Calculemos  $d\omega \in \Omega^k(M)$ , e integremos sobre  $M$ , obtendo:

$$\int_M d\omega$$

- Munindo  $\partial M$  com a orientação induzida, calculemos  $\iota^*\omega \in \Omega^{k-1}(\partial M)$ , onde  $\iota: \partial M \hookrightarrow M$  é a inclusão canónica, e integremos sobre  $\partial M$ , para obter:

$$\int_{\partial M} \iota^*\omega = \int_{\partial M} \omega$$

O facto essencial é que estes dois integrais coincidem!

Para calcular o integral  $\int_{\partial M} \omega$  sobre a variedade compacta sem bordo  $\partial M$ , munida da orientação induzida, como sempre, devemos usar uma partição celular orientada de  $\partial M$ .

Suponhamos que  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_r\}$  é uma partição celular orientada de  $M$ . Como antes, designamos por:

$$c^i = \phi_i|_{\mathbf{I}^k}$$

os  $k$ -cubos associados a cada uma das células  $C_i$ , onde  $\phi_i$  são parametrizações positivas de  $M$ .

Supômos ainda que  $\partial M$  é reunião das  $(k, 0)$ -faces:

$$c_{(k,0)}^i : \mathbf{I}^{k-1} \rightarrow M$$

dos primeiros  $p$ , com  $p < r$ ,  $k$ -cubos  $c^i$ . Pondo:

$$F_i = c_{(k,0)}^i(\mathbf{I}^{k-1})$$

vemos que  $\{F_1, \dots, F_p\}$  constituem uma partição celular de  $\partial M$ . No entanto, esta partição não é necessariamente orientada, já que  $c_{(k,0)}^i$  não preserva necessariamente a orientação (quando  $\mathbf{I}^{k-1} \subset \mathbb{R}^{k-1}$  tem a orientação usual e  $\partial M$  a orientação induzida).

Com efeito, recorde como foi definida a orientação induzida no bordo. Se aplicarmos essa definição no caso particular em que  $M = \mathbf{H}^k$ , com a orientação usual, vemos que a orientação induzida no  $\partial \mathbf{H}^k = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ , é igual a  $(-1)^k$  vezes a orientação usual de  $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \cong \mathbb{R}^{k-1}$ .

Portanto  $c_{(k,0)}^i : \mathbf{I}^{k-1} \rightarrow F_i \subset \partial M$  (com a orientação induzida), preserva a orientação quando  $k$  é par e inverte-a quando  $k$  é ímpar. Concluimos portanto que:

$$\int_{F_i} \omega = (-1)^k \int_{c_{(k,0)}^i} \omega \tag{2.4.26}$$

Mas  $c_{(k,0)}^i$  aparece com coeficiente  $(-1)^k$  na cadeia bordo de  $c^i$ ,  $\partial c^i$  (ver a definição de bordo).

Por outro lado, se  $C = C_1 + \dots + C_r$  designa a cadeia associada à partição celular orientada  $\mathcal{C}$  de  $M$  é imediato reconhecer atendendo, à segunda condição da definição 2.18, e à definição anterior, que:

$$\partial C = (-1)^k \sum_{i=1}^p c_{(k,0)}^i \tag{2.4.27}$$

e portanto:

$$\int_{\partial C} \omega = (-1)^k \sum_{i=1}^p \int_{c_{(k,0)}^i} \omega = (-1)^k (-1)^k \sum_{i=1}^p \int_{F_i} \omega = \sum_{i=1}^p \int_{F_i} \omega$$

e como  $\partial C$  é uma cadeia associada (compatível com a orientação) a uma partição celular orientada de  $\partial M$ , vem que:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial C} \omega = \sum_{i=1}^p \int_{F_i} \omega$$

Finalmente, aplicando o teorema de Stokes 2.9, obtemos:

♣ **Teorema 2.10 Teorema de Stokes...** *Nas condições atrás referidas tem-se que:*

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega} \tag{2.4.28}$$

Note que quando  $\partial M = \emptyset$ , o teorema de Stokes afirma que:

$$\int_M d\omega = 0, \quad \forall \omega \in \Omega_c^{n-1}(M) \quad \partial M = \emptyset$$

♣ **Teorema 2.11 Teorema de Gauss...** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável, de dimensão  $n$ , orientável com bordo  $\partial M$ , e  $X \in \mathfrak{X}_c(M)$  um campo de vectores em  $M$  com suporte compacto. Seja  $\mu \in \Omega^k(M)$  uma forma volume em  $M$ . Então:*

$$\int_M (\operatorname{div} X) \mu = \int_{\partial M} i_X \mu \tag{2.4.29}$$

**Dem.:**

- Aplique a fórmula de Cartan e a definição de  $\operatorname{div} X$ :

$$(\operatorname{div} X)\mu = \mathcal{L}_X \mu = di_X \mu + i_X d\mu = di_X \mu$$

e agora o Teorema de Stokes. ■

♣ **Exemplo 2.19** ... Se  $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é uma variedade Riemanniana orientada, recorde que definimos a respectiva forma volume  $dV = \mu_g$  através de:

$$(\mu_g)_p = (dV)_p \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{vol}_p$$

onde para cada  $p \in M$ :

$$\operatorname{vol}_p(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k) = \pm \sqrt{\det [g_p(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j)]} \quad \mathbf{V}_i \in T_p M$$

isto é,  $\operatorname{vol}_p(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k)$  é igual ao volume orientado do paralelepípedo em  $T_p M$  gerado por  $\{\mathbf{V}_i\}_{i=1, \dots, k}$ .

Numa parametrização local positiva  $\Phi : U \rightarrow M$ , com coordenadas locais  $u^i$ , (isto é,  $\{\frac{\partial}{\partial u^i}|_p\}$  é uma base positiva de  $T_p M$ , para todo o ponto  $p \in \Phi(U) \subseteq M$ ), temos que:

$$\mu_g = dV \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\det (g_{ij}(u))} du^1 \wedge \dots \wedge du^k, \quad u = (u^1, \dots, u^k) \in U \tag{2.4.30}$$

onde:

$$g_{ij}(u) \stackrel{\text{def}}{=} g_p \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p \right)$$

são os coeficientes da métrica  $g$  nas coordenadas locais  $u^i$ .

Dada uma função contínua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de suporte compacto, define-se o integral de  $f$  em  $M$ , através de:

$$\int_M f \stackrel{\text{def}}{=} \int_M f \mu_g = \int_M f dV \tag{2.4.31}$$

Quando  $M$  é compacta e  $f \equiv 1$ , ao integral  $\int_M dV$  chama-se o volume de  $M$ :

$$\operatorname{vol}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \int_M dV \tag{2.4.32}$$

Por exemplo, consideremos a esfera  $M = \mathbf{S}^2$ , munida da orientação e métrica usuais, e a parametrização:

$$\Phi : (\varphi, \theta) \mapsto (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

definida em  $U = \{(\varphi, \theta) : 0 < \varphi < 2\pi, -\pi/2 < \theta < \pi/2\} \subset \mathbb{R}_{(\varphi, \theta)}^2$ .  $\Phi$  é uma parametrização positiva, e  $\mathbf{S}^2 - \Phi(U)$  é um semi-meridiano da esfera, portanto um conjunto de medida nula. Temos então que:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathbf{S}^2) &= \text{área de } \mathbf{S}^2 \\ &= \int_{\mathbf{S}^2} dV \\ &= \int_U \Phi^*(dV) \\ &= \int_U \cos \theta \, d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

♣ **Exemplo 2.20** ... Considere o “Toro plano”  $T$  que é a imagem em  $\mathbb{R}^4$  da aplicação  $\Phi : [0, 2\pi]^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por:

$$\Phi(\theta, \varphi) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)$$

Note que  $\Phi|_{]0, 2\pi[^2}$  é um mergulho e que  $T - \Phi|_{]0, 2\pi[^2}$  é um conjunto de medida nula. Por outro lado:

$$g_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} = 1, \quad g_{\theta\varphi} = \frac{\partial}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} = 1,$$

e a métrica induzida em  $T \hookrightarrow \mathbb{R}^4$  é, nas coordenadas  $(\theta, \varphi)$ :

$$g = ds^2 = d\theta^2 + d\varphi^2$$

Portanto  $dV = \mu_g = d\theta \wedge d\varphi$  e:

$$\text{vol}(T) = \int_T dV = \int_{]0, 2\pi[^2} d\theta d\varphi = 4\pi^2$$

♣ **Exemplo 2.21 (Teorema de Green)** ... Seja  $M \subset \mathbb{R}^2$  uma superfície compacta orientada com bordo.  $\partial M$  é reunião de curvas  $C_i$  regulares simples fechadas orientadas.

Figure 2.12:

Se  $\omega$  é uma 1-forma, que em coordenadas cartesianas usuais se escreve:

$$\omega = adx + bdy, \quad a, b \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

então:

$$d\omega = \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

e o teorema de Stokes neste caso traduz-se na seguinte fórmula de Green:

$$\int_M \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial M} a dx + b dy = \sum_{i=1}^r \int_{C_i} a dx + b dy$$

♣ **Exemplo 2.22 (Teorema da divergência clássico)** ... Seja  $M$  uma variedade em  $\mathbb{R}^3$ , compacta orientada de dimensão 3 com bordo, com as orientações usuais.

O bordo, com a orientação induzida, é uma superfície compacta sem bordo. Dado um campo de vectores  $X$ , definido num aberto que contem  $M$ , define-se o fluxo de  $X$  através de  $\partial M$  por:

$$\int_{\partial M} \omega_X^2 \quad (2.4.33)$$

Mas  $d\omega_X^2 = (\operatorname{div} X)dV$  e o teorema de Stokes neste caso traduz-se no seguinte teorema da divergência clássico:

$$\int_{\partial M} \omega_X^2 = \int_M d\omega_X^2 = \int_M (\operatorname{div} X)dV$$

♣ **Exemplo 2.23 (Teorema de Stokes clássico)** ... Seja  $M$  uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , compacta orientada de dimensão 2 com bordo, com as orientações usuais. Dado um campo de vectores  $X$ , definido num aberto que contem  $M$ , vimos que:

$$\omega_{\operatorname{rot} X}^2 = d\omega_X^1$$

O teorema de Stokes neste caso traduz-se no seguinte teorema de Stokes clássico:

$$\int_M \omega_{\operatorname{rot} X}^2 = \int_M d\omega_X^1 = \int_{\partial M} \omega_X^1$$

♣ **Exemplo 2.24** ... Considere a 1-forma:

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Esta forma é fechada:  $d\omega = 0$  (verificar). Mas não é exacta. Com efeito se  $\omega = df$ , para alguma função suave  $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , então integrando  $\omega$  no 1-cubo:  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , definido por:

$$c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

viria que:

$$1 = \int_c \omega = \int_c df = \int_{\partial c} f = 0$$

o que é absurdo.

Por outro lado, também se pode mostrar que este 1-cubo não é bordo de 2-cadeia  $C$  em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . De facto, se  $c = \partial C$ , viria que (uma vez que  $d\omega = 0$ ):

$$0 = \int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega = \int_c \omega = 1$$

o que é absurdo.

### 2.4.6 Apêndice: integração de formas em variedades (uso das partições da unidade)

Seja  $\omega$  uma  $n$ -forma diferencial numa variedade orientada  $M$  de dimensão  $n$ . Suponhamos que  $(U, \varphi)$  é uma carta local de  $M$  e que  $\text{supp } \omega \subset U$ . Então podemos considerar a  $n$ -forma  $\omega|_U$ , que tem o mesmo suporte, e ainda  $(\varphi^{-1})^*(\omega|_U)$  que tem suporte compacto em  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ .

♣ **Definição 2.19** ... Seja  $M$  uma variedade orientada de dimensão  $n$  e  $\omega \in \Omega^n(M)$  uma  $n$ -forma com suporte compacto  $\text{supp } \omega \subset U$ , onde  $(U, \varphi)$  é uma carta local de  $M$  positivamente orientada. Definimos então:

$$\int_{(\varphi)} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int (\varphi^{-1})^*(\omega|_U) \quad (2.4.34)$$

♣ **Proposição 2.9** ... Seja  $M$  uma variedade orientada de dimensão  $n$  e  $\omega \in \Omega^n(M)$  uma  $n$ -forma com suporte compacto  $\text{supp } \omega \subset U \cap V$ , onde  $(U, \varphi), (V, \psi)$  são cartas locais de  $M$  positivamente orientadas. Então:

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{(\psi)} \omega \quad (2.4.35)$$

- **Dem.:** Pela fórmula da mudança de variáveis (2.4.14), vem que:

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int (\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = \int (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = \int (\psi^{-1})^*(\omega|_U) = \int_{(\psi)} \omega$$

■

Podemos portanto definir  $\int \omega = \int_{(\varphi)} \omega$ , quando  $(U, \varphi)$  é uma carta local de  $M$  positivamente orientada contendo o suporte de  $\omega$  (se uma tal carta existir).

Mais geralmente, podemos definir  $\int \omega$  quando  $\omega$  tem suporte compacto. Antes porém recordemos o conceito de partição da unidade.

Recorde que uma variedade diferenciável  $M$  tem uma base numerável de abertos e portanto  $M$  é paracompacta o que implica a existência de partições da unidade:

♣ **Definição 2.20** ... Uma **partição  $C^\infty$  da unidade** numa variedade diferenciável  $M$ , é uma colecção  $\mathcal{P} = \{f_a\}_{a \in A}$  de funções em  $C^\infty(M)$  tais que:

- $0 \leq f_a \leq 1, \quad \forall a \in A.$
- A colecção dos suportes das funções  $f_a$ :

$$\mathcal{S} = \{\text{supp } f_a\}_{a \in A}$$

é localmente finita (cada ponto  $p \in M$  admite uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de membros de  $\mathcal{S}$ ).

- $\sum_{a \in A} f_a = 1$

A partição  $\mathcal{P} = \{f_a\}_{a \in A}$  diz-se “**subordinada**” a uma cobertura aberta  $\mathcal{C}$  de  $M$ , se cada suporte  $\text{supp } f_a$  está contido em algum membro de  $\mathcal{C}$ .

Recorde que o suporte de uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  se define por:

$$\text{supp } f \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}$$

Note ainda que a soma  $\sum_{a \in A} f_a$  está bem definida quando a colecção dos suportes  $\mathcal{S} = \{\text{supp } f_a\}_{a \in A}$  é localmente finita, já que em alguma vizinhança de cada ponto de  $M$ , todas as funções  $f_a$  são nulas com a possível excepção de um número finito delas.

Partições  $C^\infty$  da unidade são um instrumento indispensável para definir globalmente objectos que têm à partida apenas uma definição local (ou para decompôr um objecto global numa “soma” de objectos locais). O resultado principal é o seguinte:

♣ **Teorema 2.12** ... *Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $\mathcal{C}$  uma qualquer cobertura aberta de  $M$ . Então existe uma partição  $C^\infty$  da unidade  $\mathcal{P} = \{f_a\}_{a \in A}$  subordinada à cobertura  $\mathcal{C}$ .*

Podemos agora definir  $\int \omega$  quando  $\omega$  tem suporte compacto.

♣ **Definição 2.21** ... *Seja  $M$  uma variedade orientada de dimensão  $n$  e  $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  um atlas de cartas locais de  $M$  positivamente orientadas. Seja  $\mathcal{P} = \{f_a\}_{a \in A}$  uma partição da unidade subordinada a  $\mathcal{A}$ . Então  $f_a \omega$  tem suporte compacto contido em algum  $U_\alpha$ . Definimos então:*

$$\int_{(P)} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sum_a \int (f_a \omega) \quad (2.4.36)$$

♣ **Proposição 2.10** ... (i). *A soma (2.4.36) contém apenas um número finito de termos não nulos, e portanto  $\int_{(P)} \omega \in \mathbb{R}$ .*

(ii). *Dado um qualquer outro atlas de cartas locais de  $M$  positivamente orientadas e uma correspondente partição  $Q$  da unidade subordinada, tem-se que  $\int_{(Q)} \omega = \int_{(P)} \omega$ .*

*Este valor comum nota-se por  $\int \omega$ , e chama-se o integral de  $\omega \in \Omega_c^n(M)$ .*

- **Dem.:** (i). Dado um qualquer  $x \in M$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  em  $M$ , tal que apenas um número finito de  $f_a$  são não nulos em  $U$ . Como  $\text{supp } \omega$  é compacto, podemos cobrir  $\text{supp } \omega$  por um número finito de tais vizinhanças. Portanto apenas um número finito de  $f_a$  são não nulos na reunião dessas vizinhanças  $U$ .
- (ii). Sejam  $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  e  $\mathcal{B} = \{V_\beta, \psi_\beta\}$  dois atlas pertencentes à estrutura diferenciável de  $M$ , com cartas positivamente orientadas, e  $\{f_a\}_{a \in A}$ ,  $\{g_b\}_{b \in B}$  partições da unidade subordinadas a  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ , respectivamente. Então  $\{U_\alpha \cap V_\beta\}$  constitui uma cobertura aberta de  $M$ , e  $\{f_a g_b\}$  uma partição da unidade subordinada. As funções  $\{f_a g_b\}$  satisfazem  $f_a g_b(x) = 0$  excepto para um número finito de índices  $(a, b)$ , e  $\sum_a \sum_b f_a g_b(x) = 1, \forall x \in M$ . Como  $\sum_b g_b = 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{(P)} \omega &= \sum_a \int f_a \omega \\ &= \sum_b \sum_a \int g_b f_a \omega \\ &= \sum_a \sum_b \int f_a g_b \omega \\ &= \int_{(Q)} \omega \end{aligned}$$

■



♣ **Teorema 2.13 Teorema de Stokes...** *Nas condições atrás referidas tem-se que:*

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega} \quad (2.4.37)$$

**Dem.:**

- Como os integrais foram definidos através de partições da unidade subordinadas a um atlas, e como ambos os membros de (2.4.37) são lineares em  $\omega$ , podemos supôr, sem qualquer perda de generalidade, que  $M = U \subseteq \mathbf{H}^k$  é um aberto de  $\mathbf{H}^k$ , e que  $\omega \in \Omega_c^{n-1}(U)$ .
- Neste caso  $\partial U = U \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ , e a inclusão  $i : \partial U \hookrightarrow U$  é dada por:

$$i(y^1, \dots, y^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{n-1}, 0)$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} i^*(dx^k) &= dy^k, \quad k = 1, \dots, n-1 \\ i^*(dx^n) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, dada uma  $(n-1)$ -forma  $\omega$  de suporte compacto em  $M = U \subseteq \mathbf{H}^k$ :

$$\omega = \sum_{k=1}^n f_k dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega_c^{n-1}(\mathbf{H}^k)$$

tem-se que:

$$i^*(\omega) = g_n dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-1} \in \Omega_c^{n-1}(\partial \mathbf{H}^k)$$

onde  $g_n = i^* f_n$  é a função  $g_n : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$g_n(y^1, \dots, y^{n-1}) = f_n(y^1, \dots, y^{n-1}, 0)$$

e ainda:

$$d\omega = \left( \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega_c^n(U)$$

- O primeiro membro de (2.4.37) é então igual a:

$$\int_M d\omega = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} dx^1 \dots dx^k \quad (2.4.38)$$

Temos agora dois casos para considerar:  $\partial U = \emptyset$  ou  $\partial U \neq \emptyset$ .

- Se  $\partial U = \emptyset$ , então  $\int_{\partial U} i^* \omega = 0$ . Por outro lado, integrando o  $k$ -termo da soma que ocorre no segundo membro de (2.4.38), obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} dx^k \right) dx^1 \dots \widehat{dx^k} \dots dx^n$$

e  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} dx^k = 0$  já que  $f_k$  tem suporte compacto. Portanto  $\int_U d\omega = 0$  e o teorema está provado neste caso.

- Se  $\partial U \neq \emptyset$  podemos proceder como anteriormente para cada termo da soma que ocorre no segundo membro de (2.4.38) com exceção do último, que, em virtude do teorema fundamental do cálculo, é igual a:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_0^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^n \right) dx^1 \dots dx^{n-1} = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}$$

já que  $f_n$  tem suporte compacto. Portanto:

$$\int_U d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}$$

Por outro lado:

$$\int_{\partial U} i^* \omega = \int_{\partial \mathbf{H}^k} i^* \omega = \int_{\partial \mathbf{H}^k} f_n(y^1, \dots, y^{n-1}, 0) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-1}$$

Como a orientação induzida no bordo é definida por  $(-1)^n dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-1}$ , vem finalmente que:

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} i^* \omega &= \int_{\partial \mathbf{H}^k} i^* \omega = \int_{\partial \mathbf{H}^k} f_n(y^1, \dots, y^{n-1}, 0) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-1} \\ &= (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(y^1, \dots, y^{n-1}, 0) dy^1 \dots dy^{n-1} \end{aligned}$$

■

## 2.5 Lema de Poincaré

Seja  $M$  uma variedade e:

$$\begin{aligned} \iota_t : M &\longrightarrow [0, 1] \times M \\ p &\longmapsto \iota_t(p) = (t, p) \end{aligned}$$

Definamos uma aplicação  $H : \Omega^k([0, 1] \times M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ , chamada **operador de homotopia**, através de:

$$(H\omega)(X_1, \dots, X_k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 (\iota_t^* i_{\partial/\partial t} \omega)(X_1, \dots, X_k) dt \quad (2.5.1)$$

É possível mostrar que:

$$d \circ H + H \circ d = \iota_1^* - \iota_0^* \quad (2.5.2)$$

**Dem.:** Em coordenadas locais  $(x, t) = (t, x^1, \dots, x^n)$  para  $[0, 1] \times M$  toda a  $k$ -forma  $\omega$  em  $[0, 1] \times M$  pode ser escrita como soma de termos dos dois tipos seguintes:

$$f(t, x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \text{e} \quad g(t, x) dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}}$$

Aplicando  $\iota_1^* - \iota_0^*$  a cada um destes termos obtém-se:

$$\begin{aligned} &(\iota_1^* - \iota_0^*)(f(t, x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= f(1, x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} - f(0, x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

enquanto que:

$$(\iota_1^* - \iota_0^*)(g(t, x) dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}}) = 0$$

Definamos agora o operador  $H$  através de:

$$H((g(t, x) dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}})) = \left( \int_0^1 g(t, x) dt \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}}$$

e:

$$H((f(t, x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) = 0$$

e prolongando por linearidade.

Aplicando agora  $d \circ H + H \circ d$  a cada termo de  $\omega$ , vem que:

$$\begin{aligned}
 & (d \circ H + H \circ d)((f(t, x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 = & (H \circ d)((f(t, x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\
 = & H \left( \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \\
 & + H \left( \sum_j \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \\
 = & f(1, x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} - f(0, x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}
 \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

enquanto que:

$$\begin{aligned}
 & (d \circ H + H \circ d)((g(t, x)dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}}) \\
 = & H \left( - \sum_j \frac{\partial g}{\partial x^j} (x, t) dt \wedge dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} \right) \\
 & + d \left( \int_0^1 g(x, t) dt \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} \\
 = & - \sum_j \left( \frac{\partial g}{\partial x^j} (x, t) dt \right) dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} \\
 & + \sum_j \left( \frac{\partial g}{\partial x^j} (x, t) dt \right) dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}} \\
 = & 0
 \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

■

Suponhamos agora que  $f, g : M \rightarrow N$  são duas aplicações suavemente homotópicas e que  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  é uma homotopia suave, de tal forma que  $F(0, \cdot) = f$  e  $F(1, \cdot) = g$ .

Neste caso tem-se que:

$$\boxed{g^*\omega - f^*\omega \in \Omega^k(M) \text{ é exacta } \forall \omega \in \Omega^k(N) \text{ fechada}} \tag{2.5.5}$$

De facto,  $G = H \circ F^*$ , onde  $H$  é o operador de homotopia definido por (2.5.1), satisfaz:

$$d \circ G + G \circ d = g^* - f^*$$

Portanto se  $\omega \in \Omega^k(N)$  é fechada,  $d\omega = 0$  e:

$$g^*\omega - f^*\omega = d \circ G\omega + G \circ d\omega = d(G\omega)$$

Podemos agora deduzir o chamado Lema de Poincaré:

♣ **Teorema 2.14 Lema de Poincaré...** *Se  $M$  é contráctil então toda a forma fechada é exacta.*

- **Dem.:** A aplicação Id em  $M$  é homotópica a uma aplicação constante  $c : M \rightarrow M$  que envia  $M$  num ponto,  $c(x) = p_0$ . Logo por (2.5.5), se  $\omega \in \Omega^k(N)$  é fechada,  $\text{Id}^*\omega - c^*\omega = \omega$  é exacta. ■

♣ **Proposição 2.11** ... *Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades orientadas de dimensão  $N$  e  $\omega \in \Omega_c^n(N)$  uma  $n$ -forma em  $N$  com suporte compacto. Se  $f, g : M \rightarrow N$  são duas aplicações próprias  $C^\infty$ -homotópicas, então:*

$$\int_M f^*\omega = \int_M g^*\omega \quad (2.5.6)$$

- **Dem.:** Como  $g^*\omega - f^*\omega \in \Omega^n(M)$  é exacta,  $g^*\omega - f^*\omega = d\eta$  para alguma  $\eta \in \omega^{n-1}(M)$ , que tem também suporte compacto já que  $f$  e  $g$  são próprias. Portanto, pelo Teorema de Stokes:

$$\int_M f^*\omega - \int_M g^*\omega = \int_M d\eta = 0$$

♣ **Proposição 2.12** ... *Todo o campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2n})$ , de classe  $C^\infty$  numa esfera de dimensão par, tem pelo menos um zero.*

- **Dem.:** Supondo que  $X$  nunca se anula podemos definir uma aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \\ \mathbf{x} &\longmapsto \phi(\mathbf{x}) = \frac{X(\mathbf{x})}{\|X(\mathbf{x})\|} \end{aligned}$$

A aplicação:

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times \mathbb{S}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{S}^{2n} \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto F(t, \mathbf{x}) = (\cos \pi t) \mathbf{x} + (\sin \pi t) \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

é uma homotopia entre a identidade Id e a aplicação antípoda  $A : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ ,  $\mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ . Com efeito  $F(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$  e  $F(1, \mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{2n}$ . Portanto, pela proposição anterior:

$$\int_{\mathbb{S}^{2n}} \omega = \int_{\mathbb{S}^{2n}} A^*\omega \quad \forall \omega \in \Omega^{2n}(\mathbb{S}^{2n})$$

No entanto o Jacobiano de  $A$  é  $-1$ , já que a esfera tem dimensão par por hipótese, e portanto  $\int_{\mathbb{S}^{2n}} A^*\omega = -\int_{\mathbb{S}^{2n}} \omega$ , isto é,  $\int_{\mathbb{S}^{2n}} \omega = 0$ ,  $\forall \omega \in \Omega^{2n}(\mathbb{S}^{2n})$ , o que é absurdo. ■

♣ **Proposição 2.13** ... **Teorema do ponto fixo de Brouwer...** *Todo a aplicação  $C^\infty$  da bola fechada  $B^n \subset \mathbb{R}^n$  em si própria tem pelo menos um ponto fixo.*

- **Dem.:** Se  $f : B^n \rightarrow B^n$  não tem pontos fixos,  $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in B^n$ , e podemos definir  $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial B^n$ , como sendo igual à intersecção da recta que une os pontos  $\mathbf{x}$  e  $f(\mathbf{x})$ , com  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B^n$ . Temos então que  $g : B^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  é  $C^\infty$  e  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Se  $n = 1$ , teríamos uma aplicação  $g : [-1, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ , com  $g(-1) = -1$  e  $g(1) = 1$ , o que é absurdo. Se  $n \geq 2$ , definamos uma homotopia:

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto F(t, \mathbf{x}) = g(t\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Portanto  $F$  é uma homotopia entre a aplicação constante  $c : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $c(\mathbf{x}) = g(\mathbf{0})$ , e aplicação identidade Id em  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Mas é claro que  $c^*\omega = 0$ ,  $\forall \omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ , e portanto:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} c^*\omega = 0, \quad \forall \omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

o que é absurdo. ■

# Capítulo 3

## Teoria do Grau

### 3.1 Transversalidade

♣ **Definição 3.1** ... Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} f : M \rightarrow N \text{ uma aplicação suave} \\ S \text{ uma subvariedade de } N. \end{array} \right.$

Diz-se que  $f$  é **transversal a  $S$  num ponto  $p \in f^{-1}(S) \subseteq M$** , e nota-se por  $f \pitchfork_p S$ , quando é válida a seguinte igualdade:

$$df_p(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N \quad (3.1.1)$$

Diz-se que  $f$  é **transversal a  $S$** , e nota-se por  $f \pitchfork S$ , quando  $f$  é transversal a  $S$  em todo o ponto  $p \in f^{-1}(S) \subseteq M$ .

Figure 3.1:

Por exemplo, quando  $S$  se reduz a um ponto  $q \in N$ ,  $S = \{q\}$ ,  $f$  é transversal a  $q$  sse  $q$  é valor regular de  $f$ . Quando  $f(M) \cap S = \emptyset$  então  $f$  é automaticamente transversal a  $S$ .

Se  $f(M) \cap S \neq \emptyset$  e  $f$  é transversal a  $S$ , então  $m + s \geq n$ , isto é,  $m = \text{dimensão } M \geq \text{codimensão } S$ . Portanto, quando  $\text{dimensão } M < \text{codimensão } S$ ,  $f$  só pode ser transversal a  $S$  quando  $f(M) \cap S = \emptyset$ . Intuitivamente,  $f$  é transversal a  $S$  quando  $f(M)$  intersecta  $S$  o "mínimo possível".

Uma situação muito importante é aquela em  $M$  e  $S$  são ambas subvariedades de  $N$  e  $f = \iota : M \hookrightarrow N$  é a inclusão natural. Neste caso, diz-se que  $M$  e  $S$  **intersectam-se transversalmente**

ou que estão em **posição geral**, quando  $\iota \pitchfork S$ . Notamos esse facto por  $M \pitchfork S$ , em  $N$ . Mais explicitamente:

$$M \pitchfork S, \text{ em } N \iff T_p M + T_p S = T_p N, \quad \forall p \in M \cap S$$

♣ **Teorema 3.1** ... Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} f : M \rightarrow N \text{ uma aplicação suave} \\ S \text{ uma subvariedade de } N \\ f \pitchfork S \end{array} \right.$

Então  $f^{-1}(S)$  é uma subvariedade de  $M$  e  $\text{codim } f^{-1}(S) = \text{codim } S$ .

Figure 3.2:

**Dem.:** Usando coordenadas locais, podemos supôr que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e que  $S$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^n$  de dimensão  $s$ . Seja  $p \in f^{-1}(S)$ . Sabemos que existem coordenadas locais  $y^1, \dots, y^s, y^{s+1}, \dots, y^n$ , em torno de  $f(p) \in S$ , tais que  $S$  é dada localmente pelos pontos de coordenadas  $(y^1, \dots, y^s, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^s \times \mathbf{0}$ .

Seja  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$  a projecção:

$$\pi(y^1, \dots, y^n) = (y^{s+1}, \dots, y^n)$$

Note que  $\pi$  transforma  $S$  em  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-s}$  e a sua diferencial:

$$d\pi_{f(p)} : T_{f(p)}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\mathbf{0}}\mathbb{R}^{n-s}$$

anula-se precisamente em  $T_{f(p)}S = \ker d\pi_{f(p)}$ .

Consideremos agora a aplicação,  $g = \pi \circ f : f^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ , e mostremos que  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-s}$  é valor regular de  $g$ . Pela regra da cadeia  $dg_p = (d\pi)_{f(p)} \circ df_p$ . Mas:

$$\begin{aligned} dg_p(T_p\mathbb{R}^m) &= (d\pi)_{f(p)}(df_p(T_p\mathbb{R}^m)) \\ &= (d\pi)_{f(p)}(df_p(T_p\mathbb{R}^m) + T_{f(p)}S), \quad \text{porque os vectores que juntamos,} \\ &\quad \text{em } T_{f(p)}S = \ker d\pi_{f(p)}, \text{ não alteram a imagem de } (d\pi)_{f(p)} \\ &= (d\pi)_{f(p)}(T_{f(p)}\mathbb{R}^n), \quad \text{pela condição de transversalidade (3.1.1)} \\ &= T_{\mathbf{0}}\mathbb{R}^{n-s} \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

o que mostra que  $g$  é submersão em todo o ponto  $p \in f^{-1}(S)$ . Portanto  $f^{-1}(S)$  é subvariedade de  $M$ , com codimensão  $n - s = \text{codimensão } S$ . ■

Suponhamos que  $M$  e  $S$  são ambas subvariedades de  $N$  que se intersectam transversalmente (ou estão em posição geral) em  $N$ , isto é  $M \pitchfork S$ , em  $N$ . Como vimos, isto ocorre sse:

$$T_p M + T_p S = T_p N, \quad \forall p \in M \cap S \quad (3.1.3)$$

Note que  $M \pitchfork S$ , em  $N$ , sempre que  $M \cap S = \emptyset$ .

♣ **Corolário 3.1** ... *A intersecção  $M \cap S \neq \emptyset$  de duas subvariedades de  $N$ , em posição geral, é uma subvariedade de  $N$ , com:*

$$\text{codim}(M \cap S) = \text{codim}(M) + \text{codim}(S) \quad (3.1.4)$$

■

♣ **Exemplo 3.1** ... *Seja  $N = \mathbb{R}^2$ ,  $M = \text{gr } f$ , onde  $f(x) = x^3 - a$ , e  $S = \{\text{eixo dos } xx \text{ em } \mathbb{R}^2\}$ . Então  $M \pitchfork S$  sse  $a \neq 0$ .*

■

Figure 3.3:

## 3.2 Estabilidade

A medição real de quantidades físicas pode ser feita apenas com alguma margem de erro. Portanto, apenas as propriedades geométricas que persistem sob pequenas deformações, são consideradas relevantes. Essas propriedades dizem-se **estáveis**.

A maneira mais simples de perturbar uma aplicação é através de homotopia.

♣ **Definição 3.2** ... *Duas aplicações suaves  $f, g : M \rightarrow N$  dizem-se (suavemente) homotópicas se existir uma aplicação diferenciável  $F : M \times I \rightarrow N$  tal que:*

$$\begin{aligned} F(p, 0) &= f(p) \\ F(p, 1) &= g(p) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$\forall p \in M$ .

Figure 3.4:

Homotopia suave é uma relação de equivalência. A única propriedade não trivial é a transitividade (ver [GP]).

♣ **Definição 3.3** ... Uma propriedade de uma aplicação suave  $f : M \rightarrow N$  diz-se **estável** quando para toda a homotopia suave  $F$  de  $f$ , existir um  $\epsilon > 0$  tal que  $F_t = F(\cdot, t)$  também tem essa propriedade, para todo o  $t : 0 \leq t \leq \epsilon$ .

♣ **Teorema 3.2** ... A propriedade de uma aplicação suave  $f : M \rightarrow N$  ser uma imersão (resp., submersão, mergulho, difeomorfismo) de uma variedade compacta  $M$  numa variedade  $N$  é uma propriedade estável.

**Dem.:** Suponhamos que  $f$  é uma imersão, isto é, que  $(df)_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  é injectiva  $\forall p \in M$ . Isto significa que o Jacobiano de  $f$  em  $p$ , relativamente a algum sistema de coordenadas locais, tem característica = dimensão  $M$ . Existe portanto um certo menor  $m \times m$ ,  $A(p)$ , com  $\det A(p) \neq 0$ .

Se  $F$  é uma homotopia de  $f$ , as entradas de  $(dF_t)_p$  variam continuamente com  $p$  e com  $t$ . Para  $p'$  perto de  $p$ , seja  $A_t(p')$  a submatriz do Jacobiano  $(dF_t)_p$  cujas entradas ocupam as mesmas posições das entradas de  $A(p)$ .

Para cada  $p \in M$ , existe  $\epsilon_p > 0$  e uma vizinhança  $V_p$  de  $p$  em  $M$  tal que  $\det A_t(p') \neq 0, \forall p' \in V_p, \forall t : 0 \leq t \leq \epsilon_p$ .

Como  $M$  é compacta, segue-se que  $F_t$  é uma imersão  $\forall t : 0 \leq t \leq \epsilon$ , desde que  $\epsilon$  seja suficientemente pequeno.

A prova para submersões é análoga.

Como mergulhos de uma variedade compacta são imersões injectivas, resta mostrar que a propriedade de ser imersão injectiva é estável.

Suponha o contrário. Então  $f = F_0$  é uma imersão injectiva e existe uma sucessão  $t_n \rightarrow 0$  e duas outras  $p_n, q_n \in M$ , com  $p_n \neq q_n$  tais que:

$$F_{t_n}(p_n) = F_{t_n}(q_n), \quad \forall n \geq 0$$

Como  $M \times [0, 1]$  é compacto, tomando se necessário subsucessões convergentes de  $(p_n, t_n)$  e de  $(q_n, t_n)$  podemos supôr que  $p_n \rightarrow p$  e que  $q_n \rightarrow q$ . Definamos  $G : M \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$  através de:

$$G(x, t) = (F(x, t), t)$$

A matriz jacobiana de  $(df)_p$ , relativamente a algum sistema de coordenadas locais, tem característica  $m = \text{dimensão } M$ , e portanto a matriz:

$$(dG)_{(p,0)} = \begin{pmatrix} ((df)_p & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



contem uma submatriz  $m \times m$  com determinante não nulo. Isto implica que  $G$  é uma imersão em torno de  $(p, 0)$ . Por continuidade de  $G$ , tem-se que:

$$G(p_n, t_n) \rightarrow (f(p), 0), \quad G(q_n, t_n) \rightarrow (f(q), 0)$$

Como  $f(p) = f(q)$  e  $f$  é um mergulho, segue-se que  $p = q$  e portanto as duas sucessões  $p_n, q_n \in M$  convergem para um mesmo ponto  $p$ . Como  $G$  é uma imersão em torno de  $(p, 0)$  é injectiva em alguma vizinhança de  $(p, 0)$ . Podemos sempre tomar  $(p_n, t_n)$  e  $(q_n, t_n)$  arbitrariamente próximas de  $(p, 0)$  escolhendo  $n$  suficientemente grande. Portanto  $p_n = q_n$  para  $n$  suficientemente grande o que é absurdo. ■

♣ **Teorema 3.3** ... A propriedade de uma aplicação suave  $f : M \rightarrow N$ , de uma variedade compacta  $M$  numa variedade  $N$ , ser transversal a uma subvariedade  $S \subseteq N$  é uma propriedade estável.

**Dem.:** Pela demonstração do teorema 3.1, a condição de transversalidade traduz-se na condição de que uma certa aplicação seja submersiva... ■

Vamos agora mostrar que se  $S$  é uma subvariedade de  $N$  então "quase toda" a aplicação  $f : M \rightarrow N$  é transversal a  $S$ .

♣ **Teorema 3.4** ... Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} M, N \text{ e } \Lambda \text{ variedades suaves} \\ F : M \times \Lambda \rightarrow N \text{ uma aplicação suave} \\ F \pitchfork S \text{ onde } S \text{ é uma subvariedade de } N \end{array} \right.$

Então o conjunto de todos os  $\lambda \in \Lambda$  tais que  $F_\lambda = F(\cdot, \lambda) : M \rightarrow N$  é transversal a  $S$  é residual (e portanto denso) em  $\Lambda$ .

**Dem.:** Sabemos que  $F^{-1}(S)$  é uma subvariedade de  $M \times \Lambda$ . Seja  $\pi : F^{-1}(S) \subset M \times \Lambda \rightarrow \Lambda$  a projecção no segundo factor, restrita a  $F^{-1}(S)$ .

Vamos mostrar que:

$$\text{se } \lambda \text{ é valor regular de } \pi \text{ então } F_\lambda \pitchfork S$$

Seja  $p \in M$  tal que  $F_\lambda(p) = q \in S$ . Como  $F(p, \lambda) = q \in S$  e  $F \pitchfork_{(p, \lambda)} S$  temos que:

$$(dF)_{(p, \lambda)} (T_{(p, \lambda)}(M \times \Lambda)) + T_q S = T_q N \tag{3.2.2}$$

Como estamos a supôr que  $\lambda$  é valor regular de  $\pi$ ,  $(d\pi)_{(p, \lambda)} (T_{(p, \lambda)}(F^{-1}(S))) = T_\lambda \Lambda$ .

Precisamos agora de um lema de álgebra linear:

**Lema** ... Suponhamos que  $L : V \rightarrow W$  é uma aplicação linear e que  $U \leq V$  é um subespaço de  $V$  tal que  $L(U) = L(V)$ . Então  $V = \ker L + U$ .

**Prova do lema** ... para todo o  $v \in V$  podemos encontrar um  $u \in U$  tal que  $L(u) = L(v)$ . Portanto  $v - u \in \ker L$  e a equação  $v = (v - u) + u$  mostra que  $v \in \ker L + U$ . ■

Apliquemos este lema a  $(d\pi)_{(p, \lambda)} : T_{(p, \lambda)}(M \times \Lambda) \rightarrow T_\lambda \Lambda$ , com  $U = T_{(p, \lambda)}(F^{-1}(S))$ . Vem então que:

$$T_{(p, \lambda)}(M \times \Lambda) = T_p M \times T_\lambda \Lambda = T_{(p, \lambda)}(M \times \{\lambda\}) + T_{(p, \lambda)}(F^{-1}(S)) \tag{3.2.3}$$

Substituindo esta equação em (3.2.2), vem que:

$$\underbrace{(dF)_{(p,\lambda)}(T_{(p,\lambda)}(M \times \{\lambda\}))}_{\simeq (dF_\lambda)_p(T_p M)} + \underbrace{(dF)_{(p,\lambda)}(T_{(p,\lambda)}(F^{-1}(S)))}_{\subseteq T_q S} + T_q S = T_q N \quad (3.2.4)$$

o que implica que:

$$(dF_\lambda)_p(T_p M) + T_q S = T_q N \quad (3.2.5)$$

isto é,  $F_\lambda \pitchfork S$ , como se tinha afirmado.

Como  $F_\lambda \pitchfork S$  sempre que  $\lambda$  é valor regular para  $\pi$ , o conjunto destes  $\lambda$  é pelo menos tão grande como o conjunto dos valores regulares de  $\pi$ . Mas este último é residual em  $\Lambda$ , pelo teorema de Sard.

■

Podemos usar este teorema para mostrar que qualquer aplicação  $f : M \rightarrow N$  pode ser ligeiramente perturbada para produzir uma aplicação transversal a  $S$ . Consideramos apenas o caso em que  $N = \mathbb{R}^n$ .

Seja  $\epsilon > 0$  e  $\Lambda = B^n(0, \epsilon)$  a bola aberta de raio  $\epsilon$  em  $\mathbb{R}^n$ . Definamos  $F : M \times \Lambda \rightarrow N$ , através de  $F(p, \lambda) = f(p) + \lambda$ . Como:

$$(dF)_{(p,\lambda)} = \left( (df)_p \quad Id_n \right)$$

vemos que  $F$  é uma submersão e portanto  $F \pitchfork S$ . Pelo teorema anterior, existe  $\lambda \in B^n(0, \epsilon)$  tal que a perturbação  $f(p) + \lambda$ , que está afastada quando muito  $\epsilon$  de  $f(p)$ , é transversal a  $S$ .

### 3.3 Grau de uma aplicação

Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ e } N \text{ duas variedades orientadas, com a mesma dimensão} \\ f : M \rightarrow N \text{ uma aplicação própria suave} \\ q \in N \text{ um valor regular de } f \end{array} \right.$

A imagem inversa,  $f^{-1}(q) \subset M$ , é uma variedade de dimensão 0 em  $M$ . Como  $f$  é própria,  $f^{-1}(q)$  consiste de um número finito de pontos:

$$f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_r\} \subset M$$

Em cada ponto  $p_i \in f^{-1}(q)$  a diferencial:

$$df_{p_i} : T_{p_i} M \longrightarrow T_q N$$

é um isomorfismo linear entre dois espaços vectoriais orientados. Diz-se que o ponto  $p_i$  é **positivo** quando  $df_{p_i}$  preserva as orientações, e que é **negativo** quando as inverte. Pômos então:

$$\text{sgnp} = \begin{cases} +1 & \text{se } p \text{ é positivo} \\ 0 & \text{se } p \notin f^{-1}(q) \\ -1 & \text{se } p \text{ é negativo} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

♣ **Definição 3.4** ... Define-se o grau de  $f$  no valor regular  $q \in N$  através de:

$$\deg_q(f) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p_i \in f^{-1}(q)} \text{sgn } p_i \quad (3.3.2)$$

Por outras palavras,  $\deg_q(f)$  = número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em  $f^{-1}(q)$ .

♣ **Proposição 3.1 (stack of records)** ... Todo o valor regular  $q \in N$  possui uma vizinhança aberta  $V$ , em  $N$ , tal que:

$$f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_r$$

é reunião de abertos  $U_i \subset M$ , disjuntos dois a dois, cada um dos quais é transformado difeomorficamente sobre  $V$ .

Figure 3.5:

**Dem.:** De facto, pelo teorema da função inversa, para cada  $i = 1, \dots, r$ , existem vizinhanças  $W_i \ni p_i$ , abertas em  $M$ , que podemos supôr conexas e disjuntas duas a duas, tais que cada restrição  $f_i = f|_{W_i}$  é um difeomorfismo de  $W_i$  sobre a vizinhança  $V_i = f(W_i)$  do ponto  $q \in N$ .

O conjunto  $K = M - \bigcup_{i=1}^r W_i$  é fechado em  $M$ . A sua imagem é portanto fechada em  $N$ , porque  $f$  é própria e, como nenhum  $p_i$  está em  $K$ , concluímos que  $q \notin f(K)$ . Podemos pois encontrar um aberto  $V$ , em  $N$ , que contem  $q$ , e tal que  $V \cap f(K) = \emptyset$ . Substituindo, se necessário,  $V$  por  $V \cap (\bigcap_{i=1}^r V_i)$ , podemos supôr que  $V \subseteq V_1 \cap \dots \cap V_r$ . A condição  $V \cap f(K) = \emptyset$  significa que  $f^{-1}(V) \subset W_1 \cup \dots \cup W_r$ .

Para cada  $i$ , definamos agora  $U_i = f^{-1}(V) \cap W_i = f_i^{-1}(V)$ . Como cada  $f_i = f|_{W_i}$  é um difeomorfismo de  $W_i$  sobre a vizinhança  $V_i = f(W_i)$  e  $V \subset V_i$ , resulta que  $f$  transforma cada  $U_i$  difeomorficamente sobre  $V$ . Finalmente,  $f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap [W_1 \cup \dots \cup W_r] = [f^{-1}(V) \cap W_1] \cup \dots \cup [f^{-1}(V) \cap W_r] = U_1 \cup \dots \cup U_r$ . ■

É claro que podemos supôr que, para cada  $i$  fixo, todos os pontos de  $U_i$  têm o mesmo sinal do ponto  $p_i \in U_i$ . Por outro lado, como para cada valor regular  $q' \in V \subset N$ ,  $f^{-1}(q')$  tem exactamente  $r$  pontos, mostrámos que  $\deg_q(f) \equiv \deg_{q'}(f), \forall q' \in V$ .

Por outras palavras,  $\deg(f, \cdot)$  é localmente constante, como função do valor regular  $q$  de  $f$ .

♣ **Teorema 3.5** ... Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ e } N \text{ duas variedades orientadas, com a mesma dimensão} \\ N \text{ conexa} \\ f : M \rightarrow N \text{ uma aplicação pr\u00f3pria suave} \end{array} \right.$

Ent\u00e3o o grau  $\text{deg}_q(f)$  n\u00e3o depende do valor regular  $q \in N$ .

■

♣ **Exemplo 3.2** ...  $f_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , definida por  $f_n(z) = z^n$ , ou  $f_n(e^{it}) = e^{int}$ .

Suponhamos que  $n \neq 0$ . \u00c9 claro que todo o  $q \in \mathbb{S}^1$  \u00e9 valor regular de  $f_n$ , uma vez que na coordenada angular  $\theta$  a aplica\u00e7\u00e3o  $f_n$  escreve-se na forma  $\theta \mapsto n\theta$ , cuja derivada \u00e9  $n \neq 0$ .

Para cada  $q \in \mathbb{S}^1$ ,  $f_n^{-1}(q)$  contem exactamente  $|n|$  pontos, todos positivos se  $n > 0$  e todos negativos se  $n < 0$ . Portanto  $\text{deg}_q(f_n) = n, \forall q$ .

Se  $n = 0$ ,  $f_0$  \u00e9 constante. Os valores regulares s\u00e3o os pontos  $q \neq 1$  e  $\text{deg}_q(f_0) = 0, \forall q \neq 1$ .

♣ **Exemplo 3.3** ... Seja  $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^k$  a reflex\u00e3o relativamente ao plano  $x^{k+1} = 0$ , isto \u00e9:

$$f(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}) = (x^1, \dots, x^k, -x^{k+1})$$

Seja  $s = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{S}^k$  o p\u00f3lo sul da esfera. Ent\u00e3o  $f^{-1}(q) = n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^k$  \u00e9 o p\u00f3lo norte.

Os espa\u00e7os tangentes  $T_s\mathbb{S}^k$  e  $T_n\mathbb{S}^k$  coincidem como subespa\u00e7os vectoriais de  $\mathbb{R}^{k+1}$  - s\u00e3o constitu\u00eddos pelos vectores  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{k+1}$  da forma  $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^k, 0)$ .

Num ponto  $p \in \mathbb{S}^k$  o vector  $\vec{Op}$  que continuamos a notar por  $p$ , \u00e9 normal exterior. Uma base  $\{e_1, \dots, e_k\}$  para  $T_p\mathbb{S}^k$  \u00e9 positiva quando  $\{e_1, \dots, e_k, p\}$  f\u00f3r uma base positiva para  $\mathbb{R}^{k+1}$ . Assim, por exemplo, se  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_k = (0, 0, \dots, 1, 0)$  a base  $\{e_1, \dots, e_k\}$  \u00e9 positiva para o espa\u00e7o tangente  $T_n$  j\u00e1 que determina a base positiva  $\{e_1, \dots, e_k, n\}$  para  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

Por outro lado, a mesma base, agora considerada como base de  $T_s\mathbb{S}^k$ , \u00e9 negativa porque determina a base negativa  $\{e_1, \dots, e_k, s\}$  para  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

Mas para  $df_n : T_n\mathbb{S}^k \rightarrow T_s\mathbb{S}^k$  tem-se que  $df_n(e_1) = e_1, \dots, df_n(e_k) = e_k$ , e, portanto,  $df_n$  inverte as orienta\u00e7\u00f5es. Isto \u00e9, o ponto  $n$  \u00e9 negativo e portanto  $\text{deg}_s(f) = -1$ .

O nosso objectivo \u00e9 definir o grau de uma aplica\u00e7\u00e3o como um invariate global de homotopia dessa aplica\u00e7\u00e3o. Precisamos de alguns resultados pr\u00e9vios.

♣ **Lema 3.1 (Lema da extens\u00e3o)** ... Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ uma variedade de dimens\u00e3o } m + 1, \text{ compacta, conexa} \\ N \text{ uma variedade de dimens\u00e3o } m, \text{ conexa, orientada} \\ f : \partial M \rightarrow N \text{ uma aplica\u00e7\u00e3o suave} \\ q \text{ um valor regular para } f \end{array} \right.$

Se  $f$  puder ser prolongada a uma aplica\u00e7\u00e3o  $F : M \rightarrow N$ , ent\u00e3o  $\text{deg}_q(f) = 0$ .

**Dem.:**

• Suponha primeiro que  $q$  \u00e9 valor regular para ambas as aplica\u00e7\u00f5es  $F$  e  $f = F|_{\partial M}$ .

Neste caso a imagem inversa  $f^{-1}(q)$  consiste de um n\u00famero finito de pontos em  $\partial M$  e a imagem inversa  $F^{-1}(q)$  \u00e9 uma subvariedade compacta de dimens\u00e3o 1 em  $M$ . Consiste pois de um n\u00famero finito de componentes conexas, cada uma das quais difeomorfa a um intervalo fechado ou a um c\u00edrculo.

Estes círculos não podem ter pontos no bordo de  $M$ . Caso contrário,  $q$  não podia ser valor regular para  $f$ . Por outro lado, as extremidades dos segmentos (difeomorfos a um intervalo fechado) têm que estar no bordo  $\partial M$ , porque, caso contrário,  $q$  não podia ser valor regular para  $F$ .

Concluimos pois que o número finito de pontos na imagem inversa  $f^{-1}(q) \subset \partial M$  ocorrem aos pares, cada par constituído pelas duas extremidades  $\alpha(0), \alpha(1)$  de uma curva suave  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  que está em  $F^{-1}(q)$ .

Figure 3.6:

Vamos agora mostrar que, para cada um desses pares:

$$\operatorname{sgn}(\alpha(0)) + \operatorname{sgn}(\alpha(1)) = 0 \quad (3.3.3)$$

Para isso, consideremos ainda uma família de campos de vectores suaves  $V_1(t), \dots, V_m(t)$ , ao longo de  $\alpha$ , dependendo suavemente de  $t$ , tais que, todos os  $V_i(0)$  (resp.,  $V_i(1)$ ), sejam tangentes a  $\partial M$  em  $\alpha(0)$  (resp., em  $\alpha(1)$ ), e  $\{\dot{\alpha}(t), V_1(t), \dots, V_m(t)\}$  constituam uma base para  $T_{\alpha(t)}M$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .

Figure 3.7:

Como  $F \pitchfork \{q\}$ , os vectores  $\{dF(\dot{\alpha}(t)), dF(V_1(t)), \dots, dF(V_m(t))\}$  devem gerar  $T_qN$ ,  $\forall t$ . Mas  $dF(\dot{\alpha}(t)) = 0$  e  $T_qN$  é  $m$ -dimensional. Logo isto só é possível se  $\{dF(V_1(t)), \dots, dF(V_m(t))\}$  é uma base de  $T_qN$ ,  $\forall t$ . Portanto as bases  $\{dF(V_1(0)), \dots, dF(V_m(0))\}$  e  $\{dF(V_1(1)), \dots, dF(V_m(1))\}$  têm o mesmo sinal.

Por outro lado, as bases  $\{V_1(0), \dots, V_m(0)\}$  de  $T_{\alpha(0)}(\partial M)$  e  $\{V_1(1), \dots, V_m(1)\}$  de  $T_{\alpha(1)}(\partial M)$  têm que ter orientações opostas em  $\partial M$  uma vez que um dos vectores  $\dot{\alpha}(0)$  e  $\dot{\alpha}(1)$  aponta para dentro de  $M$  e outro para fora. Isto justifica (3.3.3), e somando sobre todos os segmentos em  $F^{-1}(q)$  concluimos que  $\deg_q(f) = 0$ .

- Suponha agora que  $q$  é valor regular apenas para  $f = F|_{\partial M}$ .

Existe uma vizinhança  $U$  de  $q$  em  $N$ , cujos pontos são todos valores regulares para  $f$ . Pelo Teorema de Sard, os valores regulares para  $F$  formam um aberto denso em  $N$ . Existe pois um ponto  $q' \in U$  que é simultaneamente valor regular de  $f$  e  $F$ . Pelo caso anterior,  $\deg_{q'}(f) = 0$ . Como o grau é uma função localmente constante dos valores regulares, obtemos que  $\deg_q(f) = 0$

■

♣ **Teorema 3.6** ... Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ e } N \text{ variedades orientadas conexas} \\ M \text{ compacta} \\ f, g : M \rightarrow N \text{ duas aplicações suaves} \\ q \text{ um valor regular para } f \text{ e para } g \end{array} \right.$

Se  $f$  e  $g$  são suavemente homotópicas então  $\deg_q(f) = \deg_q(g)$ .

Figure 3.8:

**Dem.:** Seja  $F : M \times I \rightarrow N$  uma homotopia suave entre  $f$  e  $g$ . A orientação em  $M \times [0, 1]$  induz uma orientação no bordo de tal forma que:

$$\partial(M \times [0, 1]) = M \times \{1\} - M \times \{0\}$$

Para todo o valor regular  $q$  de  $F|_{\partial(M \times [0,1])}$  temos que:

$$\begin{aligned} \deg_q(F|_{\partial(M \times [0,1])}) &= \deg_q(F(\cdot, 1)) - \deg_q(F(\cdot, 0)) \\ &= \deg_q(g) - \deg_q(f) \end{aligned}$$

Como  $F|_{\partial(M \times [0,1])}$  não é mais do que a restrição de  $F$ , o lema anterior dá que  $\deg_q(F|_{\partial(M \times [0,1])}) = 0$  e portanto  $\deg_q(g) = \deg_q(f)$ .

■

Define-se agora  $\deg_q(f)$ , quando  $q$  não é necessariamente valor regular para  $f$ , através de  $\deg_q(g)$  onde  $g$  é uma aplicação homotópica a  $f$  tal que  $q$  seja valor regular para  $g$ . A proposição anterior mostra que esta definição é independente da escolha da aplicação homotópica  $g$ .

♣ **Teorema 3.7** ... Se  $f : M \rightarrow N$  está nas mesmas condições do teorema anterior, então  $\deg_q(f)$  não depende de  $q \in N$ .

**Dem.:**

### 3.4 Índice orientado de intersecção

Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ e } S \text{ duas subvariedades compactas de } N \\ \text{dimensão } M + \text{dimensão } S = \text{dimensão } N \\ M, S \text{ e } N \text{ são orientadas} \\ M \pitchfork S \text{ em } N \end{array} \right.$

Neste caso  $M \cap S$  é uma subvariedade de dimensão 0 em  $M$  e portanto é constituída por um número finito de pontos:

$$M \cap S = \{p_1, \dots, p_r\}$$

Figure 3.9:

Como  $M$  e  $S$  estão em posição geral e como  $\text{dimensão } M + \text{dimensão } S = \text{dimensão } N$ , temos que:

$$T_{p_i}M \oplus T_{p_i}S = T_{p_i}N \quad (3.4.1)$$

para cada  $i = 1, \dots, r$ .

Dizemos que  $p_i$  é **positivo** quando uma base positiva  $\{e_1, \dots, e_m\}$  para  $T_{p_i}M$ , seguida de uma base positiva  $\{f_1, \dots, f_s\}$  para  $T_{p_i}S$ , dá origem a uma base positiva  $\{e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_s\}$  para  $T_{p_i}N$ . Caso contrário,  $p_i$  diz-se **negativo**. Atenção que a ordem -  $M$  e a seguir  $S$  - é importante!

♣ **Definição 3.5** ... O número ou índice de intersecção  $M \circledast S$  define-se como o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em  $M \cap S$ .

É fácil ver que:

$$M \circledast S = (-1)^{ms} S \circledast M \quad (3.4.2)$$

O facto principal acerca do número de intersecção  $M \circledast S$  é que ele permanece invariante quando uma das subvariedades  $M$  ou  $S$  (ou ambas) se deformam suavemente em  $N$ .

♣ **Teorema 3.8** ... Se duas subvariedades  $M_0$  e  $M_1$ , em  $N$ , são homotópicas, isto é, se são imagens de dois mergulhos homotópicos  $\iota_0, \iota_1 : M \hookrightarrow N$ , então, se  $M_0 \pitchfork S$  e  $M_1 \pitchfork S$ :

$$M_0 \circledast S = M_1 \circledast S \quad (3.4.3)$$

Figure 3.10:

**Dem.:**

Seja  $F : M \times I \rightarrow N$  uma homotopia suave tal que  $F(M \times 0) = M_0$  e  $F(M \times 1) = M_1$ . Como  $M_0$  e  $M_1$  intersectam transversalmente  $S$ , podemos supôr que  $F$  é transversal a  $S$ . Portanto a imagem inversa  $F^{-1}(S) \subset M \times I$  é uma subvariedade de dimensão  $m$  no cilindro  $M \times I$ , cujo bordo é o conjunto finito  $(M_0 \cap S) \cup (M_1 \cap S)$ , onde  $M_0 \cap S$  está contido na base  $M \times 0$  e  $M_1 \cap S$  está contido no topo  $M \times 1$ . Além disso, os segmentos de curva que constituem  $F^{-1}(S)$  intersectam transversalmente a base e o topo do cilindro  $M \times I$ . A conclusão segue agora por um argumento em tudo análogo ao usado na prova do teorema 3.1. ■

♣ **Corolário 3.2** ... *O índice de intersecção de duas subvariedades fechadas  $M$  e  $S$ , em posição geral num espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , é nulo.*

**Dem.:** Transladando  $M$  segundo um vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , de comprimento suficientemente grande, obtemos uma variedade homotópica  $M_1 = M + v$ , que não intersecta  $S$ . É claro que isto é possível devido à compacidade de  $M$  e de  $S$ . Portanto  $0 = M_1 \circledast S = M \circledast S$ . ■

### 3.5 Grau como um integral

Sejam:  $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ e } N \text{ duas variedades fechadas conexas orientadas} \\ M \text{ e } N \text{ têm a mesma dimensão } m \\ f : M \rightarrow N \text{ aplicação suave} \end{array} \right.$

Suponhamos ainda que  $\omega \in \Omega^m(N)$  é uma  $m$ -forma ( $m = \text{dimensão } M = \text{dimensão } N$ ), de grau máximo em  $N$ . Nestas condições é válido o teorema seguinte:

♣ **Teorema 3.9** ... *Se  $M = \partial X$  e se  $f : M \rightarrow N$  admite um prolongamento suave a todo o  $X$ , então:*

$$\int_M f^* \omega = 0, \quad \forall \omega \in \Omega^m(N)$$

**Dem.:** Seja  $F : X \rightarrow N$  um prolongamento suave de  $f$  a todo o  $X$ . Como  $F = f$  em  $M = \partial X$ , vem que:

$$\int_M f^* \omega = \int_{\partial X} F^* \omega = \int_X d(F^* \omega) = \int_X F^* d\omega = 0$$



porque  $d\omega = 0$ . ■

Com as mesmas hipóteses anteriores é ainda válido o seguinte:

♣ **Corolário 3.3** ... Se  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  são suavemente homotópicas então:

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega, \quad \forall \omega \in \Omega^m(N)$$

**Dem.:** Seja  $F : M \times I \rightarrow N$  uma homotopia. Como:

$$\partial(M \times I) = M_1 - M_0$$

vem, pelo teorema anterior, que:

$$0 = \int_{\partial(M \times I)} (\partial f)^* \omega = \int_{M_1} (\partial f)^* \omega - \int_{M_0} (\partial f)^* \omega$$

Mas quando identificamos  $M_0$  e  $M_1$  com  $M$ ,  $\partial f$  não é mais do que  $f_0$  e  $f_1$  respectivamente. ■

♣ **Teorema 3.10** ...

$$\int_M f^* \omega = (\deg f) \cdot \int_N \omega \quad (3.5.1)$$

**Dem.:** Se  $q \in N$  é um valor regular para  $f$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $q$  em  $N$ , que contém apenas valores regulares para  $f$ .

Pela proposição 3.1,  $q \in N$  possui uma vizinhança aberta  $V$ , em  $N$ , tal que:

$$f^{-1}(V) = U_1 \cup \dots \cup U_r$$

é reunião de abertos  $U_i$ , disjuntos dois a dois, cada um dos quais é transformado difeomorficamente sobre  $V$ .

Atendendo à fórmula da mudança de variáveis, temos que  $\int_{U_i} f^* \omega = \pm \int_V \omega$ , onde o sinal depende de quando  $f|_{U_i}$  preserva ou não a orientação. Atendendo à aditividade dos integrais sobre regiões disjuntas, temos então que:

$$\int_{f^{-1}(V)} f^* \omega = \sum_{i=1}^r \int_{U_i} f^* \omega = \sum_{i=1}^r \operatorname{sgn}(\det df)|_{U_i} \int_V \omega = \deg(f) \int_V \omega \quad (3.5.2)$$

Como, pelo teorema de Sard, o conjunto dos valores críticos para  $f$  tem medida nula em  $N$ , a sua contribuição para o integral  $\int_N \omega$  é nula. Por outro lado, nas pré-imagens desses valores, isto é, nos pontos críticos de  $f$ , a forma  $f^* \omega$  é nula já que  $\det df$  anula-se neles pontos. Portanto, a contribuição dos pontos críticos de  $f$  para o integral  $\int_M f^* \omega$  é nula. O teorema segue então de (3.5.2) e da aditividade dos integrais. (note que o conjunto dos valores regulares para  $f$  é um aberto, denso de  $N$ ). ■

♣ **Teorema 3.11 (Teorema fundamental da álgebra)** ... Todo o polinómio não constante com coeficientes complexos tem pelo menos um zero em  $\mathbb{C}$ .

**Dem.:** Usando projecção estereográfica podemos prolongar o polinómio a uma aplicação suave  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Um ponto  $p \in \mathbb{S}^2$  é crítico quando  $f'(p) = 0$ .

Como o polinómio é não constante existe um valor regular  $q \in \mathbb{S}^2$  com  $f^{-1}(q)$  não vazio. Se  $f = f_1 + if_2$  as equações de Cauchy-Riemann dizem que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

o que implica que o determinante Jacobiano de  $f'(p)$  é:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 > 0$$

Como isto é válido para todo o  $p \in f^{-1}(q)$  isto implica que  $\deg(f, q) \neq 0$ , isto é  $f$  é sobrejectiva e portanto a equação  $f(p) = 0$  tem pelo menos uma solução. ■

♣ **Teorema 3.12 (Hairy ball theorem)** ... *Numa esfera de dimensão par  $\mathbb{S}^n$  todo o campo de vectores contínuo anula-se em pelo menos um ponto.*

**Dem.:** Suponhamos que existe um campo de vectores contínuo  $X$  que nunca se anula. Substituindo  $X(p)$  por  $X(p)/\|X(p)\|$ , se necessário, podemos supôr que  $X$  é um campo de vectores unitários, isto é:

$$X(p) \cdot X(p) = 1, \quad \text{e} \quad p \cdot X(p) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Consideremos a homotopia  $F : \mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$  definida por:

$$F(p, t) = p \cos(\pi t) - X(p) \sin(\pi t) \tag{3.5.3}$$

É fácil ver que  $F(p, t) \in \mathbb{S}^n$ . Além disso,  $F(p, 0) = p$  e  $F(p, 1) = -p$ , o que significa que a aplicação antípoda é homotópica à identidade.

No entanto, o grau da identidade é  $+1$ , enquanto que o grau da antípoda é  $(-1)^{n-1}$ . Mas os graus de aplicações homotópicas têm que ser iguais. Portanto em  $\mathbb{S}^n$  pode ser definido um campo que nunca se anula apenas quando  $n$  é ímpar. ■

♣ **Teorema 3.13 (Teorema do ponto fixo de Brouwer)** ... *Todo a aplicação suave da bola fechada  $B^n \subset \mathbb{R}^n$  em si própria tem pelo menos um ponto fixo.*

**Dem.:** Se  $f : B^n \rightarrow B^n$  não tem pontos fixos,  $f(x) \neq x, \forall x \in B^n$ , e podemos definir  $g(x) \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial B^n$ , como sendo igual à intersecção da recta que une os pontos  $x$  e  $f(x)$ , com  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B^n$ . Temos então que  $g : B^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  é suave e  $g(x) = x, \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Se  $n = 1$ , teríamos uma aplicação  $g : [-1, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$ , com  $g(-1) = -1$  e  $g(1) = 1$ , o que é absurdo. Se  $n \geq 2$ , definamos uma homotopia:

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ (t, x) &\longmapsto F(t, x) = g(tx) \end{aligned}$$

Portanto  $F$  é uma homotopia entre a aplicação constante  $c : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, c(x) = g(0)$ , e aplicação identidade  $\text{Id}$  em  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Mas é claro que  $c^*\omega = 0, \forall \omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ , e portanto:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} c^*\omega = 0, \quad \forall \omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

o que é absurdo. ■

### 3.6 O grau de um campo de vectores numa hipersuperfície fechada de $\mathbb{R}^{n+1}$

Seja  $M$  uma hipersuperfície fechada (compacta, conexa, sem bordo) suave em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vectores suave que nunca se anula. Define-se a **aplicação (esférica) de Gauss** de  $X$ ,  $G = G_X : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ , através de:

$$G(x) = \frac{X(x)}{\|X(x)\|}, \quad x \in M \quad (3.6.1)$$

Ao grau desta aplicação chama-se o **grau do campo de vectores**  $X$ , na hipersuperfície  $M$ . Nota-se por  $\deg_M(X)$ .

Consideremos a seguinte  $n$ -forma  $\Omega$  em  $\mathbb{S}^n$  (ou, se preferir, em  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ):

$$\Omega = \frac{1}{\gamma_n} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^{n+1}}{[(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2]^{n/2}} \quad (3.6.2)$$

A constante  $\gamma_n$  é uma constante de normalização escolhida para que  $\int_{\mathbb{S}^n} \Omega = 1$ . Aliás  $\gamma_n \Omega$  não é mais do que a forma volume em  $\mathbb{S}^n$  (veja o exemplo 2.11).

#### ♣ Exemplos 3.1 ...

- Em  $\mathbb{S}^1$ , ou em em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , com coordenadas cartesianas  $x, y$ , tem-se:

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad (3.6.3)$$

e, em coordenadas polares  $r, \theta$ :

$$\Omega = \frac{d\theta}{2\pi} \quad (3.6.4)$$

- Em  $\mathbb{S}^2$ , ou em em  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , com coordenadas cartesianas  $x, y, z$ , tem-se:

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} \frac{xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdy \wedge dx}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (3.6.5)$$

e, em coordenadas esféricas  $r, \theta, \varphi$ :

$$\Omega = \frac{|\sin \theta| d\theta \wedge d\varphi}{4\pi} \quad (3.6.6)$$

♣ **Proposição 3.2 ...** O grau do campo de vectores  $X$ , que nunca se anula numa hipersuperfície fechada de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , é dado por:

$$\deg_M(X) = \int_M G_X^* \Omega \quad (3.6.7)$$

Portanto se  $M$  é dado localmente por uma parametrização:

$$x^a = x^a(u^1, \dots, u^n), \quad a = 1, 2, \dots, n+1$$

então:

$$\deg_M(X) = \frac{1}{\gamma_n} \int_M \frac{1}{\|X(u)\|^{n+1}} \det \begin{pmatrix} X^1 & \dots & X^{n+1} \\ \frac{\partial X^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial X^{n+1}}{\partial u^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X^1}{\partial u^n} & \dots & \frac{\partial X^{n+1}}{\partial u^n} \end{pmatrix} du^1 \wedge \dots \wedge du^n \quad (3.6.8)$$

**Dem.:** Basta usar o teorema 3.10 e o pull-back de  $\Omega$  pela aplicação:

$$G_X(x) = \frac{1}{\|X(u)\|} (X^1(x), \dots, X^{n+1}(x))$$

■

♣ **Exemplo 3.4 ...**

- Quando  $n = 2$  a fórmula (3.6.8) escreve-se:

$$\deg_M(X) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{\|X\|^2} \left( X^1 \frac{dX^2}{dt} - X^2 \frac{dX^1}{dt} \right) dt \quad (3.6.9)$$

onde  $t$  é um parâmetro na curva sobre a qual se calcula o integral e  $X(t) = (X^1(t), X^2(t))$  é uma campo que nunca se anula sobre essa curva.

- Quando  $n = 3$  a fórmula (3.6.8) escreve-se:

$$\begin{aligned} \deg_M(X) &= \frac{1}{4\pi} \int \int_M \frac{dudv}{\|X\|^3} \det \begin{pmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ \frac{\partial X^1}{\partial u_1} & \frac{\partial X^2}{\partial u_1} & \frac{\partial X^3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial X^1}{\partial v} & \frac{\partial X^2}{\partial v} & \frac{\partial X^3}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \int_M \frac{dudv}{\|X\|^3} \left\langle X, \left[ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

onde  $[, ]$  é o produto vectorial em  $\mathbb{R}^3$ .

### 3.7 Curvatura de Gauss de uma hipersuperfície fechada em $\mathbb{R}^{n+1}$

Um caso particularmente importante é quando  $X$  é um campo de vectores unitários que, em cada ponto de  $M$ , tem a direcção da normal exterior a  $M$ .

Seja então  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície fechada em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Fixemos uma orientação em  $M$ . Isto equivale, como se sabe, a definir uma campo de vectores unitários normais a  $M$ ,  $X : x \in M \mapsto X(x) \in T_x M^\perp$ , que pode ser vista como uma aplicação:

$$G = G_X : M \longrightarrow \mathbb{S}^n \quad (3.7.1)$$

a que se chama a **aplicação normal de Gauss** de  $M$ .

O facto mais importante relacionado com  $G$  é que os espaços tangentes  $T_x M$  e  $T_{G(x)} \mathbb{S}^n$  coincidem como subespaços vectoriais de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Portanto a diferencial  $(dG)_x$  pode ser vista como um endomorfismo de  $T_x M$ :

$$(dG)_x : T_x M \longrightarrow T_x M \quad (3.7.2)$$

♣ **Definição 3.6 ...** A curvatura de Gauss da variedade  $M$  é a função  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$K(x) = \det(dG)_x \quad (3.7.3)$$

♣ **Teorema 3.14 ...** A aplicação linear  $(dG)_p : T_x M \longrightarrow T_x M$  é auto-adjunta  $\forall x \in M$ , isto é:

$$(dG)_x(V) \cdot W = V \cdot (dG)_x(W), \quad \forall V, W \in T_x M \quad (3.7.4)$$

**Dem.:** Basta mostrar (3.7.4) para todos os vectores de uma base fixa de  $T_x M$ . Consideremos então uma parametrização local de  $p$ :

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Como sabemos os vectores  $\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial \phi}{\partial u^i}(u)$  formam uma base de  $T_x M$ , onde  $x = \phi(u)$ . Temos então que:

$$G(\phi(u)) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u^i}(u) = 0, \quad \forall u \in U$$

Derivando esta equação em ordem a  $u^j$  obtemos:

$$(dG)_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial u^j} \right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u^i} + G(\phi(u)) \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^j \partial u^i} = 0$$

Como  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^i \partial u^j}$  vemos que:

$$(dG)_p \left( \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u^j} = (dG)_p \left( \frac{\partial \phi}{\partial u^j} \right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u^i} = \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \cdot (dG)_p \left( \frac{\partial \phi}{\partial u^j} \right)$$

■

Pelo teorema espectral para operadores auto-adjuntos sabemos que  $(dG)_x$  é diagonalizável e tem  $n$  valores próprios reais (não necessariamente todos distintos):

$$k_1(x) \geq k_2(x) \geq \dots \geq k_n(x)$$

a que chamamos as **curvaturas principais** em  $x$ . Em particular:

$$K(x) = k_1(x) \cdot k_2(x) \cdot \dots \cdot k_n(x) \tag{3.7.5}$$

Seja  $\omega$  a forma volume de  $M$  e  $\Omega$  a forma volume de  $\mathbb{S}^n$ . Representemos por:

$$\gamma_n = \text{volume da esfera } \mathbb{S}^n = \int_{\mathbb{S}^n} \Omega$$

Além disso sabemos que:

$$\text{deg}(G) = \frac{1}{\gamma_n} \int_M G^* \Omega \tag{3.7.6}$$

De seguida vamos exprimir este grau como função da curvatura de Gauss de  $M$ .

Definamos a **curvatura integral** de  $M$  através do integral:

$$\int_M K(x) \omega \tag{3.7.7}$$

Em coordenadas locais para  $M$ , temos que:

$$\gamma_n(G^* \Omega) = K dV = K \sqrt{g} du^1 \wedge \dots \wedge du^n \tag{3.7.8}$$

onde  $K$  é a curvatura de Gauss de  $M$  e  $dV = K \sqrt{g} du^1 \wedge \dots \wedge du^n$  é a forma volume usual de  $M$ , determinada pela métrica Euclideana de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (veja o exemplo 2.2).

Por exemplo, quando:

- $n = 2$ ,  $dV = ds$  é o elemento de arco  $M$  e  $K = k$  é a curvatura da curva  $M \subset \mathbb{R}^2$ .
- $n = 3$ ,  $dV = dA = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$  é o elemento de área e  $K = k$  é a curvatura de Gauss usual da superfície  $M \subset \mathbb{R}^3$ .

Combinando a fórmula (3.7.8) com a proposição 3.2, obtemos o seguinte teorema:

♣ **Teorema 3.15** ... *O integral da curvatura de Gauss sobre uma hipersuperfície fechada em  $\mathbb{R}^{n+1}$  é igual ao grau da aplicação da sua aplicação de Gauss, multiplicado por  $\gamma_n =$  volume usual da esfera unitária  $\mathbb{S}^n$ .*

$$\deg(G) = \frac{1}{\gamma_n} \int_M K(x) \omega \tag{3.7.9}$$

**Dem.:** basta mostrar que:

$$K(x) \omega_p = (G^* \Omega)_x, \quad \forall x \in M$$

Temos sucessivamente que:

$$\begin{aligned} (G^* \Omega)_x(V_1, \dots, V_n) &= \Omega_{g(x)}((dG)_x V_1, \dots, (dG)_x V_n) \\ &= \text{vol}((dG)_x V_1, \dots, (dG)_x V_n) \\ &= \det(dG)_x \cdot \text{vol}(V_1, \dots, V_n) \\ &= K(x) \cdot \omega_x(V_1, \dots, V_n) \end{aligned} \tag{3.7.10}$$

■

### 3.8 Índice de um ponto singular de um campo de vectores

Vamos estudar nesta secção a aplicação de Gauss de um campo de vectores na vizinhança de um ponto singular isolado.

Seja  $X = X(x)$  um campo de vectores definido numa vizinhança de um certo ponto  $x_o$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . O ponto  $x_o$  diz-se um **ponto singular** de  $X$  quando  $X(x_o) = 0$ .

O ponto singular diz-se **não degenerado** se:

$$\det \text{Jac } X(x_o) = \det \left( \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \Big|_{x=x_o} \right) \neq 0 \tag{3.8.1}$$

É claro que um ponto singular não degenerado é isolado.

As **raízes** de um ponto singular não degenerado  $x_o$  de  $X$  são, por definição, os valores próprios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$  da diferencial  $dX(x_o)$ , isto é, da matriz  $\left( \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \Big|_{x=x_o} \right)$ . O **índice** de um ponto singular não degenerado  $x_o$  é, por definição, o sinal:

$$\text{sgn} \det \left( \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \Big|_{x=x_o} \right) = \text{sgn}(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{n+1}) \tag{3.8.2}$$

Quando o campo  $X$  é o gradiente uma função  $f$ , isto é, quando  $X^a = \partial f / \partial x^a$ , o índice de um ponto singular não degenerado  $x_o$  coincide com o sinal do determinante do Hessiano:

$$\text{sgn} \det \left( \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \Big|_{x=x_o} \right) = \text{sgn} \det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^a \partial x^b} \Big|_{x=x_o} \right) = (-1)^{i(x_o)}$$

onde  $i(x_o) =$  número de sinais negativos que surgem na forma quadrática  $d^2f|_{x=x_o}$  quando é posta em forma canónica diagonal.

Seja  $S_\epsilon \cong \mathbb{S}^n$  uma esfera centrada no ponto singular isolado  $x_o$ , com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno para que  $x_o$  seja a única singularidade de  $X$  no interior de  $S_\epsilon$ .

Consideremos agora a aplicação de Gauss:

$$G_{x_o} : S_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^n \quad (3.8.3)$$

♣ **Definição 3.7** ... O índice de um ponto singular isolado  $x_o$  de um campo de vectores  $X$  é, por definição, o grau da aplicação de Gauss  $G_{x_o}$ .

♣ **Teorema 3.16** ... Quando  $x_o$  é um ponto singular não degenerado tem-se que:

$$\deg G_{x_o} = \text{sgn det} \left( \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \Big|_{x=x_o} \right) \quad (3.8.4)$$

**Dem.:** Em alguma vizinhança de  $x_o$ , temos, pela fórmula de Taylor, que:

$$X(x) = L(x) + R(x)$$

onde:

$$L(x) = \text{Jac}X(x_o)(x - x_o) = \left( \frac{\partial X^a}{\partial x^b} \Big|_{x=x_o} (x^b - x_o^b) \right) \quad (3.8.5)$$

é a parte linear de  $X$  em  $x_o$ , e  $R(x)$  o resto de ordem 1.

A homotopia  $H(x, t)$ , definida por:

$$H(x, t) = L(x) + (1 - t)R(x)$$

satisfaz:  $H(x, 0) = X(x)$  e  $H(x, 1) = L(x)$ , e, em alguma vizinhança suficientemente pequena de  $x_o$ , e  $\forall t, 0 \leq t \leq 1$ ,  $H(x, t)$  anula-se apenas em  $x_o$ .

Portanto, em alguma vizinhança suficientemente pequena de  $x_o$ , o campo  $X$  é suavemente homotópico à sua parte linear  $L(x)$  através de campos que têm sempre  $x_o$  como única singularidade isolada.

Seja  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno para que  $S_\epsilon$  esteja contida nesta vizinhança. No decurso da deformação de  $X$  em  $L$ , a parte linear permanece fixa e a aplicação de Gauss  $G_{x_o} : S_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^n$  sofre uma homotopia suave. Portanto ambos os membros da equação (3.8.4) permanecem constantes durante a homotopia e por isso basta verificá-la para a parte linear  $L(x)$  e para a respectiva aplicação de Gauss  $G_{x_o}^L : S_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^n$ :

$$G_{x_o}^L(x) = \frac{L(x)}{\|L(x)\|}$$

Como  $L(x)$  é uma aplicação linear não singular (de uma vizinhança de  $x_o$  numa vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) ela é injectiva e portanto  $G_{x_o}^L$  é também injectiva e não tem pontos críticos. Portanto cada ponto  $y_o$  da esfera  $\mathbb{S}^n$  é valor regular com exactamnte uma pré-imagem e é calro que o sinal do determinante de  $L(x)$  determina quando a orientação é ou não preservada por  $G_{x_o}^L$ . ■

♣ **Exemplo 3.5** ... Para campo no plano os possíveis pontos singulares não degenerados são:

- **centro:** ambos os valores próprios são imaginários puros. O seu índice é +1.
- **nodo:** valores próprios reais do mesmo sinal. Índice +1.

- **ponto focal:** valores próprios complexos conjugados não imaginários puros. Índice  $+1$ .
- **ponto de sela:** valores próprios reais de sinal contrário. Índice  $-1$ .

Se o campo é um campo de gradiente de alguma função  $f$  as possibilidades são as seguintes:

- **fonte:** mínimo local de  $f$ . O seu índice é  $+1$ .
- **poço:** máximo local de  $f$ . O seu índice é  $+1$ .
- **ponto de sela:** ponto de sela de  $f$ . Índice  $-1$ .

Figure 3.11:

♣ **Teorema 3.17** ... Seja  $X$  um campo de vectores em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que tem apenas singularidades isoladas  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , e seja  $M$  uma hipersuperfície fechada orientada em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que evita os pontos singulares  $x_i$ , e que é bordo de uma região  $D$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então o grau do campo de vectores  $X$  na variedade  $M$ , isto é, o grau da aplicação de Gauss  $G_X : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ , determinada por  $X$  é igual à soma dos índices dos pontos singulares  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  que estão contidos em  $D$ .

**Dem.:** Para cada  $j = 1, \dots, m$  seja  $S_{j\epsilon}$  a esfera de raio  $\epsilon$  centrada em  $x_j$ . O valor de  $\epsilon$  deve ser escolhido suficientemente pequeno para que as bolas fechadas limitadas pelas esferas  $S_{j\epsilon}$  não intersectem a hipersuperfície  $M$  e para que não se intersectem também entre si.

Remova-se agora essas bolas da região  $D$ . Obtem-se assim uma região  $\tilde{D}$  cujo bordo é evidentemente:

$$\partial\tilde{D} = M \cup S_{i_1\epsilon} \cup \dots \cup S_{i_k\epsilon}$$

Consideremos agora a forma  $G^*\Omega$  em  $\tilde{D}$ , onde  $G : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{S}^n$  é a aplicação de Gauss relativa ao campo  $X$ , e  $\Omega$  é a forma definida em (3.6.2). Sabemos que  $d\Omega = 0$  na esfera  $\mathbb{S}^n$  e, portanto,  $d(G^*\Omega) = G^*d\Omega = 0$  em  $\mathbb{S}^n$ . Pelo teorema de Stokes, vem agora que:

$$0 = \int_{\tilde{D}} dG^*\Omega = \int_{\partial\tilde{D}} G^*\Omega = - \int_M G^*\Omega + \sum_{q=1}^k \int_{S_{i_q\epsilon}} G^*\Omega$$

O teorema segue agora da definição 3.7 e da proposição 3.2. ■



### 3.9 O Índice total de um campo de vectores

Seja  $X$  um campo suave numa variedade suave fechada  $M$  de dimensão  $n$  e seja  $TM$  o fibrado tangente de  $M$  (com dimensão  $2n$ ).

O campo  $X$  pode ser visto como uma aplicação  $F_X : M \rightarrow TM$ , definida por:

$$F_X(x) = (x, X(x))$$

que é um mergulho suave. A imagem  $F_X(M)$ , que representamos por  $M(X)$  é pois um subvariedade de dimensão  $n$  em  $TM$ . Quando  $X = 0$  é o campo nulo, a imagem  $F_0(M) = M(0)$  é a secção nula de  $TM$  que será identificada com  $M$ .

♣ **Definição 3.8** ... O campo  $X$  diz-se que está em **posição geral** quando as subvariedades  $M$  e  $M(X)$  se intersectam transversalmente em  $TM$ .

♣ **Proposição 3.3** ... Os pontos singulares de um campo  $X$  em posição geral, definido numa variedade  $M$  suave fechada e orientada, são não degenerados.

A contribuição de sinal  $\pm 1$  de cada ponto singular  $x_j$  (visto como um ponto de intersecção transversal das subvariedades  $M$  e  $M(X)$  em  $TM$ ), para o índice de intersecção  $M(0) \otimes M(X)$ , coincide com o índice do ponto singular, isto é, com o sinal  $\text{sgn det}(\partial X^a / \partial x^b)_{x_j}$ .

**Dem.:** exercício. ■

♣ **Teorema 3.18** ... Numa variedade  $M$  suave fechada e orientada, a soma dos índices dos pontos singulares de um campo  $X$ , em posição geral, coincide com o índice de intersecção  $M(0) \otimes M(X)$  em  $TM$ , e é o mesmo para todos os campos de vectores em posição geral.

**Dem.:** A primeira parte da afirmação decorre da proposição anterior.

Par ver que esse número não depende do campo  $X$  em posição geral, observamos primeiro que todo o campo de vectores é homotópico ao campo nulo, através da homotopia  $H(t, x) = tX(x)$ . Portanto dois campos de vectores quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  são homotópicos entre si. Os mergulhos  $M \hookrightarrow M(X) \subset TM$  e  $M \hookrightarrow M(Y) \subset TM$  determinados por  $X$  e  $Y$  são pois homotópicos. Se supômos que estes dois campos estão em posição geral, o resultado segue da invariância por homotopia do índice de intersecção. ■

♣ **Corolário 3.4** ... Se  $n = \text{dimensão} M$  é ímpar, a soma dos índices dos pontos singulares de um campo  $X$  em posição geral, numa variedade  $M$  suave fechada e orientada, é zero.

**Dem.:** Seja  $X$  um campo em posição geral, numa variedade  $M$  suave fechada e orientada. Então:

$$M(0) \otimes M(X) = (-1)^{n^2} M(X) \otimes M(0) = -M(X) \otimes M(0)$$

porque  $n$  é ímpar, por hipótese. Por outro lado, como  $X$  é homotópico ao campo nulo, sabemos que  $M(0) \otimes M(X) = M(X) \otimes M(0)$  e portanto  $M(X) \otimes M(0) = 0$ . ■

Quando  $X = \nabla f$  temos o seguinte:

♣ **Corolário 3.5** ... Seja  $f$  uma função suave numa variedade  $M$  suave fechada e orientada, cujos pontos críticos  $x_1, x_2, \dots, x_m$  são todos não degenerados. Então a soma:

$$\sum_{j=1}^m (-1)^{i(x_j)} \quad (3.9.1)$$

é independente de  $f$  e é nulo quando a dimensão  $M$  é ímpar.

♣ **Definição 3.9** ... O inteiro  $\sum_{j=1}^m (-1)^{i(x_j)}$ , definido no corolário anterior, chama-se a **característica de Euler** da variedade  $M$ . Nota-se por  $\mathcal{X}(M)$ .

### 3.10 O coeficiente de enlace

Considere um par de lacetes  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , regulares e orientados, em  $\mathbb{R}^3$ , que não se intersectam.

Supômos que são parametrizados na forma  $\gamma_i(t) = r_i(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $i = 1, 2$ , onde  $r$  representa o raio-vector de posição de pontos em  $\mathbb{R}^3$ .

♣ **Definição 3.10** ... O **coeficiente de enlace** dos dois lacetes  $\gamma_1, \gamma_2$ , parametrizados como antes, define-se através do chamado **integral de Gauss** seguinte:

$$\{\gamma_1, \gamma_2\} \stackrel{def}{=} \frac{1}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\langle [dr_1, dr_2], r_{12} \rangle}{|r_{12}|^3} \quad (3.10.1)$$

onde  $r_{12} = r_2 - r_1$ .

Intuitivamente, o coeficiente de enlace dá o número de voltas que um lacete dá em torno do outro.

♣ **Teorema 3.19** ... (i). O coeficiente de enlace  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  é um inteiro que permanece invariante sob deformações contínuas dos dois lacetes, desde que nunca se intersectem.

(ii). Sefa  $F : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma aplicação do disco  $D^2$  que coincide com  $\gamma_1 : t \mapsto r_1(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , no bordo  $\partial D^2 = S^1$ , e que é transversal ao lacete  $\gamma_2$ . Então o índice de intersecção:

$$F(D^2) \otimes \gamma_2$$

é igual ao coeficiente de enlace  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ .

**Dem.:** (i). Os dois lacetes  $\gamma_i(t) = r_i(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $i = 1, 2$ , definem uma superfície parametrizada, fechada e orientada, em  $\mathbb{R}^6$ , através de:

$$\gamma_1 \times \gamma_2 : (t_1, t_2) \mapsto (r_1(t_1), r_2(t_2))$$

Como não se intersectam, a aplicação  $\varphi : \gamma_1 \times \gamma_2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , definida por:

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{r_1(t_1) - r_2(t_2)}{|r_1(t_1) - r_2(t_2)|}$$

está bem definida. Da fórmula (3.6.10) deduzimos que o grau da aplicação  $\varphi$  é igual ao integral do segundo membro de (3.10.1) e portanto o coeficiente de enlace é um inteiro. Sob deformações

Figure 3.12:

contínuas dos dois lacetes, desde que nunca se intersectem, a aplicação  $\varphi$  sofre uma homotopia e portanto o seu grau (=coeficiente de enlace) mantem-se invariante.

(ii). Se os dois lacetes não estiverem entrelaçados, então pode ser verificado directamente que  $\{\gamma_1, \gamma_2\} = \deg \varphi = 0$ . Portanto, aplicando uma homotopia como se indica na figura seguinte, reduzimos o caso geral ao problema de calcular o o coeficiente de enlace à situação simples da terceira figura:

O cálculo neste caso pode ser facilitado fazendo o raio de uma das circunferências tender para  $\infty$ . Suponhamos pois que:

$$\begin{aligned} r_1(t_1) &= (0, 0, t_1), & -\infty < t_1 < \infty \\ r_2(t_2) &= (\cos t_2, \sin t_2, 0), & 0 \leq t_2 \leq 2\pi \end{aligned}$$

O coeficiente de enlace, dado pelo integral de Gauss (3.10.1), é neste caso:

$$\begin{aligned} \{\gamma_1, \gamma_2\} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{dt_1 \wedge dt_2}{(1+t_1^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt_1}{(1+t_1^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\cosh^2 u} \\ &= \frac{1}{2} \tanh u \Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \end{aligned} \tag{3.10.2}$$

■

## Capítulo 4

# Geometria Riemanniana das Superfícies. Método de Cartan

### 4.1 Paralelismo. Derivação covariante

Consideremos uma superfície Riemanniana  $(M, \mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  orientada (de dimensão 2), e um “referencial móvel ortonormado positivo”, de classe  $C^\infty$ , representado por uma matriz-linha:

$$\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$$

definido num aberto  $U \subseteq M$ . A este referencial móvel  $\mathbf{e}$ , ortonormado positivo (de classe  $C^\infty$ ) chamaremos um “**gauge local**” em  $U \subseteq M$ . Portanto para cada  $p \in U \subseteq M$ ,  $\mathbf{e}(p) = \{E_1(p), E_2(p)\}$  é uma base ortonormada positiva para  $T_pM$ .

Se  $\hat{\mathbf{e}} = [\hat{E}_1 \ \hat{E}_2]$  é um outro gauge local em  $U$ , então:

$$\begin{aligned}\hat{E}_1 &= a E_1 + b E_2 \\ \hat{E}_2 &= c E_1 + d E_2\end{aligned}$$

ou em forma matricial:

$$[\hat{E}_1 \ \hat{E}_2] = [E_1 \ E_2] \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

para certas funções  $a, b, c, d \in C^\infty(U)$ . Como ambas as bases  $\mathbf{e}(p)$  e  $\hat{\mathbf{e}}(p)$  de  $T_pM$  são ortonormadas positivas  $\forall p \in U$ , a matriz que figura no membro direito de (4.1.1) é uma matriz ortogonal de determinante 1, isto é, é uma matriz em  $SO(2)$  - o grupo ortogonal especial de  $\mathbb{R}^2$  (com a estrutura Euclideana usual). Uma matriz em  $SO(2)$  é sempre da forma:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

para algum  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Portanto um novo gauge  $\hat{\mathbf{e}}$  dá origem a uma função  $C^\infty$  em  $U$ :

$$g : U \rightarrow SO(2), \quad g(p) = \begin{bmatrix} \cos \varphi(p) & -\sin \varphi(p) \\ \sin \varphi(p) & \cos \varphi(p) \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

onde para cada  $p \in U$ ,  $\varphi(p)$  é o ângulo orientado entre  $E_1(p)$  e  $\hat{E}_1(p)$ .

Reciprocamente qualquer função  $C^\infty$   $g : U \rightarrow SO(2)$ , quando aplicada a um dado gauge local  $\mathbf{e}$ , em  $U$ , dá origem a um novo gauge local  $\widehat{\mathbf{e}}$ , definido por:

$$[\widehat{E}_1 \ \widehat{E}_2] = [E_1 \ E_2] \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

Por isso a função  $g : U \rightarrow SO(2)$  diz-se uma “**transformação local de gauge**”. A fórmula (4.1.3) será escrita sucintamente na forma:

$$\boxed{\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g} \quad (4.1.4)$$

Consideremos agora um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(U)$ . Como para cada  $p \in U$ ,  $\mathbf{e}(p) = \{E_1(p), E_2(p)\}$  é uma base (positiva) para  $T_pM$ , podemos escrever de maneira única:

$$X(p) = a^1(p) E_1(p) + a^2(p) E_2(p), \quad p \in U$$

para certas funções únicas  $a^1, a^2 \in C^\infty(U)$ . De facto, como  $\mathbf{e}(p)$  é um referencial ortonormado:

$$a^1(p) = \langle X(p), E_1(p) \rangle_p \quad \text{e} \quad a^2(p) = \langle X(p), E_2(p) \rangle_p, \quad p \in U$$

Portanto, uma vez fixo o gauge  $\mathbf{e}$  em  $U$ ,  $X$  pode ser visto como uma aplicação  $X^{(\mathbf{e})} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por:

$$X^{(\mathbf{e})} : p \in U \mapsto \begin{bmatrix} a^1(p) \\ a^2(p) \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

É claro que tudo isto depende do referencial  $\mathbf{e}$  (gauge local) inicialmente escolhido. Se optarmos por um outro gauge local  $\widehat{\mathbf{e}}$  em  $U$ , então sabemos que  $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$ , para uma única transformação local de gauge  $g : U \rightarrow SO(2)$  do tipo (4.1.2), e portanto **o mesmo campo de vectores**  $X \in \mathfrak{X}(U)$  é agora descrito, relativamente ao gauge local  $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$ , pela aplicação  $X^{(\widehat{\mathbf{e}})} = X^{(\mathbf{e} \cdot g)} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por:

$$\begin{aligned} X^{(\mathbf{e} \cdot g)}(p) &= g^{-1}(p) \cdot X^{(\mathbf{e})}(p) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi(p) & \sin \varphi(p) \\ -\sin \varphi(p) & \cos \varphi(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1(p) \\ a^2(p) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Concluindo:

$$\boxed{\text{Se } \mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \text{ então } X^{(\mathbf{e})} \mapsto X^{(\mathbf{e} \cdot g)} = g^{-1} \cdot X^{(\mathbf{e})}} \quad (4.1.7)$$

Vamos agora discutir a possibilidade de definir uma derivada “direccional” de um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(U)$ , derivada essa que deverá ser “**covariante**”, isto é, deverá respeitar a regra de transformação (4.1.7).

Se  $M = \mathbb{R}^n$ , a definição de derivada direccional é bem conhecida (ver (1.1.14)):

$$D_{\mathbf{v}}X(p) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(p + t\mathbf{v}) - X(p)}{t} \quad (4.1.8)$$

se  $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{R}^n$  e  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Note que nesta definição usamos explicitamente a identificação usual  $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ , o que nos permite transportar paralelamente (por equipolência) o vector  $X(p + t\mathbf{v}) \in T_{p+t\mathbf{v}}\mathbb{R}^n$  para  $T_p\mathbb{R}^n$ , e assim dar sentido ao quociente  $\frac{X(p+t\mathbf{v}) - X(p)}{t} \in T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ .

Além disso, neste caso obtemos a mesma definição se em vez da curva  $t \mapsto p + t\mathbf{v}$  usamos uma qualquer outra curva  $C^\infty$   $\alpha$ , tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ . Isto é:

$$D_{\mathbf{v}}X(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(\alpha(t)) - X(p)}{t}$$

De facto, estamos mais uma vez a usar o paralelismo canónico em  $\mathbb{R}^n$ , que permite identificar  $T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ .

Numa variedade qualquer, não existe paralelismo canónico, e por isso a introdução de uma “conexão” entre os vários espaços tangentes torna-se imprescindível à formulação de uma derivada covariante de um campo de vectores. Além disso, uma “conexão” entre os espaços tangentes  $T_pM$  e  $T_qM$  poderá depender da curva que une  $p$  a  $q$ .

Estas considerações levam-nos portanto a introduzir uma “**estrutura de paralelismo**” numa variedade  $M$ , como sendo uma família de aplicações  $\mathbb{P} = \{\mathbb{P}_{\alpha;p,q}\}$ :

$$\mathbb{P}_{\alpha;p,q} : T_pM \rightarrow T_qM$$

onde  $p, q \in M$  e  $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow M$  é uma curva  $C^\infty$  por pedaços tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$  (ver a figura 4.1).

Figure 4.1: Estrutura de paralelismo

Exigimos além disso que  $\mathbb{P}$  satisfaça certas condições “naturais”. Por exemplo, cada  $\mathbb{P}_{\alpha;p,q}$  deverá ser um isomorfismo linear; se  $M$  tem uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$  e uma orientação é natural exigir que cada  $\mathbb{P}_{\alpha;p,q}$  seja uma isometria linear positiva. Por outro lado devemos impôr que  $\mathbb{P}_{\alpha;p,q}$  não dependa da parametrização de  $\alpha$ , que se comporte de forma natural relativamente à justaposição de curvas e ainda que verifique certas propriedades de diferenciabilidade. Mas note que não há qualquer motivo para que  $\mathbb{P}_{\alpha;p,p} = \text{Id}$ , quando  $\alpha$  é um lacete baseado em  $p$  (não reduzido a  $p$ )!

Antes de dar uma definição rigorosa, vamos supôr que temos definida uma “estrutura de paralelismo”  $\mathbb{P} = \{\mathbb{P}_{\alpha;p,q}\}$  numa superfície orientada  $M$  munida de uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , e que satisfaça as “condições naturais” atrás referidas.

Seja  $\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$  um gauge local (referencial móvel ortonormado positivo), definido num aberto  $U \subseteq M$ . Então em  $U$ , cada espaço tangente  $T_pM$  fica identificado com  $\mathbb{R}^2$ , através do isomorfismo  $\mathbf{e}_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_pM$  que envia a base canónica de  $\mathbb{R}^2$  na base  $[E_1(p) \ E_2(p)]$  de  $T_pM$ . Portanto o paralelismo  $\mathbb{P}$  é descrito, relativamente ao gauge local  $\mathbf{e}$  em  $U$ , através de uma família de isometrias lineares positivas  $\{\mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})}\}$ , de  $\mathbb{R}^2$ , definidas através do diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{\mathbb{P}_{\alpha;p,q}} & T_qM \\ \mathbf{e}_p \uparrow & & \uparrow \mathbf{e}_q \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

isto é:

$$\mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})} = \mathbf{e}_q^{-1} \mathbb{P}_{\alpha;p,q} \mathbf{e}_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (4.1.9)$$

Se optarmos por um outro gauge local  $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$ , onde  $g : U \rightarrow SO(2)$  é uma transformação local de gauge, o paralelismo  $\mathbb{P}$  é descrito, relativamente ao novo gauge local  $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$  em  $U$ , através de uma outra família de isometrias lineares positivas de  $\mathbb{R}^2$   $\{\mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\widehat{\mathbf{e}})}\}$ , obtidas como antes. Mas:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\widehat{\mathbf{e}})} &= \widehat{\mathbf{e}}_q^{-1} \mathbb{P}_{\alpha;p,q} \widehat{\mathbf{e}}_p \\ &= (\mathbf{e}_q g(q))^{-1} \mathbb{P}_{\alpha;p,q} (\mathbf{e}_p g(p)) \\ &= g(q)^{-1} (\mathbf{e}_q^{-1} \mathbb{P}_{\alpha;p,q} \mathbf{e}_p) g(p) \\ &= g(q)^{-1} \mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})} g(p) \end{aligned}$$

isto é, em termos matriciais:

$$\mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e} \cdot g)} = g(q)^{-1} \cdot \mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})} \cdot g(p) \quad (4.1.10)$$

Fixemos agora um ponto qualquer  $p \in U$ , no aberto  $U$  onde está definido um gauge local  $\mathbf{e}$ . Consideremos uma curva  $\alpha$ , de classe  $C^\infty$ , tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{v} \in T_p M$ , e definamos:

$$\mathbb{P}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_{\alpha;p,\alpha(t)}^{(\mathbf{e})} \in SO(2) \quad (4.1.11)$$

Obtemos desta forma uma curva (que supomos ser diferenciável)  $t \mapsto \mathbb{P}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t)$  no “grupo de gauge”  $SO(2)$ , tal que  $\mathbb{P}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(0) = \text{Id}$ . É natural esperar que a respectiva derivada em  $t = 0$ , dependa apenas do vector tangente  $\mathbf{v} \in T_p M$  e não da curva  $\alpha$  acima indicada, e que portanto possa ser interpretada como uma 1-forma diferencial em  $U$ , com valores na álgebra de Lie  $so(2)$  do grupo de gauge:

$$A_p^{(\mathbf{e})} : \mathbf{v} \in T_p M \mapsto A_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{P}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t) \in so(2) \quad (4.1.12)$$

A esta 1-forma diferencial  $A^{(\mathbf{e})}$ , em  $U$ , com valores na álgebra de Lie  $so(2)$ , chama-se a “**forma local de conexão**” (relativamente ao gauge local  $\mathbf{e}$ ) (ou ainda “**potencial local de gauge**” ou “**campo local de gauge**”), associado ao paralelismo  $\mathbb{P}$ .

Estamos agora aptos a definir a “**derivada covariante**” de um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(U)$ . Para isso, consideremos de novo um aberto  $U \subseteq M$  onde está definido um gauge local  $\mathbf{e}$ , e a função  $X^{(\mathbf{e})} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  associada a  $X$ . Definimos então a “**derivada covariante**”  $(D_{\mathbf{v}}X)^{(\mathbf{e})}$ , no gauge  $\mathbf{e}$ , através de (ver a figura 4.2):

$$(D_{\mathbf{v}}X)^{(\mathbf{e})}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left[ \mathbb{P}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t) \right]^{-1} \cdot X^{(\mathbf{e})}(\alpha(t)) \quad (4.1.13)$$

Derivando em ordem a  $t$  a expressão (4.1.13), e atendendo à definição (4.1.12), obtemos em  $t = 0$ :

$$(D_{\mathbf{v}}X)^{(\mathbf{e})}(p) = -A_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \cdot X^{(\mathbf{e})}(p) + dX_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v})$$

ou mais sucintamente:

$$(DX)^{(\mathbf{e})} \stackrel{\text{def}}{=} (d - A^{(\mathbf{e})}) \cdot X^{(\mathbf{e})} \quad (4.1.14)$$

Figure 4.2: Derivada covariante

Vejam qual o efeito nestas fórmulas de uma transformação local de gauge  $\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g$  com  $g : U \rightarrow SO(2)$ . Para isso utilizemos a definição (4.1.11) e a fórmula (4.1.10), com  $q = \alpha(t)$ :

$$\widehat{\mathbb{P}}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e}\cdot g)}(t) = g(\alpha(t))^{-1} \cdot \mathbb{P}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t) \cdot g(p)$$

Derivando em ordem a  $t$ , obtemos em  $t = 0$ :

$$A_p^{(\mathbf{e}\cdot g)}(\mathbf{v}) = dg_p^{-1}(\mathbf{v}) \cdot g(p) + g^{-1}(p) \cdot A_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \cdot g(p)$$

ou mais sucintamente, e atendendo a que  $dg^{-1} = -g^{-1}(dg)g^{-1}$ :

$$\boxed{A^{(\mathbf{e}\cdot g)} = g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot g - g^{-1} \cdot dg} \quad (4.1.15)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (DX)^{(\mathbf{e}\cdot g)} &= dX^{(\mathbf{e}\cdot g)} - A^{(\mathbf{e}\cdot g)} \cdot X^{(\mathbf{e}\cdot g)} \\ &= d(g^{-1} \cdot X^{(\mathbf{e})}) - (g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot g - g^{-1} \cdot dg)(g^{-1} \cdot X^{(\mathbf{e})}) \\ &= g^{-1} \cdot dX^{(\mathbf{e})} + (dg^{-1}) \cdot X^{(\mathbf{e})} - g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot X^{(\mathbf{e})} + g^{-1} \cdot (dg) \cdot g^{-1} \cdot X^{(\mathbf{e})} \\ &= g^{-1} \cdot dX^{(\mathbf{e})} + (dg^{-1}) \cdot X^{(\mathbf{e})} - g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot X^{(\mathbf{e})} - (dg^{-1}) \cdot X^{(\mathbf{e})} \\ &= g^{-1} \cdot dX^{(\mathbf{e})} - g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot X^{(\mathbf{e})} \\ &= g^{-1} \cdot (dX^{(\mathbf{e})} - A^{(\mathbf{e})} \cdot X^{(\mathbf{e})}) \\ &= g^{-1} \cdot (DX)^{(\mathbf{e})} \end{aligned}$$

isto é:

$$\boxed{\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \quad \Rightarrow \quad (DX)^{(\mathbf{e}\cdot g)} = g^{-1} \cdot (DX)^{(\mathbf{e})}} \quad (4.1.16)$$

que quando comparado com (4.1.7), corresponde exactamente ao carácter covariante da derivada  $D$ , como se pretendia.

Após esta discussão podemos finalmente dar a seguinte definição formal de paralelismo e derivada covariante, usando as notações já introduzidas:

♣ **Definição 4.1** ... *Seja  $M$  uma superfície orientada munida de uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . “Uma estrutura de paralelismo Riemanniano” em  $M$ , é uma família de aplicações  $\mathbb{P} = \{\mathbb{P}_{\alpha;p,q}\}$ :*

$$\mathbb{P}_{\alpha;p,q} : T_p M \rightarrow T_q M$$



definidas para todos os pontos  $p, q \in M$  e curvas  $C^\infty$  por pedaços  $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow M$  tais que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ , e que satisfazem as condições seguintes:

- $\mathbb{P}_{\alpha;p,q}$  não depende da parametrização de  $\alpha$ .
- $\mathbb{P}_{\alpha;p,q} : T_p M \rightarrow T_q M$  é uma isometria linear positiva.
- $\mathbb{P}_{\beta;q,r} \circ \mathbb{P}_{\alpha;p,q} = \mathbb{P}_{\alpha\beta;p,r}$ .
- $\mathbb{P}_{\alpha;p,p} = Id$  se  $\alpha(t) \equiv p, \forall t$ .
- Se  $U$  é um aberto onde está definido um gauge local  $\mathbf{e}$ ,  $p \in U$  e  $\alpha$  é uma curva  $C^\infty$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = \mathbf{v} \in T_p M$ , então a derivada:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{P}_{\alpha,p}^{(\mathbf{e})}(t)$$

existe e define uma 1-forma diferencial em  $U$ , com valores na álgebra de Lie  $so(2)$ :

$$\boxed{A_p^{(\mathbf{e})} : \mathbf{v} \in T_p M \mapsto A_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \stackrel{def}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{P}_{\alpha,p}^{(\mathbf{e})}(t) \in so(2)} \quad (4.1.17)$$

chamada a **“forma local de conexão Riemanniana”** (relativamente ao gauge local  $\mathbf{e}$ ) associada ao paralelismo  $\mathbb{P}$ .

Dado um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(U)$  define-se a sua **“derivada covariante”** (no gauge  $\mathbf{e}$ ) através de:

$$\boxed{(DX)^{(\mathbf{e})} \stackrel{def}{=} (d - A^{(\mathbf{e})}) \cdot X^{(\mathbf{e})}} \quad (4.1.18)$$

isto é:

$$\boxed{(D_{\mathbf{v}}X)^{(\mathbf{e})}(p) = dX_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) - A_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \cdot X^{(\mathbf{e})}(p)} \quad (4.1.19)$$

Resumindo as regras de transformação sob mudança de gauge  $\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g$ , temos que:

$$\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \quad \Rightarrow \quad X^{(\mathbf{e})} \mapsto X^{(\mathbf{e} \cdot g)} = g^{-1} \cdot X^{(\mathbf{e})} \quad (4.1.20)$$

$$\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \quad \Rightarrow \quad A^{(\mathbf{e})} \mapsto A^{(\mathbf{e} \cdot g)} = g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot g - g^{-1} \cdot dg \quad (4.1.21)$$

$$\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \quad \Rightarrow \quad (DX)^{(\mathbf{e})} \mapsto (DX)^{(\mathbf{e} \cdot g)} = g^{-1} \cdot (DX)^{(\mathbf{e})} \quad (4.1.22)$$

$$\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^{(\mathbf{e})} \mapsto \mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e} \cdot g)} = g(q)^{-1} \cdot \mathbb{P}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})} \cdot g(p) \quad (4.1.23)$$

## 4.2 Conexão de Levi-Civita

Seja  $M$  uma superfície orientada, com uma métrica riemanniana  $\mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ , e  $\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$  um gauge local (i.e., um referencial móvel ortonormado (positivo)), definido num aberto  $U \subseteq M$ .

Seja  $\Theta = \begin{bmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{bmatrix}$  o correferencial dual, de tal forma que  $\Theta^a(E_b) = \delta_b^a$ .

Se  $\widehat{\mathbf{e}} = [\widehat{E}_1 \ \widehat{E}_2]$  é um outro gauge local, então sabemos que  $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$ , para uma única transformação local de gauge  $g : U \rightarrow SO(2)$ :

$$g(p) = \begin{bmatrix} \cos \varphi(p) & -\sin \varphi(p) \\ \sin \varphi(p) & \cos \varphi(p) \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

isto é (omitindo a dependência de  $p$ ):

$$\begin{aligned} \widehat{E}_1 &= (\cos \varphi) E_1 + (\sin \varphi) E_2 \\ \widehat{E}_2 &= -(\sin \varphi) E_1 + (\cos \varphi) E_2 \end{aligned}$$

onde  $\varphi(p)$  é o ângulo orientado entre  $E_1(p)$  e  $\widehat{E}_1(p)$ , em  $T_p M$ .

Como vimos na secção anterior, se existir uma estrutura de paralelismo em  $(M, \mathbf{g})$ , a respectiva forma local de conexão Riemanniana é uma 1-forma diferencial com valores na álgebra de Lie  $so(2)$ , que, relativamente a um gauge local  $\mathbf{e}$  definido num aberto  $U \subseteq M$ , deverá ser dada por:

$$A_p^{(\mathbf{e})} : \mathbf{v} \in T_p M \mapsto A_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{P}_{\alpha,p}^{(\mathbf{e})}(t) \in so(2)$$

Note agora que a álgebra de Lie do grupo  $SO(2)$  é:

$$so(2) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto uma forma de conexão Riemanniana  $A^{(\mathbf{e})}$ , num certo gauge  $\mathbf{e}$  definido num aberto  $U \subseteq M$ , será do tipo:

$$A^{(\mathbf{e})} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{(\mathbf{e})} \\ \omega^{(\mathbf{e})} & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $\omega^{(\mathbf{e})}$  é uma 1-forma usual definida no aberto  $U$ .

Vamos mostrar que de facto existe uma forma de conexão Riemanniana, que é até única se impusermos uma certa condição adicional:

♣ **Teorema 4.1** “Teorema fundamental da geometria Riemanniana”... *Existe uma única forma de conexão Riemanniana dita “conexão de Levi-Civita”, que tem “torção” nula, isto é, que satisfaz as chamadas “primeiras equações de estrutura” seguintes:*

$$\begin{cases} d\Theta^1 + \omega \wedge \Theta^2 = 0 \\ d\Theta^2 - \omega \wedge \Theta^1 = 0 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

- **Dem.:** De facto aplicando a fórmula  $d\alpha(X, Y) = X \alpha(Y) - Y \alpha(X) - \alpha([X, Y])$ ,  $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\forall \alpha \in \Omega^1(M)$  (ver (2.2.15)), às equações anteriores obtemos:

$$\begin{cases} d\Theta^1(E_1, E_2) + (\omega \wedge \Theta^2)(E_1, E_2) = 0 \\ d\Theta^2(E_1, E_2) - (\omega \wedge \Theta^1)(E_1, E_2) = 0 \end{cases} \quad (4.2.3)$$

donde deduzimos, atendendo a que  $\Theta^a(E_b) \equiv \delta_b^a$ , que:

$$\begin{cases} -\Theta^1([E_1, E_2]) + \omega(E_1)\Theta^2(E_2) = 0 \\ -\Theta^2([E_1, E_2]) + \omega(E_2)\Theta^1(E_1) = 0 \end{cases} \quad (4.2.4)$$

isto é,  $\omega$  fica completamente determinada no gauge  $\mathbf{e}$ , pela condição:

$$\begin{aligned} \omega = \omega^{(\mathbf{e})} &= \omega(E_1)\Theta^1 + \omega(E_2)\Theta^2 \\ &= \Theta^1([E_1, E_2])\Theta^1 + \Theta^2([E_1, E_2])\Theta^2 \end{aligned}$$

■

Concluindo, a “forma de conexão de Levi-Civita” é dada no gauge  $\mathbf{e}$ , por:

$$\omega = \omega^{(\mathbf{e})} = \Theta^1([E_1, E_2]) \Theta^1 + \Theta^2([E_1, E_2]) \Theta^2 \quad (4.2.5)$$

### 4.2.1 Exemplos e exercícios

♣ **Exemplo 4.1** ...  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ , munida da métrica Euclideana usual, que em coordenadas polares tem o aspecto seguinte:

$$\mathbf{g} = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Gauge local:

$$\mathbf{e} = [E_1 = \frac{\partial}{\partial r} \quad E_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}]$$

Formas duais:

$$\Theta^1 = dr, \quad \Theta^2 = r d\theta$$

Como:

$$[E_1, E_2] = \left[ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} E_2$$

vem que:

$$\begin{aligned} \omega = \omega^{(\mathbf{e})} &= \omega(E_1) \Theta^1 + \omega(E_2) \Theta^2 \\ &= \Theta^1([E_1, E_2]) \Theta^1 + \Theta^2([E_1, E_2]) \Theta^2 \\ &= \Theta^1\left(-\frac{1}{r} E_2\right) \Theta^1 + \Theta^2\left(-\frac{1}{r} E_2\right) \Theta^2 \\ &= -\frac{1}{r} r d\theta \\ &= -d\theta \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

♣ **Exemplo 4.2** ...  $M = \mathbb{S}^2$  com coordenadas esféricas e métrica:

$$\mathbf{g} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Gauge local:

$$\mathbf{e} = [E_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad E_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}]$$

Formas duais:

$$\Theta^1 = d\theta, \quad \Theta^2 = \sin \theta d\varphi$$

Como:

$$[E_1, E_2] = \left[ \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] = -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} E_2$$

vem que:

$$\begin{aligned} \omega = \omega^{(\mathbf{e})} &= \omega(E_1) \Theta^1 + \omega(E_2) \Theta^2 \\ &= \Theta^1([E_1, E_2]) \Theta^1 + \Theta^2([E_1, E_2]) \Theta^2 \\ &= \Theta^1\left(-\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} E_2\right) \Theta^1 + \Theta^2\left(-\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} E_2\right) \Theta^2 \\ &= -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \theta d\varphi \\ &= -\cos \theta d\varphi \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

♣ **Exemplo 4.3** ... *Semiplano de Poincaré*  $\mathbf{H}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  com a métrica hiperbólica de Poincaré:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

Gauge local:

$$\mathbf{e} = [E_1 = y \frac{\partial}{\partial x} \quad E_2 = y \frac{\partial}{\partial y}]$$

Formas duais:

$$\Theta^1 = \frac{1}{y} dx, \quad \Theta^2 = \frac{1}{y} dy$$

Como:

$$[E_1, E_2] = \left[ y \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial y} \right] = -y \frac{\partial}{\partial x} = -E_1$$

vem que:

$$\begin{aligned} \omega = \omega^{(\mathbf{e})} &= \omega(E_1) \Theta^1 + \omega(E_2) \Theta^2 \\ &= \Theta^1([E_1, E_2]) \Theta^1 + \Theta^2([E_1, E_2]) \Theta^2 \\ &= \Theta^1(-E_1) \Theta^1 + \Theta^2(-E_1) \Theta^2 \\ &= -\Theta^1 \\ &= -\frac{1}{y} dx \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

♣ **Exercício 4.1** ... *Seja*  $\omega^{(\mathbf{e})}$  *a forma de conexão de Levi-Civita, dada no gauge*  $\mathbf{e}$  *definido no aberto*  $U \subseteq M$ , *por (4.2.5). Mostre que se*  $X \in \mathfrak{X}(U)$  *é uma campo de vectores em*  $U$ , *então:*

$$\boxed{\omega^{(\mathbf{e})}(X) = \langle [E_1, E_2], X \rangle} \tag{4.2.9}$$

♣ **Exercício 4.2** \*\*... *Considere uma superfície*  $M$  *orientada, munida de uma métrica Riemanniana*  $\mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . *Consideremos um aberto*  $U \subseteq M$  *onde está definido um gauge local*  $\mathbf{e}$ , *e a função*  $X^{(\mathbf{e})} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  *associada a*  $X$ .

*Dado um outro campo de vectores*  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , *define-se a “derivada covariante de*  $X$  *segundo*  $Y$ ”, *como sendo o campo de vectores*  $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$ , *que no gauge*  $\mathbf{e}$ , *é dado pela fórmula (ver (4.1.14)):*

$$(\nabla_Y X)^{(\mathbf{e})}(p) = dX_p^{(\mathbf{e})}(Y_p) - A_p^{(\mathbf{e})}(Y_p) \cdot X^{(\mathbf{e})}(p)$$

*Mostre que*  $(X, Y) \mapsto \nabla_Y X$  *é uma aplicação*  $\mathbb{R}$ -*bilinear que além disso verifica as propriedades seguintes:*

$$\begin{aligned} \nabla_{fY} X &= f \nabla_Y X, \quad \forall f \in C^\infty(M) \\ \nabla_Y(fX) &= f \nabla_Y X + (Yf)X, \quad \forall f \in C^\infty(M) \\ Y \langle X, Z \rangle &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

*Além disso se*  $A$  *é a conexão de Levi-Civita, mostre que:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{4.2.11}$$

### 4.3 Transporte paralelo. Holonomia

Consideremos de novo uma superfície Riemanniana  $(M, \mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  orientada e munida de uma conexão Riemanniana  $A$ , dada de acordo com a definição 4.1 através de:

$$A_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbb{P}_{\alpha,p}^{(\mathbf{e})}(t) \in so(2)$$

num certo gauge local  $\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$ , definido num aberto  $U \subseteq M$  (ver a fórmula (4.1.17)).

Dado um campo de vectores  $V$  de classe  $C^\infty$  ao longo de uma curva  $\alpha : I \rightarrow U$  de classe  $C^\infty$ , consideremos a função:

$$V^{(\mathbf{e})} : t \mapsto V^{(\mathbf{e})}(t) \stackrel{\text{def}}{=} V^{(\mathbf{e})}(\alpha(t)) \in \mathbb{R}^2$$

Define-se então a “**derivada covariante**” de  $V$  ao longo de  $\alpha$ , no gauge  $\mathbf{e}$ , através da fórmula (ver a figura 4.3):

$$\left(\frac{DV}{dt}\right)^{(\mathbf{e})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \left[ \mathbb{P}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t) \right]^{-1} \cdot V^{(\mathbf{e})}(\alpha(t)) \quad (4.3.1)$$

Figure 4.3: Derivada covariante  $\frac{DV}{dt}$

Como na secção 3.1 deste capítulo, deduzimos por argumentos análogos aos que então utilizamos, que:

$$\left(\frac{DV}{dt}\right)^{(\mathbf{e})} = \frac{dV^{(\mathbf{e})}}{dt} - A_{\alpha(t)}^{(\mathbf{e})}(\alpha'(t)) \cdot V^{(\mathbf{e})}(t) \quad (4.3.2)$$

Um “**campo paralelo ao longo de  $\alpha$** ” é um campo de vectores  $V$  de classe  $C^\infty$  ao longo de uma curva  $\alpha : I \rightarrow U$  de classe  $C^\infty$ , que satisfaz a condição seguinte:

$$\left(\frac{DV}{dt}\right)^{(\mathbf{e})} = 0, \quad \forall t \in I \quad (4.3.3)$$

Note que esta condição não depende do gauge  $\mathbf{e}$ , atendendo a (4.1.16), isto é,  $\left(\frac{DV}{dt}\right)^{(\mathbf{e})} = 0$  se e só se  $\left(\frac{DV}{dt}\right)^{(\mathbf{e}.g)} = 0$ . A equação (4.3.3) é uma equação diferencial que descreve o “**transporte paralelo**” ou “**holonomia**” ao longo da curva  $\alpha$ , e que num gauge  $\mathbf{e}$  se escreve na forma:

$$\frac{dV^{(\mathbf{e})}}{dt} = A_{\alpha(t)}^{(\mathbf{e})}(\alpha'(t)) \cdot V^{(\mathbf{e})}(t) \quad (4.3.4)$$

ou simplificando as notações, omitindo o prefixo  $(\mathbf{e})$  e pondo  $V^{(\mathbf{e})}(\alpha(t)) = \mathbf{V}(t)$  e  $A_{\alpha(t)}^{(\mathbf{e})}(\alpha'(t)) = \mathbf{A}(t)$ :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{V}(t)$$

que é uma equação diferencial ordinária linear não autónoma para  $t \mapsto \mathbf{V}(t) \in \mathbb{R}^2$ . O teorema de existência e unicidade para soluções de equações deste tipo, garante que existe uma e uma só solução que satisfaz uma dada condição inicial  $\mathbf{V}(0)$ .

Se:

$$A^{(\mathbf{e})} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{(\mathbf{e})} \\ \omega^{(\mathbf{e})} & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $\omega^{(\mathbf{e})}$  é uma 1-forma usual definida no aberto  $U$ , e se:

$$V^{(\mathbf{e})}(t) = v^1(t)E_1(\alpha(t)) + v^2(t)E_2(\alpha(t))$$

isto é:

$$V^{(\mathbf{e})}(t) = \begin{bmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{bmatrix}$$

então a derivada covariante  $(\frac{DV}{dt})^{(\mathbf{e})}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{DV}{dt}\right)^{(\mathbf{e})} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{(\mathbf{e})}(t) \\ \omega^{(\mathbf{e})}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (v^1)'(t) + \omega^{(\mathbf{e})}(t)v^2(t) \\ (v^2)'(t) - \omega^{(\mathbf{e})}(t)v^1(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou de forma equivalente:

$$\boxed{\frac{DV}{dt} = [(v^1)'(t) + \omega(t)v^2(t)] E_1(\alpha(t)) + [(v^2)'(t) - \omega(t)v^1(t)] E_2(\alpha(t))} \quad (4.3.5)$$

onde pusemos  $\frac{DV}{dt} = (\frac{DV}{dt})^{(\mathbf{e})}$  e  $\omega(t) = \omega_{\alpha(t)}^{(\mathbf{e})}(\alpha'(t))$ . Em particular a equação para a holonomia ao longo de  $\alpha$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} (v^1)' \\ (v^2)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(t) \\ \omega(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

isto é:

$$\begin{cases} (v^1)' = -\omega(t)v^2 \\ (v^2)' = \omega(t)v^1 \end{cases} \quad (4.3.7)$$

onde  $\omega(t) = \omega_{\alpha(t)}^{(\mathbf{e})}(\alpha'(t))$ .

♣ **Exercício 4.3** ... Calcular a holonomia ao longo do lacete  $\alpha : t \mapsto (\theta(t) \equiv \theta_0, \varphi(t) = t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  e  $\theta_0$  constante  $0 < \theta_0 < \pi/2$ , na esfera  $\mathbf{S}^2$  munida da conexão de Levi-Civita (ver a figura 4.4).

Figure 4.4: Holonomia

• **Resolução ...**

Gauge local:  $\mathbf{e} = [E_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad E_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}]$

Formas duais:  $\Theta^1 = d\theta, \Theta^2 = \sin \theta d\varphi$

Conexão de Levi-Civita:  $\omega = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta^2$

Se  $\alpha(t) = (\theta(t), \varphi(t))$  então:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \theta' \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \theta' E_1(\alpha(t)) + (\varphi' \sin \theta) E_2(\alpha(t)) \\ &= \sin \theta_0 E_2(\alpha(t)) \quad \text{porque } \theta(t) \equiv \theta_0, \varphi(t) = t \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

e portanto, uma vez que:

$$\omega(t) = -\frac{\cos \theta(t)}{\sin \theta(t)} \Theta^2(\sin \theta(t) E_2) = -\cos \theta_0 \equiv -a$$

a equação para a holonomia é:

$$\begin{cases} (v^1)' = -\omega(t)v^2 \\ (v^2)' = \omega(t)v^1 \end{cases} = \begin{cases} (v^1)' = a v^2 \\ (v^2)' = -a v^1 \end{cases}$$

cuja solução com condição inicial  $\begin{bmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{bmatrix}$  é:

$$\begin{bmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos at & \sin at \\ -\sin at & \cos at \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{bmatrix}$$

e no instante  $t = 2\pi$ :

$$\begin{bmatrix} v^1(2\pi) \\ v^2(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi a & \sin 2\pi a \\ -\sin 2\pi a & \cos 2\pi a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{bmatrix}$$

o que significa que qualquer vector tangente em  $T_{\alpha(0)}\mathbf{S}^2$  é submetido a uma rotação de ângulo igual a  $2\pi a = 2\pi \cos \theta_0$ , quando é transportado paralelamente ao longo do lacete  $\alpha$ , numa volta completa.

□

O conceito de transporte paralelo pode ser generalizado para curvas  $C^\infty$  por pedaços. De facto, se  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  é uma tal curva em  $M$ , e se  $\{t_1 < t_2 < \dots < t_k\} \subset ]a, b[$  são os pontos de descontinuidade de  $\alpha'$ , então para construir o transporte paralelo de um vector  $V_0 \in T_{\alpha(a)}M$  ao longo de  $\alpha$ , começamos por resolver a equação (4.3.4) no intervalo  $[a, t_1]$  com condição inicial  $V_0$ . Se  $V(t)$  é a solução, resolvemos então a mesma equação no intervalo  $[t_1, t_2]$  com condição inicial  $V(t_1)$ , e assim sucessivamente.

## 4.4 Geodésicas

Consideremos de novo uma superfície Riemanniana  $(M, \mathbf{g} = \langle , \rangle)$  orientada e munida de uma conexão Riemanniana  $A$ .

♣ **Definição 4.2 ...** Uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  diz-se uma “geodésica” da conexão Riemanniana  $A$ , se  $V(t) = \alpha'(t)$  é um campo paralelo ao longo de  $\alpha$ :

$$\frac{D\alpha'}{dt} = 0$$

Se:

$$\alpha'(t) = v^1(t)E_1(\alpha(t)) + v^2(t)E_2(\alpha(t))$$

a equação para o campo de velocidades de uma geodésica é portanto:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -\omega(t)v^2(t) \\ (v^2)'(t) = \omega(t)v^1(t) \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Dado um vector tangente  $\mathbf{v}_p \in T_pM$  num ponto  $p \in M$ , existe uma única geodésica maximal  $\alpha$  em  $M$  tal que:

$$\alpha(0) = p \quad \text{e} \quad \alpha'(0) = \mathbf{v}_p$$

Portanto cada geodésica em  $M$  fica unívocamente determinada pela sua posição e velocidade inicial.  $M$  diz-se “**geodésicamente completa**” se toda a geodésica maximal está definida em todo o  $\mathbb{R}$ .

#### 4.4.1 Exemplos e exercícios

♣ **Exercício 4.4** ... Calcule as equações das geodésicas da conexão de Levi-Civita, da esfera  $M = \mathbf{S}^2$ , relativamente à métrica dada em coordenadas esféricas por:

$$\mathbf{g} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

• **Resolução** ...

Gauge local:  $\mathbf{e} = [E_1 = \frac{\partial}{\partial \theta} \quad E_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}]$

Formas duais:  $\Theta^1 = d\theta, \Theta^2 = \sin \theta d\varphi$

Conexão de Levi-Civita:  $\omega = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Theta^2$

Se  $\alpha(t) = (\theta(t), \varphi(t))$  então:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \theta' \frac{\partial}{\partial \theta} + \varphi' \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \theta' E_1(\alpha(t)) + \varphi' \sin \theta E_2(\alpha(t)) \end{aligned}$$

e portanto, uma vez que  $v^1 = \theta', v^2 = \varphi' \sin \theta$  e  $\omega(t) = -\varphi' \cos \theta$ , a equação para o campo de velocidades de uma geodésica é:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -\omega(t)v^2(t) \\ (v^2)'(t) = \omega(t)v^1(t) \end{cases}$$

donde se deduzem as equações seguintes para as geodésicas:

$$\begin{cases} \theta'' = (\varphi' \cos \theta)(\varphi' \sin \theta) \\ (\varphi' \sin \theta)' = -\varphi' \theta' \cos \theta \end{cases} = \begin{cases} \theta'' = (\varphi')^2 \cos \theta \sin \theta \\ \varphi'' \sin \theta + 2\varphi' \theta' \cos \theta = 0 \end{cases}$$

**Discussão:** O círculo equatorial  $\theta = \pi/2$  percorrido com velocidade constante  $\varphi(t) = kt + \varphi_0$  com  $\varphi' \equiv k$  (constante), é uma geodésica por ser solução do sistema de equações anterior. Notemos agora que o grupo  $SO(3)$  actua isométricamente em  $\mathbf{S}^2$ , e que qualquer círculo máximo em  $\mathbf{S}^2$  é imagem do círculo equatorial por alguma isometria em  $SO(3)$ . Portanto todos esses círculos máximos são geodésicas de  $\mathbf{S}^2$ , quando percorridos com velocidade constante. Como todo o vector tangente a  $\mathbf{S}^2$  é tangente a um desses círculos máximos para um dado valor da respectiva velocidade, deduzimos que: “as geodésicas de  $\mathbf{S}^2$ , relativamente à conexão de Levi-Civita da métrica induzida pelo mergulho  $\mathbf{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ , são exactamente os círculos máximos percorridos com velocidade constante”.



♣ **Exercício 4.5** ... Calcule as equações das geodésicas da conexão de Levi-Civita, do semiplano de Poincaré  $\mathbf{H}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  munido da métrica hiperbólica de Poincaré:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

• **Resolução** ...

Gauge local:  $\mathbf{e} = [E_1 = y \frac{\partial}{\partial x} \quad E_2 = y \frac{\partial}{\partial y}]$ .

Formas duais:  $\Theta^1 = \frac{1}{y} dx$ ,  $\Theta^2 = \frac{1}{y} dy$ .

Conexão de Levi-Civita:  $\omega = -\Theta^1$ .

Se  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  então:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= x'(t) \frac{\partial}{\partial x} |_{\alpha(t)} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} |_{\alpha(t)} \\ &= \frac{x'(t)}{y(t)} E_1(\alpha(t)) + \frac{y'(t)}{y(t)} E_2(\alpha(t)) \end{aligned}$$

e portanto, uma vez que  $v^1 = x'/y$ ,  $v^2 = y'/y$  e  $\omega(t) = -x'/y$ , a equação para o campo de velocidades de uma geodésica é:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -\omega(t)v^2(t) \\ (v^2)'(t) = \omega(t)v^1(t) \end{cases}$$

donde se deduzem as equações seguintes para as geodésicas:

$$\begin{cases} (x'/y)' = (x'/y)(y'/y) \\ (y'/y)' = -(x'/y)(x'/y) \end{cases} = \begin{cases} x'' = \frac{2}{y} x' y' \\ y'' = \frac{1}{y} ((y')^2 - (x')^2) \end{cases} \quad (4.4.2)$$

**Discussão:** observemos em primeiro lugar que as semi-rectas verticais  $x \equiv c$  (constante),  $y > 0$  são geodésicas quando percorridas em função de  $t$  por uma solução  $y(t)$  da equação diferencial  $y'' = \frac{(y')^2}{y}$ , isto é,  $y(t) = \lambda e^{kt}$  com  $\lambda, k$  constantes. Por outro lado, os semi-círculos centrados no eixo dos  $xx$ :

$$\begin{cases} x(t) = a + b \cos \theta(t) \\ y(t) = b \sin \theta(t) > 0 \end{cases}$$

são soluções do sistema (4.4.2) desde que  $\theta(t)$  seja solução da equação diferencial  $\theta'' = (\cotg \theta)(\theta')^2$ . De facto, nesse caso teremos que:

$$\begin{aligned} x' &= -b\theta' \sin \theta(t) \\ y' &= b\theta' \cos \theta(t) \\ x'' &= -b(\theta')^2 \cos \theta - b\theta'' \sin \theta \\ y'' &= -b(\theta')^2 \sin \theta - b\theta'' \cos \theta \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{2}{y} x' y' &= -2b(\theta')^2 \cos \theta = x'' \\ \frac{1}{y} ((y')^2 - (x')^2) &= -b(\theta')^2 \sin \theta + b \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} (\theta')^2 = y'' \end{aligned}$$

Como todo o vector tangente  $\mathbf{v}_p \in T_p \mathbf{H}^+$  é tangente a um tal semi-círculo ou semi-recta, concluímos que: “as geodésicas da conexão de Levi-Civita da métrica hiperbólica no semi-plano de Poincaré  $\mathbf{H}^+$ , são as semi-rectas verticais  $x \equiv c$ ,  $y(t) = \lambda e^{kt}$  ( $c, \lambda, k$  constantes) e os semi-círculos centrados no eixo dos  $xx$ :

$$\begin{cases} x(t) = a + b \cos \theta(t) \\ y(t) = b \sin \theta(t) > 0 \end{cases}$$

onde  $\theta(t) = \arccos(\tanh(kt + \lambda))$ .” (ver a figura 4.5)

Figure 4.5: Geodésicas em  $H^+$ 

♣ **Exercício 4.6 “Parametrizações de Clairaut”** ... Seja  $(M, \mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma superfície Riemanniana. Uma parametrizações de Clairaut em  $M$  é uma parametrização local  $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}_{(u,v)}^2 \rightarrow M$  na qual os coeficientes da métrica satisfazem:

$$\boxed{E_u = G_u = F = 0} \quad (4.4.3)$$

onde  $E_u = \frac{\partial E}{\partial u}$  e  $G_u = \frac{\partial G}{\partial u}$ .

(i). Deduza as equações das geodésicas da conexão de Levi-Civita, numa parametrização de Clairaut.

(ii). Mostre que numa parametrização de Clairaut, as  $v$ -curvas coordenadas  $u = \text{constante}$ , e  $v = v(s)$  parametrizados por arco  $s$ , são geodésicas.

(iii). Mostre que numa parametrização de Clairaut, uma  $u$ -curva coordenada  $s \mapsto (u(s), v_0)$  (parametrizada por arco) é uma geodésica sse:

$$E_v(u(s), v_0) = 0, \forall s$$

(iv). “Relação de Clairaut” ... Seja  $\alpha$  uma geodésica cujo traço está contido na imagem de uma parametrização de Clairaut, e seja  $\theta$  o ângulo convexo entre  $\alpha$  e  $\frac{\partial}{\partial u}$ . Mostre que:

$$\boxed{\sqrt{E} \cos \theta = Eu' \quad \text{é constante ao longo de } \alpha} \quad (4.4.4)$$

• **Resolução** ...

- (i)... Gauge local:  $\mathbf{e} = [E_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}]$

Formas duais:  $\Theta^1 = \sqrt{E} du, \Theta^2 = \sqrt{G} dv$

Cálculo de  $[E_1, E_2]$ :

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \right) - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \left( \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{E}} \right) \frac{\partial}{\partial u} \\ &= \frac{E_v}{2E^{3/2} \sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \\ &= \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} E_1 \end{aligned}$$

Conexão de Levi-Civita:

$$\begin{aligned} \omega &= \Theta^1([E_1, E_2])\Theta^1 + \Theta^2([E_1, E_2])\Theta^2 \\ &= \Theta^1 \left( \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} E_1 \right) \Theta^1 \\ &= \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \Theta^1 \end{aligned}$$

Se  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  então:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v} \\ &= u' \sqrt{E} E_1(\alpha(t)) + v' \sqrt{G} E_2(\alpha(t))\end{aligned}$$

e portanto, uma vez que  $v^1 = u' \sqrt{E}$ ,  $v^2 = v' \sqrt{G}$  e  $\omega(t) = \frac{E_v u' \sqrt{E}}{2E\sqrt{G}}$ , a equação para o campo de velocidades de uma geodésica é:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -\omega(t)v^2(t) \\ (v^2)'(t) = \omega(t)v^1(t) \end{cases}$$

donde se deduzem as equações seguintes para as geodésicas:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (u' \sqrt{E})' = -\frac{E_v u' \sqrt{E}}{2E\sqrt{G}} v' \sqrt{G} \\ (v' \sqrt{G})' = \frac{E_v u' \sqrt{E}}{2E\sqrt{G}} u' \sqrt{E} \end{cases} \\ &= \begin{cases} u'' \sqrt{E} + u' \frac{E_v}{2\sqrt{E}} v' = -\frac{E_v u' \sqrt{E}}{2E\sqrt{G}} v' \sqrt{G} \\ v'' \sqrt{G} + v' \frac{G_v}{2\sqrt{G}} v' = \frac{E_v u' \sqrt{E}}{2E\sqrt{G}} u' \sqrt{E} \end{cases} \\ &= \begin{cases} u'' + \frac{E_v}{E} u' v' = 0 \\ v'' - \frac{E_v}{2G} (u')^2 + \frac{G_v}{2G} (v')^2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

- (ii)... Com efeito a primeira equação de (4.4.5) é trivialmente satisfeita para  $u = \text{constante}$ , enquanto que a segunda equação fica:

$$v'' + \frac{G_v}{2G} (v')^2 = 0$$

Mas como estamos a supôr que a curva  $\alpha : s \mapsto (u = \text{constante}, v = v(s))$  está parametrizada por arco temos que:

$$1 = \|\alpha'(s)\|^2 = (v')^2 G \quad \Rightarrow \quad (v')^2 G = 1$$

donde se obtém derivando em ordem a  $s$ , e atendendo a que  $G_u = 0$ :

$$G_v v' (v')^2 + G v' v'' = 0$$

e uma vez que  $v' \neq 0$ :

$$v'' + \frac{G_v}{2G} (v')^2 = 0$$

o que significa que de facto as curvas  $u = \text{constante}$ , e  $v = v(s)$  parametrizados por arco  $s$ , também verificam a segunda equação de (4.4.5) e são portanto geodésicas.

- (iii)... A primeira equação de (4.4.5) dá  $u'' = 0 \rightarrow u' = a \neq 0$ , enquanto que a segunda equação de (4.4.5) dá  $-\frac{E_v}{2G} (u')^2 = 0 \Rightarrow E_v = 0$ .
- (iv)... De facto, como  $E_u = 0$  a primeira equação de (4.4.5) implica que:

$$(Eu')' = E_v v' u' + Eu'' = 0$$

donde se deduz que:

$$Eu' \equiv c(\text{constante}) \quad (4.4.6)$$

Por outro lado, o ângulo convexo  $\theta$ , que uma geodésica (parametrizada por arco) faz com uma  $u$ -curva coordenada num ponto de intersecção, é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \frac{\partial}{\partial u}, \alpha' \rangle}{\| \frac{\partial}{\partial u} \| \| \alpha' \|} = \frac{\langle \frac{\partial}{\partial u}, u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v} \rangle}{\| \frac{\partial}{\partial u} \|} = \sqrt{E} u'$$

e portanto:

$$\sqrt{E} \cos \theta = \sqrt{E} \sqrt{E} u' = Eu' = c(\text{constante})$$

♣ **Exemplo 4.4** ... Como já vimos uma superfície de revolução  $M$ , pode ser obtida rodando em torno do eixo dos  $zz$  a curva plana regular  $C$ , no plano  $xz$ :

$$x = f(v) \quad z = g(v) \quad \text{com } a < v < b \quad \text{e } f(v) > 0$$

Representando por  $\varphi$  o ângulo da rotação em torno do eixo dos  $zz$ , obtemos a seguinte parametrização local de  $M$  (ver a figura 1.11):

$$\Phi(\varphi, v) = (f(v) \cos \varphi, f(v) \sin \varphi, g(v))$$

definida no aberto  $U = \{(\varphi, v) : 0 < \varphi < \pi \quad \text{e} \quad a < v < b\} \subset \mathbb{R}_{(\varphi, v)}^2$ .

A métrica induzida em  $M$  pelo mergulho  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  é nesta parametrização:

$$ds^2 = f^2(v)d\varphi^2 + G(v)dv^2$$

onde:

$$G(v) = f_v^2 + g_v^2, \quad \text{com} \quad f_v = \frac{df}{dv}, \quad g_v = \frac{dg}{dv}$$

$\Phi$  é uma parametrização de Clairaut e podemos aplicar o exposto no exercício anterior (com  $u = \varphi$ ) para deduzir as equações seguintes para as geodésicas:

$$\begin{cases} \varphi'' + \frac{2ff_v}{f^2} \varphi' v' = 0 \\ v'' - \frac{ff_v}{f_v^2 + g_v^2} (\varphi')^2 + \frac{f_v f_{vv} + g_v g_{vv}}{f_v^2 + g_v^2} (v')^2 = 0 \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Os meridianos  $\varphi = \text{constante}$ , e  $v = v(s)$  parametrizados por arco  $s$ , são geodésicas. Um paralelo  $s \mapsto (\varphi(s), v_0)$  parametrizado por arco é uma geodésica sse  $E_v = 0 = 2f_v f$ , isto é sse  $f_v = 0$  (já que  $f > 0$ ) ao longo do referido paralelo. Geométricamente, um paralelo é uma geodésica sse é gerado pela rotação de um ponto da curva geradora em que a respectiva tangente é paralela ao eixo de rotação. Por outro lado, o ângulo  $\theta$ , que uma geodésica (parametrizada por arco) faz com um paralelo num ponto de intersecção é dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \varphi' \frac{\partial}{\partial \varphi} + v' \frac{\partial}{\partial v} \rangle}{\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \|} = f \varphi'$$

Como  $f = r$  é o raio do paralelo no ponto de intersecção, obtemos a relação de Clairaut seguinte:

$$\boxed{r \cos \theta \equiv c = \text{constante}} \quad (4.4.8)$$

## 4.5 Curvatura de Gauss. Teorema Egregium

Consideremos de novo uma superfície Riemanniana  $(M, \mathbf{g} = \langle , \rangle)$  orientada e munida de uma conexão Riemanniana  $A$ , dada de acordo com a definição 4.1 através de:

$$A_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{IP}_{\alpha, p}^{(\mathbf{e})}(t) \in so(2)$$

num certo gauge local  $\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$ , definido num aberto  $U \subseteq M$  (ver a fórmula (4.1.17)). Como já vimos, a regra de transformação de  $A$ , sob mudança de gauge  $\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g$ , é a seguinte (ver (4.1.21)):

$$\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \Rightarrow A^{(\mathbf{e})} \mapsto A^{(\mathbf{e} \cdot g)} = g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot g - g^{-1} \cdot dg$$

Suponhamos agora que, no gauge  $\mathbf{e}$ , se tem  $A^{(\mathbf{e})} = 0$ . Então num qualquer outro gauge  $\mathbf{e} \cdot g$ , ter-se-á:

$$\begin{aligned} A^{(\mathbf{e} \cdot g)} &= g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot g - g^{-1} \cdot dg \\ &= -g^{-1} \cdot dg \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

e daqui se deduz que:

$$\begin{aligned}
 F_A^{(\mathbf{e}\cdot g)} &\stackrel{\text{def}}{=} dA^{(\mathbf{e}\cdot g)} - A^{(\mathbf{e}\cdot g)} \wedge A^{(\mathbf{e}\cdot g)} \\
 &= -d(g^{-1} \cdot dg) - g^{-1} \cdot dg \wedge g^{-1} \cdot dg \\
 &= g^{-1} \cdot dg \cdot g^{-1} \wedge dg - g^{-1} \cdot dg \cdot g^{-1} \wedge dg \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Uma conexão Riemanniana  $A$  diz-se “**plana**”, se, na vizinhança de cada ponto de  $M$ , fôr possível escolher um gauge local  $\mathbf{e}$ , relativamente ao qual  $A^{(\mathbf{e})} = 0$ . O cálculo anterior mostra portanto que para uma conexão plana  $A$ , a expressão  $F_A^{(\mathbf{e}\cdot g)}$ , que se diz a “**curvatura de  $A$** ” (no gauge  $\mathbf{e} \cdot g$ ), deve anular-se.

Vejamus como é a regra de transformação da curvatura, sob mudança de gauge  $\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g$ . Como:

$$\begin{aligned}
 F_A^{(\mathbf{e}\cdot g)} &\stackrel{\text{def}}{=} dA^{(\mathbf{e}\cdot g)} - A^{(\mathbf{e}\cdot g)} \wedge A^{(\mathbf{e}\cdot g)} \\
 &= d\left(g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot g - g^{-1} \cdot dg\right) - \left(g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot g - g^{-1} \cdot dg\right) \wedge \left(g^{-1} \cdot A^{(\mathbf{e})} \cdot g - g^{-1} \cdot dg\right) \\
 &= \dots \\
 &= g^{-1} \cdot \left(dA^{(\mathbf{e})} - A^{(\mathbf{e})} \wedge A^{(\mathbf{e})}\right) \cdot g \\
 &= g^{-1} \cdot F_A^{(\mathbf{e})} \cdot g
 \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

vemos que:

$$\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \Rightarrow F_A^{(\mathbf{e})} \mapsto F_A^{(\mathbf{e}\cdot g)} = g^{-1} \cdot F_A^{(\mathbf{e})} \cdot g \tag{4.5.4}$$

Vamos de seguida indicar uma interpretação heurística da noção de curvatura. Para isso consideremos um par ordenado  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  de vectores tangentes em  $T_p M$ , e prolonguemos esses vectores a campos de vectores  $V, W \in \mathfrak{X}(U)$ , definidos numa vizinhança  $U$  de  $p$  e que comutam em  $U$  (isso é sempre possível). Consideremos agora o “pequeno” lacete  $\square_t^{(V,W)}$  (de classe  $C^\infty$  por pedaços), baseado em  $p$ , e definido por:

$$\square_t^{(V,W)} = \text{Fl}_{-t}^W \text{Fl}_{-t}^V \text{Fl}_t^W \text{Fl}_t^V(p) \tag{4.5.5}$$

onde  $\text{Fl}_t^V$  (resp.,  $\text{Fl}_t^W$ ) designa o fluxo local de  $V$  (resp.,  $W$ ).

Dado o paralelismo  $\mathbb{P}$  em  $M$ , consideremos a holonomia ao longo do lacete  $\square_t$ , como uma função de  $t$  com valores no grupo de gauge  $SO(2)$ :

$$t \mapsto \mathbb{P}_{\square_t; p}(t)$$

Note que  $\mathbb{P}_{\square_t; p}(0) = \text{Id}$ . Com estas notações, definimos a “**forma de curvatura da conexão  $A$** ”, através de:

$$F_A(p)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_{\square_t; p}(t) - \text{Id}}{t^2} \tag{4.5.6}$$

É natural esperar que  $F_A$  seja uma 2-forma diferencial em  $M$ , com valores na álgebra de Lie do grupo de gauge  $so(2)$ , e que em particular, o limite acima referido dependa apenas dos vectores  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$ , e não da escolha das extensões  $V, W \in \mathfrak{X}(U)$ . De facto assim acontece

(<sup>1</sup>). Se  $A^{(\mathbf{e})}$  é a forma de conexão no gauge  $\mathbf{e}$ , então é possível provar recorrendo a (4.5.7) e às identidades (4.5.8), que de facto a forma de curvatura  $F_A$  tem a seguinte expressão no gauge  $\mathbf{e}$ :

$$\boxed{F_A^{(\mathbf{e})} = dA^{(\mathbf{e})} - A^{(\mathbf{e})} \wedge A^{(\mathbf{e})}} \quad (4.5.9)$$

Sob mudança de gauge  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e} \cdot g$ :

$$\boxed{\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \quad \Rightarrow \quad F_A^{(\mathbf{e})}(p) \mapsto F_A^{(\mathbf{e} \cdot g)}(p) = g^{-1}(p) \cdot F_A^{(\mathbf{e})}(p) \cdot g(p)} \quad (4.5.10)$$

como aliás seria de prever atendendo a (4.1.23).

Suponhamos agora que:

$$A^{(\mathbf{e})} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^{(\mathbf{e})} \\ \omega^{(\mathbf{e})} & 0 \end{bmatrix}$$

Então, aplicando a fórmula de transformação de gauge (4.1.21), isto é:

$$\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \quad \Rightarrow \quad A^{(\mathbf{e})} \mapsto A^{(\mathbf{e} \cdot g)} = g^{-1} A^{(\mathbf{e})} g - g^{-1} dg$$

com:

$$g = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

deduzimos que:

$$\boxed{\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \quad \Rightarrow \quad \omega^{(\mathbf{e})} \mapsto \omega^{(\mathbf{e} \cdot g)} = \omega^{(\mathbf{e})} - d\varphi} \quad (4.5.11)$$

Mas:

$$F_A^{(\mathbf{e})} = \begin{bmatrix} 0 & -d\omega^{(\mathbf{e})} \\ d\omega^{(\mathbf{e})} & 0 \end{bmatrix}$$

e como por (4.5.11),  $\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e} \cdot g \Rightarrow \omega^{(\mathbf{e})} \mapsto \omega^{(\mathbf{e} \cdot g)} = \omega^{(\mathbf{e})} - d\varphi$ , obtemos neste caso:

$$d\omega^{(\mathbf{e} \cdot g)} = d(\omega^{(\mathbf{e})} - d\varphi) = d\omega^{(\mathbf{e})} \quad (4.5.12)$$

<sup>1</sup>Uma possível demonstração deste facto baseia-se em que a solução da equação diferencial  $\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{V}(t)$  que descreve a holonomia, é dada pela chamada exponencial cronológica:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= P \exp \int_0^t \mathbf{A}(t) dt \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r \geq 0} \int_{\Delta_r} \mathbf{A}(t_1) \mathbf{A}(t_2) \cdots \mathbf{A}(t_r) dt_1 dt_2 \cdots dt_r \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

onde  $\Delta_r = \{(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}^r : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r \leq 1\}$ , e ainda nas identidades seguintes, que se demonstram fãcilmente em coordenadas locais:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\square_t} \mathbf{A}}{t^2} &= d\mathbf{A}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\square_t} \mathbf{A} \mathbf{A}}{t^2} &= (\mathbf{A} \wedge \mathbf{A})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \int_{\square_t} \underbrace{\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_r &= 0 \quad \forall r \geq 3 \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

onde representamos simplesmente por  $\square_t$ , o lacete  $\square_t^{(V,W)}$  acima referido.

o que significa que existe uma 2-forma  $\Omega$  **globalmente definida em  $M$** , e que induz a forma de curvatura  $d\omega^{(\mathbf{e})}$ , em cada aberto  $U$  onde está definido um gauge  $\mathbf{e}$ . A  $\Omega$  chamamos a “**forma de curvatura**” da conexão Riemanniana  $A$ .

Se, por outro lado,  $\begin{bmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{bmatrix}$  é o co-referencial dual a  $\mathbf{e} = [E_1, E_2]$ , de tal forma que  $\Theta^a(E_b) = \delta_b^a$ , e análogamente, se  $\begin{bmatrix} \widehat{\Theta}^1 \\ \widehat{\Theta}^2 \end{bmatrix}$  é o co-referencial dual a  $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$ , deduzimos que:

$$\begin{cases} \widehat{\Theta}^1 &= (\cos \varphi) \Theta^1 + (\sin \varphi) \Theta^2 \\ \widehat{\Theta}^2 &= (-\sin \varphi) \Theta^1 + (\cos \varphi) \Theta^2 \end{cases}$$

e portanto:

$$\widehat{\Theta}^1 \wedge \widehat{\Theta}^2 = \Theta^1 \wedge \Theta^2 \tag{4.5.13}$$

o que significa que existe uma única 2-forma  $\mu_{\mathbf{g}}$ , também **globalmente definida em  $M$** , e que induz a forma  $\Theta^1 \wedge \Theta^2$  sobre cada aberto  $U$  onde está definido um gauge local  $\mathbf{e}$ . Como sabemos,  $\mu_{\mathbf{g}} = dA$  diz-se a “**forma de área**” definida pela métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$ , e se  $M$  é compacta:

$$A(M) = \int_M \mu_{\mathbf{g}} = \int_M dA$$

diz-se a “**área**” de  $M$ .

Concluindo, temos duas 2-formas **globalmente definidas em  $M$** : a forma de curvatura  $\Omega$  da conexão Riemanniana  $A$ , e a a forma de área  $\mu_{\mathbf{g}} = dA$ , definida pela métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$ . Como  $M$  tem dimensão dois, deduzimos finalmente o seguinte teorema fundamental:

♣ **Teorema 4.2** “**Teorema Egregium de Gauss**” ... *Seja  $M$  uma superfície Riemanniana  $(M, \mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , orientada e munida de uma conexão Riemanniana  $A$ . Então existe uma única função diferenciável  $K \in C^\infty(M)$ , tal que:*

$$\boxed{\Omega = K dA} \tag{4.5.14}$$

Além disso, em cada aberto  $U \subseteq M$  onde está definido um gauge local  $\mathbf{e} = [E_1, E_2]$ , com co-referencial dual  $\begin{bmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{bmatrix}$ , tem-se que:

$$\boxed{\Omega|_U = d\omega^{(\mathbf{e})} = K \Theta^1 \wedge \Theta^2} \tag{4.5.15}$$

$K$  diz-se a “**curvatura**” (escalar) da conexão Riemanniana  $A$ . Quando a conexão Riemanniana é a conexão de Levi-Civita, a respectiva curvatura escalar diz-se a “**curvatura de Gauss**”, e nota-se por  $K_{\mathbf{g}}$ .

♣ **Teorema 4.3** ... *Seja  $\alpha$  um lacete simples baseado em  $p \in U$ , de classe  $C^\infty$  por pedaços, cujo traço está contido num aberto  $U$  onde está definido um gauge local  $\mathbf{e}$ . Seja  $\Omega = d\omega^{(\mathbf{e})}$  a forma de curvatura da conexão  $\omega$ . Então a holonomia  $\mathbb{P}_{\alpha;p,p} : T_p M \rightarrow T_p M$  é a rotação em  $T_p M$  de ângulo:*

$$\boxed{\theta_\alpha = \int_\alpha \omega} \tag{4.5.16}$$

Se além disso  $\alpha$  é bordo de uma região  $\mathcal{D} \subset M$  homeomorfa a um disco, então:

$$\boxed{\theta_\alpha = \pm \int_{\mathcal{D}} \Omega} \quad (4.5.17)$$

onde o sinal  $\pm$  depende do facto de  $\partial\mathcal{D}$  ter ou não a orientação de  $\alpha$ .

- **Dem.:** Basta observar que a solução da equação diferencial (4.3.7):

$$\begin{bmatrix} (v^1)' \\ (v^2)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega(t) \\ \omega(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

com condição inicial  $\begin{bmatrix} v^1(0) \\ v^2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{bmatrix}$ , é dada por:

$$\begin{bmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\int_0^t \omega(t) dt) & -\sin(\int_0^t \omega(t) dt) \\ \sin(\int_0^t \omega(t) dt) & \cos(\int_0^t \omega(t) dt) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{bmatrix}$$

Para deduzir (4.5.17) resta aplicar o teorema de Stokes,

■.

#### 4.5.1 Exemplos e exercícios

♣ **Exemplo 4.5** ...  $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ , munida da métrica Euclideana usual, que em coordenadas polares tem o aspecto seguinte:

$$\mathbf{g} = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Conexão de Levi-Civita:

$$\omega = -d\theta \quad \Rightarrow \quad d\omega = 0$$

Forma volume:

$$\Theta^1 \wedge \Theta^2 = dr \wedge r d\theta = r dr \wedge d\theta$$

Curvatura de Gauss:

$$\boxed{K_{\mathbf{g}} = 0}$$

♣ **Exemplo 4.6** ...  $M = \mathbb{S}^2$  com coordenadas esféricas e métrica:

$$\mathbf{g} = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Conexão de Levi-Civita:

$$\omega = -\cos \theta d\varphi \quad \Rightarrow \quad d\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$$

Forma volume:

$$\Theta^1 \wedge \Theta^2 = d\theta \wedge \sin \theta d\varphi = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$$

Curvatura de Gauss:

$$\boxed{K_{\mathbf{g}} \equiv 1}$$

♣ **Exemplo 4.7** ... Semiplano de Poincaré  $\mathbf{H}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  com a métrica hiperbólica de Poincaré:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2)$$

Conexão de Levi-Civita:

$$\omega = -\frac{1}{y} dx \quad \Rightarrow \quad d\omega = -\frac{1}{y^2} dx \wedge dy$$



Forma volume:

$$\Theta^1 \wedge \Theta^2 = \frac{1}{y} dx \wedge \frac{1}{y} dy = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$$

Curvatura de Gauss:

$$K_{\mathbf{g}} \equiv -1$$

♣ **Exercício 4.7** ... Uma parametrização local para o toro  $\mathbf{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , é por exemplo dada por:

$$\Phi(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

A métrica induzida pela métrica usual de  $\mathbb{R}^3$  é dada por:

$$\mathbf{g} = r^2 du^2 + (a + r \cos u)^2 dv^2$$

Calcule a curvatura de Gauss e as equações das geodésicas.

• **Resolução** ...

$$\text{Gauge local: } \mathbf{e} = \left[ E_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u} \quad E_2 = \frac{1}{a+r \cos u} \frac{\partial}{\partial v} \right].$$

$$\text{Formas duais: } \Theta^1 = r du \quad \Theta^2 = (a + r \cos u) dv.$$

$$\text{Forma de área: } dA = \Theta^1 \wedge \Theta^2 = r(a + r \cos u) du \wedge dv.$$

$$\text{Forma de conexão de Levi-Civita: } \omega = -\frac{\sin u}{a+r \cos u} \Theta^2 = \sin u dv.$$

Curvatura de Gauss: Como  $\Omega = d\omega = \cos u du \wedge dv = K dA = K r(a + r \cos u) du \wedge dv$  obtemos:

$$K_{\mathbf{g}} = \frac{\cos u}{r(a+r \cos u)}$$

Se  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  então:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= u'(t) \frac{\partial}{\partial u} |_{\alpha(t)} + v'(t) \frac{\partial}{\partial v} |_{\alpha(t)} \\ &= ru' E_1(\alpha(t)) + v'(a + r \cos u) E_2(\alpha(t)) \end{aligned}$$

e portanto, uma vez que  $v^1 = ru'$ ,  $v^2 = v'(a + r \cos u)$  e  $\omega(t) = v' \sin u$ , a equação para o campo de velocidades de uma geodésica é:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -\omega(t)v^2(t) \\ (v^2)'(t) = \omega(t)v^1(t) \end{cases}$$

donde se deduzem as equações seguintes para as geodésicas:

$$\begin{cases} (ru')' = -(v')^2 \sin u (a + r \cos u) \\ (v'(a + r \cos u))' = u'v' \sin u \end{cases}$$

♣ **Exercício 4.8** ... Considere no semi-plano de Poincaré  $\mathbf{H}^+$ , munido da métrica  $\mathbf{g} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ , o gauge  $\mathbf{e} = \{E_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, E_2 = y \frac{\partial}{\partial y}\}$ , e a conexão métrica associada à 1-forma  $\omega^{(\mathbf{e})} = -y dx + x dy$ .

(i). Calcular directamente o transporte paralelo ao longo de um arco de círculo de centro na origem.

(ii). Calcular a curvatura da referida conexão.

• **Resolução** ...

- (i)... As formas duais au gauge dado são:  $\Theta^1 = \frac{1}{y} dx$ ,  $\Theta^2 = \frac{1}{y} dy$ .

A forma dada escreve-se:

$$\begin{aligned}\omega &= -y dx + x dy \\ &= -(y)^2 \Theta^1 + xy \Theta^2\end{aligned}$$

Se  $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $0 < t < \pi$  é uma parametrização do círculo de raio  $r$  centrado na origem, então:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= x'(t) \frac{\partial}{\partial x} |_{\alpha(t)} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} |_{\alpha(t)} \\ &= \frac{x'(t)}{y(t)} E_1(\alpha(t)) + \frac{y'(t)}{y(t)} E_2(\alpha(t)) \\ &= \frac{-r \sin t}{r \sin t} E_1(\alpha(t)) + \frac{r \cos t}{r \sin t} E_2(\alpha(t)) \\ &= -E_1 + \frac{\cos t}{\sin t} E_2\end{aligned}\tag{4.5.18}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \\ &= -(y(t))^2 \Theta^1(-E_1 + \frac{\cos t}{\sin t} E_2) + x(t)y(t) \Theta^2(-E_1 + \frac{\cos t}{\sin t} E_2) \\ &= r^2\end{aligned}\tag{4.5.19}$$

e portanto a equação para o transporte paralelo ao longo de  $\alpha$  é:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -\omega(t)v^2(t) \\ (v^2)'(t) = \omega(t)v^1(t) \end{cases}$$

isto é:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -r^2 v^2(t) \\ (v^2)'(t) = r^2 v^1(t) \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} (v^1)' \\ (v^2)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r^2 \\ r^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

cuja solução é:

$$\begin{bmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(r^2 t) & -\sin(r^2 t) \\ \sin(r^2 t) & \cos(r^2 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \end{bmatrix}$$

- (ii)...  $d\omega = d(-y dx + x dy) = 2 dx \wedge dy$ , enquanto que  $\Theta^1 \wedge \Theta^2 = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$ . Portanto pelo Teorema Egregium de Gauss:

$$d\omega = K \Theta^1 \wedge \Theta^2 \iff 2 dx \wedge dy = K(x, y) \frac{1}{y^2} dx \wedge dy$$

o que implica que:

$$K(x, y) = 2y^2$$

♣ **Exercício 4.9** ... Considere o hiperbolóide  $M \subset \mathbb{R}^3$  de equação  $x^2 + y^2 - z^2 = l^2$  ( $l > 0$ ), munido da parametrização:

$$\Phi : (\theta, \varphi) \mapsto (x = l \cos \theta \cosh \varphi, y = l \sin \theta \cosh \varphi, z = l \sinh \varphi)$$

(i). Mostrar que existem funções  $f, g \in C^\infty(M)$  tais que  $E_1 = f \frac{\partial}{\partial \theta}$ ,  $E_2 = g \frac{\partial}{\partial \varphi}$  formam um gauge em  $M$ , relativamente à métrica Riemanniana induzida pela imersão de  $M$  em  $\mathbb{R}^3$ .

(ii). Defina-se um paralelismo  $\mathbb{P}$  em  $M$  da seguinte forma: dados dois pontos  $p, q \in M$  e se  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$  é uma curva  $C^\infty$  por pedaços em  $M$ , que une  $p$  a  $q$ , põe-se:

$$\mathbb{P}_{\alpha;p,q}(E_1(p)) = E_1(q) \quad e \quad \mathbb{P}_{\alpha;p,q}(E_2(p)) = E_2(q)$$

Verificar que  $\mathbb{P}$  é um paralelismo e calcular a conexão Riemanniana associada. Esta conexão é a conexão de Levi-Civita?

(iii). Calcular a forma local da conexão de Levi-Civita em  $M$ . Calcule o transporte paralelo ao longo da curva  $\varphi = \mathbf{k}\theta$ ,  $a < \theta < b$  (onde  $k$  é uma constante fixa).

♣ **Exercício 4.10** ... Considere o plano Euclidiano munido da conexão definida pela 1-forma  $\omega^{(\mathbf{e})} = dx$ , relativamente ao gauge usual  $\mathbf{e} = \{E_1 = \frac{\partial}{\partial x}, E_2 = \frac{\partial}{\partial y}\}$ . Calcular as equações paramétricas das geodésicas. Será possível unir sempre dois pontos por uma geodésica? Por várias? Discutir.

♣ **Exercício 4.11** ... Considere a superfície de um cilindro de revolução  $M \subset \mathbb{R}^3$ , de equação  $x^2 + y^2 = 1$ .

(i). Mostre que  $M$  é uma variedade diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ .

(ii). Mostre que  $\Phi : ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (\theta, z) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, z)$  é uma parametrização local de  $M$ .

(iii). Calcule a expressão local da métrica usual em  $M$ , associada à parametrização  $\Phi$ .

(iv). Calcule a forma de Levi-Civita de  $M$  munida da métrica usual.

(v). Calcule as equações das geodésicas da conexão de Levi-Civita. Mostre que as geodésicas (quando parametrizados por arco) intersectam os paralelos do cilindro segundo um ângulo constante.

(vi). Calcule a curvatura de Gauss de  $M$  munida da métrica usual.

(vii). Mostre que  $M$  é localmente isométrica ao plano  $\mathbb{R}^2$ , munido da métrica Euclidiana usual. Será globalmente isométrica?

♣ **Exercício 4.12** ... Considere a superfície de revolução  $M \subset \mathbb{R}^3$ , obtida rodando a curva de equação:

$$z = y^2 + 1, \quad y \geq 0 \quad x = 0$$

no plano  $yz$ , em torno do eixo dos  $zz$ .

(i). Mostre que  $M$  é uma variedade diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ .

(ii). Mostre que  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 + r^2)$  é uma parametrização local de  $M$ .

(iii). Calcule a base para  $T_p M$ , associada à parametrização  $\Phi$  (dada na alínea anterior), onde  $p = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5) \in M$ .

(iv). Calcule a expressão local da métrica usual em  $M$ , associada à parametrização  $\Phi$ . Calcule ainda o comprimento da curva  $r = \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

(v). Calcule a forma de Levi-Civita de  $M$  munida da métrica usual.

(vi). Calcule as equações das geodésicas da conexão de Levi-Civita. Mostre que os meridianos  $\theta = \text{constante}$  são geodésicas (quando parametrizados por arco).

(vii). Calcule a curvatura de Gauss de  $M$  munida da métrica usual.

♣ **Exercício 4.13** ... Considere a superfície  $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ .

(i). Mostre que  $M$  é uma variedade diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ .

(ii). Mostre que  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$  é uma parametrização local de  $M$ .

(iii). Calcule a base para  $T_p M$ , associada à parametrização  $\Phi$  (dada na alínea anterior), onde  $p = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4) \in M$ .

(iv). Calcule a expressão local da métrica usual em  $M$ , associada à parametrização  $\Phi$ . Calcule ainda o comprimento da curva  $r = \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

(v). Calcule a forma de Levi-Civita de  $M$  munida da métrica usual.

(vi). Calcule as equações das geodésicas da conexão de Levi-Civita. Mostre que os meridianos  $\theta = \text{constante}$  são geodésicas (quando parametrizados por arco).

(vii). Calcule a curvatura de Gauss de  $M$  munida da métrica usual.

♣ **Exercício 4.14** ... Considere o disco unitário  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ , munido da métrica  $ds^2 = \frac{4}{[1-x^2-y^2]^2}(dx^2 + dy^2)$  e da conexão Riemanniana associada à 1-forma  $\omega = -y dx + x dy$ .

(i). Calcule a curvatura dessa conexão.

(ii). Calcule directamente a holonomia ao longo do lacete  $\alpha(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , relativamente à conexão referida.

(iii). Calcule a holonomia ao longo do lacete  $\alpha(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , relativamente à conexão referida, usando o teorema 4.3.

(iv). Calcule a área do disco  $D_{1/2}$  de centro na origem e raio  $1/2$ .

• **Resolução** ...

(i)... Consideremos o gauge:

$$E_1 = \frac{1-x^2-y^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = \frac{1-x^2-y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}$$

As respectivas formas duais são:

$$\Theta^1 = \frac{2}{1-x^2-y^2} dx, \quad \Theta^2 = \frac{2}{1-x^2-y^2} dy$$

A forma de conexão dada  $\omega = -y dx + x dy$  escreve-se:

$$\begin{aligned} \omega &= -y dx + x dy \\ &= -y \frac{1-x^2-y^2}{2} \Theta^1 + x \frac{1-x^2-y^2}{2} \Theta^2 \end{aligned}$$

Se  $\alpha(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  é o círculo de raio  $1/2$  centrado na origem, então:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= x'(t) \frac{\partial}{\partial x} |_{\alpha(t)} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} |_{\alpha(t)} \\ &= \frac{2x'(t)}{1-x(t)^2-y(t)^2} E_1(\alpha(t)) + \frac{2y'(t)}{1-x(t)^2-y(t)^2} E_2(\alpha(t)) \\ &= -\frac{4}{3} \sin t E_1(\alpha(t)) + \frac{4}{3} \cos t E_2(\alpha(t)) \end{aligned} \tag{4.5.20}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \\ &= -y(t) \frac{1-x(t)^2-y(t)^2}{2} \Theta^1 \left( -\frac{4}{3} \sin t E_1(\alpha(t)) + \frac{4}{3} \cos t E_2(\alpha(t)) \right) + \\ &\quad x(t) \frac{1-x(t)^2-y(t)^2}{2} \Theta^2 \left( -\frac{4}{3} \sin t E_1(\alpha(t)) + \frac{4}{3} \cos t E_2(\alpha(t)) \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{4.5.21}$$

e portanto a equação para a holonomia ao longo do lacete  $\alpha$  é:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -\omega(t)v^2(t) \\ (v^2)'(t) = \omega(t)v^1(t) \end{cases}$$

isto é:

$$\begin{cases} (v^1)'(t) = -\frac{1}{4}v^2(t) \\ (v^2)'(t) = \frac{1}{4}v^1(t) \end{cases}$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} (v^1)' \\ (v^2)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix}$$

cuja solução é:

$$\begin{bmatrix} v^1(t) \\ v^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{4}t) & -\sin(\frac{1}{4}t) \\ \sin(\frac{1}{4}t) & \cos(\frac{1}{4}t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_o^1 \\ v_o^2 \end{bmatrix}$$

Quando o vector tangente  $(v_o^1, v_o^2) \in T_{(\frac{1}{2}, 0)}D$  é transportado paralelamente ao longo do lacete  $\alpha$ , a sua posição ao fim de uma volta, para  $t = 2\pi$ , será:

$$\begin{bmatrix} v^1(2\pi) \\ v^2(2\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_o^1 \\ v_o^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_o^1 \\ v_o^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_o^2 \\ v_o^1 \end{bmatrix}$$

o que significa que rodou no sentido positivo de um ângulo igual a  $\frac{\pi}{2}$ .

(ii)...  $d\omega = d(-y dx + x dy) = 2 dx \wedge dy$ , enquanto que  $\Theta^1 \wedge \Theta^2 = \frac{4}{[1-x^2-y^2]^2} dx \wedge dy$ . Portanto pelo Teorema Egregium de Gauss:

$$d\omega = K\Theta^1 \wedge \Theta^2 \iff 2 dx \wedge dy = K(x, y) \frac{4}{[1-x^2-y^2]^2} dx \wedge dy$$

o que implica que:

$$K(x, y) = \frac{[1-x^2-y^2]^2}{2}$$

(iii). Usemos agora o teorema 4.3, para calcular a holonomia ao longo do lacete  $\alpha(t) = \frac{1}{2}(\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , relativamente à conexão referida.

Consideremos o disco  $D_{1/2}$  de centro 0 e raio 1/2, cujo bordo orientado é exactamente o lacete  $\alpha$ . O teorema 4.3 afirma que (ver a fórmula 4.5.17):

$$\theta_\alpha = \int_{D_{1/2}} \Omega$$

onde  $\Omega = d\omega = 2 dx \wedge dy$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha &= \int_{D_{1/2}} 2 dx \wedge dy \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

confirmando o resultado da alínea (i).

(iv). A forma volume (área) é igual a:

$$\begin{aligned} dA &= \Theta^1 \wedge \Theta^2 \\ &= \frac{4}{[1-x^2-y^2]^2} dx \wedge dy \end{aligned} \tag{4.5.22}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \text{área}(D_{1/2}) &= \int_{D_{1/2}} dA \\ &= \int_{D_{1/2}} \frac{4}{[1-x^2-y^2]^2} dx \wedge dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} dr \frac{4r}{[1-r^2]^2} \\ &= 2\pi \left( \frac{2}{1-r^2} \Big|_0^{1/2} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

## 4.6 Curvatura geodésica. Fórmula de Gauss-Bonnet.

Dada uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , de classe  $C^\infty$  parametrizada por comprimento de arco  $s$ , define-se a respectiva “**curvatura geodésica**”  $k_\gamma(s)$  através de:

$$k_\gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \frac{D\gamma'(s)}{ds}, \mathbf{n}(s) \right\rangle \quad (4.6.1)$$

onde  $\mathbf{n}(s) \in T_{\gamma(s)}M$  é o vector unitário perpendicular a  $\gamma'(s)$ , de tal forma que  $\{\gamma'(s), \mathbf{n}(s)\}$  é uma base positiva de  $T_{\gamma(s)}M$ .

Suponhamos que o traço de  $\gamma$  está contido num aberto  $U \subseteq M$  onde está definido um gauge local  $\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$ . Existe então uma função  $C^\infty$   $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \mapsto \theta(s)$ , definida em  $[a, b]$  tal que:

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \cos \theta(s) E_1(\gamma(s)) + \sin \theta(s) E_2(\gamma(s)) \\ \mathbf{n}(s) &= -\sin \theta(s) E_1(\gamma(s)) + \cos \theta(s) E_2(\gamma(s)) \end{aligned}$$

A essa função  $\theta$  chama-se “**uma determinação (diferenciável) do ângulo orientado**” entre  $E_1(\gamma(s))$  e  $\gamma'(s)$ , ao longo de  $\gamma$ . Uma qualquer outra determinação desse mesmo ângulo, difere desta por um múltiplo de  $2\pi$ .

Figure 4.6:

Se  $\omega$  é a forma de conexão de Levi-Civita no gauge  $\mathbf{e}$  então, designando por  $\omega(s) = \omega_{\gamma(s)}(\gamma'(s))$ , vem que (ver (4.3.5)):

$$\frac{D\gamma'}{ds} = (-\theta' \sin \theta + \omega(s) \sin \theta) E_1 + (\theta' \cos \theta - \omega(s) \cos \theta) E_2$$

e portanto:

$$\begin{aligned} k_\gamma(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \frac{D\gamma'(s)}{ds}, \mathbf{n}(s) \right\rangle \\ &= \langle (-\theta' \sin \theta + \omega(s) \sin \theta) E_1 + (\theta' \cos \theta - \omega(s) \cos \theta) E_2, -\sin \theta E_1 + \cos \theta E_2 \rangle \\ &= \theta'(s) - \omega(s) \end{aligned}$$

Fica assim provada a seguinte:

♣ **Proposição 4.1** ... Consideremos uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow U \subseteq M$  de classe  $C^\infty$ , parametrizada por arco e definida num aberto  $U$  onde está definido um gauge local  $\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$ . Seja  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma determinação (diferenciável) do ângulo orientado entre  $E_1(\gamma(s))$  e  $\gamma'(s)$ , ao longo de  $\gamma$ . Então a curvatura geodésica  $k_\gamma(s)$  é dada por:

$$k_\gamma(s) = \theta'(s) - \omega_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) \quad (4.6.2)$$

Seja  $(M, \mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma superfície Riemanniana orientada. Um polígono  $\mathcal{P}$  em  $M$  é uma região em  $M$  da forma  $\Phi(P)$  onde  $\Phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  é uma parametrização local de  $M$  e  $P \subset U$  é um polígono em  $\mathbb{R}^2$  (não necessariamente convexo). Neste caso o bordo de  $\mathcal{P}$  será uma curva poligonal em  $M$ , que supomos parametrizada por arco através de uma aplicação  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  por pedaços, tal que  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e  $\gamma|_{]a,b]}$  injectiva (ver figura 4.7). Além disso supomos que a parametrização é positiva, i.e.,  $\mathcal{P}$  está “à esquerda” de  $\gamma$ .

Figure 4.7: Polígono  $\mathcal{P}$  em  $M$

Se  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$  é uma subdivisão de  $[a, b]$  tal que  $\gamma|_{]s_{i-1}, s_i]}$  é  $C^\infty$ , aos pontos  $\gamma(s_i)$  chamam-se “**vértices de  $\mathcal{P}$** ” (são as imagens dos vértices de  $P$  sob  $\Phi$ ) e aos segmentos curvos  $\gamma([s_{i-1}, s_i])$  chamam-se “**arestas ou lados de  $\mathcal{P}$** ” (são as imagens das arestas de  $P$  sob  $\Phi$ ).

Fixemos um vértice  $p_i = \gamma(s_i)$ . Define-se então o “**ângulo externo em  $p_i$** ” como sendo o valor do ângulo orientado convexo  $\alpha_i \in ]-\pi, \pi[$  entre  $\gamma'(s_i^-)$  e  $\gamma'(s_i^+)$ , isto é,  $\cos \alpha_i = \langle \gamma'(s_i^+), \gamma'(s_i^-) \rangle$  e  $0 < \alpha_i < \pi$  ou  $-\pi < \alpha_i < 0$  conforme  $\{\gamma'(s_i^-), \gamma'(s_i^+)\}$  seja uma base positiva ou negativa de  $T_p M$ , respectivamente (ver a figura 4.8). O ângulo externo em  $\gamma(a) = \gamma(b)$  é o ângulo entre  $\gamma'(b)$  e  $\gamma'(a)$  escolhido no intervalo  $]-\pi, \pi[$ . Finalmente, o “**ângulo interno em  $p_i$** ” é  $\beta_i = \pi - \alpha_i$ .

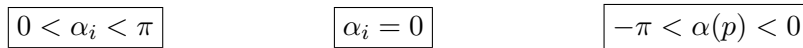


Figure 4.8: Ângulos externos

Consideremos agora em  $\Phi(U)$  um gauge local  $\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$ . Vamos definir uma “**determinação contínua por pedaços**”  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  do ângulo orientado entre  $E_1$  e  $\gamma'$ , ao longo de  $\gamma$ , da seguinte forma. Começamos com  $\theta(a) \in ]-\pi, \pi]$ , e definamos  $\theta(s)$  para  $s \in [a, a_1[$  como a única determinação contínua do ângulo orientado entre  $E_1$  e  $\gamma'$ , ao longo de  $\gamma|_{[a, s_1]}$ . No primeiro vértice  $\gamma(s_1)$  põmos:

$$\theta(s_1) + \alpha_1$$

onde  $\alpha_1$  é o ângulo externo em  $\gamma(s_1)$ . Prolongamos então  $\theta$  por continuidade em  $[s_1, s_2[$ , e procedemos indutivamente até que finalmente:

$$\theta(b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow b} \theta(s) + \alpha_k$$

onde  $\alpha_k$  é o ângulo externo em  $\gamma(b)$  (ver a figura 4.9).

Figure 4.9: Determinação do ângulo orientado entre  $E_1$  e  $\gamma'$

Definimos então o “**ângulo de rotação de  $\gamma$** ” através de:

$$\boxed{\text{Rot}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(b) - \theta(a)} \tag{4.6.3}$$

Note que  $\text{Rot}(\gamma)$  é um múltiplo inteiro de  $2\pi$  uma vez que a definição assegura que  $\theta(a)$  e  $\theta(b)$  são ambas determinações do mesmo ângulo entre  $E_1$  e  $\gamma'(a)$  e por isso a  $\theta(b) - \theta(a)$  é um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Posto isto podemos enunciar o seguinte resultado topológico cuja demonstração omitimos.

♣ **Teorema 4.4** “**Teorema da rotação das tangentes (Hopf Umlaufsatz)**” ... Se  $\gamma$  é uma curva poligonal parametrizada por arco e orientada positivamente, então o ângulo de rotação  $\text{Rot}(\gamma)$  é exactamente igual a  $2\pi$ .

Usando as notações anteriores, estamos finalmente aptos a enunciar e demonstrar o resultado mais importante desta secção:

♣ **Teorema 4.5** “**Fórmula de Gauss-Bonnet**” ... Seja  $\gamma$  uma curva poligonal parametrizada por arco e orientada positivamente como o bordo de um poligono  $\mathcal{P}$  numa superfície Riemanniana orientada  $(M, \mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Então:

$$\boxed{\int_{\mathcal{P}} K dA + \int_{\gamma} k_{\gamma} ds + \sum_{i=1}^k \alpha_i = 2\pi} \tag{4.6.4}$$

onde  $K$  é a curvatura de Gauss de  $\mathbf{g}$  e  $dA$  a forma volume em  $(M, \mathbf{g})$ .

• **Dem.:** Seja  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_k = b$  uma subdivisão de  $[a, b]$  tal que  $\gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$  é  $C^\infty$ . Aplicando o teorema da rotação das tangentes (Hopf Umlaufsatz) e o teorema fundamental do cálculo, temos que:

$$2\pi = \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \theta'(s) ds \tag{4.6.5}$$



Por outro lado, aplicando (4.6.2) a cada pedaço  $\gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ , temos que:

$$\int_{\gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}} k_\gamma ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} k_\gamma(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \theta'(s) ds - \int_{s_{i-1}}^{s_i} \omega(s) ds$$

isto é:

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \theta'(s) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} k_\gamma(s) ds + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \omega(s) ds$$

onde  $\omega(s) = \omega_{\gamma(s)}(\gamma'(s))$ . Substituindo isto em (4.6.5) obtemos:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} k_\gamma(s) ds + \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} \omega(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i + \int_\gamma k_\gamma ds + \int_\gamma \omega \end{aligned}$$

Resta aplicar o teorema de Stokes (ver o teorema 4.3):

$$\int_\gamma \omega = \int_{\mathcal{P}} \Omega = \int_{\mathcal{P}} K dA$$

para concluir. ■

♣ **Corolário 4.1** ... Com as hipóteses do teorema anterior, se  $\gamma$  é formada por arcos geodésicos, então:

$$\boxed{\int_R K dA = 2\pi - \sum_{i=1}^r \alpha_i} \quad (4.6.6)$$

♣ **Corolário 4.2** “Teorema de Gauss” ... Com as hipóteses do teorema anterior, se  $\gamma$  é formada por três arcos geodésicos, isto é, se  $\mathcal{P}$  é um “triângulo geodésico”, e se  $\beta_1, \beta_2$  e  $\beta_3$  são os ângulos internos nos vértices, então:

$$\boxed{\int_R K dA = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi} \quad (4.6.7)$$

O número  $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi$  diz-se o “excesso” do triângulo geodésico  $\mathcal{P}$ .

Portanto se  $\Sigma$  é igual à soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico em  $M$ , então  $\Sigma > \pi$  se  $K > 0$ ,  $\Sigma = \pi$  se  $K = 0$  e  $\Sigma < \pi$  se  $K < 0$ . Exemplos das três situações são dados pela esfera  $\mathbf{S}^2$ , o plano  $\mathbb{R}^2$  e o semi-plano de Poincaré  $H^+$ , respectivamente.

## 4.7 Teorema de Gauss-Bonnet

Seja  $M$  uma superfície compacta (de classe  $C^\infty$ ). Uma “triangulação suave” de  $M$  é uma colecção finita de triângulos  $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_\ell\}$  (polígonos com 3 lados, no sentido da secção anterior), tal que:

- $\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{T}_i = M$ .

Figure 4.10: Triângulação suave

- A intersecção de dois quaisquer desses triângulos  $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$ ,  $i \neq j$  ou é vazia, ou consiste de um vértice comum a ambos os triângulos ou então consiste numa única aresta comum a ambos (ver a figura 4.10).

Toda a superfície compacta (de classe  $C^\infty$ ) admite uma triângulação suave (a demonstração deste facto ultrapassa o âmbito deste curso). Se  $M$  é uma superfície compacta e  $\mathcal{T}$  uma triângulação suave de  $M$ , define-se a “**característica de Euler**” de  $M$ , relativamente à triângulação  $\mathcal{T}$ , através de:

$$\chi_M \stackrel{\text{def}}{=} N_v - N_a + N_f$$

onde  $N_v$  = número de vértices,  $N_a$  = número de arestas e  $N_f$  = número de faces da triângulação  $\mathcal{T}$ . Um resultado fundamental de topologia algébrica afirma que a característica de Euler  $\chi_M$  é um invariante topológico de  $M$  e não depende da triângulação escolhida.

Figure 4.11: Característica de Euler  $\chi_M$ 

♣ **Teorema 4.6** “**Teorema de Gauss-Bonnet ...** *Seja  $M$  uma superfície compacta orientada, munida de uma métrica Riemanniana e de uma triângulação. Então:*

$$\int_M K dA = 2\pi\chi_M \tag{4.7.1}$$

- **Dem.:** Sejam  $\{\mathcal{T}_i : i = 1, \dots, N_f\}$  as faces da triangulação  $\mathcal{T}$ , e para cada  $i$  sejam  $\{\gamma_{ij} : j = 1, 2, 3\}$  as arestas de  $\mathcal{T}_i$  e  $\{\beta_{ij} : j = 1, 2, 3\}$  os ângulos internos de  $\mathcal{T}_i$ . Aplicando a fórmula de Gauss-Bonnet a cada triângulo, e atendendo a que cada ângulo externo é igual a  $\pi$  menos o correspondente ângulo interno, obtemos:

$$\int_{\mathcal{T}_i} K dA + \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{ij}} k ds + \sum_{j=1}^3 (\pi - \beta_{ij}) = 2\pi$$

e somando sobre  $i$ :

$$\sum_{i=1}^{N_f} \int_{\mathcal{T}_i} K dA + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \int_{\gamma_{ij}} k ds + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 (\pi - \beta_{ij}) = \sum_{i=1}^{N_f} 2\pi \quad (4.7.2)$$

Notemos agora que cada aresta aparece exactamente duas vezes nos integrais do tipo  $\int_{\gamma_{ij}} k ds$ , com orientações opostas e por isso a soma desses integrais dá zero. Portanto (4.7.2) fica na forma:

$$\int_M K dA + 3\pi N_f - \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \beta_{ij} = 2\pi N_f \quad (4.7.3)$$

Mas cada ângulo interno  $\beta_{ij}$  aparece exactamente uma vez. Em cada vértice, a soma dos ângulos internos que aí concorrem dá  $2\pi$ , e portanto o somatório  $\sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \beta_{ij}$  dá exactamente  $2\pi N_v$ .

Figure 4.12: A soma dos ângulos internos num vértice dá  $2\pi$

A equação (4.7.3) fica agora na forma:

$$\int_M K dA = 2\pi N_v - \pi N_f \quad (4.7.4)$$

Finalmente, como cada aresta aparece em exactamente dois triângulos, e cada triângulo tem exactamente três arestas, o número total de arestas contadas com multiplicidade é  $2N_a = 3N_f$ , onde contamos cada aresta uma vez por cada triângulo na qual aparece. Portanto  $N_f = 2N_a - 2N_f$  e a equação (4.7.4) fica finalmente na forma:

$$\int_M K dA = 2\pi N_v - 2\pi N_a + 2\pi N_f = 2\pi \mathfrak{X}_M$$

■.

O teorema de Gauss-Bonnet mostra que  $\int_M K dA = 2\pi(N_v - N_a + N_f)$ , para toda a triangulação  $\mathcal{T}$  de  $M$ . Portanto fixando uma tal triangulação, concluímos que a “**curvatura total**”  $\int_M K dA$  é independente da métrica Riemanniana em  $M$ . Por outro lado, se agora fixarmos a métrica obtemos uma prova de que de facto a característica de Euler  $\mathfrak{X}_M$  não depende da triangulação  $\mathcal{T}$  de  $M$ .

Todas as superfícies compactas orientáveis podem ser obtidas a partir da esfera  $\mathbf{S}^2$  por colagem de  $g$  ansas, e a característica de Euler de uma tal superfície é  $\chi_M = 2 - 2g$  (ver a figura 4.13).

Figure 4.13: Superfície de género  $g$ .  $\chi_M = 2 - 2g$ .

♣ **Exercício 4.15** ... *Mostrar que:*

$$\begin{aligned} \int_M K dA > 0 & \quad \text{se } M \text{ é homeomorfa a } \mathbf{S}^2 \\ \int_M K dA = 0 & \quad \text{se } M \text{ é homeomorfa ao toro } T^2 \\ \int_M K dA < 0 & \quad \text{se } M \text{ é homeomorfa a uma superfície de género } g > 2 \end{aligned}$$

♣ **Exercício 4.16** ... *Mostrar que:*

- (i). se existir uma métrica numa superfície compacta orientável  $M$  com curvatura de Gauss  $K > 0$  em todo o  $M$ , então  $M$  deverá ser homeomorfa a  $\mathbf{S}^2$ .
- (ii). se existir uma métrica numa superfície compacta orientável  $M$  com curvatura de Gauss  $K = 0$  em todo o  $M$ , então  $M$  deverá ser homeomorfa a um toro  $T^2$  (de facto uma tal métrica “plana” existe!...). E finalmente:
- (iii). se existir uma métrica numa superfície compacta orientável  $M$  com curvatura de Gauss  $K < 0$  em todo o  $M$ , então  $M$  deverá ser homeomorfa a uma superfície de género  $g > 2$ .

♣ **Exercício 4.17** ... *Mostrar, usando o Teorema de Gauss-Bonnet, que  $\chi_{\mathbf{S}^2} = 2$  e que  $\chi_{\mathfrak{T}^2} = 0$ .*

- **Resolução** ... (i). Para a esfera  $\mathbf{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  com a métrica induzida, temos que  $K \equiv 1$  e portanto:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{S}^2} K dA = \frac{1}{2\pi} \text{área de } \mathbf{S}^2 = \frac{1}{2\pi} 4\pi^2 = 2 = \chi_{\mathbf{S}^2}$$

- (iii). Para o toro  $\mathfrak{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$  com a métrica induzida, temos que  $K = \frac{\cos u}{r(a+r \cos u)}$  e  $dA = r(a + r \cos u) du \wedge dv$ , e portanto:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}^2} K dA = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}^2} \frac{\cos u}{r(a+r \cos u)} r(a+r \cos u) du \wedge dv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} \cos u du = 0 = \chi_{\mathfrak{T}^2}$$

## 4.8 Teorema do Índice de Hopf

Nesta secção  $M$  continua a ser uma superfície orientada. Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vectores  $C^\infty$  em  $M$ . Um ponto  $p \in M$  diz-se uma “singularidade” de  $X$ , se  $X(p) = 0$ .

Se  $p$  é uma “singularidade isolada” de  $X$  definimos o “índice de  $X$  em  $p$ ”,  $\text{Ind}_p(X)$  da seguinte forma: Seja  $V \subset M$  um aberto que contem  $p$ , tal que:

- $V = \Phi(D(0, \epsilon))$  onde  $\Phi$  é uma parametrização local positiva, definida numa bola aberta  $D(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ .
- $p$  é a única singularidade de  $X$  em  $V$ .

Seja  $\alpha_r$ ,  $0 < r < \epsilon$  a imagem da circunferência  $t \in [0, 1] \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in \mathbb{R}^2$ , sob  $\Phi$ .

Figure 4.14:

Seja  $\mathbf{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  uma qualquer métrica Riemanniana em  $M$ , e  $\mathbf{e} = [E_1 \ E_2]$  um gauge local em  $V$  (por exemplo  $E_1 = \frac{\partial}{\partial u} / \|\frac{\partial}{\partial u}\|$  e  $E_2$  perpendicular a  $E_1$  de tal forma que  $\{E_1, E_2\}$  seja uma base positiva em cada ponto de  $V$ ). Consideremos então uma determinação contínua  $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  do ângulo orientado entre  $E_1(\alpha_r(t))$  e  $X(\alpha_r(t))$  ao longo de  $\alpha_r$ , de tal forma que:

$$X(\alpha_r(t)) = (\cos \theta(t)) E_1(\alpha_r(t)) + (\sin \theta(t)) E_2(\alpha_r(t)), \quad \forall t \in [0, 1]$$

Pômos então:

$$\boxed{\text{Ind}_p(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} [\theta(1) - \theta(0)]} \quad (4.8.1)$$

É claro que  $\text{Ind}_p(X)$  é um inteiro. Intuitivamente  $\text{Ind}_p(X)$  é o número de voltas que a extremidade do vector  $X(\alpha_r(t))$  dá quando o seu ponto de aplicação  $\alpha_r(t)$  se desloca ao longo de  $\alpha_r$  dando uma volta inteira em torno da singularidade isolada  $p$  (ver a figura 4.14). É possível demonstrar que a definição do índice não depende das escolhas efectuadas, i.e., da métrica  $\mathbf{g}$ , do gauge  $\mathbf{e}$ , e do circuito  $\alpha_r$ . De forma grosseira  $\text{Ind}_p(X)$  é uma função que depende continuamente de cada uma dessas escolhas e que toma valores em  $\mathbb{Z}$ . Por isso deve permanecer constante sob variações contínuas de cada uma dessas escolhas...

♣ **Teorema 4.7 “Teorema do índice de Hopf”** ... *Seja  $M$  uma superfície orientada compacta e conexa, na qual está definida uma métrica Riemanniana  $\mathbf{g}$ , e  $X \in \mathfrak{X}(M)$  um campo de vectores  $C^\infty$  em  $M$  cujas singularidades são todas isoladas (e portanto em número finito, digamos  $p_1, \dots, p_k$ ). Então:*

$$\boxed{\sum_{i=1}^k \text{Ind}_{p_i}(X) = \mathfrak{X}_M} \quad (4.8.2)$$

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{Ind}_0(X) = +1$$

$$X(x, y) = -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{Ind}_0(X) = +1$$

$$X(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{Ind}_0(X) = +1$$

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{Ind}_0(X) = -1$$

- **Dem.:** Para cada  $i = 1, \dots, k$  escolhamos um pequeno disco  $D_i$  contendo uma e uma só singularidade  $p_i$ , e de tal forma que os  $D_i$  sejam disjuntos. Cada  $D_i$  é difeomorfo ao disco  $D(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$  no plano. Representemos por  $D_i(\epsilon)$  o conjunto que corresponde dessa forma a  $D(0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \epsilon\}$ . Seja  $M(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} M - \bigcup_i (\text{interior de } D_i(\epsilon))$ . Em  $M(\epsilon)$  o campo  $X$  não se anula e podemos definir um gauge local  $\mathbf{e} = [E_1 = \frac{X}{\|X\|} \quad E_2]$ . Se  $\omega$  é a forma de conexão de Levi-Civita neste gauge, então pelo teorema Egregium de Gauss (ver (4.5.15)):

$$\begin{aligned} \int_{M(\epsilon)} K dA &= \int_{M(\epsilon)} d\omega \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega \quad (\text{pelo teorema de Stokes}) \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

Consideremos agora um  $i$  fixo. Em  $D_i$  escolhamos um gauge local fixo  $\hat{\mathbf{e}} = [\hat{E}_1 \quad \hat{E}_2]$ , e seja  $\hat{\omega}$  a

$$X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{Ind}_0(X) = 0$$

$$X(x, y) = (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{Ind}_0(X) = +2$$

$$\boxed{\text{Ind}_N(X) = \text{Ind}_S(X) = +1}$$

$$\boxed{\text{Ind}_N(X) = \text{Ind}_S(X) = +1}$$

$$\boxed{\text{Ind}_p(X) = +2}$$

$$\boxed{\text{Ind}_p(X) = +1, \text{ se } p = 1, 2, 8; \text{ Ind}_p(X) = -1, \text{ se } p = 3, 5, 6, 7; \sum_p \text{Ind}_p(X) = -2}$$

forma de conexão de Levi-Civita nesse gauge. Em  $D_i$  menos uma linha temos que:

$$\widehat{\omega} = \omega - d\varphi$$

onde  $\varphi$  é o ângulo orientado entre  $E_1 = \frac{X}{\|X\|}$  e  $\widehat{E}_1$ , e portanto:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega &= \int_{\partial D_i(\epsilon)} d\varphi + \int_{\partial D_i(\epsilon)} \widehat{\omega} \\ &= \text{Ind}_{p_i}(X) + \int_{\partial D_i(\epsilon)} \widehat{\omega} \end{aligned}$$

Deduzimos então que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_i(\epsilon)} \omega = \text{Ind}_{p_i}(X) + 0$$

e substituindo isto em (4.8.3) obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_M &= \int_M K dA && \text{(pelo teorema de Gauss-Bonnet)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M(\epsilon)} K dA \\ &= \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{p_i}(X) \end{aligned}$$

■.

Se olharmos para a fórmula que acabamos de demonstrar  $\int_M K dA = \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{p_i}(X)$  sob uma outra perspectiva, concluímos que  $\sum_{i=1}^k \text{Ind}_{p_i}(X)$  é independente do campo  $X$  em  $M$  (desde que

$X$  tenha apenas um número finito de singularidades isoladas). Portanto dada uma triângulação  $\mathcal{T}$  de  $M$  podemos definir um campo particular  $X$  que tem exactamente uma singularidade em cada face, aresta e vértice de  $\mathcal{T}$ , com índice 1,  $-1$  e 1 respectivamente. Na figura 4.15 indicamos como deverá ser esse campo  $X$ .

Figure 4.15: Campo associado a uma triângulação

Da figura 4.15 vemos que  $\sum_{i=1}^k \text{Ind}_{p_i}(X) = N_v - N_a + N_f = \mathfrak{X}_M$  o que demonstra que  $\mathfrak{X}_M$  é independente de  $\mathcal{T}$ , e ainda  $2\pi\mathfrak{X}_M = 2\pi \sum_{i=1}^k \text{Ind}_{p_i}(X) = \int_M KdA$  o que demonstra de novo o teorema de Gauss-Bonnet.

♣ **Corolário 4.3** ... *Com as mesmas hipóteses do teorema do índice de Hopf, se existir um campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(M)$  que nunca se anula, então  $\mathfrak{X}_M = 0$ . Em particular em qualquer superfície difeomorfa a uma esfera  $\mathbf{S}^2$  não existe qualquer campo de vectores  $C^\infty$  que nunca se anula.*

## 4.9 Teorema de Morse

♣ **Teorema 4.8** “Teorema de Morse” ... *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Morse definida numa superfície compacta orientável  $M$ . Então  $f$  tem apenas um número finito de pontos críticos. Se  $C_i(f)$  é o número de pontos críticos de índice  $i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), então:*

$$\boxed{C_0(f) - C_1(f) + C_2(f) = \mathfrak{X}_M} \quad (4.9.1)$$

- **Dem.:** Pelo Lema de Morse um ponto crítico não degenerado é isolado, e como  $M$  é compacta  $f$  pode ter apenas um número finito de pontos críticos.

Consideremos agora em  $M$  uma qualquer métrica Riemanniana. Vamos mostrar que:

- O campo gradiente  $\mathbf{grad} f$  (relativamente a essa métrica), cujas singularidades são exactamente os pontos críticos de  $f$ , tem índice local:

$$\text{Ind}_{p_\ell}(\mathbf{grad} f) = (-1)^i \quad \text{se } p_\ell \text{ é um ponto crítico de índice } i \text{ (} i = 0, 1, 2 \text{)}$$

- Em seguida demonstraremos que:

$$\sum_{\ell} \text{Ind}_{p_\ell}(\mathbf{grad} f) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i C_i(f) \quad (4.9.2)$$



Desta forma o teorema de Morse será então uma consequência directa do teorema do índice de Hopf. Vejamos então as provas dos dois factos acima referidos.

Fixemo-nos num dos pontos críticos  $p_\ell$  e consideremos uma vizinhança coordenada positiva  $U_\ell$  que contem  $p_\ell$  e na qual a expressão local de  $f$  é:

$$f|_{U_\ell} = f(p_\ell) + \epsilon u^2 + \epsilon' v^2 \quad (4.9.3)$$

Uma tal vizinhança existe pelo lema de Morse. Consideremos em  $U_\ell - \{p_\ell\}$  o campo de vectores  $X$  ortogonal a  $\mathbf{grad} f$  e tal que  $\{\mathbf{grad} f, X\}$  formam um referencial ortogonal positivo em  $U_\ell - \{p_\ell\}$ . É claro que:

$$\text{Ind}_{p_\ell}(X) = \text{Ind}_{p_\ell}(\mathbf{grad} f)$$

Por outro lado  $X$  é tangente às linhas de nível da função  $f$ , já que:

$$Xf = df(X) = \langle X, \mathbf{grad} f \rangle = 0$$

Atendendo a (4.9.3) temos que  $df|_{U_\ell} = 2\epsilon u du + 2\epsilon' v dv$  e portanto  $X$  é colinear com:

$$-\epsilon' v \frac{\partial}{\partial u} + \epsilon u \frac{\partial}{\partial v}$$

com um coeficiente de proporcionalidade sempre diferente de 0, e portanto de sinal constante em  $U_\ell - \{p_\ell\}$  (estamos a supôr  $U_\ell$  conexa).

Dos exemplos vistos na secção anterior podemos concluir que:

$$\text{Ind}_{p_\ell}(-\epsilon' v \frac{\partial}{\partial u} + \epsilon u \frac{\partial}{\partial v}) = \epsilon\epsilon' = \begin{cases} +1 & \text{se } i = 0 \text{ ou } 2 \\ -1 & \text{se } i = 1 \end{cases}$$

donde se deduz a fórmula pretendida:

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{p_\ell}(X) &= \text{Ind}_{p_\ell}(X) \\ &= \text{Ind}_{p_\ell}(-\epsilon' v \frac{\partial}{\partial u} + \epsilon u \frac{\partial}{\partial v}) \\ &= (-1)^i \end{aligned}$$

■.

$\text{Ind}_{m_\lambda}(\mathbf{grad} f) = +1, \text{ se } \lambda = 1, 5; \text{Ind}_{m_\lambda}(\mathbf{grad} f) = -1, \text{ se } \lambda = 2, 3; \text{Ind}_{m_\lambda}(\mathbf{grad} f) = 0, \text{ se } \lambda = 4$
--

♣ **Corolário 4.4** “Desigualdades de Morse” ... Para toda a função de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida numa superfície compacta orientável  $M$ , são válidas as seguintes desigualdades:

$C_i(f) \geq b_i(M), \quad i = 0, 1 \text{ ou } 2$	(4.9.4)
--	---------

$$\boxed{C_0(f) = 1 = C_2(f), C_1(f) = 0 \text{ e } 1 - 0 + 1 = 2} \quad \boxed{C_0(f) = 1, C_1(f) = 2, C_2(f) = 3 \text{ e } 1 - 2 + 3 = 2}$$

$$\boxed{\text{Em } M_g, g \geq 1 : C_0(f) = 1 = C_2(f), C_1(f) = 2g, \text{ e } 1 - 2g + 1 = 2 - 2g = \tilde{\chi}_{M_g}}$$

## 4.10 Apêndice: interpretação cinemática da conexão de Levi-Civita

### 4.10.1 O grupo $SE(3)$ . Referenciais móveis ortonormados

Uma bijecção afim  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  diz-se um “**movimento rígido**” de  $\mathbb{R}^3$ , se é da forma:

$$\phi : P \mapsto c + g(P), \quad P \in \mathbb{R}^3 \tag{4.10.1}$$

onde  $c \in \mathbb{R}^3$  é um ponto fixo de  $\mathbb{R}^3$  (dependente de  $\phi$  apenas), e onde a aplicação linear homogênea associada a  $\phi$ , é uma aplicação ortogonal que preserva a orientação usual de  $\mathbb{R}^3$ , i.e.,  $g \in SO(3, \mathbb{R})$ .

Os movimentos rígidos de  $\mathbb{R}^3$  constituem um grupo  $SE(3)$ , chamado o “**grupo Euclidiano especial**” de  $\mathbb{R}^3$ , que pode ser identificado com o subgrupo de  $SL(4, \mathbb{R})$  constituído pelas matrizes da forma:

$$\phi = \begin{bmatrix} g & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } g \in SO(3), c \in \mathbb{R}^3 \tag{4.10.2}$$

Uma bijecção afim  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  fica completamente determinada pelo ponto  $c = \phi(O) \in \mathbb{R}^3$  no qual ela transforma a origem  $O \in \mathbb{R}^3$ , e pelos vectores  $E_1 = g(e_1), E_2 = g(e_2), E_3 = g(e_3)$  nos quais a aplicação linear homogênea  $g$ , associada a  $\phi$ , transforma os vectores  $e_1, e_2, e_3$  da base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Usando a notação matricial já conhecida:

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \cdot g$$

Um “**referencial móvel ortonormado positivo**” em  $\mathbb{R}^3$  é uma sequência da forma:

$$r = \{c; E_1, E_2, E_3\} \in \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^{12} \tag{4.10.3}$$

onde  $c$  é um ponto de  $\mathbb{R}^3$ , chamado a origem do referencial  $r$ , e  $\{E_1, E_2, E_3\}$  é uma base ortonormada positiva de  $\mathbb{R}^3$ .

O conjunto de todos os referenciais móveis ortonormados positivos em  $\mathbb{R}^3$  está em correspondência bijectiva com o grupo Euclidiano especial  $SE(3)$ , e é uma variedade de dimensão 6 em  $\mathbb{R}^{12}$ , que notamos por:

$$\mathcal{RO}^+(\mathbb{R}^3)$$

### 4.10.2 Cinemática dos espaços móveis

Seja  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , contendo 0 no seu interior, e  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{E}$  duas cópias de  $\mathbb{R}^3$ , a que chamamos o espaço móvel e o espaço fixo, respectivamente. Um movimento a um parâmetro  $t$ , de  $\mathcal{M}$  em  $\mathcal{E}$ , é uma aplicação de classe  $C^\infty$ :

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (t, P) &\longmapsto \phi(t, P) \end{aligned} \quad (4.10.4)$$

tal que:

- $\phi(0, \cdot) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .
- para cada  $t \in I$ , a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi_t : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ P &\longmapsto \phi_t(P) = \phi(t, P) \end{aligned} \quad (4.10.5)$$

é um movimento rígido de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\phi_t \in SE(3) \cong \mathcal{RO}^+(\mathbb{R}^3), \quad \forall t \in I$$

Portanto para cada instante  $t \in I$ ,  $\phi_t$  é da forma:

$$\phi_t : P \longmapsto c_t + g_t(P), \quad c_t \in \mathcal{E} \cong \mathbb{R}^3, g_t \in SO(3), P \in \mathcal{M} \cong \mathbb{R}^3$$

e pode ser visto como uma matriz:

$$\phi_t = \begin{bmatrix} g_t & c_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou ainda como um referencial móvel  $r_t \in \mathcal{RO}^+(\mathbb{R}^3)$  dependente de  $t \in I$ :

$$t \in I \longmapsto r_t = (c_t = \phi_t(O); E_1(t) = g_t(e_1), E_2(t) = g_t(e_2), E_3(t) = g_t(e_3))$$

Se designarmos por  $e = \{p; e_1, e_2, e_3\}$  o referencial constante em  $\mathcal{M}$ , então podemos escrever:

$$r_t = e \cdot g_t$$

Cada “partícula”  $P \in \mathcal{M}$ , descreve um movimento em  $\mathcal{E}$  dado por:

$$\begin{aligned} \phi_P : I &\longrightarrow \mathcal{E} \\ t &\longmapsto \phi_P(t) = \phi(t, P) \end{aligned} \quad (4.10.6)$$

a que chamamos o movimento da “partícula”  $P \in \mathcal{M}$ .

Dado um movimento  $\phi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$ , podemos definir um campo de vectores (dependente do tempo)  $X_t$  em  $\mathcal{E}$ , da seguinte forma. Seja  $p \in \mathcal{E}$  um ponto arbitrário e  $P = \phi_t^{-1}(p) \in \mathcal{M}$ , a “partícula” de  $\mathcal{M}$  cuja posição no instante  $t$  é o ponto  $p \in \mathcal{E}$ . Definimos então:

$$(X_t)_p \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} \phi_P(\tau) = \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} \phi(\tau, P)$$

Portanto  $(X_t)_p$  é a velocidade (no instante  $t$ ) da “partícula”  $P \in \mathcal{M}$ , cuja posição no instante  $t$  é o ponto  $p \in \mathcal{E}$ . Pondo:

$$\phi_t = \begin{bmatrix} g_t & c_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad g_t \in SO(3), c_t = \phi_t(O) \in \mathcal{E}$$

vem que:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_t \phi_t^{-1} &= \begin{bmatrix} \dot{g}_t & \dot{c}_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_t^{-1} & -g_t^{-1}c_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{g}_t g_t^{-1} & -\dot{g}_t g_t^{-1}c_t + \dot{c}_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10.7)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (X_t)_p &= \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} \phi_\tau P \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} \phi_\tau \phi_t^{-1} p \\ &= \dot{\phi}_t \phi_t^{-1} p \\ &= \begin{bmatrix} \dot{g}_t g_t^{-1} & -\dot{g}_t g_t^{-1}c_t + \dot{c}_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \dot{g}_t g_t^{-1} p - \dot{g}_t g_t^{-1} c_t + \dot{c}_t \end{aligned}$$

A este campo  $X_t$  em  $\mathcal{E}$ :

$$p \mapsto (X_t)_p = \dot{g}_t g_t^{-1} [p - c_t] + \dot{c}_t \quad (4.10.8)$$

chamamos **campo de velocidades** do movimento, no instante  $t$ . Como sabemos (ver o exercício 1.25)  $\dot{g}_t g_t^{-1} \in so(3)$  e portanto existe um único vector  $\Omega_t \in \mathcal{E}$  tal que:

$$p \mapsto (X_t)_p = \Omega_t \times [p - c_t] + \dot{c}_t \quad (4.10.9)$$

$\Omega_t \in \mathcal{E}$  diz-se a **velocidade angular** no instante  $t$ . Se  $P$  é uma “partícula” qualquer em  $\mathcal{M}$ , a velocidade do seu movimento em  $\mathcal{E}$  é dada portanto por:

$$\dot{\phi}_t(P) = \Omega_t \times [\phi_t(P) - \phi_t(O)] + \dot{\phi}_t(O) \quad (4.10.10)$$

onde  $O$  é a origem de  $\mathcal{M}$ .

Se  $X_t = \mathbf{0}$  diz-se que temos uma **imobilização instantânea** no instante  $t$ . Se  $\Omega_t = \mathbf{0}$  (mas  $X_t \neq \mathbf{0}$ ), diz-se que temos uma **translação instantânea** no instante  $t$  (neste caso todos as “partículas” têm a mesma velocidade, igual a  $\dot{c}_t = \dot{\phi}_t(O)$ , no instante  $t$ ). Finalmente, se existir um ponto  $p_0 \in \mathcal{E}$  tal que:

$$(X_t)_{p_0} = 0$$

diz-se que temos uma **rotação instantânea**, no instante  $t$ . Se  $P_0 = \phi_t^{-1} p_0 \in \mathcal{M}$ , é a “partícula” de  $\mathcal{M}$  cuja posição no instante  $t$  é o ponto  $p_0 \in \mathcal{E}$ , então  $\dot{\phi}_t(P_0) = 0$  e  $p_0$  diz-se **centro de rotação instantânea**.

### 4.10.3 Rolamento de uma superfície móvel sobre uma superfície fixa

Vamos agora definir o que se entende por **“rolamento”** de uma superfície móvel  $M \subset \mathcal{M}$  sobre uma superfície fixa  $S \subset \mathcal{E}$ . Suponhamos então que temos um movimento  $\phi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$  tal que, em cada instante  $t$ , a imagem  $\phi_t(M) \subset \mathcal{E}$  é tangente a  $S$  num ponto  $p_t \in S$ :

$$T_{p_t}(\phi_t(M)) = T_{p_t}S, \quad \forall t \in I \quad (4.10.11)$$

Vamos supôr que não existem imobilizações instantâneas ( $X_t \neq \mathbf{0}, \forall t$ ). Se no instante  $t$  o movimento fôr uma translacção instantânea ( $\Omega_t = \mathbf{0}$ ), teremos deslizamento no instante  $t$ . Suponhamos agora que no instante  $t$  o movimento é uma rotação instantânea de centro  $p_t$ . Se a velocidade angular  $\Omega_t$  fôr perpendicular a  $S$  em  $p_t$ , teremos torção. Se a velocidade angular  $\Omega_t$  fôr tangente a  $S$  em  $p_t$ , teremos rolamento.

Concluindo, o rolamento (sem deslizamento nem torção) de uma superfície móvel  $M \subset \mathcal{M}$  sobre uma superfície fixa  $S \subset \mathcal{E}$ , é um movimento  $\phi : I \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$  tal que:

- em cada instante  $t$ , a imagem  $M_t = \phi_t(M) \subset \mathcal{E}$  é tangente a  $S$  num ponto  $p_t \in S$ ,
- $\Omega_t \neq \mathbf{0}, \forall t$  (não há deslizamento),
- $(X_t)_{p_t} = \mathbf{0}$ , isto é,  $p_t$  é centro de rotação instantânea e a velocidade angular  $\Omega_t$  é tangente a  $S$  em  $p_t$  (não há torção).

Seja  $P_t \in M$  a “partícula” de  $M \subset \mathcal{M}$  cuja posição no instante  $t$  é o ponto  $p_t \in \mathcal{E}$ .  $P_t$  é uma curva em  $M$  e a curva de contacto  $p_t = \phi_t(P_t) \in S$ , diz-se o **desenvolvimento** de  $P_t$  em  $S$ .

Se  $V(t)$  é um campo de vectores tangentes a  $M$  ao longo de  $P_t$ , então após o rolamento de  $M$  em  $S$ , obtemos um campo de vectores tangentes a  $S$  ao longo de  $p_t$ , nomeadamente o campo:

$$(d\phi_t)_{P_t}(V(t)) = g_t V(t) \tag{4.10.12}$$

uma vez que  $(d\phi_t)_P = g_t, \forall P \in M$ .

#### 4.10.4 Rolamento de uma esfera sobre um plano

Vamos estudar o rolamento de uma esfera  $M = \mathbf{S}^2$  sobre um plano fixo  $S$ , tangente à esfera num dos seus pontos.

Seja  $M = \mathbf{S}^2 \subset \mathcal{M}$  a esfera de dimensão 2 em  $\mathcal{M}$ . Consideremos um referencial ortonormado fixo  $\{e_1, e_2, e_3\}$  para  $\mathcal{E}$ , e sejam  $(x, y, z)$  as coordenadas relativas a este referencial, de tal forma que  $S \subset \mathcal{E}$  seja o plano  $z = -1$ , que no instante inicial coincide com o plano tangente à esfera no pólo sul  $P_0 \in \mathbf{S}^2$  (ver a figura 4.16).

Vamos rolar a esfera sobre o plano  $S$ , designando por  $p_t \in S$  o ponto de contacto da esfera  $\mathbf{S}_t^2 = \phi_t(\mathbf{S}^2)$  com o plano  $S$ , em cada instante  $t$ . Seja  $P_t \in M$  a “partícula” de  $\mathbf{S}^2 \subset \mathcal{M}$  cuja posição no instante  $t$  é o ponto  $p_t \in S$ , de tal forma que  $p_t = \phi_t(P_t) \in S$ , é o desenvolvimento de  $P_t$  em  $S$ .

Estamos a supôr que o referido rolamento é dado pelo movimento:

$$\phi_t \in SE(3) \quad \phi_t = \begin{bmatrix} g_t & c_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com } g_t \in SO(3), c_t \in \mathcal{E}$$

que satisfaz as três condições da definição de rolamento. Temos então que:

$$\boxed{p_t = \phi_t(P_t) = g_t P_t + c_t} \tag{4.10.13}$$

Como  $\phi_t(\mathbf{S}^2)$  é tangente a  $S$  no ponto de contacto  $p_t = \phi_t(P_t)$ , temos que (ver a figura 4.16):

$$g_t P_t = -e_3 \tag{4.10.14}$$

donde:

$$p_t = g_t P_t + c_t = c_t - e_3$$

ou:

$$c_t = p_t + e_3 \tag{4.10.15}$$

Por definição de rolamento,  $p_t$  é centro de rotação instantânea, e portanto:

$$\mathbf{0} = (X_t)_{p_t} = \Omega_t \times [p_t - c_t] + \dot{c}_t \tag{4.10.16}$$

Figure 4.16: Rolamento de uma esfera sobre um plano

Substituindo (4.10.14) e (4.10.15), obtemos:

$$\Omega_t \times e_3 = \dot{p}_t \quad (4.10.17)$$

e como  $\Omega_t$  é tangente a  $S$ , por definição de rolamento, concluímos que  $\Omega_t$  é perpendicular a  $\dot{p}_t$  e que  $\{\dot{p}_t, \Omega_t\}$  tem a mesma orientação de  $\{e_1, e_2\}$  (ver a figura 4.16).

Note ainda que:

$$g_t \dot{P}_t = \dot{p}_t \quad (4.10.18)$$

Com efeito, derivando  $p_t = g_t P_t + c_t$  em ordem a  $t$ , obtemos:

$$\dot{p}_t = \dot{g}_t P_t + g_t \dot{P}_t + \dot{c}_t$$

mas como  $p_t$  é centro de rotação instantânea,  $\dot{g}_t P_t + \dot{c}_t = 0$  e finalmente como  $\dot{p}_t = \dot{c}_t$ , deduzimos (4.10.18).

Definamos agora dois campos de vectores  $V_1, V_2$  ao longo da curva  $P_t$  em  $\mathbf{S}^2$ , através de:

$$V_1(t) = g_t^{-1} e_1 \quad \text{e} \quad V_2(t) = g_t^{-1} e_2$$

Então:

$$V_1(0) = e_1 \quad \text{e} \quad V_2(0) = e_2$$

e por (4.10.14):

$$\begin{aligned} \langle V_1(t), -P_t \rangle &= \langle g_t^{-1} e_1, g_t^{-1} e_3 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0 \\ \langle V_2(t), -P_t \rangle &= \langle g_t^{-1} e_2, g_t^{-1} e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0 \end{aligned}$$

uma vez que  $g_t$  preserva o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Concluímos portanto que  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  são ambos tangentes à esfera  $\mathbf{S}^2$  em  $P_t$ , para todo o  $t$ .

Vamos mostrar agora que:

- (i)...  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  são paralelos ao longo da curva  $P_t$  em  $\mathbf{S}^2$ , relativamente à conexão de Levi-Civita de  $\mathbf{S}^2$ .
- (ii)... Se  $\dot{P}_t = k_1(t)V_1(t) + k_2(t)V_2(t)$ , então  $\dot{p}_t = k_1(t)e_1 + k_2(t)e_2$

Para provar (i), derivamos  $g_t V_1(t) = e_1$  para obter:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -g_t^{-1} \dot{g}_t V_1 \\ &= -g_t^{-1} (\dot{g}_t g_t^{-1}) (g_t V_1) \\ &= -g_t^{-1} (\dot{g}_t g_t^{-1}) e_1 \\ &= -g_t^{-1} (\omega_t \times e_1) \end{aligned}$$

Com  $\omega_t \times e_1$  tem a direcção de  $e_3$ ,  $g_t^{-1}(\omega_t \times e_1)$  tem a direcção de  $P_t$ , o que significa que  $\dot{V}_1$  é perpendicular à esfera  $\mathbf{S}^2$  em  $P_t$  e portanto  $\frac{DV_1}{dt} = 0$ , isto é,  $V_1$  é paralelo ao longo da curva  $P_t$ , relativamente à conexão de Levi-Civita de  $\mathbf{S}^2$ . O mesmo acontece com  $V_2$ .

A outra afirmação (ii). é óbvia uma vez que  $g_t$  transforma  $\dot{P}_t$ ,  $V_1(t)$  e  $V_2(t)$  respectivamente em  $\dot{p}_t$ ,  $e_1$  e  $e_2$ .

Concluimos portanto que um campo de vectores  $V(t)$  ao longo de  $P_t$ , é paralelo relativamente à conexão de Levi-Civita de  $\mathbf{S}^2$  se e só se a sua imagem por rolamento:

$$(d\phi_t)_{P_t}(V(t)) = g_t V(t)$$

é um campo de vectores constante em  $S$  ao longo de  $p_t$ . É esta a interpretação cinemática da conexão de Levi-Civita em  $\mathbf{S}^2$ .

### 4.10.5 Rolamento de uma superfície sobre um plano

Seja  $M$  uma superfície em  $\mathcal{M}$ , e  $S = p + T_p M \subset \mathcal{E}$  o plano afim tangente a  $M$  num ponto  $p \in M$ .

Vamos rolar a superfície  $M$  sobre o plano  $S$ , designando por  $p_t \in S$  o ponto de contacto de  $M_t = \phi_t(M)$  com o plano  $S$ , em cada instante  $t$ . Seja  $P_t \in M$  a “partícula” de  $M \subset \mathcal{M}$  cuja posição no instante  $t$  é o ponto  $p_t \in S$ , de tal forma que  $p_t = \phi_t(P_t) \in S$ , é o desenvolvimento de  $P_t$  em  $S$ .

Consideremos um referencial ortonormado fixo  $\{e_1, e_2, e_3\}$  para  $\mathcal{E}$ , com origem em  $p_0 = P_0 = \mathbf{0}$ , e sejam  $(x, y, z)$  as coordenadas relativas a este referencial, de tal forma que  $S \subset \mathcal{E}$  seja o plano  $z = 0$ . Suponhamos ainda que  $N(t)$  é o campo de vectores unitários normais a  $M$  ao longo de  $P_t$ , tal que  $N(0) = e_3$  (ver a figura 4.17).

Figure 4.17: Rolamento de uma superfície sobre um plano

Mais uma vez supômos que o referido rolamento é dado pelo movimento:

$$\phi_t \in SE(3) \quad \phi_t = \begin{bmatrix} g_t & c_t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad g_t \in SO(3), c_t \in \mathcal{E}$$

que satisfaz as três condições da definição de rolamento. Tal como na secção anterior temos que:

$$g_t(\dot{P}_t) = \dot{p}_t \tag{4.10.19}$$

e como  $M_t = \phi_t(M)$  é tangente a  $S$  em  $p_t$  (ver a figura 4.17):

$$g_t(N(t)) = e_3 \tag{4.10.20}$$

Definamos como antes dois campos de vectores  $V_1, V_2$ , tangentes a  $M$  ao longo da curva  $P_t$ , através de:

$$V_1(t) = g_t^{-1}e_1 \quad \text{e} \quad V_2(t) = g_t^{-1}e_2$$

Podemos pôr:

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N}(t) = \lambda_1(t)V_1(t) + \lambda_2(t)V_2(t) \quad (4.10.21)$$

Derivando (4.10.20) em ordem a  $t$ , obtemos:

$$\dot{g}_t N(t) + g_t \dot{N}(t) = 0$$

e portanto:

$$\dot{g}_t N(t) = -g_t (\lambda_1(t)V_1(t) + \lambda_2(t)V_2(t)) = -\lambda_1(t)e_1 - \lambda_2(t)e_2$$

Usando novamente (4.10.20), obtemos então:

$$\dot{g}_t g_t^{-1} e_3 = -\lambda_1(t)e_1 - \lambda_2(t)e_2 \quad (4.10.22)$$

ou de forma equivalente:

$$\Omega_t \times e_3 = -\lambda_1(t)e_1 - \lambda_2(t)e_2 \quad (4.10.23)$$

Como  $\Omega_t \neq \mathbf{0}$ ,  $\lambda_1(t)$  e  $\lambda_2(t)$  não se anulam simultâneamente. Por outro lado como a velocidade angular  $\Omega_t$  está em  $S$ , vemos que  $\Omega_t \times e_1$  e  $\Omega_t \times e_2$  estão na direcção de  $e_3$ . De facto, temos que  $\Omega_t = \lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2$ .

Mas:

$$\frac{dV_1}{dt} = -g_t^{-1}(\dot{g}_t g_t^{-1} e_1) \quad \text{e} \quad \frac{dV_2}{dt} = -g_t^{-1}(\dot{g}_t g_t^{-1} e_2)$$

o que significa que  $\frac{dV_1}{dt}$  e  $\frac{dV_2}{dt}$  estão ambos segundo a direcção de  $N(t)$ , isto é,  $V_1$  e  $V_2$  são paralelos ao longo de  $P_t$ , relativamente à conexão de Levi-Civita de  $M$ .

Como na secção anterior, concluímos ainda que um campo de vectores  $V(t)$  ao longo de  $P_t$ , é paralelo relativamente à conexão de Levi-Civita de  $M$  se e só se a sua imagem por rolamento:

$$(d\phi_t)_{P_t}(V(t)) = g_t V(t)$$

é um campo de vectores constante em  $S$  ao longo de  $p_t$ . É esta a interpretação cinemática da conexão de Levi-Civita em  $M$ .

## 4.11 Apêndice: Convenções de álgebra linear

Considere um espaço vectorial  $V$  de dimensão  $r$ , sobre um corpo  $\mathfrak{K}$ . Seja  $\mathcal{B}(V)$  o conjunto de todas as bases (ou referenciais) em  $V$ . Uma base  $\mathbf{e} \in \mathcal{B}(V)$  será representada por uma matriz-linha:

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_r]$$

ou simplesmente por  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_a$ . O grupo linear geral  $Gl(V) \cong Gl(r, \mathfrak{K})$  actua à direita de  $\mathcal{B}(V)$  através de:

$$\mathbf{e} \cdot g = \hat{\mathbf{e}} \quad \text{onde } \hat{\mathbf{e}} \text{ é a base } \hat{\mathbf{e}}_b \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_a g_b^a \quad (4.11.1)$$

com  $g = (g_b^a) \in Gl(r, \mathfrak{K})$ . De facto:

$$(\mathbf{e} \cdot gh)_a = \mathbf{e}_b (gh)_a^b = \mathbf{e}_b g_c^b h_a^c = (\mathbf{e} \cdot g)_c h_a^c = ((\mathbf{e} \cdot g) \cdot h)_a$$

isto é  $\mathbf{e} \cdot gh = (\mathbf{e} \cdot g) \cdot h$ , o que mostra que de facto a acção é à direita. Além disso a acção é “**transitiva**” (qualquer base pode ser transformada numa qualquer outra através de uma matriz conveniente de  $Gl(r, \mathfrak{K})$ ) e “**livre**” (duas matrizes distintas transformam uma certa base em bases diferentes).

Por vezes é útil encarar um referencial  $\mathbf{e} \in \mathcal{B}(V)$  como um isomorfismo (representado pela mesma letra):

$$\mathbf{e} : \mathfrak{K}^r \longrightarrow V$$



$\mathbf{e} = \mathbf{e}_a^i$ . Neste caso a acção direita de  $Gl(r, \mathfrak{K})$  em  $\mathcal{B}(V)$ , é dada pela composta  $\mathbf{e} \cdot g = \mathbf{e} \circ g$ :

$$\mathfrak{K}^r \xrightarrow{g} \mathfrak{K}^r \xrightarrow{\mathbf{e}} V$$

Seja  $\mathbf{v} \in V$  um vector de  $V$ , e  $\mathbf{e}, \hat{\mathbf{e}} \in \mathcal{B}(V)$  duas bases relacionadas por  $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$ . Representemos por  $\xi^a$  (resp.,  $\hat{\xi}^a$ ), as coordenadas de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathbf{e}$  (resp., na base  $\hat{\mathbf{e}}$ ). Então:

$$\mathbf{v} = \xi^a \mathbf{e}_a = \hat{\xi}^b \hat{\mathbf{e}}_b = \hat{\xi}^b \mathbf{e}_a g_b^a$$

donde se deduz que  $\xi^a = g_b^a \hat{\xi}^b$ , ou de forma equivalente:

$$\hat{\xi}^b = (g^{-1})_a^b \xi^a$$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{e}_b \mapsto \hat{\mathbf{e}}_b = \mathbf{e}_a g_b^a \quad \Rightarrow \quad \xi^b \mapsto \hat{\xi}^b = (g^{-1})_a^b \xi^a} \quad (4.11.2)$$

isto é as componentes de um vector  $\mathbf{v} \in V$  transformam-se com “variância” oposta (ou contravariante) à das bases.

Vejamos agora como reconstruir o espaço vectorial  $V$  a partir do conjunto  $\mathcal{B}(V)$  de todas as suas bases. Para isso, notemos que um vector  $\xi = (\xi^a) \in \mathfrak{K}^r$ , e uma base  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_a \in \mathcal{B}(V)$ , determinam um vector  $\mathbf{v} = \xi^a \mathbf{e}_a$  em  $V$ . No entanto existem muitos pares diferentes  $(\mathbf{e}, \xi) \in \mathcal{B}(V) \times \mathfrak{K}^r$  que dão origem ao mesmo vector de  $V$ . De facto (4.11.2) mostra que todos os pares da forma  $(\mathbf{e} \cdot g, g^{-1}\xi) \in \mathcal{B}(V) \times \mathfrak{K}^r$ , onde  $g \in Gl(r, \mathfrak{K})$ , definem o mesmo vector  $\mathbf{v} \in V$ .

Por isso, se em  $\mathcal{B}(V) \times \mathfrak{K}^r$  definimos a seguinte relação de equivalência:

$$\boxed{(\mathbf{e}, \xi) \sim (\hat{\mathbf{e}}, \hat{\xi}) \quad \text{sse existe } g \in Gl(r, \mathfrak{K}) \text{ tal que } \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g \text{ e } \hat{\xi} = g^{-1}\xi} \quad (4.11.3)$$

vemos que a classe de equivalência de um elemento  $(\mathbf{e}, \xi) \in \mathcal{B}(V) \times \mathfrak{K}^r$  corresponde exactamente a um único vector de  $V$ :

$$\boxed{[\mathcal{B}(V) \times \mathfrak{K}^r] / \sim \cong V} \quad (4.11.4)$$

Consideremos agora o conjunto  $\mathcal{B}^*(V)$ , de todos as bases duais para  $V^*$  (ou co-referenciais em  $V^*$ ). Um co-referencial  $\Theta \in \mathcal{B}^*(V)$  será representado por um vector-coluna:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \vdots \\ \Theta^n \end{bmatrix}$$

ou simplesmente por  $\Theta = \Theta^a$ , onde  $\Theta^a \in V^*$ ,  $a = 1, \dots, n$ . Suponhamos que  $\mathbf{e}, \hat{\mathbf{e}} \in \mathcal{B}(V)$  são duas bases para  $V$ , relacionadas por  $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$ , e que  $\Theta, \hat{\Theta} \in \mathcal{B}^*(V)$  são as bases duais a  $\mathbf{e}$  e  $\hat{\mathbf{e}}$ , respectivamente, de tal forma que  $\Theta^a(\mathbf{e}_b) = \delta_b^a$  e  $\hat{\Theta}^c(\hat{\mathbf{e}}_d) = \delta_d^c$ . Então, como:

$$\Theta^a(\hat{\mathbf{e}}_b) = \Theta^a(\mathbf{e}_c g_b^c) = \delta_c^a g_b^c = g_b^a$$

e, por outro lado:

$$(g_c^a \hat{\Theta}^c)(\hat{\mathbf{e}}_b) = g_c^a \delta_b^c = g_b^a$$

isto é, ambas as formas tomam o mesmo valor em cada elemento da base  $\hat{\mathbf{e}}$ , vemos que  $\Theta^a = g_c^a \hat{\Theta}^c$ , ou de forma equivalente:

$$\hat{\Theta}^b = (g^{-1})_c^b \Theta^c$$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{e}_b \mapsto \widehat{\mathbf{e}}_b = \mathbf{e}_a g_b^a \quad \Rightarrow \quad \Theta^b \mapsto \widehat{\Theta}^b = (g^{-1})_c^b \Theta^c} \quad (4.11.5)$$

O grupo linear  $Gl(V) \cong Gl(r, \mathfrak{K})$  actua à direita de  $\mathcal{B}^*(V)$  através de:

$$\Theta \cdot g = \widehat{\Theta} \quad \text{onde } \widehat{\Theta} \text{ é o co-referencial } \widehat{\Theta}^b \stackrel{\text{def}}{=} (g^{-1})_c^b \Theta^c \quad (4.11.6)$$

Note que de facto esta é uma acção direita, já que:

$$(\Theta \cdot gh)^b = ((gh)^{-1})_c^b \Theta^c = (h^{-1})_d^b (g^{-1})_c^d \Theta^c = (h^{-1})_d^b (\Theta \cdot g)^d = ((\Theta \cdot g) \cdot h)^b$$

Por vezes é também útil encarar um co-referencial  $\Theta \in \mathcal{B}^*(V)$  como um isomorfismo (representado pela mesma letra):

$$\Theta : V \longrightarrow \mathfrak{K}^r$$

isto é, como uma 1-forma em  $V$  com valores em  $\mathfrak{K}^r$ ,  $\Theta = \Theta_i^a$ . Neste caso a acção direita de  $Gl(r, \mathfrak{K})$  em  $\mathcal{B}^*(V)$ , é dada pela composta  $\Theta \cdot g = g^{-1} \circ \Theta$ :

$$V \xrightarrow{\Theta} \mathfrak{K}^r \xrightarrow{g^{-1}} \mathfrak{K}^r$$

Seja  $\alpha \in V^*$  um covector, e  $\Theta, \widehat{\Theta} \in \mathcal{B}^*(V)$  dois co-referenciais relacionados como em (4.11.5). Representemos por  $\xi_a$  (resp.,  $\widehat{\xi}_a$ ), as coordenadas de  $\alpha$  na base  $\Theta$  (resp., na base  $\widehat{\Theta}$ ). Então por (4.11.6):

$$\alpha = \xi_c \Theta^c = \widehat{\xi}_b \widehat{\Theta}^b = \widehat{\xi}_b (g^{-1})_c^b \Theta^c$$

e deduzimos que  $\xi_c = \widehat{\xi}_b (g^{-1})_c^b$  ou de forma equivalente:

$$\widehat{\xi}_a = \xi_b g_a^b$$

Resumindo:

$$\boxed{\mathbf{e}_b \mapsto \widehat{\mathbf{e}}_b = \mathbf{e}_a g_b^a \quad \Rightarrow \quad \xi_b \mapsto \widehat{\xi}_b = \xi_a g_b^a} \quad (4.11.7)$$

isto é as componentes de um covector  $\alpha \in V^*$  transformam-se com a mesma “variância” das bases (ou covariantemente).

Suponhamos agora que  $Gl(V) \cong Gl(r, \mathfrak{K})$  actua à esquerda de um espaço  $Q$ :

$$(g, q) \in Gl(r, \mathfrak{K}) \times Q \mapsto g \cdot q \in Q \quad (4.11.8)$$

Em  $\mathcal{B}(V) \times Q$  definimos a seguinte relação de equivalência:

$$\boxed{(\mathbf{e}, q) \sim (\widehat{\mathbf{e}}, \widehat{q}) \quad \text{sse existe } g \in Gl(r, \mathfrak{K}) \text{ tal que } \widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g \text{ e } \widehat{q} = g^{-1} \cdot q} \quad (4.11.9)$$

A classe de equivalência de um elemento  $(\mathbf{e}, q) \in \mathcal{B}(V) \times Q$  representa-se por  $[\mathbf{e}, q]$ . Portanto:

$$[\mathbf{e}, q] = \{(\mathbf{e} \cdot g, g^{-1} \cdot q) : g \in Gl(r, \mathfrak{K})\}$$

é uma órbita da acção direita de  $Gl(r, \mathfrak{K})$  em  $\mathcal{B}(V) \times Q$ , definida pela fórmula  $(\mathbf{e}, q) \cdot g \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{e} \cdot g, g^{-1} \cdot q)$ .

Exemplos...

- $Q = \mathfrak{K}^r$  cujos elementos são representados por vectores-coluna  $\xi = (\xi^a)$ , e a acção esquerda de  $Gl(r, \mathfrak{K})$  em  $\mathfrak{K}^r$  é a multiplicação usual de matrizes  $(g, \xi) \mapsto g \cdot \xi = g\xi$ , isto é, a **representação fundamental** de  $Gl(r, \mathfrak{K})$  em  $\mathfrak{K}^r$ . Neste caso a discussão anterior, nomeadamente (4.11.3), mostra que o conjunto das classes de equivalência identifica-se com  $V$ . De facto, "um vector de  $V$  não é mais do que uma sequência de  $r$  números  $\xi^a$  que se transformam (contravariantemente) como um vector"!!...
- $Q$  é novamente  $\mathfrak{K}^r$  (vectores-coluna  $\xi = (\xi^a)$ ), e a acção esquerda de  $Gl(r, \mathfrak{K})$  em  $\mathfrak{K}^r$  é a multiplicação de matrizes  $(g, \xi) \mapsto g \cdot \xi = (g^{-1})^t \xi$ , isto é, a **representação contragradiente** de  $Gl(r, \mathfrak{K})$  em  $\mathfrak{K}^r$ . Neste caso a discussão anterior (nomeadamente a transposta da fórmula (4.11.7), uma vez que insistimos em considerar a acção em vectores-coluna de  $Q = \mathfrak{K}^r$ ), mostra que o conjunto das classes de equivalência identifica-se com  $V^*$ . De facto, "um covector em  $V^*$  não é mais do que uma sequência de  $r$  números  $\xi_a$  que se transformam (covariantemente) como um covector"!!...
- $Q = \mathbb{R}$  e a acção esquerda de  $Gl(r, \mathbb{R})$  em  $\mathbb{R}$  é dada por:

$$(g, x) \mapsto g \cdot x = |\det g|^\lambda x$$

onde  $\lambda$  é um número real fixo não nulo. Neste caso as classes de equivalência dizem-se "**densidades escalares de peso  $\lambda$** ".

- $Q = \underbrace{\mathfrak{K}^n \otimes \cdots \otimes \mathfrak{K}^n}_{(r+s) \text{ factores}}$  e  $Gl(n, \mathfrak{K})$  actua em  $Q$  através de:

$$g \cdot (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_r \otimes \xi_{r+1} \otimes \cdots \otimes \xi_{r+s}) = g\xi_1 \otimes \cdots \otimes g\xi_r \otimes (g^{-1})^t \xi_{r+1} \otimes \cdots \otimes (g^{-1})^t \xi_{r+s} \quad (4.11.10)$$

O conjunto das classes de equivalência identifica-se com  $\mathcal{T}_{r,s}(V)$ , o espaço dos tensores de tipo  $(r, s)$  em  $V$ .

Futuramente veremos mais exemplos desta situação.

---

**FIM**

---