FCUP
Dep. Matemática Pura

Mestrado em Matemática

Matemática e Música

Ano lectivo de 2006/07

Ricardo Francisco Barbosa Paredes

Tese de Mestrado

Conteúdo

0.1 Os novos desafios do ensino da Matemática

"[...] a verdadeira matemática não tem nada a ver com aplicações, nem com os processos de cálculo que aprendes na escola. Estuda idealizações intelectuais abstractas que, pelo menos enquanto o matemático está ocupado com elas, não tocam de forma nenhuma no mundo físico e sensível [...] Os matemáticos [...] sentem nos seus estudos o mesmo prazer que os jogadores de xadrez encontram no xadrez. Na verdade, a estrutura psicológica do verdadeiro matemático está mais próxima da do poeta ou do compositor musical, noutras palavras, de alguém preocupado com a criação da Beleza e a procura da Harmonia e da Perfeição. Ele é o pólo oposto do homem prático, o engenheiro, o político ou o homem de negócios."

Apostolos Doxiadis

É um facto que a Matemática, hoje em dia, não tem o *charme* de outros cursos. Além disso, a imagem pública que tem sido dada da Matemática, quer pelos resultados escolares dos alunos, quer pelas críticas ao profissionalismo dos professores, quer ainda pelo tom azedo com que têm decorrido muitas discussões na imprensa, tem contribuído para que esta situação se agrave cada vez mais. Os alunos que se interessavam no passado pela Matemática, hoje em dia interessam-se por outras coisas e procuram outros cursos. Há que pensar como evitá-lo, mas há que pensar também nos outros alunos, os que querem fazer da Matemática um elemento fundamental da sua vida.

No processo de ensino-aprendizagem há um triângulo didáctico fundamental, envolvendo o aluno, o saber e o professor, que se enquadra num contexto bem definido. Estes elementos têm uma dinâmica própria que é preciso compreender.

Em primeiro lugar, temos a Matemática. A Matemática tem um carácter dinâmico. A sua história é claramente marcada pelas tendências para a generalização, para a abstracção e para a formalização. A princípio, recebeu de modo muito frio as novas tecnologias, mas parece que, finalmente, isso está ultrapassado. Na época actual, a Matemática tem tido uma expansão sem precedentes, não só nas diversas áreas em que se organiza inteiramente, como nas suas aplicações a todos os campos da actividade humana. Podemos dizer que a Matemática, como ciência, está bem e recomenda-se. No entanto, é preciso reconhecer que a Matemática escolar tem finalidades diferentes da Matemática-ciência. Têm certamente muitos pontos de contacto mas, tendo outras finalidades, devem ter também os seus pontos de diferenciação.

Em segundo lugar temos o aluno. Os alunos hoje em dia têm pouco a ver com os alunos que estavam no liceu nos anos 40 e 50 do século XX. A sociedade hoje é outra, outra é a população discente. Uma sala de aula de hoje e uma sala de aula dessa época, não têm nada em comum. Para ser um bom professor é essencial conhecer os alunos. O professor tem sempre que se dirigir aos seus alunos concretos, isso é um dos elementos fundamentais do seu conhecimento profissional. Ora para haver aprendizagem, é fundamental que o aluno se envolva.

Em terceiro lugar temos o professor. Ele tem que conhecer muito bem os outros vértices do triângulo. Tem que conhecer a Matemática, caso contrário não a pode ensinar. Como vimos, tem de conhecer os alunos. Mas para além disso, tem de conhecer o contexto, as condições em que está a trabalhar. Hoje em dia já se percebeu que o professor tem que ter um papel decisivo na gestão curricular. Por isso, o papel do professor, não é simplesmente o de aplicar o currículo, servir de correia da transmissão a um programa bem definido e desbobiná-lo na sala de aula, mas, pelo contrário, criar situações diversificadas, produzir materiais, conceber tarefas que vão exactamente no encontro dos interesses e perspectivas dos alunos. Portanto, o papel do professor, hoje em dia, é visto de uma maneira diferente de anteriormente.

E, finalmente, temos o contexto. Este tem muitas dimensões, incluindo a escola, o grupo disciplinar, o conjunto dos professores da escola, com a sua cultura própria, a comunidade directamente envolvente da escola, o sistema educativo, incluindo o sistema de avaliação e a própria sociedade. Estes elementos estão em constante mudança.

A aprendizagem da Matemática é um processo complexo, que envolve momentos diversificados. Na verdade, envolve várias fases, por exemplo, exploração, formalização, integração. É preciso notar que formalização não é o mesmo que formalismo: a formalização é inerente à Matemática, o formalismo é a formalização levada a um nível exacerbado, em que se perde o significado das ideias matemáticas e esta ciência é reduzida a um jogo de símbolos.

A Matemática tem por grande finalidade contribuir para o desenvolvimento dos indivíduos, capacitando-os para uma plena participação na vida social, tendo em vista o exercício da cidadania. Para que isso aconteça, os alunos devem ter uma experiência matemática genuína, lidando com situações matematicamente ricas e usando conceitos matemáticos na interpretação e modelação da realidade. É preciso que as lógicas instrumentais estranhas a tudo isto - como a selecção para os cursos superiores - não ponham em causa as finalidades fundamentais.

Os factores de insucesso indicados mostram que a melhoria do ensino da Matemática passa por clarificar as finalidades do ensino desta disciplina, definir expectativas claras e positivas para os alunos, diversificar os programas no ensino secundário, reduzir o papel que a Matemática tem como instrumento de selecção, aperfeiçoar as políticas e programas de formação inicial e contínua e promover uma nova cultura profissional entre os professores. Deverá fazê-lo com um investimento político contínuo. É nos professores que está a chave para a melhoria do ensino. Mas para além dos professores, será necessária a intervenção dos educadores matemáticos, dos matemáticos e de muitos intervenientes, num projecto nacional mobilizador.

A Matemática tem algo de fundamental a oferecer a todas as crianças e jovens. Não a Matemática autoritária dos dogmas, do certo e do errado, das humilhações e castigos, mas a Matemática das relações, das conexões, das instituições e das descobertas. Vários projectos inovadores realizados no terreno mostram que isso está perfeitamente ao nosso alcance. Proporcionar a todos os alunos experiências matemáticas genuínas, deveria ser, por isso mesmo, uma prioridade educativa.

O estudo da Matemática através da Música abre novos horizontes criativos e foca-se numa aprendizagem através da exploração de ideias matemáticas, na estimulação das crianças para inventarem as suas próprias estratégias de resolução de problemas.

A Música foi desde os tempos da Grécia antiga associada à Matemática dado que o som produzido por uma nota só fazia uma boa harmonia se fosse associado a outro som que lhe fosse proporcional. Esta relação foi observada pela primeira vez por Pitágoras e hoje em dia é essencial para a criação de uma boa sinfonia musical. Foi através deste pensamente longíquo que decidi desenvolver este projecto para redigir a minha tese de mestrado. Não pretendia dar continuidade a teorias matemáticas antigas, onde já há demasiados estudos, mas desenvolver uma certa originalidade como deve ser essencial numa tese de mestrado. Esta advém da preciosa orientação do professor João Nuno Tavares. Em conjunto pretendemos dar a conhecer duas teorias que associam a Matemática à Música ainda um pouco desconhecidas. No primeiro capítulo abordaremos a Campanologia associada à teoria de grupos e no segundo capítulo os ritmos numa perspectiva geométrica e estatística. Além desta abordagem científica também pretendi abordar estas duas teorias sob uma perspeciva pedagógica. Dado que estou inserido num mestrado que envolve educação matemática é de todo natural que este estudo se direccione para a aprendizagem do aluno. A inovação das aprendizagens é, sem dúvida, estimulante e entusiasmante pois permite que os alunos se sintam mais motivados para a Matemática.

Capítulo 1

Campanologia e teoria de grupos

1.1 Introdução

As origens da teoria de grupos são antigas - remontam a Euler (1707-83), Lagrange (1736-1813), Gauss (1777-1855), Cauchy (1789-1857), Abel (1802-29) e Galois (1811-32).

Outra data notável é 1832, ano em que Galois morre e no qual ele cria algumas das maiores contribuições para a teoria de grupos. É importante notar que nenhum dos matemáticos já referidos tratou a teoria de grupos como uma área independente da Matemática, e nem sequer tentaram qualquer abordagem axiomática a essa teoria. Apenas por volta de 1870, Kronecker (1823-91) enunciou um conjunto de axiomas e estudou os grupos de forma abstracta. No entanto, ele estava demasiado avançado para o seu tempo e o seu trabalho não foi muito apreciado como uma disciplina abstracta.

A seguir veio o trabalho de Sylow (1832-1918), um matemático inglês que, por volta de 1900, publicou o primeiro texto compreensivo sobre grupos e deu uma contribuição extensiva para esta teoria. Também é importante salientar o trabalho de Frobenius (1899-1917) que antecipou muito do trabalho que viria a ser desenvolvido já no século XX. No início deste século, surgiram bastantes contribuições para o desenvolvimento desta teoria. O interesse na teoria de grupos decaiu nos finais da década de trinta e princípios de quarenta por motivos que não são ainda muito claros para os historiadores da Matemática. Nos anos sessenta houve um ressurgimento de interesse e, desde essa altura, que muitos dos melhores matemáticos do mundo estão motivados por esta área de investigação.

O conceito matemático de *grupo* surgiu por volta de 1770 com o trabalho de Joseph Louis Lagrange, mas só foi tornado explícito no século XIX por Galois e Cauchy. No entanto, em 1668 foi publicado o livro *Tintinnalogia - or the Art of Change Ringing*, a que se seguiu a publicação em 1677 de um outro livro intitulado *Campanologia*, da autoria de Fabian Stedman. Em ambos os textos surge algo designado por *Grupo de Perseguição* (*The Hunting Group*), embora os tocadores de sinos usassem o termo *grupo* num sentido pouco formal. De facto, o conceito só muito depois foi formalizado. Portanto, de certa forma, Stedman foi o percursor da teoria de grupos, cem anos antes de Lagrange escrever as suas "Reflexions"!

Em 1715 toca-se o chamado *"Plain Bob"*, o primeiro repique de sinos.

1.2 Change Ringing (Mudança Musical). Sinos e Teoria de Grupos.

A **Campanologia** (em inglês **Change Ringing**) é uma arte secular, desenvolvida sobretudo no século XVII em Inglaterra, que consiste no repicar dos sinos de um carrilhão (de igreja) composto por n sinos. Usualmente $n = 6, 7$ ou 8.

O que se pretendia saber era de quantos modos distintos os n sinos da torre poderiam repicar, isto é, as várias possibilidades de tocar os sinos obedecendo a certas regras.

Em que consiste a Mudança Musical? Que tipo de matemática está subjacente?

A descoberta da Mudança Musical deve-se ao facto de que alternando os aprestos[1] em volta de cada sino, era possível a cada tocador manter o controle preciso de cada vez que o sino fosse repicado. Isto permitiu que os tocadores de sinos os tocassem por uma ordem particular, e, ao mesmo tempo, manter essa ordem ou mudança de um modo preciso.

O conceito matemático de *grupo*, como se viu, surgiu por volta de 1770 com Lagrange mas só se tornou mais visível no século XIX com Galois e Cauchy. Porém, muito tempo antes de os matemáticos terem desenvolvido os conceitos de grupo de permutações e grupo de simetria, já os tocadores de sinos, durante os séculos XVII e XVIII, tinham desenvolvido, pelo menos, algumas destas ideias. De facto, em 1668 as obras *"Tintinalogia -or the Art of Change Ringing"* seguida por *"Campanologia"*, de Fabio Stedman, faziam já alusão *matemática* à teoria de grupos. Fabio Stedman dedicou estas duas publicações à *"Society of College Younths"*, a mais antiga sociedade inglesa, de modo a promover o repique dos sinos na aristrocacia. Também foi objectivo de Stedman formalizar para a posteridade as regras e as composições que estavam envolvidas na Mudança Musical. Ambos os livros referem uma matemática admirável relacionada com o grupo de permutações como iremos ver. No início do livro *"Campanologia"*, Stedman referiu que, *"the art of changes"*, a arte das mudanças, era uma invenção matemática sua e que produzia efeitos notáveis.

Fabio Stedman desenvolveu um método de repique dos sinos conhecido como *"Plain Bob"*. Este método envolvia algo a que se chamava *"Hunting Group"*, ou *Grupo de Perseguição*, o que torna manifesto que alguns tocadores de sinos já utilizavam o termo *grupo*, embora num contexto não técnico. No entanto, o sentido técnico e não técnico coincidem.

À partida, o estilo de música conhecida como *"Change Ringing"*, ou *Mudança Musical*, não parece ter muita variedade. Uma composição para piano pode utilizar cerca de oitenta e oito notas diferentes. Uma orquestra tem ainda mais notas disponíveis a que se acrescenta a diversidade do conjunto de sonoridades dos vários instrumentos. Em contraste, a Mudança Musical apenas utiliza seis ou sete notas, dependendo dos sinos disponíveis. Apesar desta aparente carência de meios, *tocar* as mudanças musicais desenvolveu uma forma de arte refinada de alta qualidade.

Como é que a Mudança Musical pode ser entendida como Música, ou seja, levar-nos a algo harmonicamente interessante, partindo de vulgares e simples repiques entre sinos?

A arte da Mudança Musical

Como acontece na música serial dodecafónica (dos doze tons), a Mudança Musical utiliza sequências de notas em que cada nota disponível ocorre exactamente uma única vez. Em vez das doze notas graduadas da escala cromática, a mudança musical utiliza um conjunto mais pequeno de notas.

De facto, a notação tradicional para este tipo de música não é suficientemente específica relativamente à graduação a ser utilizada.

[1] aparelhamento em volta do sino

Notação

Os sinos são designados por números azuis *bold face* **1**, **2**, **3**, **4**, ..., **n** - o sino número **1**, o sino número **2**, etc. - ordenados por ordem decrescente de altura, do mais grave, o sino número **1**, para o mais agudo, o último sino número **n**.

Figura 1

Os sinos são tocados um de cada vez, por uma certa ordem ou arranjo. Um arranjo particular de sinos chama-se uma **série** (de sinos). Por exemplo, **[312564]** representa uma série de seis sinos. Esta série deve ser tocada pela ordem indicada - primeiro o sino **3**, segundo o sino **1**, depois o sino **2**, e assim sucessivamente.

Existem ao todo $n!$ séries.

Uma $sinfonia$ num conjunto de **n**-sinos é composta por sucessivas mudanças, de umas séries para as outras, feito de acordo com certas regras. A mudança de **[12345]** para **[21435]**, é por exemplo, considerada como uma permutação do grupo simétrico de 5 objectos.

Qual o problema central na Mudança Musical?

O maior desafio na Mudança Musical é encontrar uma sinfonia em **n** sinos, isto é, uma sinfonia completa composta por **n!** séries que deve, no entanto, obedecer às regras da Mudança Musical que serão indicadas em breve.

Considere-se, por exemplo, três sinos, ou seja, n=3. Existem seis permutações diferentes que podemos formar com esses 3 sinos, a saber: **[123]**, **[132]**, **[213]**, **[231]**, **[312]**, **[321]**. Cada uma dessas permutações é o resultado de uma mudança, dando origem ao nome "Mudança Musical". Podemos então juntar estas séries e construir a seguinte peça

[123132213231312321].

Esta sinfonia designa-se por *Singles Extents* e toca-se em 3 sinos uma vez que inclui todas as 3!=3×2×1=6 permutações possíveis.

123
213
231
321
312
132
—
123

Note-se que a primeira e a última séries são a mesma e consiste nos sinos tocados por ordem descendente. Entre estas séries, todas as permutações ocorrem exactamente uma vez.

Uma sinfonia, com n sinos, diz-se completa quando é possível tocar todas as **n!** séries dos n sinos, organizadas de acordo com as regras da Mudança Musical.

Regras da Mudança Musical

(C1). A primeira e última série devem ser ambas "rounds", isto é, a sinfonia inicia e termina pela sua ordem original [**123**...**n**].

(C2). As séries são todas diferentes entre si, com excepção da primeira e da última.

(C3). De uma série para a seguinte, nenhum sino deve mover-se mais do que uma posição.

A terceira regra é imposta pelas limitações de ordem física que os tocadores de sinos tiveram que enfrentar. Para um sino ser repicado é necessário puxar uma corda e, consequentemente, este roda em torno de um eixo, até que o badalo o percute, como se ilustra na figura seguinte. Ora este movimento demora um certo período de tempo se pensarmos que cada sino pode pesar algumas toneladas!

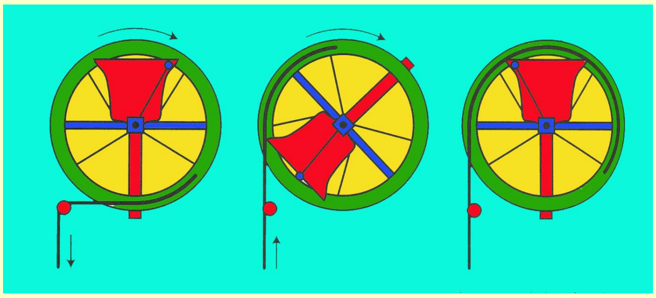


Figura 2

Com efeito, de modo a obedecer às regras da Mudança Musical foram desenvolvidos diversos métodos pelos tocadores a fim de encontrar o número máximo de séries num conjunto de n-sinos. Um dos métodos mais conhecidos designa-se por *Plain Bob*, e será em torno deste que a nossa actividade a implementar na Escola irá ser mais desenvolvida. O método *Plain Bob* irá ser aplicado num conjunto de 3, 4 e 5-sinos sendo identificadas as propriedades subjacentes a cada uma das sinfonias. Além do Plain Bob, outros dois métodos também foram desenvolvidos pelos tocadores de sinos, nomeadamente o Stedman Doubles e o Grandsire. O estudo destes dois métodos nas actividades pedagógicas irá incidir essencialmente em 5-sinos.

Como já vimos, o principal objectivo da Campanologia consiste em tocar uma melodia que englobe todas as séries possíveis, respeitando as 3 regras já referidas. Uma tal melodia (se existir!) chama-se uma **sinfonia completa** de n sinos.

Uma questão surge naturalmente: Com **n** sinos, quantas séries estão presentes?

Claramente que com um único sino apenas uma série existe, designadamente, [**1**].

Com 2 sinos podemos formar duas séries [**12**] e [**21**]. E, tal como vimos, com 3 sinos podemos formar seis permutações diferentes.

Nos sinos **1**,**2**,**3** de modo a poder formar as seis séries têm de conter, juntamente com os sinos **1** e **2**, a mesma ordem. Se essa ordem é [**12**], então podemos adicionar o sino **3** no início, no meio ou no fim para obter [**312**], [**132**] e [**123**]. Do mesmo modo, se **1** e **2** aparecem na ordem [**21**], então, outra vez, em cada uma das três séries passa a ter-se [**321**], [**231**] e [**213**]. Esta observação conduz ao caminho para uma formulação geral. As mudanças nos sinos **1**,**2**,**3**,**4** surgem expandindo-se cada um dos três sinos em quatro sentidos diferentes. Por exemplo, adicionando o sino **4** para a série **[312]** resulta **[4312]**, **[3412]**, **[3142]** e **[3124]**. Então, cada uma das 6 séries nos três sinos leva a mais 4 séries o que dá um total de 6×4=24 (24=4!). Analogamente, cada uma das séries em 4-sinos leva a mais 5 séries em cinco-sinos e portanto 24×5=120 (120=5!)possibilidades de arranjar cinco sinos.

Mais geralmente uma sinfonia completa é uma sequência de n!=n×(n-1)×(n-2)×........×2×1 séries.

O maior desafio para os tocadores de sino é encontrar uma sinfonia que seja o mais longa possível, num conjunto de n-sinos, e que respeite as três regras da Mudança Musical.

A tabela seguinte descreve o número de séries para cada uma das respectivas sinfonias. Na última coluna mostra o tempo que seria necessário para tocarmos cerca de 30 séries por minuto. É facilmente observável que o número de séries aumenta rapidamente com o aumento do número de sinos e, consequentemente, o tempo dispendido para se poder repicar cada uma das sinfonias. O verdadeiro objectivo dos tocadores de sinos consiste em tocar todas as séries para cada uma das sinfonias. A dificuldade é acrescida à medida que n aumenta dado que, para repicar todas as séries, têm de ser obedecidas as três regras da Mudança Musical.

Número de sinos n	Nome da sinfonia	Número de séries n!+1	Tempo aproximado de toque
3	**Singles**	7	14 segundos
4	**Minimus**	25	50 segundos
5	**Doubles**	121	4 minutos
6	**Minor**	721	24 minutos
7	**Triples**	5 041	3 horas
8	**Major**	40 321	23 horas
9	**Caters**	362 881	9 dias
10	**Royal**	3 628 801	3 meses
11	**Cinques**	39 916 801	2 anos e meio
12	**Maximus**	479 001 601	30 anos
16	—	20 922 789 888 001	1 330 000 anos

1.3 Notação para a Mudança Musical

As posições dos sinos numa série são designadas por números usuais $1, 2, 3, 4, \ldots$ (ordem usual pela qual são tocados os sinos, da esquerda para a direita).

Por exemplo, na série [**312564**], o sino **3** ocupa a posição 1, o sino **1** ocupa a posição 2, o sino **2** ocupa a posição 3, etc. Assim, o sino **3** é tocado em primeiro lugar, o sino **1** em segundo lugar, o sino **2** em terceiro lugar, etc.

Convém recordar a regra **(C3).**, referida anteriormente, a **mudança** de uma série para a seguinte envolve apenas transposições de pares disjuntos de sinos vizinhos.

▶ **Definição 1.1** *Uma* ***mudança*** *é uma permutação especial das n posições dos sinos.*

Exemplo: A mudança (23)(45) é possível - o sino que ocupa a posição 2 permuta com o que ocupa a posição 3 e o sino que ocupa a posição 4 permuta com o que ocupa a posição 5.

A mudança (24)(16) não é possível porque o sino que ocupa a posição 2 mudaria para a posição 4 e vice-versa. O sino na posição 1 troca com o sino que está na posição 6. Assim, a seguir à **série [256413]** não se pode aplicar a mudança A=(24)(16), que iria resultar na **série [346512]**, uma vez que o sino 3 tem de *repousar* até voltar à sua posição inicial a fim de voltar a repicar, e isso leva tempo, devido às questões físicas já referidas anteriormente.

Na figura seguinte ilustra-se a mudança (12)(45)(67). Esta mudança é possível na Mudança Musical, uma vez que os sinos que permutam são adjacentes entre si.

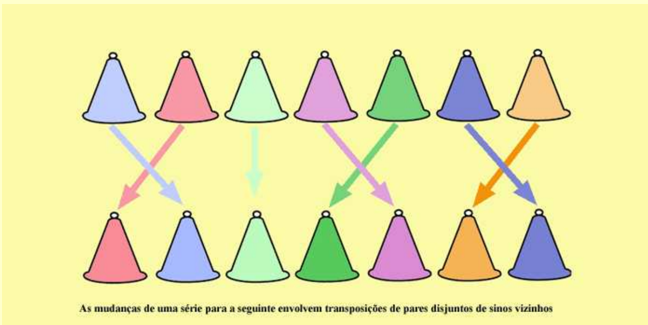


Figura 3

Usando Permutações

As permutações do grupo simétrico [2]são multiplicadas da direita para a esquerda, pela regra habitual da composição de funções (para uma introdução às principais noções sobre teoria de grupos veja o apêndice 1). Como dissemos anteriormente, as mudanças actuam (à esquerda) sobre as séries, mudando a posição dos respectivos sinos. Assim, por exemplo, a mudança $A = (12)$, quando actua sobre a série [**231**], produz a série [**321**].

Como se pode relacionar uma permutação com uma série? Muito simplesmente comparando-a com a série inicial. Por exemplo, associamos a permutação (132) a série [**231**] uma vez que,

- o sino que ocupa a posição 1 (sino **1**) muda para a posição 3.

[2]O conjunto das permutações de um conjunto X

- o sino que ocupa a posição 2 (sino **2**) muda para a posição 1.
- o sino que ocupa a posição 3 (sino **3**) muda para a posição 2.

Escrevemos então:

Série	Permutação
123	e
231	(132)

Se a esta última série [**231**] aplicarmos a mudança A=(12), o que significa que os sinos nas duas primeiras posições trocam entre si, obtém-se a série [**321**]. Como anteriormente, a esta série associamos a permutação (13).

O mesmo se obtém compondo as mudanças da direita para a esquerda:

Aplicando a operação entre permutações da direita para a esquerda temos o seguinte resultado:

$$\mathrm{A}\cdot\ (132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)$$

Obtem-se de novo a permutação (13).

Resumindo:

Série	Mudança	Permutação
231		(132)
	A	
321		$A \cdot (132) = (13)$

Em geral, as permutações do grupo simétrico são apresentadas através de uma decomposição em ciclos disjuntos.

As mudanças do grupo simétrico actuam (à esquerda) sobre as séries mudando a posição dos respectivos sinos.

Sinfonia Singles Extents (3 sinos)

Analisemos o exemplo simples com 3 sinos, designadamente, **1**, **2** e **3**.

Para respeitar a regra **(C3).** , cada mudança pode ser apenas de um dos dois tipos seguintes:

$$A = (12) - \text{os sinos que ocupam as posições 1 e 2 permutam entre si}$$

ou:

$$B = (23) - \text{os sinos que ocupam as posições 2 e 3 permutam entre si}$$

Tudo isto está ilustrado na figura seguinte:

Single extent (Slow six) em 3 sinos

Número	Série	Mudança	Permutação
1º	**123**		
		A	
2º	**213**		$A = (12)$
		B	
3º	**231**		$BA = (23) \cdot (12) = (132)$
		A	
4º	**321**		$ABA = (12) \cdot (132) = (13)$
		B	
5º	**312**		$(BA)^2 = (123)$
		A	
6º	**132**		$A(BA)^2 = B = (23)$
....		B	
7º	**123**		$(BA)^3 = e$

A outra possibilidade consiste em tocar as séries por ordem inversa, para obter o chamado **Single extent (Fast six) em 3 sinos** .

Na coluna da direita associamos uma permutação a cada série da sinfonia. Por exemplo a **série [231]** resulta na permutação (132), dado que o **sino 1** tomou o lugar 3, o **sino 2** tomou o lugar 1 e o **sino 3** tomou o lugar 2, isto relativamente à **série inicial [123]**.

Série inicial		Permutação		**Série resultante**
1	$\searrow$		$\nearrow$	**2**
2	$\longrightarrow$	(132)	$\longrightarrow$	**3**
3	$\nearrow$		$\searrow$	**1**

Analogamente, a **série [321]** resulta na permutação (13), dado que o **sino 3** está na posição 1, o **sino 1** na posição 3 e o **sino 2** permanece na sua posição original.

Série inicial		Permutação		**Série resultante**
1	$\searrow$		$\nearrow$	**3**
2	$\longrightarrow$	(13)	$\longrightarrow$	**2**
3	$\nearrow$		$\searrow$	**1**

Fazendo um raciocínio análogo ao anterior vai-se da quarta **série [321]**, associada à permutação (13), para a quinta **série [312]**, associada à permutação (123), através da mudança B=(23) que troca os sinos que estão na segunda e terceira posições, respectivamente.

$$\mathrm{B}=(23)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Como já vimos à **série [321]** está associada a permutação (13).

Como,

$$\text{B}\cdot\ (13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

Obtem-se assim a permutação (123)=$(BA)^2$.

Assim ao aplicar a mudança B=(23) à **série** [**321**] obtém-se a **série** [**312**].

Série	Mudança	Permutação
321		(13)
	B	
312		$B \cdot (13) = (123)$

e assim sucessivamente.

1.4 A Mudança Musical e a teoria de grupos

Um grupo G consiste num conjunto de elementos e um modo de os combinar através de uma operação binária produto (designando-se por "."), que satisfaça as seguintes quatro condições:

a) Fechado: se x e y são elementos de G, então $x.y\in$ G

b) Associatividade: se x, y e z são elementos de G, então $(x.y).z=x.(y.z)$

c) G tem elemento neutro, que se designa por e, de modo que para cada x∈G $e.x=x.e=x$, ∀ x∈ G

d) Se x é um elemento de G, então existe um elemento inverso y em G tal que $x.y=y.x=e$

Exemplos de grupos são:

i) O conjunto dos números reais positivos com a operação binária $\times$: a identidade é o elemento 1 e o inverso de x é 1/x.

ii) O conjunto dos números inteiros com a operação binária $+$: a identidade é o elemento 0 e o inverso de x é -x.

iii) O conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, ..., n\}$ com a operação binária do produto como descrita atrás. Designa-se por S_n.

iv) O conjunto de todas as simetrias de um triângulo equilátero: este grupo é o mesmo que S_3

O exemplo *iv* mostra que o conjunto S_3, correspondendo às permutações da sinfonia **Singles Extents**, forma um grupo. De modo a verificar que S_3 obedece às quatro condições que definem um grupo construa-se a seguinta tabela onde se representa o produto "."entre todas as permutações de S_3:

.	e	(12)	(123)	(13)	(132)	(23)
e	e	(12)	(123)	(13)	(132)	(23)
(12)	(12)	e	(23)	(132)	(13)	(123)
(123)	(123)	(13)	(132)	(23)	e	(12)
(13)	(13)	(123)	(12)	e	(23)	(132)
(132)	(132)	(23)	e	(12)	(123)	(13)
(23)	(23)	(132)	(13)	(123)	(12)	e

Fechado

Facilmente se pode observar que para todo o x,y$\in$ S_3 se tem x.y$\in$ S_3. Portanto o conjunto S_3 é fechado para a operação composição.

Associativa

A operação "."no conjunto S_3 é associativa dado o modo como está definida, por isso a ordem pela qual agrupamos as operações é irrelevante. Se x,y,z $\in$ S_3 então x.(y.z)=(x.y).z

Existência de elemento neutro

Relembre-se que todo o grupo terá de conter um elemento identidade, um objecto que deixa inalterado qualquer um que combine com ele. Considera-se a operação *"não actuar sobre nada"* num contexto musical clássico como uma transposição de zero semi-tons.

Analogamente para os sinos podemos descrever a identidade como uma sequência de zero trocas, isto é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como se pode observar pelas linhas da tabela se x,$e$$\in$ S_3 então tem-se x.e=e.x=x.

Existência de elemento inverso

Dois elementos são inversos um do outro, se o seu produto fôr a identidade.

Por exemplo, $(123)^{-1}$=(132), $(13)^{-1}$=(13).

Tomando x=(123) o inverso será y=(132), pelo que, (123).(132)=e, isto é, a série que corresponde à permutação (132) é inversa da série relativa à permutação (123). Tomando-se agora x=(13) o inverso corresponde a y=(13) tendo-se(13).(13)=e, e portanto, a série que corresponde à permutação (13) é inversa de si própria. Aplicando a habitual operação entre permutações, da direita para a esquerda, observa-se que em cada uma das linhas e das colunas da tabela existe sempre dois tons que são inversos um do outro, ou seja, $\forall$x,y$\in$$S_3$ tem-se sempre x.y=y.x=e

Assim, o conjunto S_3 constitui um grupo.

Pode assim dizer-se que muito antes da axiomatização da teoria de grupos já os tocadores de sino a utilizavam num sentido ainda elementar e intuitivo.

O maior compositor da Mudança Musical, Fabian Stedman em 1677 compôs esta refinada arte musical no seu livro *Campanologia* e a ela *associou* a teoria de grupos que na época era completamente desconhecida. O seu aparecimento apenas ocorreu, *matematicamente*, nos séulos XVIII e XIX e portanto Fabian Stedman talvez possa ser considerado o percursor da primeira teoria de grupos.

Para reforçar o facto, com detalhe, da teoria de grupos estar latente na Campanologia, num grau substancial, analisa-se a seguir um vasto conjunto de métodos -**Plain Hunt (Perseguição Total), Plain Bob, Grandsire e Stedman Doubles**.

Certamente um conhecimento da teoria de grupos ajuda-nos a analisar as diversas sinfonias da Mudança Musical no que diz respeito à sua estrutura e propriedades.

Qual o problema que advém na Mudança Musical?

O problema dos tocadores de sinos é essencialmente a construção de métodos para construir melodias (sinfonias) de vários comprimentos sendo de particular interesse compôr sinfonias cujo comprimento máximo seja, sempre que possível, n! séries e que obedeçam às regras **(C1)-(C3)** da Mudança Musical.

Solução para o problema

O primeiro método a ser estudado será o *Plain Hunt* (Perseguição Total). Como iremos verificar este método ainda não é uma solução óptima para os tocadores de sinos pois nem sempre será possível obter todas as n! permutações em n-sinos. De modo a poder chegar a todas as n! permutações os tocadores de sinos desenvolveram outros métodos. Apenas irei dar referência aos métodos mais desenvolvidos, nomeadamente, o *Plain Bob*, o *Stedman Doubles* e o *GrandSire*. Nestes dois últimos métodos farei, unicamente, referência a um conjunto de 5 sinos pois apenas num número ímpar de sinos a sua aplicação é válida. O método Plain Bob é de longe o mais utilizado e, por isso, o estudo versará para conjuntos de 4, 5 e 6 sinos.

1.5 Perseguição Total. (Plain Hunt)

O método mais simples para os tocadores de sinos é designado por Perseguição Total. A descrição deste método irá incidir em 3 e 5 sinos e depois generalizar-se-á para n-sinos.

Dado que já se conhecem as regras vejamos se estas são obedecidas pela sinfonia **Singles Extents**. Considere-se as 7 séries (devido à regra **(C1)** no máximo uma sinfonia tem n!+1 séries, isto é, tem de iniciar e finalizar pela **série [1 2 3....n]**).

Número	Série	Mudança	Permutação
1º	**123**		
		A	
2º	**213**		$A = (12)$
		B	
3º	**231**		$BA = (23) \cdot (12) = (132)$
		A	
4º	**321**		$ABA = (12) \cdot (132) = (13)$
		B	
5º	**312**		$(BA)^2 = (123)$
		A	
6º	**132**		$A(BA)^2 = B = (23)$
....		B	
7º	**123**		$(BA)^3 = e$

As permutações que figuram na coluna da direita:

$$A = (12),\ BA = (132),\ ABA = (13),\ (BA)^2 = (123)$$
$$A(BA)^2 = B = (23),\ (BA)^3 = e$$

constituem um grupo - o grupo simétrico S_3 do conjunto $\{1, 2, 3\}$ com três elementos.

Pode facilmente observar-se que as regras da Mudança Musica **(C1)-(C3)** são obedecidas.

Refira-se que o **sino 1** caminha até à última posição e que regressa novamente para a primeira posição. Este processo é conhecido como *"Plain Hunting"*, Perseguição Total, e que o *percurso* das seis séries (três posições para o **sino 1** de modo ascendente e mais três de ordem descendente) é designado por *"Hunting Group"*, Grupo de Perseguição. Acrescente-se o facto do conceito de grupo ser pela primeira vez mencionado já no século XVII.

▶ **Definição 1.2** *As mudanças A e B geram um subgrupo H_{2n} de S_n de ordem $2n$.*

Para o conjunto de 3 sinos a Perseguição Total fornece todas as possíveis 6(=3!) permutações e portanto é uma solução óptima para os tocadores de sino.

O Grupo de Perseguição $H_6 = \{e, (12), (132), (13), (123), (23)\}$.

Interpretação Geométrica

O Grupo de Perseguição H_6 é isomorfo a D_3, grupo das simetrias de um triângulo equilátero com vértices 1, 2 e 3 correspondentes ao número de posição dos sinos. Por exemplo a permutação (123), que muda 1 em 3, 2 em 1 e 3 em 2, corresponde a uma rotação no sentido dos ponteiros do relógio de 120^o. A permutação (12) que modifica 1 em 2 e fixa 3, corresponde a uma reflexão.

Chamamos a este conjunto de simetrias S(△), "o grupo de simetrias do triângulo".

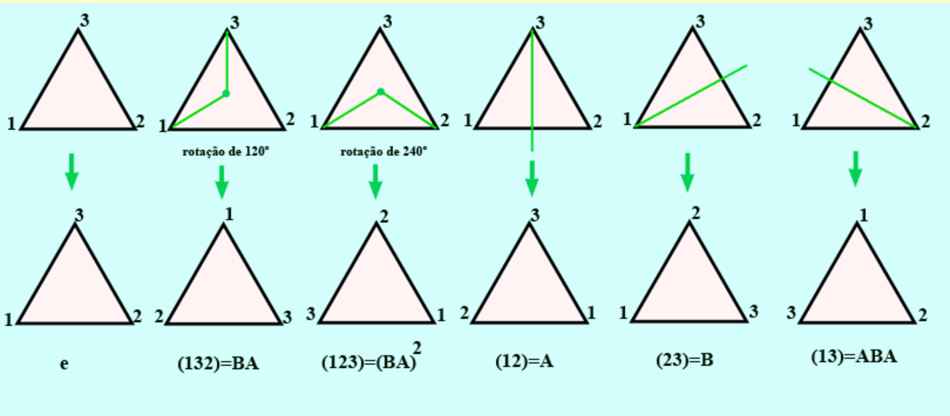


Figura 4

Sinfonia Doubles Extents (5 sinos)

A Perseguição Total em 5 sinos utiliza duas mudanças que são aplicadas alternadamente na série inicial, até esta voltar a aparecer. As mudanças são A=(12)(34) e B=(23)(45). Escreve-se A ou B entre duas séries para indicar a mudança que tem sido usada para se obter uma série a partir da outra.

Número	Série	Mudança	Permutação
1º	**12345**		
		A	
2º	**21435**		$A = (12)(34)$
		B	
3º	**24153**		$BA = (23)(45) \cdot (12)(34) = (13542)$
		A	
4º	**42513**		$ABA = (12)(34) \cdot (13542) = (14)(35)$
		B	
5º	**45231**		$(BA)^2 = (23)(45) \cdot (14)(35) = (15234)$
		A	
6º	**54321**		$A(BA)^2 = (12)(34) \cdot (15234) = (15)(24)$
		B	
7º	**53412**		$(BA)^3 = (23)(45) \cdot (15)(24) = (14325)$
		A	
8º	**35142**		$A(BA)^3 = (12)(34) \cdot (14325) = (13)(25)$
		B	
9º	**31524**		$(BA)^4 = (23)(45) \cdot (13)(25) = (12453)$
		A	
10º	**13254**		$A(BA)^4 = B = (12)(34) \cdot (12453) = (23)(45)$
.....		B	
11º	**12345**		$(BA)^5 = e$

As mudanças seguem a respectiva ordem: (leia-se da direita para a esquerda, pois considera-se a habitual operação entre permutações). Como

$$\text{BABABABABA}=(BA)^5=\text{e}$$

Vemos que depois de 10 mudanças volta-se à **série inicial [12345]**. Por outras palavras, existem um total de 11 séries na Perseguição Total em 5 sinos, se incluirmos igualmente a série inicial e última.

Voltar à série inicial depois de aplicar por dez vezes as mudanças era previsível, dado que A e B geram um grupo de ordem 10. Segue-se que não pode existir mais do que 10 mudanças na Perseguição Total em 5 sinos e, de facto, em qualquer método apenas usando A e B.

Na Perseguição Total em 6 sinos, as mudanças usadas são A=(12)(34)(56) e B=(23)(45).

Nos 7 sinos utiliza-se, A=(12)(34)(56) e B=(23)(45)(67) e em 8 sinos usa-se A=(12)(34)(56)(78) e B=(23)(45)(67).

A generalização para n-sinos é agora clara.

► **Definição 1.3** *As mudanças seguem a respectiva ordem,* $A = (12)(34)$*......(n-1,n) e* $B = (23)(45)$*.....(n-2,n-1) quando n é par, e* $A = (12)(34)$*......(n-2,n-1),* $B = (23)(45)$*......(n-1,n) quando n é ímpar.*

Note-se que A e B são produtos de transposições disjuntas de números consecutivos. Isto é exigido pela regra **C3**.

Voltando à perseguição total em 5 sinos, o Grupo de Perseguição para 5 sinos é dado por:

$H_{10}=\{e, (12)(34), (12453), (14)(35), (14325), (15)(24), (15234), (13)(25), (13542), (23)(45)\}$.

Como se pode observar no conjunto de 5 sinos a Perseguição Total ainda não é uma solução óptima, pois apenas forneceu 10 permutações de (5!=)120 possíveis. O Grupo de Perseguição H_{10} também é isomorfo a D_5, o grupo das simetrias de um pentágono com vértices 1, 2, 3, 4 e 5.

Para resolver o problema os tocadores de sinos inventaram outro método designadamente o Plain Bob a fim de tentar obter todas as n!+1 permutações de um conjunto de n-sinos.

1.6 Plain Bob

Provavelmente o método mais simples e mais conhecido que se segue à Perseguição Total, "Plain Hunt", designa-se por **Plain Bob**. Este método data de 1650 aproximadamente. Inicialmente iremos descrever o Plain Bob para 4 sinos e depois para 6 sinos.

Para se obter mais de *2n* séries, num conjunto de n sinos, deverá introduzir-se uma outra mudança na Perseguição Total, pois este ainda não é a solução ideal, que é encontrar as n!+1 séries. O método Plain Bob utiliza poucas mudanças de modo a tornar-se tão simples quanto possível, obtendo-se entretanto, se possível, todas as n!+1 séries.

Sinfonia Minimus Extents (4 sinos)

De acordo com a definição 1.3, as duas primeiras mudanças serão: A=(12)(34) e B=(23).

Obtém-se a seguinte tabela:

Número	Série	Mudança	Permutação
1º	**1234**		
		A	
2º	**2143**		$A = (12)(34)$
		B	
3º	**2413**		$BA = (23) \cdot (12)(34) = (1342)$
		A	
4º	**4231**		$ABA = (12)(34) \cdot (1342) = (14)$
		B	
5º	**4321**		$(BA)^2 = (23) \cdot (14) = (14)(23)$
		A	
6º	**3412**		$A(BA)^2 = (13)(24)$
		B	
7º	**3142**		$(BA)^3 = (23) \cdot (13)(24) = (1243)$
		A	
8º	**1324**		$A(BA)^3 = B = (23)$
....		B	
9º	**1234**		$(BA)^4 = e$

As mudanças seguem a respectiva ordem. Observe-se que

$$\text{BABABABA}=(BA)^4=\text{e}$$

e portanto as duas mudanças A=(12)(34) e B=(23) apenas nos dão 8 das 24 séries possíveis (4!=24). Assim, as mudanças A e B geram o **grupo de perseguição** H_8.

H_8=$\{e, (12)(34), (1342), (14), (14)(23), (13)(24), (1243), (23)\}$.

Interpretação Geométrica

O Grupo de Perseguição H_8 é isomorfo a D_4, o grupo das simetrias de um quadrado com vértices 1, 2, 3 e 4. As oito simetrias do quadrado, juntamente com as suas permutações são mostradas na figura 5. Chamamos a este conjunto de simetrias S(□), o *grupo de simetrias do quadrado.*

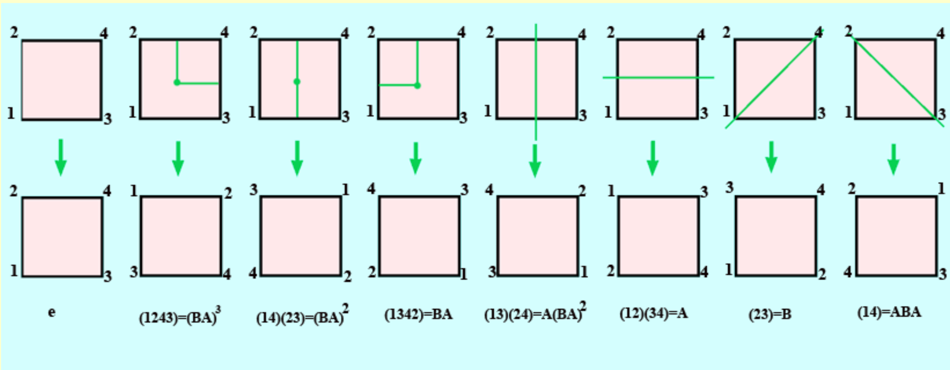


Figura 5

Para conseguir tocar mais séries (distintas das anteriores), em vez de aplicar a mudança B, que permite passar da 8ª para a 9ª série, regressando à **série inicial [1234]**, aplicamos uma nova mudança C:

$$C = (34)$$

. A mudança C transforma a 8ª **série [1324]** numa nova série distinta das anteriores - a **série [1342]**.

► **Definição 1.4** *A mudança C é* $C = (34)(56)....(n-2, n-1)$ *quando* n *é ímpar e* $C = (34)(56)....(n-1, n)$ *quando* n *é par.*

Continuando a aplicar alternadamente as mudanças A e B a esta nova **série [1342]**. Obtemos a classe direita H_8(CB) de H_8 em S_4, ou seja:

$$H_8(243)$$

O seguinte esquema descreve esquematicamente a introdução dessa nova mudança, C.

Número	Série	Mudança	Permutação
...	.....		....
6º	**3412**		$A(BA)^2 = (13)(24)$
		B	
7º	**3142**		$(BA)^3 = (23)(13) \cdot (24) = (1243)$
		A	
8º	**1324**		$A(BA)^3 = (23) = B$
		C	
9º	**1342**		$CB = (34) \cdot (23) = (243)$
		A	
10º	**3124**		$ACB = (12)(34) \cdot (243) = (123)$
		B	
11º	**3214**		$BACB = (23) \cdot (123) = (13)$
		....	
...	.....		....

Depois de aplicar alternadamente as mudanças A e B, nesta segunda classe direita, chegamos a ABABABACB=A$(BA)^3$CB=BCB, uma vez que A$(BA)^3$=B=(23) como já vimos. Portanto, em vez de aplicar novamente B, (que conduziria à repetição da **série [1342]**, desobedecendo à regra **(C2)**), introduz-se novamente C que nos leva *para dentro* de uma terceira classe direita $H_8(CB)^2$=$H_8(234)$. A seguir alterna-se repetidamente entre A e B, e no mesmo ponto, faz-se novamente C, que nos traz de volta à **série inicial [1234]**.

Obtém-se assim uma solução óptima para o problema dos tocadores de sinos para n=4 utilizando o Grupo de Perseguição H_8 e duas classes direita, que são $H_8(243)$ e $H_8(234)$.

Com a construção do método Plain Bo obteve-se a sinfonia completa Minimus Extents e aqui está o conjunto completo das séries:

Nº	Mud	Séries	Perm	Nº	Mud	Séries	Perm	Nº	Mud	Séries	Perm
1º		**1234**									
	A				A				A		
2º		**2143**	(12)(34)	10º		**3124**	(123)	18º		**4132**	(124)
	B				B				B		
3º		**2413**	(1342)	11º		**3214**	(13)	19º		**4312**	(1324)
	A				A				A		
4º		**4231**	(14)	12º		**2341**	(1432)	20º		**3421**	(1423)
	B				B				B		
5º		**4321**	(14)(23)	13º		**2431**	(142)	21º		**3241**	(143)
	A				A				A		
6º		**3412**	(13)(24)	14º		**4213**	(134)	22º		**2314**	(132)
	B				B				B		
7º		**3142**	(1243)	15º		**4123**	(1234)	23º		**2134**	(12)
	A				A				A		
8º		**1324**	(23)	16º		**1432**	(24)	24º		**1243**	(34)
	C				C				C		
9º		**1342**	(243)	17º		**1423**	(234)	25º		**1234**	e

As séries no seu total constituem a sinfonia conhecida como *Plain Bob Minimus*. Todas as permutações de n=4 formam o grupo S_4. Portanto, neste caso obtém-se o número máximo de permutações possível numa sinfonia. Mas, em geral, isto nem sempre acontece.

Há algumas observações importantes a fazer:

[Obs1] Adicionando classes direitas do subgrupo $H_8 \leq S_4$ ao grupo Perseguição Total H_8 aumentamos o número de séries e, consequentemente, o nosso conjunto de permutações. Esta é a principal ideia relativamente ao problema dos tocadores de sino e de todos os métodos que iremos considerar.

[Obs2] Considerando agora P=CB listamos as permutações pela seguinte ordem:

$$H_8, H_8\ P,\ H_8 P^2$$

onde em cada classe direita se usa a ordem da Perseguição Total.

[Obs3] Note-se que obtemos a partir do grupo de perseguição H_8, um total de 3 classes direitas porque P=(243) é de ordem 3: P^3=$(243)^3$=e. Analogamente P^2=(234) também é de ordem 3, uma vez que $(P^2)^3$=$(P^3)^2$=e^2=e

Calculemos, por exemplo, $H_8(243)$ e $H_8(234)$.

Aplicando a habitual operação da direita para a esquerda, a permutação (243), no topo da segunda classe direita, com cada uma das permutações do grupo de perseguição, obtém-se as correspondentes permutações da classe direita H_8P. Por exemplo,

$$(12)(34)\cdot(243)= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} =(123)$$

A permutação (123) resulta na **série [3124]**, ou seja, o **sino 1** passou para a posição 2, o **sino 2** para a posição 3 e o **sino 3** para a posição 1, mantendo-se o **sino 4** na sua posição original, isto relativamente à **série inicial [1234]**.

Analogamente se combinarmos a permutação (234), no topo da terceira classe direita, com cada permutação do grupo de perseguição obtém-se a correspondente classe direita $H_8 P^2$. Por exemplo:

$$(12)(34)\cdot(234)= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} =(124)$$

Pelo que a permutação (124) resulta na **série [4132]**, ou seja, o **sino 1** passou para a posição 2, o **sino 2** para a posição 4 e o **sino 4** para a posição 1, mantendo-se o **sino 3** na sua posição original, isto relativamente à **série inicial [1234]**.

Obteve-se em primeiro lugar o grupo de perseguição H_8. A segunda classe direita é obtida através da combinação de cada elemento de H_8 com (243) e escreve-se $H_8(243)$ ou H_8P. A terceira classe direita é obtida através da combinação de cada elemento de H_8 com (234) e escreve-se $H_8(234)$ ou $H_8 P^2$. Assim obtém-se, relembrando que
$H_8 = \{e, (12)(34), (1342), (14), (14)(23), (13)(24), (1243), (23)\}$,

$$\left.\begin{array}{rcr} e\cdot(243) & = & (243) \\ (12)(34)\cdot(243) & = & (123) \\ (1342)\cdot(243) & = & (13) \\ (14)\cdot(243) & = & (1432) \\ (14)(23)\cdot(243) & = & (142) \\ (13)(24)\cdot(243) & = & (134) \\ (1243)\cdot(243) & = & (1234) \\ (23)\cdot(243) & = & (24) \end{array}\right\} H_8\cdot(243) \tag{1.1}$$

e analogamente:

$$\left.\begin{array}{rcr} e\cdot(234) & = & (234)\\ (12)(34)\cdot(234) & = & (124)\\ (1342)\cdot(234) & = & (1324)\\ (14)\cdot(234) & = & (1423)\\ (14)(23)\cdot(234) & = & (143)\\ (13)(24)\cdot(234) & = & (132)\\ (1243)\cdot(234) & = & (12)\\ (23)\cdot(234) & = & (34) \end{array}\right\} H_8\cdot(234) \qquad (1.2)$$

Para um conjunto de 4-sinos todas as possíveis permutações são tocadas. Assim, através das mudanças A, B e C o método Plain Bob permite obter a sinfonia completa *Minimus Extents*.

Esta decomposição do grupo simétrico S_4 em classes direitas era conhecida dos tocadores de sino um século antes de os matemáticos a terem descoberto.

Minor Extents (6 sinos)

Vejamos agora o *Plain Bob* para 6 sinos. Recorde-se que a ideia é adicionar classes direitas de H_{12} o grupo de Perseguição Total de 6 sinos, para se obter ainda mais séries. Claro que isto tem de ser feito sem desobedecer às regras **(C1)-(C3)**. Repare-se que os geradores do Grupo de Perseguição são A=(12)(34)(56) e B=(23)(45). Adiciona-se C=(34)(56) do mesmo modo. Como: P=CB=(34)(56)·(23)(45), que se traduz na permutação, (24653) tem ordem 5: P^5=$(CB)^5$=e. Obtém-se assim 5 classes direitas de H_{12} e portanto um total de 60 permutações (61 incluindo a série inicial).

$$H_{12};\ H_{12}\mathrm{P};\ H_{12}P^2;\ H_{12}P^3;\ H_{12}P^4$$

Obtemos (representação parcial):

Número	Série	Mudança	Permutação
1º	**123456**		
		A	
2º	**214365**		$A = (12)(34)(56)$
		B	
3º	**241635**		$BA = (23)(45) \cdot (12)(34)(56) = (135642)$
		A	
4º	**426153**		$ABA = (12)(34)(56) \cdot (135642) = (14)(36)$
		B	
5º	**462513**		$(BA)^2 = (154)(236)$
		A	
6º	**645231**		$A(BA)^2 = (16)(24)(35)$
		B	
7º	**654321**		$(BA)^3 = (16)(25)(34)$
		A	
8º	**563412**		$A(BA)^3 = (15)(26)$
		B	
9º	**536142**		$(BA)^4 = (145)(263)$
		A	
10º	**351624**		$A(BA)^4 = (13)(25)(46)$
		B	
11º	**315264**		$(BA)^5 = (124653)$
		A	
12º	**132546**		$A(BA)^5 = B = (23)(45)$
		C	
13º	**135264**		$CB = (24653)$
		A	
14º	**312546**		$ACB = (123)(45)$
		B	
15º	**321456**		$BACB = (13)$
		A	
16º	**234165**		$ABACB = (1432)(56)$
		B	
17º	**243615**		$(BA)^2CB = (15642)$

Vamos analisar se as regras **(C1)-(C3)** são satisfeitas. Dado que A, B e C são transposições disjuntas de números consecutivos e são as únicas mudanças utilizadas para ir de uma série para a outra, conclui-se que a regra **(C3)** é satisfeita. A regra **(C1)** também é satisfeita em virtude do modo de construção e a regra **(C2)** é respeitada porque as classes direitas são disjuntas.

Vemos pois como a teoria de grupos permite a construção de um método, que obedece às regras da Mudança Musical. Pode-se também utilizar o Plain Bob num número ímpar de sinos.

► **Proposição 1.1** *Para qualquer n, o Plain Bob em n sinos utiliza n-1 classes direitas de H_{2n}, tendo 2n(n-1) permutações.*

Obs: Como se pode observar para n=6 sinos o Plain Bob não forneceu todas as (6!=) 720 permutações. Apenas quando n=4 se tem a igualdade 2n(n-1)=n!.

Esta solução para o problema dos tocadores de sinos data do século XVII e pode ser encontrada no livro de Stedman datado de 1677.

1.7 Leads. Bob Leads

Leads

Considere-se novamente as 25 séries no Plain Bob para 4 sinos. A primeira é a série inicial, e as outras séries são obtidas a partir de três conjuntos de oito permutações cada, designadamente, H_8, H_8P e H_8P^2.

▶ **Definição 1.5** *Designa-se por Lead um conjunto de 2n séries.*

Para cada uma das *Leads* note-se que cada sino está duas vezes na primeira posição. Também se deve notar que o **sino número 1** está sempre na primeira posição na série inicial e final de cada *Lead*. A primeira série da Lead designa-se por *Topo de Lead*. Isto verifica-se, em geral, para o Plain Bob em n-sinos, onde as Leads têm 2n séries. No Plain Bob em 4 sinos, as Topo de Lead são **[1234]**, **[1342]** e **[1423]**.

Nº	**Mud**	Lead(1) **Séries**	**Perm**	**Nº**	**Mud**	Lead(2) **Séries**	**Perm**	**Nº**	**Mud**	Lead(3) **Séries**	**Perm**
1º		**1234**		9º		**1342**	(243)	17º		**1423**	(234)
	A				A				A		
2º		**2143**	(12)(34)	10º		**3124**	(123)	18º		**4132**	(124)
	B				B				B		
3º		**2413**	(1342)	11º		**3214**	(13)	19º		**4312**	(1324)
	A				A				A		
4º		**4231**	(14)	12º		**2341**	(1432)	20º		**3421**	(1423)
	B				B				B		
5º		**4321**	(14)(23)	13º		**2431**	(142)	21º		**3241**	(143)
	A				A				A		
6º		**3412**	(13)(24)	14º		**4213**	(134)	22º		**2314**	(132)
	B				B				B		
7º		**3142**	(1243)	15º		**4123**	(1234)	23º		**2134**	(12)
	A				A				A		
8º		**1324**	(23)	16º		**1432**	(24)	24º		**1243**	(34)
	C				C				C		
								25º		**1234**	e

Observações:

1. O primeiro, o segundo e o terceiro Topo de Lead são o resultado de P=CB=(243), P^2=(234) e P^3=e actuando respectivamente na **série inicial**.

2. Quando se considera apenas Topos de Lead podemos colocar sempre o **sino 1** na primeira posição.

3. O Plain Bob pode então ser descrito por elementos de S_{n-1} actuando nas Topo de Lead.

Sinfonia Minor Extents (6 sinos)

Agora podemos escrever todo o Plain Bob em 6 sinos através das suas Topos de Lead. Aqui está a primeira Lead (incluindo a série inicial)

Número	Série	Mudança	Permutação
1º	**123456**		
		A	
2º	**214365**		$A = (12)(34)(56)$
		B	
3º	**241635**		$BA = (23)(45) \cdot (12)(34)(56) = (135642)$
		A	
4º	**426153**		$ABA = (12)(34)(56) \cdot (135642) = (14)(36)$
		B	
5º	**462513**		$(BA)^2 = (154)(236)$
		A	
6º	**645231**		$A(BA)^2 = (16)(24)(35)$
		B	
7º	**654321**		$(BA)^3 = (16)(25)(34)$
		A	
8º	**563412**		$A(BA)^3 = (15)(26)$
		B	
9º	**536142**		$(BA)^4 = (145)(263)$
		A	
10º	**351624**		$A(BA)^4 = (13)(25)(46)$
		B	
11º	**315264**		$(BA)^5 = (124653)$
		A	
12º	**132546**		$A(BA)^5 = B = (23)(45)$
		$C = (34)(56)$	
13º	**135264**		$P = CB = (24653)$

Neste caso P=CB=(24653) e as **Topo de Lead** são **[135264]**, **[156342]**, **[164523]**, **[142635]** e **[123456]**, correspondendo a P, P^2, P^3, P^4 e P^5 respectivamente, actuando sobre **[23456]**. Cada uma dessas leads é designada por Plain Lead. Cada Topo de Lead é obtida a partir da anterior Topo de Lead aplicando P.

Existem 5 Leads porque P é de ordem 5.

A sequência destas 5 Plain Leads chama-se um **Plain Course**. Qualquer Plain Lead deverá ser escrita como uma sequência de mudanças:

$$\text{CABABABABABA}=\text{CA}(BA)^5$$

Alternativamente, considerando apenas Topos de Lead descreve-se uma Plain Lead por P, e o Plain Course (que tem 60 permutações), pela sequência de 5 Plains Leads.

P,P,P,P,P

Bob Leads

Um outro tipo de Lead é designada *Bob Lead* que consiste na introdução de uma nova mudança diferente de C que permite alargar o número de permutações. O principal objectivo será aproximarmo-nos, tanto quanto possível, de n! pois é essa a meta dos tocadores de sino, sem desobedecer às regras **(C1)-(C3)**.

Deve ser escrita pela sequência de mudanças:

$$\mathrm{DBABABABABAB}=\mathrm{DA}(BA)^5$$

onde D=(23)(56).

▶ **Definição 1.6** *A mudança* D *é,* $D = (23)(56)....(n-3, n-2)$ *quando* n *é ímpar e* $D = (23)(56)....(n-1, n)$ *quando* n *é par.*

De modo a prolongar o número de séries na sinfonia *Minor Extents* introduz-se a mudança D, da 60º para a 61º posição, em vez da última mudança C que nos levaria de volta à série inicial. Observe-se a tabela seguinte:

Número	Séries	Mudança	Permutação
58º	**231546**		(132)(45)
		A=(12)(34)(56)	
59º	**213456**		(12)
		B=(23)(45)	
60º	**124365**		(34)(56)=C
		D=(23)(56)	
61º	**142356**		T=DC=(234)
		A	
62º	**413265**		(124)(56)
		B	
63º	**431625**		(132564)
		A	
64º	**346152**		(14263)
		B	
65º	**364512**		(1543)(26)
		A	
66º	**635421**		(16)(253)
		B	
67º	**653241**		(16)(245)
		A	
68º	**562314**		(15)(2346)
		B	
69º	**526134**		(14635)
		A	
70º	**251643**		(136452)
		B	
71º	**215463**		(12)(365)
		A	
72º	**124536**		(354)
		C=(34)(56)	
73º	**125463**		(365)

Chama-se **Bob Lead** a esta Lead em virtude se se utilizar uma outra mudança, D=(23)(56), a fim de prolongar o número de leads.

▶ **Definição 1.7** *No método Plain Bob chama-se Bob Lead à Lead da permutação T.*

Bob Lead= AB AB AB AB AB AD

Isto corresponde a fazer as primeiras 59 de 60 permutações no Plain Course. Se na sexagésima mudança usassemos o Plain Course, essa mudança seria C voltando-se à **série inicial [123456]**.

Para prolongar a sinfonia introduz-se uma nova mudança que nos vai levar para outra classe direita, designada por H_{12}T onde: T=DC=(23)(56)·(34)(56)=(234).

A seguir repetem-se as mesmas 59 mudanças e aplica-se D outra vez. Novamente as 59 mudanças e aplicando D, voltamos à **série inicial [123456]** uma vez que T é de ordem 3. Portanto existem 3 Bob Leads. Conseguimos assim um método que nos dá um total de 180 permutações. Analogamente prova-se que as regras **(C1)**, **(C2)** e **(C3)** são obedecidas.

Agora pode construir-se um método mais longo utilizando uma combinação de Plain e Bob Leads.

Número	Série	Mudança	Permutação
1º	**123456**		e
		$C = (34)(56)$	
60º	**124365**		$C = (34)(56)$
		$D = (23)(56)$	
61º	**142356**		$DC = T = (234)$
		C	
120º	**143265**		$CT = (24)(56)$
		D	
121º	**134256**		$DCT = T^2 = (243)$
		C	
180º	**132465**		$CT^2 = D = (23)(56)$
		D	
181º	**123456**		$T^3 = e$

O Plain Course apenas utilizando Plain Leads é designado por:

PPPPTPPPPTPPPPT=$(P^4T)^3$

Obtivemos um total de 180 permuatações. Ainda não fomos bem sucedidos em obter uma extensão de 720 (=6!) permutações. É possível que numa outra sequência de Leads no Plain Bob se poderá obter tal extensão? O seguinte resultado termina com toda a esperança.

▶ **Teorema 1.1** *Não existe uma extensão do Plain Bob em 6 sinos utilizando Plain e Bob Leads. O método possível mais extenso usando Plain e Bob Leads tem 360 permutações, e tal método existe.*

Dem: A chave é observar que P, T, C e D são todas permutações pares (Ver apêndice). O facto de P e T serem pares implica que qualquer Topo de Lead será uma permutação par de **23456**. Do mesmo modo, a série anterior a uma Topo de Lead é o resultado de aplicar igualmente

C^{-1} ou D^{-1} a esse tipo de Topo de Lead. Uma vez que C e D são pares vê-se que, em qualquer método de Plain e Bob Leads, todas as séries com o **sino** **1** na primeira posição são seguidas por uma permutação par de **[23456]**. A afirmação resulta pois, do facto, de que na sinfonia iríamos obter todas as possíveis permutações de **[23456]** seguidas de **1**. Este argumento mostra que qualquer método utilizando Plain e Bob Leads tem quanto muito 5!/2=60 leads. Dado que cada uma tem duas **séries** com o **1** na primeira posição, estas terão de ser seguidas por uma permutação par de **[23456]** o que resulta num total de 30 permutações. Excluo as permutações ímpares pois P, T, C e D são permutações pares. Como cada Lead tem 12 séries, portanto um método como o Plain e Bob Leads tem quanto muito 12×30=360 permutações. O conjunto de todas estas 360 permutações consiste no conjunto alternado A_5.

Para conseguir as 360 permutações pares terá de se introduzir na série 180 uma forma alternativa de Bob, nomeadamente E=(12)(45) que também é uma mudança par. Repare-se que o **sino** **1** que estava sempre na posição 1 com a introdução da mudança E irá agora percorrer as restantes posições. A nova mudança E vai levar-nos para outra classe direita, designada por H_{12}Q onde Q=ED=(12)(45)·(23)(56)= (123)(456)

Número	**Série**	**Mudança**	**Permutação**
180º	**132465**		$CT^2 = D = (23)(56)$
		$E = (12)(45)$	
181º	**312645**		$E \cdot (23)(56) = Q = (123)(456)$
		A	
182º	**136254**		$AQ = (2463)$
		B	
183º	**163524**		$BAQ = (2546)$

Na tabela seguinte mostra-se o início e o fim de cada conjunto de 60 permutações.

Número	**Série**	**Mudança**	**Permutação**
1º	**123456**		e
		C	
60º	**124365**		$C = (34)(56)$
		D	
61º	**142356**		$T = (234)$
		C	
120º	**143265**		$CT = (24)(56)$
		D	
121º	**134256**		$T^2 = (243)$
		C	
180º	**132465**		$CT^2 = D = (23)(56)$
		E	
181º	**312645**		$ED = Q = (123)(456)$
		C	
240º	**316254**		$CQ = (12463)$
		D	
241º	**361245**		$DCQ = (13)(2456)$
		C	

(continuação)

Número	Série	Mudança	Permutação
300º	**362154**		$CDCQ = (14623)$
		D	
301º	**326145**		$(DC^2)Q = (14563)$
		C	
360º	**321654**		$C(DC^2)Q = (13)(46)$

Conseguimos um total de 360 séries sem qualquer repetição, mas não formam um subgrupo, uma vez que o único subgrupo de S_6 de índice 2 é A_6 que contém todas as permutações pares. Seria ideal obter agora todas as 720 séries. Como se poderá proceder a partir da série 360? (É escusado voltar a aplicar novamente D pois iríamos obter a **série [312645]**- repetindo-se a série 181). Parece ser boa ideia voltar a usar E=(12)(45), tal como na série 180, mas novamente não é possível obter as restantes 360 permutações.

Número	Série	Mudança	Permutação
360º	**321654**		$C(DC^2)Q = (13)(46)$
		E	
361º	**231564**		$EC(DC^2)Q = Q^2 = (132)(465)$
		B	
372º	**213654**		$BQ^2 = (12)(46)$
		C	
373º	**216345**		$CBQ^2 = (12)(3456)$

Apesar de Q ser de ordem três não é possível aplicar localmente esta permutação pois se introduzirmos a mudança E a seguir à série 360º e voltando a aplicar as mudanças habituais chega-se à série 373º. Porém esta série já ocorreu e de acordo com a regra (2) tal situação não pode ocorrer.

Nota: Provar que a 373º série se repete será uma tarefa dirigida aos alunos, sendo que esta abordagem se encontra redijida sucintamente na Estratégia Pedagógica da Implementação das Actividades.

Assim, não utilizando uma mudança simples, apenas será possível obter metade das permutações possíveis, isto é, as pares. Introduzindo uma mudança simples do tipo s_1=(12), s_2=(23), s_3=(34), ou s_4=(45), ou s_5=(56). As mudanças simples levam-nos para outras classes direitas a fim de obter as permutações ímpares.

Então,

Número	Série	Mudança	Permutação
360º	**321654**		$(13)(46)$
		s_1	
361º	**231654**		$S = s_1.(13)(46) = (132)(46)$
		B	
372º	**213564**		$BS = (12)(465)$
		C	
373º	**215346**		$CBS = (12)(345)$

Para prolongar a sinfonia *Minor Extents* introduz-se uma nova mudança simples que nos vai levar para outra classe direita, designada por H_{12}S, designada por **Single Lead**, onde S=s_1.(13)(46)= (132)(46)

Qualquer uma das mudanças simples pode ser utilizada não sendo importante qual a série que nos leva para as restantes 360 permutações ímpares. A seguir repetem-se as mesmas 360 permutações mas agora faz-se s_2 que nos traz de volta à série inicial uma vez que S é de ordem 2. Terminamos com um método que nos dá um total de 720 permutações. A introdução de uma mudança simples na série 360º tem o efeito de alternar entre as permutações pares e ímpares nas próximas 360 séries.

Número	**Série**	**Mudança**	**Permutação**
360º	**321654**		e
		s_1	
361º	**231654**		(132)(46)
		C	
420º	**236145**		(145632)
		D	
421º	**263154**		(1462)
		C	
480º	**261345**		(134562)
		D	
481º	**216354**		(12)(346)
		C	
540º	**213645**		(12)(456)
		E	
541º	**123465**		(12)(56)
		C	
600º	**124356**		(12)(34)
		D	
601º	**142365**		(234)(56)
		C	
660º	**143256**		(24)
		D	
661º	**134265**		(243)(56)
		C	
720º	**132456**		(23)
		s_2	
721º	**123456**		e

A sinfonia *Minor Extents* em Plain, Bob e Single Leads obedece às regras **(C1)-(C3)**.

▶ **Definição 1.8** *O número de Leads é igual a n!/(2n)=(n-1)!/2 igual à cardinalidade de* A_{n-1}.

Sinfonia Doubles Extents (5 sinos)

Para o Plain Bob Doubles a ideia é adicionar classes direita de H_{10} o grupo Perseguição Total de 5 sinos, e obter-se assim mais séries. Claro que isto tem de ser feito sem desobedecer às regras (1)-(3).

De acordo com a definição, os geradores do Grupo de Perseguição são A=(12)(34) e B=(23)(45). Introduz-se C=(34) de modo análogo. Dado que P=CB=(34)·(23)(45) o que se traduz na permutação (2453) tem ordem 4 ($P^4 = e$), obtém-se 4 classes direitas, ou Leads, de H_{10} para um total de 40 permutações (41 incluíndo a série inicial).

Nº	Mudanças	Séries	Permutações	Nº	Mudanças	Séries	Permutação
1º		**12345**					
	A				A		
2º		**21435**	A=(12)(34)	22º		**51342**	(125)
	B				B		
3º		**24153**	BA=(13542)	23º		**53124**	(13245)
	A				A		
4º		**42513**	ABA=(14)(35)	24º		**35214**	(14523)
	B				B		
5º		**45231**	$(AB)^2$=(15234)	25º		**32541**	(153)
	A				A		
6º		**54321**	A$(AB)^2$=(15)(24)	26º		**23451**	(15432)
	B				B		
7º		**53412**	$(AB)^3$=(14325)	27º		**24315**	(142)
	A				A		
8º		**35142**	A$(AB)^3$=(13)(25)	28º		**42135**	(134)
	B				B		
9º		**31524**	$(AB)^4$=(12453)	29º		**41253**	(12354)
	A				A		
10º		**13254**	A$(AB)^4$=(23)(45)	30º		**14523**	(24)(35)
	C				C		
11º		**13524**	CA$(AB)^4$=P=(2453)	31º		**14253**	P^3=(2354)
	A				A		
12º		**31254**	(123)(45)	32º		**41523**	(124)(35)
	B				B		
13º		**32145**	(13)	33º		**45132**	(134)(25)
	A				A		
14º		**23415**	(1432)	34º		**54312**	(1425)
	B				B		
15º		**24351**	(1542)	35º		**53421**	(15)(243)
	A				A		
16º		**42531**	(1534)	36º		**35241**	(1523)
	B				B		
17º		**45213**	(14)(235)	37º		**32514**	(1453)
	A				A		
18º		**54123**	(135)(24)	38º		**23154**	(132)(45)
	B				B		
19º		**51432**	(125)(34)	39º		**21345**	(12)
	A				A		
20º		**15342**	(25)	40º		**12435**	C=(34)
	C				C		
21º		**15432**	P^2=(25)(34)	41º		**12345**	P^4=e

Considerando apenas as Topos de Lead podemos descrever o Plain Lead por P (com 40 séries) pela sequência de 4 Plains Leads que constituem o Plain Course.

$$\text{PPPP}=P^4$$

Ainda não fomos bem sucedidos em obter todas as 120 permutações (5!=120). Para isso temos de introduzir uma nova mudança diferente de C que como já se viu corresponde a uma Bob Lead. Assim em vez de fazer a última mudança, C, aplica-se D=(23) que nos leva para uma outra classe

direita, nomeadamente, T=DC=(23).(34)= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} =(234)$

Como T=(234) é de ordem 3 então após aplicar D fazem-se as mudanças de modo semelhante às do Plain Course.

Número	Mudanças	Séries	Permutação
1		**12345**	
	C		
40º		**12435**	(34)
	D		
41º		**14235**	T=DC=(234)
	C		
80º		**14325**	(24)
	D		
81º		**13425**	T^2=(243)
	C		
120º		**13245**	(23)
	D		
121º		**12345**	$T^3=e$

Após aplicar D por três ocasiões, pois a Bob T é de ordem três, regressa-se à **série inicial [12345]** o que perfaz um total de 120 permutações.

A solução pode ser representada pela sequência de mudanças

$$(((AB)^4AC)^4(AB)^4AD)^3$$

Alternativamente, considere-se apenas Topos de Lead, e descreve-se o Plain Bob Doubles utilizando Plain e Bob Leads do seguinte modo:

$$\text{PPPTPPPTPPPT}=(P^3T)^3$$

Aqui a Bob é utilizada nas séries 40, 80 e 120. Subsequentemente, C leva-nos desde a série 41 para a 80, e desde a 81 para a 120. Note-se também que o **sino 1** está em primeiro lugar em todas as séries sendo estas consideradas Topos de Lead tal como foi definido.

Ao contrário da sinfonia **Minor Extents** em que não é possível obter todas as permutações utilizando Plain e Bob Leads, na **Doubles Extents** é interessante verificar que se pode obter a sinfonia completa utilizando Plain e Bob Leads.

Stedman Doubles

O método Stedman Doubles, em 5 sinos, utiliza as mudanças A=(12)(34), B=(23)(45) e C=(12)(45). A ordem das mudanças será diferente da que foi utilizada no Plain Bob. No método Stedman Doubles as mudanças que vão alternar entre si serão B e C.

Número	Séries	Mudança	Permutação
1º	**12345**		e
		C=(12)(45)	
2º	**21354**		C=(12)(45)
		B=(23)(45)	
3º	**23145**		BC=(132)
		C	
4º	**32154**		CBC=(13)(45)
		B	
5º	**31245**		$(BC)^2$=(123)
		C	
6º	**13254**		$C(BC)^2$=(23)(45)
		B	
7º	**12345**		$(BC)^3=e$

É óbvio que este método nunca irá modificar as posições dos **sinos 4 e 5** que se encontram nas duas últimas posições. De facto, regressa-se à série inicial em apenas seis mudanças (formando o grupo de perseguição H).

Assim, na sexta série, de modo a evitar a série inicial, substitui-se a mudança B pela mudança A o que faz com que o sino que está na posição 5 fique inalterado.

A sequência de Leads produzida por este método, é conhecido como "Erin". O efeito em utilizar A (o sino na quinta posição permanecer inalterado) faz com que passemos para outra classe de equivalência. O grupo de perseguição H define-se do seguinte modo:

Número	Séries	Mudança	Permutação
1º	**12345**		e
		C=(12)(45)	
2º	**21354**		a=(12)(45)
		B=(23)(45)	
3º	**23145**		b=(132)
		C	
4º	**32154**		c=(13)(45)
		B	
5º	**31245**		d=(123)
		C	
6º	**13254**		f=(23)(45)
		A=(12)(34)	
7º	**31524**		Af=(12453)

Note-se que P=Af=(12453) é de ordem 5 pelo que iremos ter cinco classes direitas do grupo de perseguição: H, HP, HP^2, HP^3 e HP^4.

Nº		Séries	Perm	Nº		Séries	Perm	Nº		Séries	Perm
1º		**12345**	e	11º		**53124**		21º		**52431**	
	C				C				C		
2º		**21354**	(12)(45)	12º		**35142**		22º		**25413**	
	B				**A**				B		
3º		**23145**	(132)	13º		**53412**	P^2=	23º		**24531**	
	C				C		=(14325)		C		
4º		**32154**	(13)(45)	14º		**35421**	(12)(45)·P^2	24º		**42513**	
							=(15243)				
	B				B				**A**		
5º		**31245**	(123)	15º		**34512**		25º		**24153**	P^4
	C				C				C		
6º		**13254**	(23)(45)	16º		**43521**		26º		**42135**	
	A				B				B		
7º		**31524**	P=(12453)	17º		**45312**		27º		**41253**	
	C				C				C		
8º		**13542**	(12)(45)·P	18º		**54321**		28º		**14235**	
			=(253)								
	B				**A**				B		
9º		**15324**	(123)·P	19º		**45231**	P^3	29º		**12453**	
			=(245)								
	C				C				C		
10º		**51342**		20º		**54213**		30º		**21435**	
	B				B				**A**		
										12345	e

A solução pode ser representada pela sequência de mudanças

$$(CBCBCA)^5 = ((CB)^2CA)^5$$

Mais, pode seguramente garantir-se que nenhuma série se irá repetir dado que estas classes direitas são todas disjuntas. O método *StedmanDoubles* continua a não ser bem sucedido em produzir todas as 120 permutações.

A próxima tentativa de conseguir todas as 120 permutações, inicia-se do mesmo modo com as mudanças C,B,C,B,C,A. Porém na próxima Lead aplica-se primeiro B em vez de C, e subsequentemente, inicia-se cada conjunto de seis com B e C alternadamente no início. O resultado é levar-nos para a série inicial depois de 60 permutações.

Nº	Mud	Séries	Perm	Nº	Mud	Séries	Perm
1º		**12345**	e	31º		**54132**	(13425)
	C				B		
2º		**21354**	a=(12)(45)	32º		**51423**	(12435)
	B				C		
3º		**23145**	b=(132)	33º		**15432**	(25)(34)
	C				B		
4º		**32154**	c=(13)(45)	34º		**14523**	(24)(35)
	B				C		
5º		**31245**	d=(123)	35º		**41532**	(12534)
	C				B		
6º		**13254**	f=(23)(54)	36º		**45123**	(13524)

Nº	Mud	Séries	Perm	Nº	Mud	Séries	Perm
	A				**A**		
7º		**31524**	g=(12453)	37º		**54213**	(14235)
	B				C		
8º		**35142**	fg=(13)(25)	38º		**45231**	(15234)
	C				B		
9º		**53124**	dg=(13245)	39º		**42513**	(14)(35)
	B				C		
10º		**51342**	cg=(125)	40º		**24531**	(15342)
	C				B		
11º		**15324**	bg=(245)	41º		**25413**	(14352)
	B				C		
12º		**13542**	ag=(253)	42º		**52431**	(15)(34)
	A				**A**		
13º		**31452**	i=(12543)	43º		**25341**	(152)
	C				B		
14º		**13425**	ai=(243)	44º		**23514**	(14532)
	B				C		
15º		**14352**	bi=(254)	45º		**32541**	(153)
	C				B		
16º		**41325**	ci=(124)	46º		**35214**	(14523)
	B				C		
17º		**43152**	di=(13254)	47º		**53241**	(15)(23)
	C				B		
18º		**34125**	fi=(13)(24)	48º		**52314**	(145)
	A				**A**		
19º		**43215**	j=(14)(23)	49º		**25134**	(13452)
	B				C		
20º		**42351**	fj=(154)	50º		**52143**	(135)
	C				B		
21º		**24315**	dj=(142)	51º		**51234**	(12345)
	B				C		
22º		**23451**	cj=(15432)	52º		**15243**	(235)
	C				B		
23º		**32415**	bj=(143)	53º		**12534**	(345)
	B				C		
24º		**34251**	aj=(15423)	54º		**21543**	(12)(35)
	A				**A**		
25º		**43521**	k=(15324)	55º		**12453**	(354)
	C				B		
26º		**34512**	ak=(14253)	56º		**14235**	(234)
	B				C		
27º		**35421**	bk=(15243)	57º		**41253**	(12354)
	C				B		
28º		**53412**	ck=(14325)	58º		**42135**	(134)
	B				C		
29º		**54321**	dk=(15)(24)	59º		**24153**	(13542)
	C				B		
30º		**45312**	kf=(14)(25)	60º		**21435**	(12)(34)
	A				**A**		
31º		**54132**	(13425)	61º		**12345**	e

A primeira sequência de mudanças é dada por CBCBCA. Quando aplicada a mudança A obtém-se a permutação g que é o resultado do produto

$$g{=}\mathrm{A}f{=}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{pmatrix}{=}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&1&5&3\end{pmatrix}{=}(12453)$$

As primeiras seis permutações constituem o grupo de perseguição D_3. Com efeito,

.	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	c	d	f	e	a
c	c	b	a	e	f	d
d	d	f	e	a	b	c
f	f	d	c	b	a	e

A partir do primeiro grupo de perseguição D_3 irei obter 4 classes direitas, a saber: D_3g, D_3i, D_3j e D_3k, pois g é de ordem 5.

A segunda sequência de mudanças é dada por BCBCBA. Quando aplicada a mudança A obtém-se a permutação i que é o resultado do produto

$$i{=}\mathrm{A}\cdot ag{=}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&2&4&3\end{pmatrix}{=}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&3&4\end{pmatrix}{=}(12543)$$

A partir do segundo grupo de perseguição irei obter 4 classes direitas pois i é de ordem 5.

A solução pode ser representada pela sequência de mudanças

$$(CBCBCABCBCBA)^5{=}((CB)^2CA(BC)^2BA)^5$$

No entanto, a permutação g não volta a aparecer e portanto não há nenhuma dúvida de que é um subgrupo até se ter completado as sessenta permutações. Uma pequena observação para dizer que obtemos o grupo A_5 através destas 60 mudanças, uma vez que as permutações são pares. De modo a obter as permutações ímpares será necessário mover-nos para uma outra classe direita aplicando uma permutação ímpar. Para isto ser possível a única possibilidade é introduzir uma mudança simples, ou seja, $s_1{=}(12)$, $s_2{=}(23)$, $s_3{=}(34)$, $s_4{=}(45)$. Não é importante qual destas mudanças simples nos leva para as restantes 60 permutações sendo que qualquer uma das quatro serve para o efeito.

Assim desde a série 60 para a 61 poderá ser:

Nº	Mudança	Série	Permutação
60º		**21435**	(12)(34)
	$s_1{=}(12)$		
61º		**12435**	$s_1\cdot(12)(34){=}(34)$

As séries **61º** até à **120º** são obtidas aplicando uma sequência de mudanças idênticas relativamente às que foram utilizadas anteriormente. Essa sequência de mudanças parte da série **61º**, corresponde à permutação (34), caso seja aplicada a mudança s_1. Chama-se a esta permutação

s, obtém-se a seguir as permutações se, sa, sb, sc, sd, sf, sg,...., isto é, as classes direitas de s a partir do grupo alternado A_5

O método completo é conhecido como *Stedman Doubles*.

Grandsire

O método Grandsire é tocado num número ímpar de sinos. Foi desenvolvido em 1650 por Robert Roan em 5 sinos, sendo as sinfonias de 7 e mais sinos as mais importantes. O problema mais referido é em 7 sinos, mas devido ao facto de ser algo difícil de compreensão, a sua implementação nas actividades pedagógicas, somente será descrito o Grandsire em 5 sinos.

O Grupo de Perseguição H_{10} é gerado por A=(12)(34) e B=(23)(45) como usualmente. Introduz-se C=(12)(45), mas a primeira diferença do Grandsire para o Plain Bob consiste no facto de colocar C em primeiro lugar. Isto é irrelevante do ponto de vista matemático. A seguir faz-se B, e depois alterna-se entre A e B até que se tenha percorrido ao longo da classe direita CH_{10}. A última mudança realizada será B, e no total iremos fazer $B(AB)^4$C=AC. A seguir repete-se as mudanças, isto é, CBAB......AB até se ter percorrido ao longo da classe direita (CAC)H_{10}. De seguida, repete-se outra vez as mudanças percorrendo ao longo de (C$(AC)^2$)H_{10}, voltando à **série inicial [12345]**.

Aqui estão as séries de 3 Plain Leads, num Plain Course. Ignorando a primeira série que é a **série inicial**, cada coluna é uma Plain Lead.

Nº	Mud	Séries	Perm	Nº	Mud	Séries	Perm
1º		**12345**					
	C				B		
2º		**21354**	C=(12)(45)	17º		**34512**	(14253)
	B				A		
3º		**23145**	BC=(132)	18º		**43152**	(13254)
	A				B		
4º		**32415**	ABC=(143)	19º		**41325**	(124)
	B				A		
5º		**34251**	BABC(15423)	20º		**14235**	(234)
	A				B		
6º		**43521**	$(AB)^2$C=(15324)	21º		**12453**	$(AC)^2$=(354)
	B				C		
7º		**45312**	$B(AB)^2$C=(14)(25)	22º		**21435**	C$(AC)^2$=(12)(34)
	A				B		
8º		**54132**	$(AB)^3$C=(13425)	23º		**24153**	(13542)
	B				A		
9º		**51423**	$B(AB)^3$C=(15342)	24º		**42513**	(14)(35)
	A				B		
10º		**15243**	$(AB)^4$C=(235)	25º		**45231**	(15234)
	B				A		
11º		**12534**	$B(AB)^4$C=AC=(345)	26º		**54321**	(15)(24)
	C				B		
12º		**21543**	CAC=(12)(35)	27º		**53412**	(14325)
	B				A		
13º		**25134**	(13452)	28º		**35142**	(13)(25)
	A				B		
14º		**52314**	(145)	29º		**31524**	(12453)

Nº	Mud	Séries	Perm	Nº	Mud	Séries	Perm
	B				A		
15º		**53241**	(15)(23)	30º		**13254**	(23)(45)
	A				B		
16º		**35421**	(15243)	31º		**12345**	$(AC)^3=e$

Temos um total de 30 séries pois a primeira Lead é o resultado de AC=(12)(34)·(12)(45)=

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&4&5&3\end{pmatrix}$=(345) que é de ordem 3, que nos traz de volta à **série inicial** após 30 (=3×10) mudanças, num Plain Course com 3 Plain Leads.

A fim de prolongar o número de Leads será necessária a introdução de uma Bob Lead. No método GrandSire a Bob consiste em utilizar a mudança C na posição da última mudança A na primeira Plain Lead.

Número	Séries	Mudança	Permutações
1º	**12345**		
		C=(12)(45)	
2º	**21354**		C=(12)(45)
		B=(23)(45)	
3º	**23145**		BC=(132)
		A=(12)(34)	
4º	**32415**		ABC=(143)
		B	
5º	**34251**		BABC=(15423)
		A	
6º	**43521**		$(AB)^2$=(15324)
		B	
7º	**45312**		B$(AB)^2$=(14)(25)
		A	
8º	**54132**		$(AB)^3$=(13425)
		B	
9º	**51423**		B$(AB)^3$=(12435)
		C=(12)(45)	
10º	**15432**		CB$(AB)^2$=(25)(34)
		B	
11º	**14523**		BCB$(AB)^2$=(24)(35)
		C	

Se usarmos a Bob antes da primeira Topo de Lead, como se mostra acima, então esta será **[14523]** em vez de **[12534]**. Obtém-se a permutação (24)(35) relativamente à **série inicial**. Dado que a permutação tem ordem 2, iremos voltar à **série inicial** depois de utilizar duas vezes a Bob nesse lugar. Neste método as Leads são ordenadas pela seguinte ordem TPPTPP, o que permite aumentar o número de permutações de 30 para 60.

Nota:A Lead inicial do método Grandsire é uma Bob. Uma das actividades a propôr aos alunos será justificar a razão pelo qual a Bob, no método Grandsire, se efectua em primeiro lugar. Deve-se ao facto de que uma das séries, se tornaria a repetir antes de voltarmos à **série inicial**, o que iria desobedecer à regra (C2). A tarefa pretende reforçar as diferenças entre este método e o Plain Bob.

É razoável perguntar, como usualmente, se podemos obter um maior conjunto de permutações utilizando Plain e Bob Leads de um modo diferente. A resposta é não. Para ver isso, simplesmente note-se que cada A,B,C são mudanças pares. Resulta que o maior número possível de permutações que podem gerar são 60 (a ordem de A_5) que, de facto, foi o caso.

Para obter o número máximo de permutações utilizando 5 sinos iremos precisar de usar uma mudança ímpar que envolva outro tipo de Lead designada por Single Lead como foi referido anteriormente para o método *Stedman Doubles*.

Uma diferença notável destes dois últimos métodos relativamente ao Plain Bob é o facto deste último não necessitar de uma mudança simples para obter a sinfonia completa na Doubles Extents. Poderá ser esta a razão pela qual o Plain Bob é considerado o método de construção da Mudança Musical mais famoso e mais apreciado.

1.8 Representação gráfica

As representações gráficas das sinfonias são vistas em termos de grafos a fim de apreciar a beleza das sinfonias *Singles Extents*, *Minimus Extents* e *Doubles Extents*.

Grafos de Cayley

► **Definição 1.9** *Os grafos de Cayley para n-sinos têm nos vértices as diferentes n-permutações. Estes estão ligados por uma aresta, associada a uma das (n-sinos) mudanças, se e só se esta mudança é uma mudança entre dois vértices. A aresta é designada pelo nome da mudança.*

Isto significa que o grafo tem n! vértices. O número das diferentes mudanças correspondente ao número de arestas - que corresponde ao número de mudanças necessárias no grupo simétrico S_n- equivale a F(n)-1, onde F(n) designa o *n-ésino número da série de Fibonacci*. Relembre-se que F(n) é definido recursivamente para qualquer inteiro não-negativo n sendo, F(0)=F(1)=1, F(n+1)=F(n)+F(n-1).

Então,

- F(2)-1=F(1)+F(0)-1=1+1-1=1
- F(3)-1=F(2)+F(1)-1=2+1-1=2
- F(4)-1=F(3)+F(2)-1=3+2-1=4
- F(5)-1=F(4)+F(3)-1=5+3-1=7
- ....

Singles Extents

Podemos representar esta sinfonia por um grafo, conhecido como diagrama de Cayley [3]. Os vértices representam as distintas séries, e as linhas de conexão exprimem as mudanças; as linhas a vermelho correspondem à alteração dos primeiros dois sinos e as linhas a azul correspondem à alteração dos últimos dois sinos: A=(12) e B=(23).

[3]baptizado após o século XIX em honra do algebrista Arthur Cayley

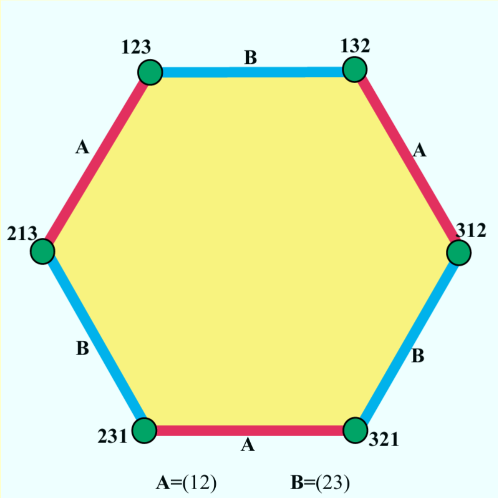


Figura 6

Atravessando as linhas no sentido dos ponteiros do relógio dá-nos a $SlowSix$; para a $QuickSix$ procede-se no sentido contrário.

Minimus Extents

A figura 7 mostra o grafo de Cayley para 4 sinos sem designar os vértices para evitar uma confusão aparente dos n-sinos e os seus subgrafos. Como se pode observar o número máximo de mudanças necessárias a considerar no grupo simétrico S_4, que equivale a F(4)-1, serão quatro, designadamente A=(12)(34), B=(23), C=(34) e D=(12), pois F(4)-1=4.

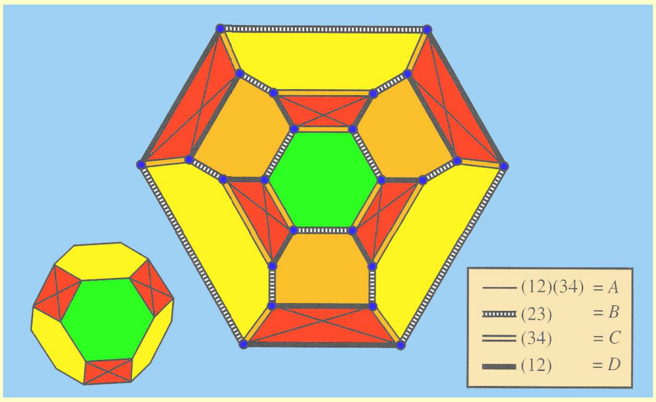


Figura 7

Para identificar os vértices, através das mudanças, designa-se um vértice qualquer por i (para "início") associado a uma mudança arbitrária. Dado um outro vértice qualquer, f (para "fim"), escolhe-se um caminho no grafo de Cayley que ligue i a f. À medida que se caminha desde i para f, aplicando sucessivamente as mudanças do método escolhido, que correspondem às arestas, delineamos o ciclo que vai desde a designação i para a designação f.

Ciclos Hamiltoneanos

► **Definição 1.10** *Um grafo diz-se Hamiltoneano se é possível traçar um ciclo contendo todos os vértices uma e só uma vez.*

As sinfonias com n≥3 e de comprimento pelo menos 4 correspondem precisamente a *ciclos* orientados no grafo de Calley em n-sinos, ao longo de um vértice fixo (isto é, os caminhos circulares orientados ao longo deste vértice contém todos os vértices no máximo uma única vez).

► **Teorema 1.2** *Uma sinfonia em n-sinos é uma sinfonia completa se e só se o seu correspondente ciclo é Hamiltoneano.*

Todo o ciclo no grafo de Cayley corresponde a dois ciclos orientados. Além disso, as duas sinfonias que correspondem os dois ciclos orientados são inversas uma da outra. Por exemplo, se designarmos no diagrama de Cayley para a *Singles Extents* a *SlowSix*, vê-se que só existe um único ciclo Hamiltoneano no grafo que inicia no vértice designado com **[123]**. Os dois correspondentes ciclos orientados traduzem-se na sequência de mudanças $(AB)^3$ para a *SlowSix* e $(BA)^3$ para a *QuickSix* que é a sua inversa.

A figura 8 mostra o ciclo Hamiltoneano, nesse grafo correspondente, ao Plain Course do Plain Bob em 4 sinos. Como vértice inicial escolheu-se o vértice do canto superior esquerdo do hexágono de dentro do grafo de Cayley. Recorde-se que o Plain Course em 4 sinos é dividido em três Leads designadamente, H_8, H_8P e H_8P^2. Este facto leva a que o método Plain Bob seja palindrómico, isto é, transforma-se numa simetria espelhar do ciclo Hamiltoneano.

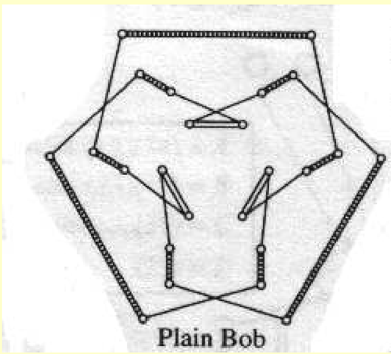


Figura 8

Além do método Plain Bob também outros métodos foram desenvolvidos pelos tocadores de sino.

As mudanças que utiliza o método *Double Bob* são A=(12)(34), B=(23), C=(34) e D=(12) e a sequência de mudanças do Plain Course é dado por $(ABADABAC)^3$. Pode observar-se facilmente o grupo de perseguição H_8 e as duas classes direitas H_8P e H_8P^2.

O ciclo Hamiltoneano referente ao diagrama de Cayley para 4 sinos do método *Double Bob* é dado pela figura 9.

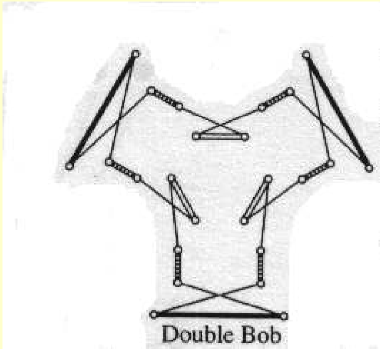


Figura 9

Um outro método inventado pelos tocadores, também para 4 sinos, designa-se por *Canterbury* e utiliza as mudanças A=(12)(34), B=(23), C=(34) e D=(12), respectivamente. Porém a sequência de mudanças do Plain Course difere substancialmente dos métodos anteriores.

O método *Canterbury* aplica as mudanças pela seguinte ordem $(ABCDCBAB)^3$. As mudanças dos sinos A, B, C e D permanecem idênticas. O subgrafo correspondente ao diagrama de Cayley tem um ciclo Hamiltoneano como ilustra a figura 10.

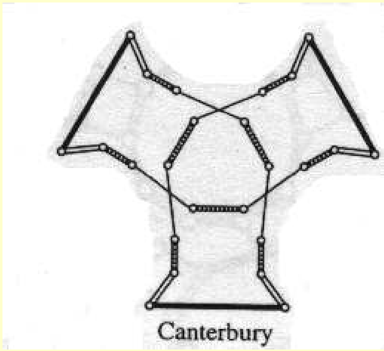


Figura 10

Doubles Extents

A Sinfonia Doubles Extents utiliza 4 mudanças, A=(12)(34), B=(23), C=(34) e D=(12). A sequência de mudanças do Plain Course é dada por $(AB)^4AC$. Introduzindo a mudança D conseguimos obter a sinfonia completa utilizando Plain e Bob Leads. Assim, a sinfonia *Doubles Extents* segue o respectivo percurso, $(((AB)^4AC)^3(AB)^4AD)^3$

Sabemos que existem 7 mudanças, F(5)-1=7, diferentes no grupo de simetrias S_5. Isto significa que no diagrama completo de Cayley em 5-sinos cada um dos 120 vértices são o final de sete arestas diferentes. Devido a este número elevado de arestas e de vértices tornava-se impraticável desenhar o grafo completo.

No entanto, note-se que a maior parte das mudanças na sinfonia são A's, B's e C's; apenas existem 3 D's. Para se ter uma boa ideia do modo como a sinfonia se estrutura podemos restringir algumas arestas do grafo completo.

O subgrafo do grafo completo de Cayley em 5-sinos consiste em todos os seus vértices e todas as suas arestas que estão designadas com um A, um B ou um C.

A figura 11 mostra uma reprsentação deste subgrafo que caracteriza uma simetria de ordem 5. Certos pontos na fronteira deste grafo são identificados aos pares como indicado. Note-se que apenas incluímos a parte essencial dos pares que são compatíveis.

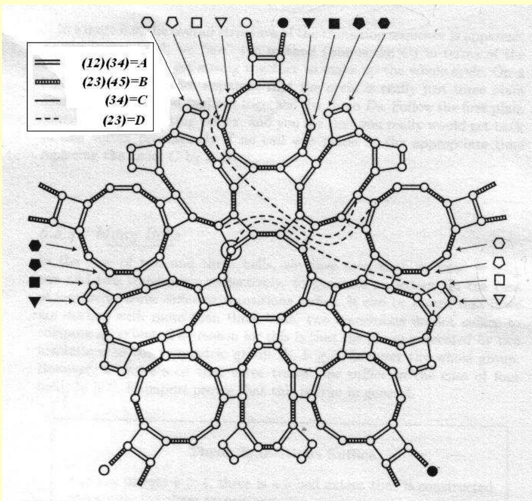


Figura 11

Também se inclui um ponto inicial no nosso ciclo (o vértice com um círculo à volta) e três arestas designadas por D. Partindo deste vértice, é agora possível traçar o ciclo Hamiltoneano que corresponde à sinfonia completa do Plain Bob Doubles. A figura 12 mostra esse ciclo. Os pares de números indicam como as componentes desconexas desse ciclo permanecem juntas.

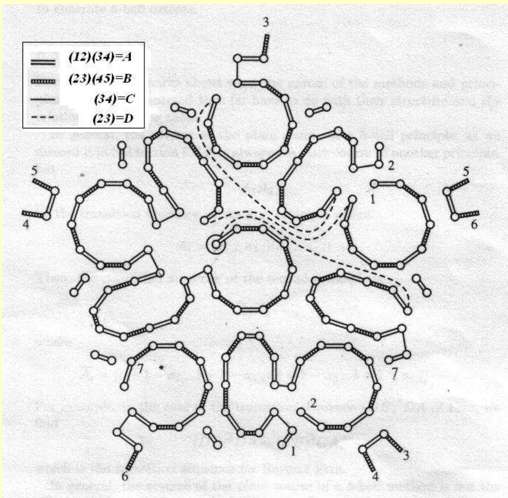


Figura 12

Partindo do vértice inicial com o círculo à volta percorre-se o Grupo de Perseguição H_{10} até aplicar a mudança C=(34). De seguida é possível observar as Leads $H_{10}(2453)$, $H_{10}(25)(34)$, $H_{10}(2354)$. Aplicando a mudança D obtém-se as Bob Leads T=(234), T^2=(243) e, finalmente, T^3=e.

1.9 Estratégia Pedagógica na associação da teoria de grupos à Mudança Musical

Introdução

As relações entre professores de matemática, aluno e conteúdos matemáticos são dinâmicas; por isso, a actividade de ensino deve ser um processo coordenado de acções docentes, em que o professor deverá organizar, com o máximo de cuidado possível, as suas aulas, levando em conta, sempre as reais necessidades dos seus alunos nos diversos tipos de ambientes em que estão inseridos.

Actualmente encontramos, dentro da educação matemática, resultados insatisfatórios obtidos na docência desta disciplina nos diversos níveis de ensino, ou seja, desde a pré-escola até à Universidade. São muitas as causas que contribuem para este lastimoso quadro. Abaixo, cito algumas delas:

- inadequação do ensino da matemática em relação ao conteúdo, à metodologia de trabalho e ao ambiente em que se encontra inserido o aluno em questão;
- "má" formação de professores, ou seja, falta de capacitação docente;
- programas de matemática não flexíveis e muitas vezes baseados em modelos de outros países e, consequentemente, modelos que muitas vezes não representam a realidade sócio-económica do país;
- falta de compreensão e domínio de pré-requisitos fundamentais que ajudariam o estudante a uma aprendizagem eficaz na aula de matemática;
- desvalorização sócio-económica dos professores;

O principal objectivo deste estudo é analisar aspectos puramente educacionais que norteiam o fracasso educacional e levantar esta problemática tão presente nas nossas instituições de ensino, mas ao mesmo tempo iniciar um estudo que mostrem caminhos que possibilitem ao aprendiz, através do seu mestre, aprofundar os seus conhecimentos da matemática sob um ponto de vista musical incorporando-os à sua estrutura cognitiva.

Em primeiro lugar devemos entender o que é ensino. Segundo Libâneo (1991), *o ensino é um meio fundamental do progresso intelectual dos alunos*, abrangendo a assimilação de conhecimentos. Citando o que escreve Goldberg (1998), *o ensino resume a instrumentalização necessária à transmissão do conhecimento, base do processo de educação.*

O ensino da matemática deve ser um processo compartilhado, logo depende profundamente do conhecimento do aluno sobre a importância do assunto que está em discussão, ou seja, da sua capacidade de atender às suas necessidades e expectativas e de lhe abrir alternativas para a melhoria da sua qualidade de vida.

Para Rodriguez (1994), ao longo dos anos, a causa deste fracasso tem sido atribuída aos alunos, o que levou os professores a procurarem diversas estratégias e alternativas metodológicas que motivassem e facilitassem a compreensão dos conteúdos. No entanto, esta procura tem provocado a consciencialização da influência de uma base teórica para fundamentar a prática, pois ainda observamos professores de matemática com posturas e rigores científicos, supervalorizando a memorização de conceitos e, principalmente, o domínio de classe.

Não é raro encontrarmos, dentro do trabalho quotidiano das escolas, professores de matemática ensinando esta disciplina de uma forma *rotineira*, onde os conteúdos trabalhados são aqueles presentes no livro didáctico adoptado e o método de ensino restringe-se a aulas expositivas e a exercícios de memória ou aprendizagem.

Essa postura do professor faz com que os educandos entendam o processo de estudo como sendo mera memorização, desestimulando, com isso, actividades mais elaboradas que envolvam raciocínio. Além disso, estes mesmos estudantes tornam-se excessivamente dependentes do professor e do livro didáctico, uma vez que o seu principal objectivo dentro da instituição educacional é obter uma nota suficiente para serem aprovados.

Outro grande problema refere-se ao facto de que a matemática é frequentemente tratada como sendo uma área do conhecimento humano desligada da realidade e do quotidiano onde o indivíduo se encontra inserido. Sendo assim, é comum ouvirmos os nossos alunos perguntarem: *Para que serve isso? Onde vou utilizar aquilo?* Em muitos casos, tais perguntas não chegam sequer a ser respondidas. Com isso, teremos mais dúvidas, mais conflitos e mais fracassos estudantis.

Por outro lado, se nos dirigirmos a certas escolas e observarmos, alguns professores de matemática entrarem na sala de aula, verificamos que se colocam imediatamente à frente da turma diante do quadro-negro. Parecem encontrar, neste local, o seu ponto de apoio e de referência em relação à turma. Nas escolas onde professores de matemática trabalham com o ensino tradicional podemos observar que o processo ensino-aprendizagem dos alunos torna-se mera transmissão da matéria, ou seja, o professor *transmite* e os alunos *recebem*.

Perante estes factos, podemos concluir que muitas vezes a actividade mental dos nossos alunos é subestimada, privando-os de desenvolver as suas reais capacidades e habilidades. Devemos estar cientes de que o ensino da matemática deve ser algo mais do que transmissão da matéria, deve ser algo mais do que mera cópia dos exercícios resolvidos pelo professor no quadro-negro, deve ser algo mais do que mera memorização. Dos problemas mais corriqueiros que o professor enfrenta na sala de aula, o mais difícil de solucionar é talvez o da falta de motivação dos alunos. Consequentemente, este problema produz atitudes de resistência àquilo que se está a ensinar. E assim, diante de perguntas tais como: *Preciso de estudar isto para o teste?, Isto é importante?*, o professor tende a desistir de melhorar a sua actuação e então passa a racionalizar, e o seu discurso passa a ser: *Os estudantes não estão interessados nas minhas aulas porque lhes faltam pré-requisitos necessários à compreensão da minha matéria.*

Como resultado deste emaranhado de problemas, encontramos de um lado alunos desinteressados, considerando a matemática como um processo de aprendizagem árdua, mas necessária para a tão sonhada aprovação, e, por outro lado, professores desgostosos em relação aos seus alunos pois, segundo eles, estes alunos não sabem nada do que foi supostamente *trabalhado* na sala de aula.

O ensino da matemática - algumas soluções

Os avanços teóricos têm comprovado que a aprendizagem não se dá pelo treino mecânico descontextualizado ou pela exposição exaustiva do professor. Pelo contrário, a aprendizagem dos conceitos ocorre pela interacção dos alunos com o conhecimento.

O fundamental dentro do processo ensino-aprendizagem é a alteração de como ensinar para que os alunos aprendam e o que fazer para favorecer este aprendizado. Para isso, devemos entender que os conteúdos direccionam o processo ensino-aprendizagem onde se valorizam a construção individual e colectiva. Com isso, oportunizamos situações em que os educandos interagem com o objecto de conhecimento e estabelecem as suas hipóteses para que estas sejam, posteriormente, confirmadas ou reformuladas.

Além disso, o professor deve-se dar conta que para uma boa aprendizagem da matemática é fundamental que o aluno se sinta interessado na reslução de um problema, qualquer que seja ele, despertando, assim, a sua curiosidade e a sua criatividade ao resolvê-lo.

Assim sendo, a matemática deveria ser ensinada de modo a ser um estímulo à capacidade de investigação lógica do educando, fazendo-o raciocinar. Neste contexto, a tarefa básica do professor seria o desenvolvimento da criatividade, apoiada não só na reflexão sobre os conhecimentos acumulados pela ciência em questão, mas também sobre as suas aplicações práticas às demais ciências e artes, concretamente, no nosso estudo, à Música, à tecnologia e ao progresso social. Quanto à escola, ela deve oferecer recursos materiais para tornar possível o trabalho docente.

Finalmente, o ensino da matemática deveria estar apoiado em experiências agradáveis, capazes de favorecer o desenvolvimento de atitudes positivas, que, por sua vez, conduzirão a uma melhor aprendizagem e ao gosto pela matemática.

A teoria de grupos desde os tempos em que foi descoberta, é considerada uma parte fundamental da Matemática. Sendo assim deveria ser dada mais atenção no currículo do ensino secundário. Dado que deixou de fazer parte do currículo depois da reforma do ensino secundário de 1995, cabe ao professor dinamizar e sensibilizar o grupo disciplinar de Matemática para a importância deste tema na formação académica dos alunos. Não se pode perder oportunidades de conhecimento, e o novo papel do professor tem de ser, necessariamente, motivador de aprendizagens e, consequentemente, não levar ao esquecimento a importância da teoria de grupos. O problema central deve-se ao facto dos reformistas considerarem a teoria de grupos demasiado abstracta para o ensino secundário, pois de acordo com as novas metodologias, tem de se procurar conteúdos que permitam uma resolução de problemas que se enquadrem a situações do nosso quotidiano. Para tornar a aprendizagem da teoria de grupos mais "acessível"e de aplicabilidade a problemas reais, poderemos associar a Campanologia a essa realidade. O facto de já não fazer parte do currículo é entendido como o principal obstáculo na implementação desta actividade. Acresce-se ainda o facto de todo o tempo no ensino secundário estar minuciosamente delineado, ou seja, todo o tempo disponível é pouco, pois, os alunos no final do ano são sujeitos a exames nacionais.

Apesar de todos estes constrangimentos, deve ser o professor a definir quais os moldes pelos quais o aluno poderá ter um primeiro contacto com a teoria de grupos, antes de ingressar no ensino superior.

Assim, a teoria de grupos seria uma óptima ferramenta na dinamização de actividades inseridas no âmbito extra-curricular como, por exemplo, um clube de Matemática, ou parte do projecto curricular de turma e de Escola. Deve procurar-se motivar os alunos a participarem nestas actividades. Apesar de não fazer parte do currículo, deve-se inovar nas aprendizagens. O papel do professor é muito diferente do que era há dez anos atrás. Assim a teoria de grupos pode ser desenvolvida sob o ponto de vista multimédia mostrando como uma parte fundamental da Matemática em associação com a Música. É frequente os alunos sentirem-se desmotivados com as aulas impostas pelo currículo. Uma aula diferente ou um projecto diferente, no qual a Música desempenhou um papel importante na elaboração de uma das mais brilhantes teorias da Matemática, faz com que os alunos se deslumbrem sobre esta interacção. Este deslumbramento deve-se ao facto da importância que a Música desempenhou na descoberta da Matemática. Através de conteúdos inovadores e lúdicos o aluno percebe que a Matemática não é só uma disciplina com fórmulas e funções, mas com bastantes aplicações práticas. Em suma, a relação da Matemática com a Campanologia permite desenvolver novas estratégias relativamente ao processo ensino-aprendizagem.

Como se pode desenvolver uma actividade relacionada com a teoria de grupos no actual currículo da Matemática no ensino secundário?

O que a Escola precisa de hoje em dia são alunos motivados para a aprendizagem. O aluno deve sentir uma componente interactiva entre o que está a aprender e a sua aplicabilidade em situações do nosso quotidiano.

Os novos desafios que hoje se colocam aos docentes, o repensar de estratégias inovadoras permitem abordar a Campanologia e a teoria de grupos, sem prejuízo de cumprimento do programa do secundário. Do que foi dito anteriormente, a Campanologia foi, num sentido não-técnico, uma primeira abordagem da teoria de grupos, 100 anos antes de os matemáticos a terem axiomatizado.

Entendida como uma arte musical, ainda embrionária, no século XVII os conceitos são bastante acessíveis pelo que não surgirão grandes problemas de aprendizagem. Cabe por isso ao professor a responsabilidade de assumir este desafio, implementando novas estratégias pedagógicas no ensino da Matemática a fim de motivar toda uma Comunidade Escolar, insatisfeita com o rumo que a educação está a tomar.

A Campanologia poderá lançar novos desafios no ensino da Matemática e levar os alunos a sentirem-se mais confiantes no estudo dos conteúdos programáticos. O conhecimento da teoria de grupos espelha a importância no desenvolvimento da Matemática durante os últimos séculos. Além da teoria de grupos também é importante referir a teoria de grafos e como ela está associada à Mudança Musical (aqui o público alvo serão os alunos da disciplina Matemática Aplicada às Ciência Sociais, vulgo MACS, dado que a teoria de grafos faz parte integrante do currículo).

Dada a importância que este tema poderá vir a ter, convém agora dar resposta à pergunta formulada inicialmente. Quais as linhas de orientação na aplicação da teoria de grupos à Campanologia inserida num projecto extra-curricular.

Como se pode implementar este projecto?

Quais os objectivos que nos propômos alcançar?

Quais as dificuldades com que nos vamos deparar?

Será em torno destas questões que toda a nossa estratégia pedagógica irá incidir, nomeadamente, a complementaridade da Campanologia com a teoria de grupos e de grafos abordada em termos das aprendizagens significativas dos alunos.

O professor deverá dispôr de um certo *background* didáctico.

Para isso classifiquemos cada um dos seguintes parâmetros, a saber:

- O público alvo.
- Pré-requisitos.
- Material necessário.
- Estratégia Pedagógica.
- Objectivos.
- Dificuldades na Implementação da actividade.
- Considerações Finais.

1. **Público alvo**

   De todos os intervenientes da comunidade escolar o público alvo são os alunos do ensino secundário, embora o projecto possa ser aberto a toda a comunidade escolar. No momento em que decorre a semana cultural o professor pode proferir algumas palestras aos demais interessados no tema. Um projecto que envolva toda a Escola dá enfâse ao papel que a Matemática desempenha na explicação física do Mundo. A Matemática deixa de ser vista como uma disciplina isolada de todas as outras. Promove-se um maior intercâmbio de ideias entre todos os participantes do processo ensino-aprendizagem.

2. **Pré-requisitos**

   - Reconhecer o significado do termo permutação.
   - Reconhecer que as permutações permitem obter todas as possíveis posições dos objectos em n lugares e sem repetição.
   - Identificar que n!=n×(n-1)×(n-2)×.......3×2×1
   - Reconhecer que o número de permutações de n objectos é n!.
   - Identificar que D_n sgnifica o Grupo Diedral de ordem n.
   - Identificar que S_n sgnifica o Grupo Simétrico de ordem n.
   - Identificar que A_n sgnifica o Grupo Alternado de ordem n.
   - Operar com permutações. Identificar que a composição é a operação entre as permutações e que a operação se realiza da direita para a esquerda..
   - Saber que

$$(13).(23)= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=(132)$$

   - Identificar e reconhecer o grupo de simetrias do triângulo e do quadrado.

3. **Material disponível**

   - Computadores pessoais com ligação à Internet, programa Flash e aplicação JAVA instalados de modo a se poder interagir com o applet da Campanologia desenvolvido por Kees van den Doel e também a página web constituída no âmbito desta tese: http://www.fc.up.pt/cmup/sinos
   - Quadro
   - Giz ou borrona
   - Data-Show
   - Fichas complementares da actividade
   - Retroprojector
   - Transparências

4. **Estratégia Pedagógica de implementação da actividade**

   O desenvolvimento da estratégia curricular que se pretende implementar, promovendo a interdisciplinaridade entre Música e Matemática dever ser feita por etapas graduais de conhecimento. A estratégia que aqui proponho é simplesmente uma ideia pessoal sobre o modo como deveria ser implementada. Cabe ao professor que tencione acolher esta iniciativa desenvolver outros projectos ou então melhorá-los de acordo com as suas perspectivas. A cultura da sala de aula de Matemática é, verdadeiramente, um ponto essencial de qualquer currículo de Matemática - e é com grande atenção e relevo que tem vindo a ser tratada, desde há alguns anos, por inúmeros autores e entidades especialistas em educação matemática. A natureza e organização das actividades de aprendizagem e o papel do professor com vista à promoção de um ambiente de sala de aula possibilita aos alunos viverem uma experiência matemática significativa, explorando os seus interesses, dando-lhes um papel activo, fazendo-os participar na construção do conhecimento.

   Também a literatura de investigação em educação matemática estuda com especial interesse inúmeras questões relacionadas com o ambiente de sala de aula. Exemplificando, Even e Tirosh (2002, Handbook of International Research in Mathematics Education, LEA), afirmam: *"a cultura de sala de aula é inseparável da aprendizagem da Matemática, uma vez que a aprendizagem ocorre sempre num contexto sócio-cultural específico."* A construção do conhecimento matemático na sala de aula está intimamente ligada às concepções dos alunos sobre a disciplina, com o tipo de interacções que o professor promove, com a existência de uma comunidade de aprendizagem em que todos se possam sentir participantes.

A estratégia não aborda pormenorizadamente cada uma das aulas. A sua implementação é pensada para uma aprendizagem contínua.

Abordagem histórica da teoria de grupos e a Campanologia

- Inicia-se a implementação desta actividade abordando o conceito histórico da teoria de grupos no desenvolvimento da Matemática e como ela foi fundamental em todos os conteúdos programáticos até então estudados, mas que se evidencia indirectamente. Deste modo, pretende-se que os alunos se familarizem um pouco mais com a história da Matemática e que entendam os conteúdos que hoje aprendem sofreram mudanças substanciais ao longo dos tempos, sendo aperfeiçoados pelos matemáticos até aos nossos dias.
- Depois de introduzir um pouco o conceito histórico da teoria de grupos informam-se os alunos que, muito tempo antes dos matemáticos terem desenvolvido estas ideias, já alguém utilizava essa teoria, porém num sentido rudimentar.
- Os primeiros autores da teoria de grupos não foram matemáticos mas sim músicos, nomeadamente tocadores de sino que no Reino Unido desenvolveram técnicas refinadas de repique de sinos. De entre esses tocadores de sino destacava-se um, Fabian Stedman autor de dois livros intitulados, "*Campanologia*" e "*Tintinnalogia - the art of change ringing*".
- Deste modo facilita-se uma melhor compreensão da importância que este tema teve no desenvolvimento da teoria de grupos que só ocorreu 100 anos mais tarde e que permitiu um gradual desenvolvimento da Matemática.
- Saliente que a descoberta da Matemática não surgiu espontaneamente. Refira que através da Música também se constrói pensamento matemático e que foi mesmo através desta que se elaborou uma das mais brilhantes teorias da Matemática: a teoria de grupos.

Interactividade com o applet desenvolvido por Kees van den Doel

- Depois da abordagem teórica pode explorar com os alunos a aplicação multimédia, nomeadamente, a manipulação do *applet* desenvolvido pelo professor Kees van den Doel dirigindo-os para o sítio da Internet correspondente e para o sítio construído no âmbito desta tese: http://www.fc.up.pt/cmup/sinos. É importante que os alunos tenham consciência da sonoridade musical das diversas sinfonias que compõe a Campanologia. O uso da Internet pode estimular aprendizagens matemáticas importantes. Na verdade, os alunos podem desenvolver importantes conceitos matemáticos e adquirir uma visão muito mais alargada sobre esta ciência, usando a Internet. Por este facto, é razoável que os professores pensem seriamente na forma como esta tecnologia pode estar integrada na sua actividade de aprendizagem matemática.
- Numa fase inicial convém não mostrar detalhadamente como o applet funciona. Os alunos poderão descobrir os seus comandos livremente. Pode resumidamente explicar as diversas sinfonias que estão presentes e começar por dizer aquelas que vão estudar mais pormenorizadamente. Caso um aluno se mostre mais curioso permita-lhe aprofundar mais esse conhecimento. Numa fase mais profunda do conhecimento pode-se

apresentar a Internet como uma óptima ferramenta de aprendizagem dado que, envolve todo o tipo de conteúdos matemáticos, nos mais diversos suportes: texto, som, imagens e aplicações interactivas. Esta quantidade e diversidade de conteúdos permite que professores e alunos possam escolher o que mais lhes agrada para desenvolverem a sua actividade matemática.

Noção de permutação

- Embora não seja uma novidade deverá proceder-se a uma explicação sucinta do significado do termo "permutação", apesar dos alunos do 12ºAno já estarem mais familiarizados com o conceito. Somente para os alunos de escolaridade inferior convém explicar o significado da permutação. A fim de reforçar este conceito fundamental pede-se aos alunos que escrevam as diversas permutações que poderam ocorrer em conjuntos de dois, três e quatro elementos.
- A seguir verifica-se que existem um total de n! permutações em n objectos. Pode-se fazer referência a outras situações quotidianas onde se utilizem permutações, tal como estão descritas no currículo do 12º ano.

Posições dos Sinos

- Inicialmente é essencial identificar a posição dos sinos no contexto da Mudança Musical. Assim, o que anteriormente se designava permutação num conjunto de n elementos, passamos a designar esses "elementos"como sendo posições dos sinos nas séries. Saliente o modo para definir as posições dos sinos relativa à sua ordem numérica.
- **Exemplo:** A série [**2341**], em 4 sinos, o **sino 2** ocupa a posição 1, o **sino 3** ocupa a posição 2, o **sino 4** ocupa a posição 3 e finalmente o **sino 1** ocupa a quarta posição. A esta série associamos a permutação (1432) porque, relativamente à **série inicial** [**1234**], o **sino 1** passa para a quarta posição, o **sino 4** para a terceira posição, etc.

Noção de mudança

- Para explicar o significado de mudança, no contexto da Mudança Musical, escreve-se no quadro (a cor) a **série inicial [123]**. A posição dos sinos designa-se por 1 2 3. A noção de mudança pode ser explicada do seguinte modo: Para se obter uma permutação da **série [123]** a mudança aplicada poderá ser, por exemplo, A=(12). Esta construção do conhecimento é essencial pois o aluno deve ficar a entender que A=(12) corresponde a uma mudança de posição dos dois primeiros sinos e que a série resultante é uma permutação relativamente à **série inicial**.
- O aluno tem de ficar a entender que a mudança A=(12) ao actuar sobre **[123]** vai trocar os dois primeiros sinos pelo que irá resultar na **série [213]**.
- De modo a reforçar este conceito, deve fazer entender ao aluno que a mudança B=(23) não significa que os **sinos 2** e **3** permutem entre si, poderia até desrespeitar uma das regras da Mudança Musical, designadamente a regra da adjacência. Mostre que o significado da mudança B=(23) será a troca dos sinos que estiverem na segunda e terceira posições. A **série** resultante será: **[231]**.
- Deste modo, mudanças como A=(12), B=(34), C=(56) dizem respeito à mudança a efectuar nas posições dos sinos. Para uma melhor distinção entre as mudanças e as séries, estas devem ser escritas de um modo diferente para não confundir os alunos, dado que a simbologia é parecida.

Regras da Mudança Musical

- As regras da mudança musical são, de facto, os pilares de toda a construção matemática em cada uma das sinfonias. Deve fazer ver aos alunos a importância das três regras da mudança musical, pois só assim, é possível reconhecer a relação entre a Campanologia e a teoria de grupos.

Descrição da Singles Extents

- Os requisitos mínimos estão devidamente estabelecidos, pelo que se pode avançar para a construção da sinfonia *Singles Extents*.
- Aproveitando o raciocínio anterior comece por questionar os alunos relativamente ao facto de num conjunto com n=3 sinos quantas permutações iremos obter relativamente à **série [123]**. Relembre que as três regras da mudança musical devem ser respeitadas.
- Poderá sugerir as mudanças que se deverão introduzir a fim de alcançar a totalidade das permutações em três sinos.
- Cabe ao aluno a descoberta da sinfonia completa Singles Extents. Têm de ter consciência que a mudança A=(12) terá de ser alternada com a mudança B=(23). Obervará que aplicando por três vezes cada uma da mudanças, alternadamente, volta-se à série inicial. O aluno deve entender que obteve todas as permutações pois 3!=6. No máximo obtém-se n!+1 séries do conjunto de n-sinos (Devido à regra 1, inicia-se e termina-se com a **série [1234.....n]**).

A relação entre as mudanças e as permutações

- Uma das ideias deste estudo consiste em verificar a relação subjacente entre as permutações e as mudanças. O objectivo é fazer com que o aluno verifique, que ao introduzir a mudança A=(12), irá resultar na **série [213]**, sendo esta associada à permutação (12). O aluno tem de entender que as mudanças actuam sobre as séries e que as permutações reflectem as posições correspondentes, relativamente à série inicial.
- O aluno deve ter noção de que, A=(12), corresponde à mudança entre os sinos que estejam nas duas primeiras posições e que se designa por:

$$\text{A=(12)=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- O aluno tem de ter noção que a série resultante, depois de introduzida uma mudança, corresponde a uma permutação. Esta permutação refere-se ao produto entre a mudança introduzida e a permutação associada à série anterior.
- Para se obter a próxima série o aluno terá de reconhecer que uma outra mudança terá de introduzida, nomeadamente B=(23), e que esta irá alterar as posições dos últimos sinos. A **série** resultante será [**231**]. Para obter a permutação associada o raciocínio será análogo ao anterior.
- Então temos,

$$\text{B·A=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{=(132)}$$

- Resulta que a permutação associada à **série [231]** corresponde à permutação (132).

- Mostre o significado desta permutação em termos de mudança musical. Assim, a permutação (132), associada à série **série [231]**, significa que o **sino 1** passa para a terceira posição, o **sino 3** para a segunda posição e o **sino 2** para a primeira posição, isto relativamente à série inicial como se pode observar: **Série inicial, [123]**; Permutação associada, e a **Série resultante, [231]**; Permutação associada, BA=(132).
- Finalmente o aluno deve verificar que todas as restantes séries se obtém através da alternância entre as mudanças A e B e o modo como se obtém as permutações associadas. O aluno deve saber efectuar os respectivos produtos tal como se mostram na coluna das permutações.

Número	**Série**	**Mudança**	**Permutações**
1º	**123**		
		A	
2º	**213**		$A = (12)$
		B	
3º	**231**		$BA = (23) \cdot (12) = (132)$
		A	
4º	**321**		$ABA = (12) \cdot (132) = (13)$
		B	
5º	**312**		$(BA)^2 = (123)$
		A	
6º	**132**		$A(BA)^2 = B = (23)$
....		B	
7º	**123**		$(BA)^3 = e$

Sinfonia Singles Extents

Introdução das mudanças da sinfonia Singles Extents no applet

- Regressamos ao conteúdo multimédia, ou seja, ao applet de modo a que os alunos consigam definir as respectivas mudanças no conjunto de três sinos e em seguida ouvir o som que a sinfonia Singles Extents produz. Uma vez que a sinfonia Singles Extents, por defeito, não vem definida serão os alunos a escrever as respectivas mudanças no local indicado no applet.
- No applet as mudanças são assim definidas: No caso em que se altera os sinos nas duas primeiras posições e se fixa o terceiro a mudança é simplesmente definida como "3"que corresponde à nossa mudança A=(12). Quando se introduz a mudança B=(23) escreve-se "1"pois fixa-se o sino na primeira posição. Assim para escrever a sinfonia completa da Singles Extents as mudanças devem ser escritas do seguinte modo: "3.1.3.1.3.1". A sinfonia Singles Extents será tocada e no próprio applet podem-se associar vários tipos de afinação (*tuning*). (Leia o apêndice 2 se procura uma informação mais completa)

Perseguição Total

- Um dos aspectos mais interessantes da Campanologia consiste em descrever o caminho que os sinos percorrem ao longo da sinfonia. Dá-se especial interesse ao **sino 1** no qual o aluno deverá identificar as várias posições que ele vai ocupando. A esse trajecto que o **sino 1** vai delineando, designa-se como Perseguição Total (Plain Hunt), ou seja, o sino segue um percurso ascendente, até à posição 3, e depois descendente voltando à sua posição inicial.

Grupos. O grupo simétrico S_3.

- O conjunto de todas as permutações que resultam da sinfonia completa Singles Extents constituem o grupo simétrico S_3. Com efeito, define-se o conceito de grupo e quais os axiomas a que tem que obedecer, a saber:

Um grupo G consiste num conjunto de elementos munido de um produto (operação binária), (designa-se por ".") satisfazendo as seguintes quatro condições:

a) Fechado: se x e y são elementos de G, então $x.y\in$ G

b) Associatividade: se x, y e z são elementos de G, então $(x.y).z=x.(y.z)$

c) G tem elemento neutro; que se designa por e, de modo que $e.x=x.e=x$, $\forall$ x$\in$G.

d) Se x é um elemento de G, então existe um elemento inverso y em G tal que $x.y=y.x=e$

- O conceito de grupo deve ser associado à respectiva *Singles Extents* dado que constitui a sinfonia mais simples e, por conseguinte, provar que é grupo torna-se mais acessível. Interagindo com os alunos prove que a Perseguição Total em 3 sinos constituem o grupo simétrico S_3 e, portanto, obedece a cada um dos parâmetros da definição de grupo.
- Construa com os alunos a tabela onde estão representados todos os produtos que envolvem as permutações do grupo simétrico S_3, que constituem a sinfonia *Singles Extents.*
- Além do grupo de simetrias S_3 poderá dar exemplos de outros grupos, tal como estão descritos na secção correspondente.
- Não obstante, além desses exemplos, pode referir que as sinfonias Minimus Extents, Doubles Extents e Minor Extents respeitante aos grupos simétrico S_4, S_5 e S_6 também representam grupos. A prova é análoga para a sinfonia Singles Extents, porém, e devido já ao elevado número de permutações, esta torna-se num exercício bastante demorado.

Interpretação geométrica. Simetrias do triângulo

- As permutações no grupo simétrico S_3 também têm uma interpretação geométrica. O professor desenha um triângulo equilátero no quadro e pede aos alunos que designem cada um dos vértices por 1, 2 e 3. A seguir pede-se aos alunos que desenhem cada uma das suas isometrias, ou seja, as rotações e as reflexões. Deste modo observam que o conjunto das isometrias de um triângulo também é um grupo.
- Por último será entoada a sinfonia Singles Extents a partir do applet e a par mostra--se uma animação em Flash. À medida que a sinfonia segue o percurso musical, os vértices do triângulo inicial vão sendo modificados de acordo com a série a que pertence a isometria do triângulo.

Sinfonia Minimus Extents

- Na sinfonia Minimus Extents os conteúdos básicos da Mudança Musical são relativamente análogos à sinfonia Singles Extents.
- As mudanças que se vão utilizar na sinfonia Minimus Extents de modo a obter as 24 permutações (4!=24) irão ser A=(12)(34) e B=(23). Deixe que seja o aluno a especular sobre quais devem ser as novas mudanças. O aluno deve conseguir escrever todas as permutações e reconhecer que a segunda permutação é o resultado da mudança A, a terceira como o resultado da mudança BA e assim sucessivamente.

- Uma questão fundamental nesta sinfonia é que após oito mudanças volta-se à série inicial. O aluno deve ter consciência que regressou à série inicial após 8 mudanças. Os alunos devem ser questionados acerca da possibilidade, ou não, sobre o modo como se irão obter as restantes dezasseis permutações.

Perseguição Total

- As oito permutações obtidas constituem a Perseguição Total e pertencem ao grupo de perseguição H_8. De modo a reforçar o método Perseguição Total questione os alunos relativamente ao trajecto que o **sino 1** vai delineando ao longo da extensão.

Classes direitas. Plain Bob

Como obter as restantes dezasseis permutações?

A compreensão da relação entre a Matemática e a Campanologia ganha aqui outra dimensão. A descoberta da necessidade em introduzir uma nova mudança reforça ainda mais a ligação intrínseca entre a arte e a ciência. A dinamização deste conhecimento ajuda a perceber o quanto a Matemática ajuda a perceber uma sinfonia musical.

- A mudança C cria uma curiosidade entre os alunos, relativamente aos sinos que irão alterar a sua posição. Apesar da mudança aqui sugerida ser C=(34), poderá optar-se por outra, desde que não seja igual a A nem a B e que obedeça às regras da Mudança Musical.
- Depois de introduzir uma nova mudança os alunos devem ter consciência de que as mudanças A e B são repetidas alternadamente de modo a obter mais oito permutações que, de acordo com a regra 2, são distintas entre si. O aluno tem de observar que se deve introduzir a mudança C, pois caso contrário, volta-se a repetir a série inicial, da respectiva primeira classe direita. Refira que a segunda introdução da mudança C leva-nos para uma segunda classe direita.
- Assim obteve-se o grupo de perseguição H_8 e mais duas classes direitas. Pode agora questionar os alunos sobre o modo de representação destes três subgrupos de S_4. Qual a relação entre o grupo de perseguição e as duas classes direitas?
- Seria gratificante para a aprendizagem o aluno procurar descobrir por si, a que tipo de equivalência nos referimos. A relação entre o grupo de perseguição e as classes direitas tem a ver com o facto de todas as permutações se poderem obter através dos seguintes conjuntos: H_8, $H_8(243)$ e $H_8(234)$.
- Cada uma das permutações da primeira classe direita obtém-se através do produto entre as permutações do grupo de perseguição e a permutação (243). Analogamente para as permutações da segunda classe direita.
- A seguir saliente que as 24 permutações descrevem um método muito conhecido e preferencialmente utilizado da Campanologia designado por Plain Bob. Mostre que o método Perseguição Total ainda não é uma boa solução para os tocadores de sino, dado que não se obtiveram todas as 4!(=24) permutações. O método Plain Bob utiliza uma nova mudança, designadamente C=(34) já representa uma boa solução para os tocadores de sino pois obtiveram-se todas as 4!(=24) permutações.
- O método Plain Bob, para 4 sinos, utiliza então três mudanças, A, B e C. De referir também o caso geral para a escolha das mudanças e que este método é sempre válido para um conjunto qualquer de n-sinos.

Interpretação Geométrica. Simetrias do quadrado

- A interpretação geométrica versa sobre um quadrado em que os vértices do quadrado se designam por 1 2 3 4, tal como se mostrou anteriormente. De seguida, o professor pede aos alunos que identifiquem as isometrias do quadrado, nomeadamente as rotações e as reflexões.
- Por último será entoada a sinfonia Minimus Extents a partir do applet. À medida que a sinfonia segue o percurso musical, os vértices do quadrado inicial vão sendo modificados de acordo com a respectiva série a que pertence a isometria do quadrado.

Explicação do funcionamento do Plain Bob Minimus no applet

- Uma vez que no applet, por defeito, não aparece a opção para escolher o Plain Bob Minimus cabe aos alunos introduzir as respectivas mudanças, tal como se procedeu na sinfonia Singles Extents. Relembrando novamente as mudanças temos A=(12)(34), que no applet se traduz pela mudança "x", significa que todos os sinos irão alterar todas as suas posições. A mudança C=(23) irá ser traduzida no applet por "14", pois altera-se os sinos do meio e fixa-se os exteriores. A mudança C=(34) corresponde no applet a "12", pois fixa os dois primeiros sinos. Sendo assim o método Plain Bob Minimus no applet seguirá a seguinte ordem: "x.14.x.14.x.14.x.12". Quando tocado irá, então, ouvir-se a sinfonia completa Minor Extents. (Leia o apêndice 2 se procura uma informação mais completa sobre o funcionamento do applet)

Grupos. O grupo simétrico S_4.

- O conjunto de todas as permutações que resultam da sinfonia completa Minimus Extents constituem o grupo simétrico S_4.
- O conceito de grupo deve ser associado à respectiva sinfonia Minimus Extents. Interagindo com os alunos prove que o Plain Bob em 4 sinos constituem o grupo simétrico S_4.
- Além do grupo S_4 poderá dar exemplos de outros grupos, tal como estão descritos na secção correspondente.

Plain Bob em n-sinos

- Por último os alunos irão descrever as mudanças no Plain Bob para um conjunto de n-sinos. Através de uma transparência esquematize as mudanças que se realizaram nas sinfonias Singles e Minimus Extents, e peça aos alunos que descubram o padrão geral dessas mudanças.
- O método Plain Bob permite um alargamento ao número de mudanças que se podem introduzir de modo a obter, se possível, todas as n! permutações. Como se pôde verificar as duas mudanças A=(12)(34) e B=(23) não foram suficientes para construir a sinfonia completa em 4 sinos. A possibilidade de prolongar o número de mudanças, designadamente C=(34), faz do método Plain Bob, o preferido pelos tocadores de sino, dado que respeita as regras da Mudança Musical e todas as permutações possíveis são entoadas.
- O caso geral das mudanças em n-sinos poderá agora ser formalizado. A descrição do Plain Bob para 5 sinos surge agora como uma excelente oportunidade de valorizar a aprendizagem dos alunos, isto é, constatarem se com 3 mudanças é possível, ou não, obter todas as 120 (5!=120) permutações.

Doubles Extents

- A sinfonia Doubles Extents utiliza na sua composição 5 sinos. À medida que se vai aumentando o número de sinos, o aluno deve ter consciência de que, o número de séries aumenta. As mudanças A e C mantém o número de sinos que irão permutar entre si, de acordo com a definição, contudo a mudança B vai sofrer um acréscimo relativamente ao número de sinos que alternam. Para cada uma das mudanças, o aluno deve ser capaz de escrever quais os sinos que alternam entre si, no Plain Bob. Seguidamente podem descrever o Plain Bob Doubles, ou seja, enunciar o percurso de cada uma das mudanças e finalmente descrever a composição musical. Novamente podemos auxiliar-nos do applet pois este método já vem incorporado.
- Todo o conhecimento base até agora estudado ajuda a compreender melhor o método pelo que não será necessário voltar a repetir o modo como se efectuam as mudanças. Apenas uma questão se coloca: Com as três mudanças A, B e C conseguimos obter todas as 5! permutações? O aluno deve verificar que ao aplicar as três mudanças, A, B e C obteve quarenta permutações e que estas seguem o percurso da sinfonia Doubles Extents, obedecendo às três regras da Mudança Musical. Mostre uma transparência onde se possa visualizar todas as 40 permutações e o respectivo percurso das mudanças. Faça notar aos alunos que o número de séries aumenta consideravelmente à medida que aumenta o número de sinos e que, portanto, teremos de sintetizar o conjunto de permutações de modo a tornar explícito o raciocínio.
- Então, para simplificar o número de séries dado que estas aumentam consideravelmente à medida que aumentam o número de sinos, convém desde já definir um conceito fundamental na Campanologia que é o de Plain Leads.

Plain Leads

- Previamente às 120 permutações, explique o significado do termo *Lead*. Refira que o grupo de perseguição H_{10} e as classes direitas correspondentes, H_{10}P, $H_{10}P^2$, $H_{10}P^3$, se designam por Plain Leads. Cada uma dessas leads contêm 10 permutações.
- Refira que a primeira Topo de Lead é igual a P=(2453) e que por ser de ordem 4, tem-se quatro Plain Leads pelo que $4\times|H_5|$=40 permutações. O applet torna-se agora numa ferramenta indispensável para sentir a sonoridade musical da sinfonia Doubles Extents.
- Depois de construirem as quatro Plain leads mostre que formam o Plain Course em 5 sinos do Plain Bob, ou seja, PPPP.
- Novamente o aluno deve sentir que apenas com quatro mudanças não é possível obter todas as 120 permutações. Espere pela oportunidade de conhecimento, deixe que sejam os alunos a constatarem que uma nova mudança tem de ser introduzida. A localização dessa mudança convinha que fosse explorada pelo aluno. Depois de analisada a introdução dessa mudança, que designamos por D, explica-se aos alunos que esta nos leva para um outro tipo de Lead, concretamente uma Bob Lead.

Bob Leads. Plain Course

- Só com Plain Leads não é possível obter todas as 120 permutações do Plain Bob Doubles. Na última mudança do Plain Bob Doubles em vez de fazer novamente C, que nos levaria de volta à série inicial, refira que se tem de introduzir uma nova mudança, designada por D, que nos leva para um outro tipo de Lead.
- Poderá questionar os alunos a darem sugestões acerca da nova mudança, isto é, descobrir quais os sinos que vão permutar entre si. Relembre as regras da Mudança Musical.

- Assim, a Bob Lead designa-se por T e é escrita como sendo o produto T=DC=(234). Esta tem o efeito de nos colocar numa outra classe direita designadamente H_{10}T. Tal como a mudança C era introduzida após 8 permutações, na sinfonia Minimus Extents, o aluno deve saber que após cada conjunto de 40 permutações tem de se introduzir a respectiva mudança D à qual está associada a permutação T. A seguir às primeiras 39 permutações aplica-se D, depois aplica-se novamente D após outras 39 permutações e, finalmente, após outras 39 permutações aplica-se D o que nos traz de volta à série inicial pois T é de ordem 3.
- Assim o Plain Bob Doubles permite-nos obter todas as 120 permutações utilizando Plain e Bob Leads. Obtém-se a seguinte ordem: PPPTPPPTPPPT.
- Não é necessário escrever todas as 120 permutações no quadro. Sugere-se uma transparência na qual incorpore a seguinte tabela:

Número	Mudanças	Séries	Permutação
1		**12345**	
	C		
39º		**12435**	(34)
	D		
40º		**14235**	T=DC=(234)
	C		
79º		**14325**	(24)
	D		
80º		**13425**	T^2=(243)
	C		
119º		**13245**	(23)
	D		
120º		**12345**	T^3=e

Reforce esta ideia salientando que as leads do Plain Course H_{10}, H_{10}P, $H_{10}P^2$, $H_{10}P^3$ e as que se obtém a partir das Bob Leads H_{10}T, $H_{10}T^2$ e $H_{10}T^3$, como são todas disjuntas, é suficiente para entenderem que todas são diferentes e que, portanto, a regra 2 é satisfeita.

O applet não prevê a utilização de uma Bob

- O applet não prevê a utilização de novas mudanças e por isso só toca o Plano de Curso, ou seja, as primeiras quarenta permutações.
- Mostre que a mudança D não será indicada no final das 39 permutações pelo modo como o applet está construído. Devido a este impedimento sugere-se que escrevam ao autor a possibilidade algoritmíca da introdução de uma mudança D, ou seja, uma Bob Lead o que nos daria todas as 120 permutações, e assim ouvir a sinfonia completa.

Simetrias no pentágono

O conjunto de todas as isometrias do pentágono também pode ser associado às séries da sinfonia Doubles Extents. Contudo, dado que o processo é bastante longo e de difícil construção, refere-se apenas as quarentas primeiras permutações, ou seja, o Plano de Alcance e como se podem associar à descrição musical do applet. À medida que se vão ouvindo as mudanças, pode mostrar-se as diferentes posições que os sinos vão tomando nos vértices do pentágono.

Minor Extents

- O método a utilizar na sinfonia Minor Extents irá ser novamente o Plain Bob. Pedir aos alunos que determinem as mudanças A, B e C e que descrevam o Plano de Curso. Reforce a ideia de que o Plano de Curso é constituído apenas por Plain Leads. O aluno, inicialmente, deve chegar ao seguinte resultado: PPPPPP.

- Os alunos devem ser capazes de entender a necessidade de introduzir uma nova mudança, D. Esta irá levar-nos para uma Bob Lead de modo que se consiga um número maior de permutações e não apenas 60 como anteriormente.

- Os alunos devem chegar ao seguinte resultado PPPPTPPPPTPPPPT, isto é, que com Plain e Bob Leads podem obter-se 12×15=180 permutações.

- Questione os alunos do facto de não terem obtido todas as permutações possíveis. Discuta com os alunos a razão dessa impossibilidade. Os alunos devem ter consciência que não obtiveram o total de 6!=720 permutações.

- Faça referência ao seguinte resultado: Aplicando somente Plain e Bob Leads, isto é, apenas as mudanças A, B, C e D o máximo de permutações possível que se obtém no Plain Bob Minor Extents são 180.

- Refira que se obteve o grupo alternado A_6 (conjunto das permutações pares).

Plain Bob Minor

- O número máximo de permutações são 360 utilizando Plain e Bob Leads, na Sinfonia Minimus Extents.

- Descreva a prova salientando o facto de só se obterem 360 permutações pois utilizam mudanças pares.

- Atrás foi referido que era necessário introduzir uma mudança simples na série 360º a fim de obter todas as 721 séries. Não é possível aplicar localmente a mudança E uma vez que a série 373º se irá repetir.

Número	Série	Mudança	Permutação
360º	**321654**		$C(DC^2)Q = (13)(46)$
		E	
361º	**231564**		$EC(DC^2)Q = Q^2 = (132)(465)$
		B	
372º	**213654**		$BQ^2 = (12)(46)$
		C	
373º	**216345**		$CBQ^2 = (12)(3456)$

Em que momento a série 373º se repete? Cabe ao professor mostrar qual o número da série onde tal facto ocorre. Para isso construa-se a seguinte tabela:

Número	Série	Mudança	Permutação
301º	**321654**		$(DC^2)Q = (14563)$
		B	
312ºº	**312564**		(123)(465)
		C	
313º	**315246**		(12453)
		A	
314º	**132564**		(23)(465)
		B	
315º	**123654**		(46)
		A	
316º	**216345**		(12)(3456)

Como se pode concluir a série 373º irá, de facto, repetir-se caso se aplique a mudança E na 360º série. Assim, teríamos que as séries 316º e 373º seriam iguais o que iria derespeitar a regra (C2) da Mudança Musical ou Campanologia.

- De modo a obter as restantes 360 permutações ímpares explique que tem de se introduzir uma mudança simples, ou seja, uma das seguintes mudanças, s_1=(12), s_2=(23), s_3=(34), s_4=(45) ou s_5=(56).
- Depois de introduzida esta mudança, estas seguem o mesmo percurso que as 360 anteriores.
- Tal como anteriormente explique que nos inserimos dentro de uma classe direita diferente, isto é, iremos obter agora o conjunto das permutações ímpares.

Plain Bob em n-sinos

- O número de Leads possíveis em n-sinos, é um resultado importante.
- Saliente que em n-sinos o número de Leads possíveis são n!/(2n)=(n-1)!/2 que é a cardinalidade de A_{n-1}.

Método Grandsire e Stedman Doubles

- O método Grandsire e o método Stedman Doubles apenas irão ser referidos em 5-sinos. Relacione estes com o Plain Bob Doubles.
- Ambos os métodos podem construir-se no applet.
- Faça entender as diferenças destes dois métodos relativamente ao Plain Bob. O aluno na sua construção deve perceber como se obtém todas as possíveis permutações e, novamente, relacioná-lo com o Plain Bob Doubles.
- No método Grandsire Doubles proponha aos alunos a descrição de todas as leads. Repare que não obteve todas as permutações pares, como aliás constatou na descrição do método. Sugere-se que trabalhe com os alunos o facto de no Método Grandsire a Bob ter de ser usada logo na Lead inicial.

A Campanologia e a teoria de grafos

- A Campanologia é, de facto, uma vasta sinfonia musical recheada de variadas componentes matemáticas. Do que já vimos até então a teoria de grafos surge associada à Campanologia de um modo natural.

- Os alunos da disciplina de MACS[4] são abrangidos no seu currículo pela teoria de grafos. A relação da Mudança Musical e a teoria de grafos permite uma descrição gráfica de cada uma das sinfonias ajudando a compreender, significativamente, cada um dos métodos estudados. A valorização do currículo, nomeadamente com o estudo da teoria de grafos, será assim reforçada e incluída na promoção da interdisciplinaridade entre as ciências e a Música.
- Esta associação dá oportunidades de conhecimento extraordinários.
- Comece por dizer que os grafos de Cayley correspondem à representação gráfica para as diversas sinfonias que se estudaram até então, isto é, estes incorporam todas as mudanças possíveis que se utilizam num conjunto de n-sinos.
- Refira o modo, como inicialmente, se desenha um grafo de Cayley para a Singles Extents.
- A sinfonia de maior interesse recai sobre a sinfonia Minimus Extents uma vez que não é muito complexa e ao mesmo tempo ajuda a ter uma leitura sustentável da associação da teoria de grafos com a Mudança Musical.
- Desenhe no quadro o respectivo grafo de Cayley para 4 sinos salientando que as mudanças correspondem às arestas e os vértices às séries. Faça aqui a comparação com a série de Fibonacci, ou seja, o número máximo de mudanças que se pode aplicar para um conjunto de n-sinos.
- No Plain Bob Minimus utilizam-se as mudanças A=(12)(34), B=(23) e C=(45). O aluno deve verificar que a sequência de mudanças é dada por:

  $$((AB)^3AC)^3$$

  .
- De seguida, peça aos alunos que, dado o grafo de Cayley, construam o subgrafo correspondente ao método Plain Bob Minimus.

Ciclo Hamiltoneano

- Pode fazer referência ao facto de o subgrafo desenhado corresponder a um ciclo Hamiltoneano. A intenção será obrigar o aluno a pensar e a conjecturar sobre que propriedade subjacente está implícita no ciclo traçado.
- Outros subgrafos correspondentes ao diagrama de Cayley podem ser desenhados na sinfonia Minimus Extents.
- Além do Plain Bob outros métodos podem ser escritos como uma sequência de mudanças, traçando o respectivo subgrafo de Cayley.
- A seguinte tabela mostra outros métodos, e a sua respectiva sequência de mudanças na construção da sinfonia Minimus Extents.

Nome do método	Sequência de Mudanças
Reverse Bob	$(ABAD(AB)^2)^3$
Canterbury	$(ABCDCBAB)^3$
Double Canterbury	$(DBCDCBDC)^3$
Single Court	$(DB(AB)^2DB)^3$
Reverse St.Nicholas	$(ABCDCBAC)^3$

[4] Designação da disciplina Matemática Aplicada às Ciências Sociais que faz parte integrante do currículo dos cursos de Humanidades do ensino secundário

- De modo a reforçar a aprendizagem e torná-la ainda mais significativa peça aos alunos que, de acordo com o grafo de Cayley para 4-sinos, tracem o respectivo ciclo Hamiltoneano. De acordo com o método escolhido e a sua sequência de mudanças descreva o subgrafo de Cayley respectivo.

O gráfico respectivo do Plain Bob Doubles

- De modo a estimular a curiosidade sobre o tema, pode mostrar o grafo de Cayley para 5 sinos. Contudo e devido à grande confusão sugerida pelo grafo, pois é composto por 7 mudanças diferentes, e cada vértice seria de grau 7, terá de reduzir-se as mudanças apenas a A, B, C e D tal como foi explicado.
- Uma vez que já conhecem o método Plain Bob Doubles peça aos alunos a respectiva sequência de mudanças.
- Por último, e devido ao enorme grau de dificuldade, descreva o ciclo Hamiltoneano relativo à sequência de mudanças do Plain Bob Doubles.

Curiosidades

- Um dos grandes desafios dos tocadores de sino consiste em dar resposta à famosa e velha questão da Campanologia. Será possível tocar as 5040 permutações em sete sinos usando o método Grandsire apenas em Plain e Bob Leads? Por outras palavras, existirá uma extensão do método Grandsire em 7 sinos utilizando somente Plain e Bob Leads?
- Neste método A=(12)(34)(56) e B=(23)(45)(67), geram o grupo de Perseguição Total H_{14}. O método Grandsire Triples usa C=(12)(45)(67). Tal como em 5 sinos, primeiro faz-se C e depois alterna-se entre B e A.
- Podemos questionarmo-nos acerca do maior conjunto de permutações que podemos obter. Em 5 sinos usamos o facto de A, B e C serem pares e assim obter um máximo de 60 Leads. Este argumento aqui não é válido, dado que A e B são ímpares. Como anteriormente considera-se suficiente a acção de P e T a actuar sobre Topo de Lead. Em 1742 John Holt descobriu uma extensão muito perto e obteve 4998 permutações. Isto deu enfâse à famosa velha questão mencionada anteriormente.
- A prova é bastante difícil, para o nível de ensino que estamos a considerar, e não teria qualquer utilidade prática na implementação da actividade. Fica apenas uma curiosidade para os alunos o facto de que o número máximo de permutações em 7 sinos utilizando o método Grandsire Triples somente com Plain e Bob Leads corresponde a 4998 permutações.

5. **Objectivos**

Um dos principais objectivos é, sem dúvida, a promoção da interdisciplinariedade entre a Matemática e a Música. Sendo a Matemática uma disciplina com que os alunos manifestam imensas dificuldades e desinteresse, estratégias alternativas captam mais a atenção dos alunos e ajudam na sua motivação.

A teoria de grupos e de grafos apresenta-se num contexto de interacção com a Música e incide, sobretudo, em actividades extra-curriculares. O carácter extra-curricular não pode sair diminuído. A sua importância é relevante pois desenvolve a atitude sócio-afectiva e cognitiva do aluno.

Devido à grande desmotivação dos alunos com que o professor se depara quando lecciona as aulas programáticas, poderá ser esta a alavanca necessária para desmistificar o preconceito que muitos pais e alunos, têm relativamente à Matemática, a de que é uma disciplina muito difícil e que é *normal* uma classificação negativa.

Estas actividades ajudam a enriquecer o Plano Nacional de Matemática no combate ao insucesso escolar.

A introdução desta actividade pretende dinamizar toda uma comunidade escolar, designadamente os alunos, de modo a que estes se sintam mais confiantes e mais estimulados nas suas aprendizagens de modo a torná-las significativas e diferenciadas.

A actividade propõe, em certa medida, uma complementariedade entre os conteúdos leccionados que se encontram abrangidos pelo programa. Nestas actividades o professor poderá relacionar aspectos do programa com a Campanologia e a teoria de grupos.

Os alunos poderão ficar mais motivados, dado que se empreende um espírito mais dinamizador e mais estimulante que por muitas vezes não são manifestadas em contexto de sala-de-aula. Dado que não são avaliados sumativamente, poderão dar asas à sua imaginação e ser este o estímulo necessário para uma melhor compreensão e atitude face à Matemática.

Não se pretende que seja realizada, efectivamente, qualquer avaliação quantitativa ou juízo de valor sobre as actividades que vão desenvolver na interdisciplinariedade entre a Campanologia e a Matemática. A avaliação possível tem em linha de conta a própria autonomia dos alunos. O próprio aluno deve considerar se as actividades desenvolvidas corresponderam às suas expectativas e de que modo contribuiram para uma aprendizagem mais significativa dos actuais conteúdos curriculares.

Em suma, a actividade tem como finalidade máxima motivar os alunos para o processo de ensino-aprendizagem nomeadamente da Matemática. Leva-se em linha de conta uma aprendizagem diferenciada através da relação entre a Campanologia, a teoria de grupos e de grafos.

A Campanologia surge assim como uma forma enriquecedora de currículo, apesar de ser moldada em termos de actividades extra-curriculares, mas que ajuda a atingir os objectivos que o currículo de Matemática assim determina e que por vezes são muito difíceis de conseguir.

6. **Dificuldades de Implementação da actividade**

Embora todos consideremos que a participação neste projecto envolve uma acrescida dificuldade dado que é algo inovador, pô-la em prática requer um enorme desafio.

A principal dificuldade na implementação desta actividade, recai sobretudo no cumprimento da componente programática do ano lectivo. O currículo do ensino secundário tem de ser cumprido dado que os alunos irão realizar exames nacionais no final do ano lectivo, com vista ao ingresso no ensino superior. Por este facto, os alunos poderão mostrar-se pouco interessados pois o tempo disponível é sempre escasso. Motive a aprendizagem logo no início das actividades, para corresponder às expectativas dos alunos.

Encarando estas actividades num projecto extra-curricular acrescenta-se motivação à aprendizagem da ciência.

7. **Considerações finais**

Os resultados na Matemática, olhados numa perspectiva quantitativa constituem, habitualmente, a principal preocupação de professores, pais e alunos relegando para um plano secundário as competências matemáticas. Não obstante, estes resultados continuam a ser pouco satisfatórios e mantêm actual a discussão sobre o que influencia o aproveitamento dos alunos na disciplina. O facto de os programas abordarem diversos conteúdos, muitas vezes de um modo superficial sendo os professores pressionados, na sua abordagem, pelo factor tempo, faz com que os problemas de aprendizagem não possam ser superados por um número significativo de alunos.

Sendo a Matemática constituída por *anéis* interrelacionados, é recorrente o sentimento de que as principais limitações na aprendizagem derivam da falta de bases que sustentam novas matérias. A falta de ligação entre a Matemática que se aprende na escola e os reais interesses dos alunos, que olham para a disciplina como tendo um nível de abstracção exagerado e pouco compreensível, só ao alcance de alguns *iluminados*, faz com que a vontade de aprender se vá perdendo, à medida que o nível de complexidade vai aumentando.

A Campanologia surge assim como uma nova metodologia na aprendizagem da Matemática. A relação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento são aqui reforçadas. Além da Física, da Química, da Biologia e mesmo das Artes, a Matemática surge aqui relacionada de um modo profundo com a Música.

Esta relação irá, sem dúvida, surpreender a maioria dos alunos do nosso sistema de ensino, pois estão habituados a ver a Matemática como uma disciplina isolada e sem qualquer utilidade prática. Os demais alunos que são curiosos e reconhecem as várias aplicações da Matemática em outras áreas do saber ficarão aqui impressionados.

A realização de entrevistas ou inquéritos informa-nos acerca do impacto que teve na melhoria das suas aprendizagens e se vale a pena continuar a desenvolver estas actividades.

A avaliação relativa à participação e conhecimentos será essencialmente qualitativa, dado que importa conhecer a importância que estas actividades tiveram na motivação das aprendizagens. A interacção da Campanologia com a Matemática não se destina a substituir o programa, mas sim, complementar conhecimentos matemáticos que serão úteis para o ensino superior, pois a teoria de grupos faz aí parte do currículo.

A Campanologia surge assim como um aspecto inovador do currículo e permite-se assim uma maior compreensão sobre a relação entre a Matemática e a Música. Através deste estudo pretendi dar a conhecer esta vertente pouco conhecida, nomeadamente, a fase inicial da criação da teoria de grupos que, como se viu, teve origem na Música.

O enriquecimento das aprendizagens a que está subjacente foi também um dos objectivos que tenciono alcançar. O engrandecimento das aprendizagens para com os nossos estudantes e dar-lhes a conhecer uma das mais bonitas teorias matemáticas, através da Música, constitui um dos grandes desafios do actual currículo.

Assim, todo o meu trabalho aqui desenvolvido constitui uma óptima ferramenta pedagógica na implementação desta nova forma de ensinar Matemática através da Música.

1.10 Apêndice1

Campanologia e teoria de grupos

Breve introdução à teoria de grupos

▶ **[Permutações]** ... Uma **permutação** de um conjunto X é uma aplicação bijectiva:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \sigma(x) \end{array}$$

▶ **[Produto de permutações]** ... O produto de duas permutações $\sigma : X \to X$ e $\eta : X \to X$ é a permutação composta $\sigma \circ \eta : X \to X$ definida por:

$$(\sigma \circ \eta)(x) = \sigma(\eta(x))$$

O produto denota-se apenas por $\sigma\eta$ e calcula-se da direita para a esquerda.

Por exemplo, a permutação σ de $X = \{1, 2, 3, 4\}$, definida por:

$$\sigma : \begin{cases} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 4 \\ 4 & \to & 2 \end{cases}$$

Denota-se por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Se $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, então:

$$\sigma\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

▶ **[Grupo simétrico S_n]** ... O conjunto das permutações de um conjunto X, munido do produto atrás definido, tem a estrutura de grupo a que se chama o **grupo simétrico** de X. Quando X tem um número finito n de elementos esse grupo nota-se por S_n.

Portanto:

- O produto de duas permutações de X é também uma permutação de X.
- O produto de permutações é uma operação associativa:

$$(\sigma\eta)\mu = \sigma(\eta\mu)$$

- Existe uma permutação identidade (que não altera nada), notada por e e definida por $e(x) = x$, $\forall x \in X$. Além disso:

$$\sigma e = e\sigma = \sigma, \qquad \text{para toda a permutação } \sigma \text{ de X}$$

- Toda a permutação σ tem uma inversa σ^{-1} tal que:

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$$

▶ **[Ordem do grupo simétrico S_n]** ... O grupo simétrico S_n tem ordem $n!$, isto é,

$$\#(S_n) = n!$$

De facto se $X = \{1, 2, 3 \cdots, n\}$, existem n escolhas possíveis para $\sigma(1)$, $n-1$ escolhas possíveis para $\sigma(2)$, $n-2$ escolhas possíveis para $\sigma(3)$, e assim sucessivamente. Para $\sigma(n)$ resta pois uma única escolha possível. Portanto existem ao todo $n(n-1)(n-2)\cdots 1$ permutações possíveis de X.

▶ **[Decompôr uma permutação em ciclos]** ... Seja σ a permutação:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

de $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Consideremos as sucessivas imagens de $1 \in X$ por σ:

$$1 \to \sigma(1) \to \sigma^2(1) \to \sigma^3(1) \to \cdots$$

que, neste caso, são:

$$1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1$$

Obtemos desta forma um **ciclo** de σ que notamos por (12354). A permutação σ escreve-se então na forma:

$$\sigma = (12354)$$

Um outro exemplo: seja σ a permutação:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

de $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Então:

$$\sigma = (128)(37)(456)$$

é uma decomposição de σ em ciclos disjuntos.

Outros exemplos de decomposição em ciclos disjuntos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} &= (12)(3645) \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} &= (12)(34) \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} &= (124)(3)(5) = (124) \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} &= (12)(345)
\end{aligned}$$

▶ **[Transposições]** ... Um 2-ciclo chama-se uma **transposição**. Qualquer ciclo pode ser escrito como um produto de transposições. Por exemplo:

$$(1543) = (13) \cdot (14) \cdot (15)$$

▶ **[Grupo alternado]** ... O conjunto A_n constituído pelas permutações pares de S_n, i.e., as que se escrevem como produto de um número par de transposições, é um subgrupo de S_n, chamado **grupo alternado**, cuja ordem é $n!/2$.

▶ **[Congruência módulo um subgrupo]** ... Seja G um grupo e H um seu subgrupo. Dois elementos $a, b \in G$ dizem-se **congruentes módulo H** se existe um elemento $h \in H$ tal que $a = bh$:

$$a \equiv b \mod H \quad \Longleftrightarrow \quad a = bh, \quad \text{para algum } h \in H$$

▶ **[Classes de H em G]** ... A relação de congruência módulo H é uma relação de equivalência em G. De facto:

- $a \equiv a \mod H$, porque $a = ae$ e $e \in H$.
- $a \equiv b \mod H \implies b \equiv a \mod H$. Com efeito, $a = bh$ por hipótese, onde $h \in H$. Logo $b = ah^{-1}$ e portanto $b \equiv a \mod H$.
- $a \equiv b \mod H$ e $b \equiv c \mod H \implies a \equiv c \mod H$. Com efeito, $a = bh$ e $b = ch'$ por hipótese, onde $h'h \in H$. Logo $a = (ch')h = c(h'h)$, com $hh' \in H$, e portanto $a \equiv c \mod H$.

As classes de equivalência da relação de congruência módulo H, em G, induzem uma partição de G numa reunião de subconjuntos disjuntos dois a dois que se chamam as

classes esquerdas de H em G

▶ Uma dessas classes é o próprio subgrupo H. H contém todos os elementos de G que são congruentes com o elemento neutro e. De facto se $h \in H$ então $h \equiv e \mod H$, uma vez que $h = eh$ e $h \in H$, por hipótese.

Suponhamos que:

$$H = \{h_1 = e, h_2, \cdots, h_k\}$$

e seja $a \notin H$. A classe esquerda de H, em G, que contém a, nota-se por aH e é da forma:

$$aH = \{a, ah_2, \cdots, ah_k\}$$

▶ Note que $a \equiv b \mod H$, se e só se as respectivas classes esquerdas coincidem:

$$a \equiv b \mod H \quad \Longleftrightarrow \quad aH = bH$$

Para obter classes distintas temos que usar elementos a, b que não sejam congruentes módulo H.

▶ **[Índice de H em G]** ... Seja G um grupo e H um seu subgrupo. O número de classes direitas de H em G chama-se o **índice de H em G** e nota-se por $[G : H]$.

▶ **[Teorema de Lagrange]** ... Seja G um grupo de ordem $|G|$ e H um seu subgrupo de ordem $|H|$. Então:

$$|G| = |H| \cdot [G : H]$$

Em particular, se G é finito então $|H|$ divide $|G|$.

De facto cada classe direita de H em G tem $|H|$ elementos e existem ao todo $[G : H]$ dessas classes. Portanto $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

► **[Exemplo]** ... ... Se $G = S_3$ e $H = \langle(12)\rangle = \{e, (12)\}$, então:

$$\begin{array}{rcl} He & = & H \\ H(12) & = & H \\ H(13) & = & \{(13), (132)\} \\ H(23) & = & \{(23), (123)\} \\ H(123) & = & \{(23), (123)\} \\ H(132) & = & \{(23), (123)\} \end{array}$$

e portanto existem apenas 3 classes direitas: $H, (13)H$ e $(123)H$.

1.11 Apêndice 2

TRADUÇÃO do APPLETT dos SINOS

Os autores desta página agradecem ao professor **Kees van den Doel** <kvdoel@cs.ubc.ca> a amabilidade em ter autorizado o uso deste applet. Os detalhes técnicos da sua construção podem ser vistos na página pessoal do Prof. Kees van den Doel.

Este applet permite tocar séries até um máximo de oito sinos, de acordo com as regras do **"change ringing"** (**campanologia**). É possível editar as alturas sonoras de cada sino (**edit pitch**), a intensidade (**strike**) com que o badalo os percute e escolher entre várias afinações (**tunings**) possíveis. Uma vez escolhidos os parâmetros, deve clicar em **"Apply"** e depois em **"Start"** para iniciar o repicar dos sinos. É possível alterar o ritmo da melodia tornando-o mais irregular (humano). O botão **"scRaMbLe"** permite obter alguns sons estranhos.

A campanologia (repicar dos sinos) é uma arte secular, oriunda do Reino Unido, que consiste em tocar uma sequência de séries com um número fixo de sinos - os disponíveis no carrilhão de uma igreja, por exemplo.

As séries não podem repetir-se (apenas a primeira e a última são a mesma) e a passagem de uma série para a seguinte faz-se através de uma permutação da ordem segundo a qual se tocam os sinos. No entanto apenas são admitidas permutações em que cada sino muda quando muito para uma posição contígua.

Mais detalhadamente:

C1. a primeira e última série são ambas [1 2 3....n], isto é, os sinos tocados pela ordem original **123**...**n**.

C2. As séries são todas diferentes, com excepção da primeira e última.

C3. De uma série para a seguinte, nenhum sino se move mais do que uma posição.

A terceira regra é imposta por limitações de ordem física. Por exemplo, é possível a mudança (23)(45) - o sino que ocupa a posição 2 permuta com o que ocupa a posição 3 e o sino que ocupa a posição 4 permuta com o que ocupa a posição 5. Mas não é possível a mudança $(34)\cdot(45)$ (porque então o sino que ocupa a posição 5 mudaria para posição 3) nem a mudança (36), por exemplo.

No applet é possível escolher o **método** (method), isto é, o algoritmo segundo o qual a melodia é construída, de acordo com as regras referidas anteriormente. Por exemplo:

Plain Bob Doubles

Double Court Bob Minor

Cambridge Surprise Major

e outros.

Alguns destes métodos serão explicados em breve, com todo o detalhe, nomeadamente a relação que eles têm com teoria de grupos.

Suponhamos que se pretende usar 7 sinos. Devemos então começar com o "round" **1234567** . A série seguinte é obtida transpondo pares de posições adjacentes.

A notação que se usa no applet necessita de alguma explicação já que difere um pouco da que se usa no texto principal. Na lista de mudanças do método escolhido, por exemplo, "125" significa que os sinos que ocupam as posições 1, 2 e 5 não mudam. Portanto, as posições 3 e 4 permutam bem como as posições 6 e 7. Esta notação requer algum cuidado porque, por exemplo, "25" é impossível porque se 2 não se move também 1 não se pode mover. A letra X, na lista de mudanças, significa que todos os pares de posições foram transpostos. Se o número de sinos é ímpar a última posição fica fixa. Portanto para 7 sinos, "X" é equivalente a "7".

O algoritmo completo consiste agora na listagem das sucessivas mudanças, separadas por um ponto ..

Por exemplo, "X.127.347.X"significa:

- tocar a primeira série, como sempre, o "round" **1234567** .
- Transpôr todos os pares de posições adjacentes da série **1234567** , para obter a série **2143657** .
- Na série **2143657** , manter os sinos que ocupam as posições 1,2 e 7, e transpôr os pares de posições adjacentes restantes, isto é, (34) e (56), para obter a série **2134567** .
- Na série **2134567** , manter os sinos que ocupam as posições 3,4 e 7, e transpôr os pares de posições adjacentes restantes, isto é, (12) e (56), para obter a série **1234657** .
- Transpôr todos os pares de posições adjacentes da série **1234657** , para obter a série **2143567** .

Capítulo 2

Análise Matemática dos Ritmos

2.1 Introdução

A Teoria Musical e a Matemática têm-se encontrado por diversas ocasiões ao longo do seu desenvolvimento e, mais recentemente, nos aspectos computacionais de ambos os campos. Neste capítulo iremos apresentar uma conexão entre conceitos e ferramentas de tais áreas de investigação onde a geometria euclideana desempenha um papel importante.

O conceito de *ritmo* foi sempre entusiasmante para os matemáticos. Tavez porque uma das funções básicas do ritmo consiste na criação de uma estrutura e, como tal, susceptível de estudo por parte da Matemática. O significado rítmico é rico e vasto, embora a sua utilização e significado também se modifiquem muito com o contexto. Algumas vezes confunde-se com velocidade, outras associa-se a tempo musical ou compasso, e em certas ocasiões designámo-lo como sinónimo de regularidade na execução musical. Dado que este capítulo versa sobre a componente rítmica sobre vários estilos musicais vamos concretizar o significado do conceito: *ritmo*.

Existem dois significados que podemos apontar para a palavra *ritmo*. No primeiro, entende-se o ritmo contraposto aos conceitos de altura do som (tanto na melodia descrita horizontalmente ou verticalmente) e o timbre (cor qualidade do som). Assim, neste sentido poderíamos falar do ritmo n' *A Sagração da Primavera*, de Igor Stravinsky. No segundo, mais específico e restringido, o ritmo refere-se a um padrão de ataques, produzidos por qualquer meio acústico, os quais podem estar sujeitos a um tempo ou associados a uma velocidade particular. Neste sentido podemos falar do ritmo das palmas na *Soleá* ou igualmente do ritmo harmónico de um prelúdio para piano de Chopin (por exemplo, o prelúdio *opus* 28, nº4).

Na tradição musical da Europa Ocidental, tempo musical ou compasso está intimamente relacionado com ritmo. A matéria-prima rítmica é concebida como um fluxo interminável de pulsação igualmente espaçados e não acentuados. O tempo musical ou compasso define-se então como a organização desses pulsos por meio de acentuações distribuídas regularmente. A maior parte da música ocidental caracteriza-se pela ocorrência regular de tais padrões.

No nosso contexto o termo compasso tem vários significados distintos dos referidos anteriormente. Normalmente, entende-se por compasso uma sequência rítmica que inclui também elementos harmónicos e formais, próprios de cada estilo. De modo a evitar confusões, usaremos a palavra ritmo no seu sentido mais geral, padrão rítmico no seu sentido mais específico e compasso como sinónimo de tempo musical.

Muitos estilos musicais caracterizam-se pela presença de certos padrões rítmicos que se repetem ao longo da peça e que têm muitas funções tais como estabilização rítmica, marcação do passo (por exemplo, em boa parte da música afrocubana), definir o carácter (temos um exemplo no terceiro movimento da sonata para piano de Chopin, *opus* 35), definir o género (na siciliana, na chacona, na tarantela e outras), etc. Exemplos de tais padrões rítmicos, designados por *claves* na tradição africana entre outras, abundam nos estilos musicais sendo tão díspares como o *Son* de Cuba, o *Gahu* do Gana ou o *Fandango* do Flamengo. Muitas perguntas se podem fazer em torno destes padrões rítmicos que funcionam como elementos estruturantes (assinale-se a sua componente matemática):

1. Que características têm esses padrões rítmicos para determinar certos estilos musicais?
2. Que semelhança podemos encontrar entre esses padrões rítmicos?
3. Que medidas de semelhança podemos definir entre padrões rítmicos?
4. Pode uma medida ser descrita num certo sentido matemático?

Será em torno de dois padrões rítmicos, que o nosso estudo irá incidir - uma primeira abordagem a análise matemática das *claves* ritmícas africanas, afrocubanas e brasileiras. Em seguida, uma análise matemática dos ritmos Flamengos.

A ideia do estudo consiste em desenvolver uma análise matemática que reflicta sobre certas relações entre os ritmos *claves* binárias e ternárias de África, Cuba e Brasil e numa segunda análise sobre as relações entre os ritmos Flamengos. No âmbito deste projecto foi desenvolvida uma página na internet no site, http://www.fc.up.pt/cmup/matmusica/ritmos na qual irá facilitar este estudo, uma vez que irá permitir a sonoridade musical dos ritmos anteriormente descritos.

Indubitavelmente, existem muitos factores musicais que poderíamos ilustrar, dada a riqueza destes padrões rítmicos. Centremo-nos na componente rítmica porque, entre os diversos factores musicais que constituem estes padrões rítmicos, sem dúvida, o ritmo é o mais saliente.

Uma maneira fácil de levar a cabo esta análise será *despir* a música das letras, da harmonia e da melodia e deixar somente o ritmo (no seu sentido mais geral) como único elemento. Esta simplificação não se destina somente facilitar a análise, é também consequência das dificuldades de formalização da harmonia e sobretudo da melodia.

Este estudo inspira-se na análise filogenética que se usa usualmente em Biologia. Esta análise requer a existência de uma distância, definida sobre o material genético. Normalmente, a distância consiste em medir quão diferentes são dois materiais genéticos dados. A distância por sua vez dá lugar a uma distância matricial. A partir desta, e graças a técnicas de Bioinformática, reconstrói-se uma árvore que reflecte as relações evolutivas entre as espécies. Aqui substituíremos os códigos genéticos por ritmos e, em primeiro lugar, definiremos uma distância entre padrões rítmicos. Existem várias distâncias que se podem usar para medir quão distantes se encontram dois padrões rítmicos. Em outros contextos, na Fonética ou na Música, para nomear dois, aparecem vários exemplos. Aqui usaremos dois tipos de distância, a de Hamming e a da permutação dirigida, que mostram adequadamente a ideia de comprimento entre padrões rítmicos. A primeira é implementada nos padrões rítmicos africano, cubano e brasileiro, enquanto que a segunda será nos ritmos Flamengos. Por último, aplicando as ferramentas adequadas obteremos uma árvore filogenética para os padrões rítmicos dos estilos musicais considerados.

Um dos objectivos deste capítulo é proporcionar ao músico, por um lado, ferramentas de análise, neste caso, o ritmo; e por outro lado, a partir das conclusões que surjam, sugerir ideias sobre questões musicais tão actuais como o estudo sobre as relações entre os diferentes estilos, origem e procedência dos estilos. As árvores geneológicas permitem a observação dos vários estilos, determinação das possíveis propriedades de preferência de estilos, a busca de possíveis estilos ancestrais, influências de músicas externas, etc.

Através deste estudo e analisando geometricamente os ritmos pretende-se que o aluno possa compreender a relação intrínseca entre os diversos ritmos e a matemática, nomeadamente a unidade do 9º Ano, "Circunferência e Polígonos", a Estatística do 10º ano e conhecer um pouco da teoria de grafos do 11ºAno do currículo das Matemáticas Aplicadas às Ciências Sociais. Iremos desenvolver estratégias de aprendizagem que promovam a interdisciplinariedade e que contribuam para uma melhor compreensão destas unidades.

2.2 Notação para designar os Ritmos. Método Notação em Caixa

Imagine-se um relógio que tenha marcadas 16 horas, em vez das habituais doze horas. O relógio tem apenas um ponteiro que dá uma volta completa em cerca de 2 segundos. Tal "relógio"está ilustrado na figura 1.

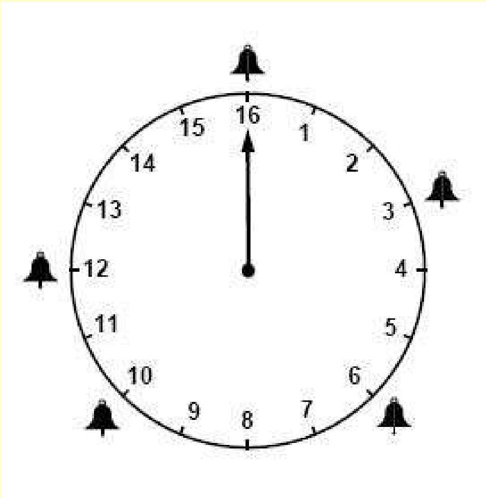


Figura 1

Coloquemos ainda um toque de sino na posição das 16 horas e nas posições 3, 6, 10 e 12 num total de cinco batimentos por cada ciclo horário, como se ilustra na Figura 1. O padrão resultante faz soar um ritmo sedutor que desde há cerca de cinquenta anos, durante a última metade do século XX, tem conseguido conquistar o planeta. É conhecido mundialmente como a *Clave Son* de Cuba. No entanto, é usual em muitos ritmos africanos pois, provavelmente, viajaram de África para Cuba juntamente com os escravos. Em Cuba é tocado com dois bastões, feitos de madeira dura, também designadas por *claves*. Em África é tradicionalmente tocado com um sino de ferro.

Para os músicos, o ritmo *Clave Son* é usualmente representado através da notação musical *standard* que oferece muitos modos de expressar um ritmo. As quatro primeiras pautas da figura 2 são exemplo disso.

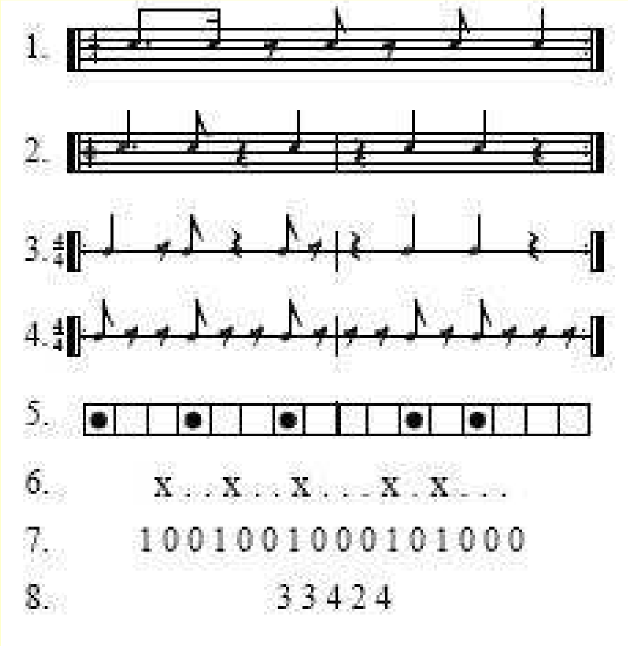


Figura 2

A quarta pauta mostra uma notação musical como uma redução às notas significativas e às pausas. A quinta "pauta"mostra um modo popular de representação dos ritmos para os percursionistas que não sabem ler música. Esta notação designa-se *Método da Notação em Caixa* desenvolvida por Philip Harland na Universidade da Califórnia em Los Angels no ano 1962 também conhecida como TUBS (iniciais inglesas que significam, Time Unit Box System).

Se ligarmos o bloco final ao bloco inicial deste último diagrama e o desenharmos sob a forma de um círculo, na direcção dos ponteiros do relógio, obtemos a representação do relógio já visto na Figura 1. Os quadrados na Figura 2 preenchidos com círculos negros correspondem às posições que os sinos ocupam na Figura 1. O método da notação em caixa serve para designar ritmos já referidos, assim como para experiências na percepção da psicologia rítmica. Uma variante comum deste método é simplesmente a utilização de um símbolo para o batimento e outro para a pausa.

Assim, por exemplo, para a *Clave Son* um modo comum de escrever é simplesmente **[x . . x . . x . . . x . x . . .]**. Finalmente na Fisiologia, onde os ritmos cardíacos são importantes, tal como na Informática a *Clave Son* poderia ser escrita como uma sequência binária de 16-bits: **[1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0]**. A representação **3 3 4 2 4** mostra o prolongamento do compasso a seguir a um batimento.

2.3 Os Ritmos Cubano, Africano e Brasileiro

Num concerto de música clássica o maestro organiza o andamento do compasso, silenciosamente, com uma batuta. Todos os membros da orquestra devem poder ver o maestro e a batuta. Esta disposição ajuda a que todos os músicos estejam unidos no decorrer do andamento do compasso.

Os padrões *clave* de sinos usados na música africana também têm uma função semelhante em manter todos os tocadores de tambor juntos ao longo do batimento do compasso. No entanto, ao contrário do maestro com a batuta, os tocadores de tambor não precisam de ver a execução do sino uma vez que este pode ser ouvido.

Os sinos africanos de metal e as claves de madeira dura usados no Brasil e em Cuba têm uma capacidade alta de ressoamento acústico, que até pode "aniquilar" a partitura do som alto dos tambores. Poderá perguntar-se porque é que os padrões de sino não são executados como movimentos rítmicos simples iguais às do maestro com a batuta. Uma das razões é que isso se poderia tornar demasiado monótono.

O silêncio da batuta não é incomodativo. Esta é uma das razões porque os padrões de sinos são muito mais complicados do que os batimentos **1-2-1-2-1-2** ou **1-2-3-1-2-3** da batuta. No entanto, a principal razão para essa variabilidade e complexidade deve-se a que os padrões de sinos são, de facto, o núcleo de um ritmo. Não representam apenas os padrões individuais de notas também fornecem âncoras para as várias partes onde os tambores são tocados e providenciam o reconhecimento subjacente básico da peça.

Por esta razão a barra temporal da *clave* e sino também é designada como *coração do batimento* ritmíco. Mais ainda, nos conjuntos da dança coreografada do Igbo o sino é usado como o principal instrumento na direcção da coreografia. Assim, os padrões do sino, e mesmo o próprio sino, são muito mais do que meros fixadores de tempo musical.

Existem literalmente centenas destes padrões de barras temporais para sinos, claves e ins trumentos de madeira usados na música de África, Brasil e Caraíbas. Isto não é surpreendente quando se considera o número de combinações que se podem construir com cinco notas executadas nas dezasseis possíveis posições dos dois compassos. Acrescente-se ainda os padrões com seis, sete ou mais notas, até onze; acrescente-se ainda os padrões que usam quatro compassos, os que têm 6/8 tempos ritmícos, e rapidamente se obtém uma explosão combinatória.

Vamos, assim, debruçar-nos sobre os ritmos designados como: *Shiko*, *Son*, *Soukous*, *Rumba*, *Bossa-Nova* e *Gahu*.

A figura 3 mostra os seis ritmos na notação musical de caixa.

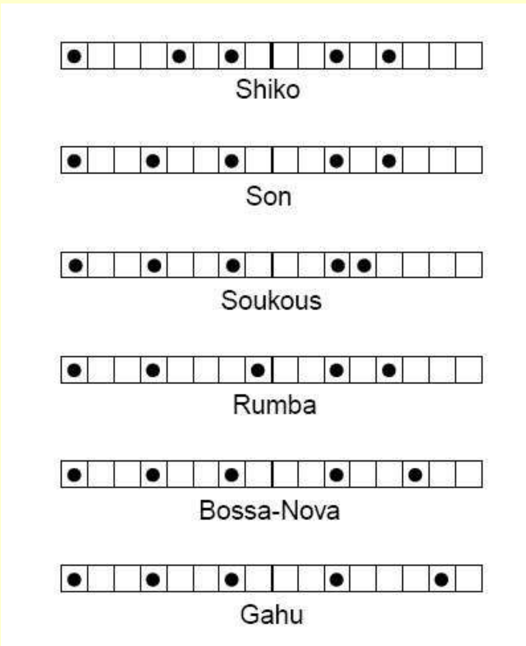


Figura 3

Mais à frente iremos conhecer em detalhe algumas características destes seis ritmos e como eles se relacionam entre si. De momento a característica principal a reconhecer é que todos os ritmos são tocados com cinco notas.

Um pequeno vislumbre sobre a representação da notação-caixa destes padrões de sino na figura 3 revela várias relações entre eles. Todos os padrões têm a primeira e a quarta notas na mesma posição. Todos, com excepção do *Shiko* e *Rumba*, têm um primeiro compasso igual que consiste nas três primeiras notas. *Son* pode ser convertido para *Shiko* avançando a segunda nota por uma unidade de tempo, *Son* para *Rumba* avançando a terceira nota por uma unidade de tempo, e *Soukous* para *Son*, *Bossa-Nova* e *Gahu* avançando a quinta nota por uma, duas e três unidades de tempo, respectivamente.

2.4 Os Ritmos Flamengos

Existe uma clara virtude na identidade do Flamengo relativamente a outras músicas onde o padrão rítmico subjacente manifesta-se através de palmas acentuadas. O Flamengo usa predominantemente compassos ternários de 12/8, isto é, compassos de 12 pulsos agrupados em grupos de três.

Em princípio tocam-se as 12 palmas que marcam o compasso 12/8 e o padrão rítmico emerge acentuando-se nas diversas melodias. No Fandango, por exemplo, dá-se um acento (palma forte) seguido de dois silenciosos (palma débil) quatro vezes seguidas. Pode ver-se aqui, à luz das definições dadas na introdução, a íntima relação que existe entre a música flamenga e o padrão rítmico (no sentido rítmico restringido) do compasso. De facto, é habitual no vocabulário flamengo falar de *compasso* em vez de padrão rítmico. Aqui faz-se uma análise comparativa somente sobre os ritmos em compasso ternário. Veja-se a figura 4. Os padrões ritmicos ternários têm mais variedade e riqueza que os binários.

Tal como nos ritmos anteriores a notação escolhida volta a ser o diagrama em caixa para uma melhor compreensão para quem não entende de música.

Figura 4

A seguir iremos analisar os padrões rítmicos ternários do flamengo e alguma das suas possíveis notações ou representações. Cada padrão rítmico tem sido designado por um estilo de som que se usa. Isto não significa tão pouco que cada padrão rítmico seja exclusivo de cada cantor.

2.5 Análise geométrica dos ritmos

Ritmos Africano, Cubano e Brasileiro

Considere-se a notação da música usual para a *clave Son* ilustrada na primeira pauta da Figura 2.

Pode o ritmo ser executado no sentido inverso, iniciando numa nota adequada, de modo a que o som produzido seja exactamente o mesmo?

Responder a uma questão como esta não se torna tão evidente com esta notação. A notação em caixa, a quinta da Figura 2, não permite responder a esta questão facilmente. A resposta é afirmativa se iniciarmos a execução na terceira nota. Por outras palavras a *clave Son* é um ritmo palindrómico fraco. Consegue-se uma representação melhor deste ritmo ciclíco através da ideia do relógio, tal como vimos na Figura 1, ligando as posições das notas através de arestas de modo a formar um polígono convexo. Tal representação não apenas realça a visualização mas leva a que se tenha uma melhor compreensão da matemática utilizada. Tem sido usada por Becker para analisar a música *Javanese Gamelan*, por McLachlan para compreender as estruturas rítmicas desde a Indonésia até África usando a teoria de grupos. Os padrões dos seis *clave* sinos são representados como um polígono convexo, ilustrados na figura 5 sendo posteriormente analisados detalhadamente. Note-se que na figura 5 as linhas a tracejado indicam a base de um triângulo isósceles ou então um eixo de simetria, tipo simetria de espelho.

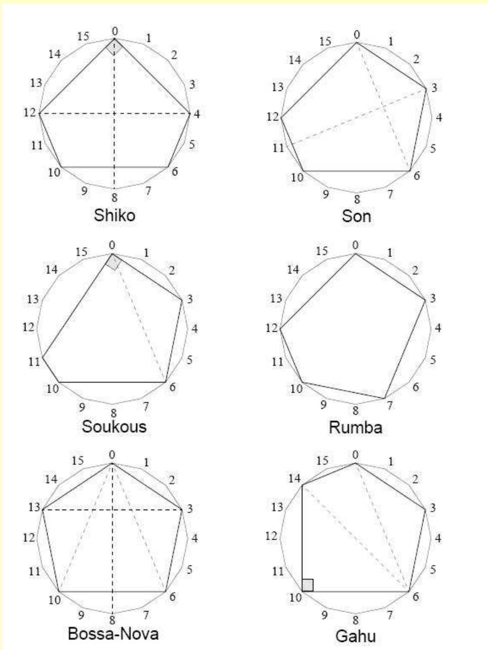


Figura 5

A representação destes seis padrões *clave* e sinos através de polígonos convexos rapidamente sugerem uma variedade de propriedades geométricas úteis para comparar, analisar e automatizar a classificação dos ritmos. A descoberta de tais propriedades analisando a notação tradicional da música clássica, ou mesmo a notação-caixa, é por ela própria pouco evidente. Por exemplo, é imediatamente óbvio a partir da observação da Figura 5 que Shiko, Soukous e Gahu contém um ângulo interior recto num dos seus vértices nos correspondentes polígonos, ao passo que nos outros três (Son, Rumba e Bossa-Nova) isso não acontece. Importa referir que os três primeiros apareceram em África, ao passo que os três últimos ocorreram na América; Bossa-Nova no Brasil e Son e Rumba em Cuba.

Será que à incidência do ângulo recto corresponde um batimento forte ?

Poderá a presença do ângulo recto ser entendida como uma característica *discriminatória* entre a popularidade dos ritmos africanos e americanos, ou não passa de uma mera coincidência?

Note-se que um ângulo recto (90°) num dos vértices do polígono implica que os restantes quatro vértices permaneçam no outro semi-círculo.

Os ritmos Shiko e Bossa-Nova são palindrómicos. Significa isto que se se executam estes dois ritmos em ambos os sentidos, a melodia produzida é idêntica. Isto pode ser visto através da simetria espelhar do polígono em relação à linha imaginária (eixo) que une as posições (0,8). Por outro lado, Son é um ritmo palindrómico fraco, no sentido em que existe uma outra posição, além do 0 a partir do qual o som rítmico é igual. Neste caso a posição correspondente é 3 uma vez que o polígono tem simetria espelhar ao longo da linha (3,11).

O número de triângulos isósceles determinados por arestas adjacentes fornecem uma outra característica geométrica. Shiko, Son e Soukous têm cada um deles um triângulo isósceles. Note-se que um triângulo isósceles indica dois intervalos de tempo iguais e consecutivos entre notas. Gahu tem dois triângulos isósceles e Bossa-Nova tem três. O padrão rítmico Bossa-Nova é um conjunto $maximamente-uniforme$. A Bossa-Nova tem quatro intervalos entre-notas de comprimento três e um de comprimento quatro. Em contraste, Rumba é o único ritmo que não tem triângulos isósceles, não tem eixos de simetria nem ângulos rectos. Rumba é, do ponto de vista geométrico um ritmo consideravelmente extraordinário.

2.6 Ritmos Maximamente-Uniformes

Um conjunto maximamente-uniforme significa que num sub-conjunto de elementos, os seus próprios elementos são espaçados uniformemente tanto quanto possível.
Para compreender melhor o significado de um conjunto maximamente-uniforme comecemos por considerar os seguintes três tipos rítmicos 12/8 na notação $box-like$: [x.x.x.x.x.x.], [x.x.xx.x.x.x] e [x...xx..xxx.]. É perfeitamente claro que o primeiro ritmo é mais uniformemente espaçado do que o segundo, e o segundo ainda é melhor uniformemente espaçado do que o terceiro. Tradicionalmente os ritmos têm tendência em exibir tais propriedades de uniformidade num grau substancial. Resulta que as medidas matemáticas de uniformidade, assim como outras propriedades geométricas encontram aplicações no novo campo da etnomusicologia, onde podem ajudar a identificar, se não explicar, preferências culturais dos ritmos na música tradicional.

Na teoria musical muita atenção tem sido dada ao estudo dos intervalos usados nas escalas de tom, mas relativamente pouco se tem desenvolvido para a análise de duração do tempo nos intervalos ritmícos. Clough e Duthett introduziram a noção de conjuntos maximamente-uniformes em escalas representadas num círculo. Uma das suas medidas, simplesmente adiciona todos os intervalos de comprimento-arco (geodésicas ao longo do círculo) determinado por todos os pares de tons na escala.

Esta definição pode ser rapidamente transferida para durações no tempo em ritmos ciclicos representados por círculos unitários como na Figura 1. No entanto, a medida é pouco adequada para ter alguma utilidade na comparação de ritmos. Reconhecidamente a medida diferencia, de facto, os ritmos que diferem ligeiramente um em relação ao outro. Por exemplo, os dois ritmos com quatro batimentos [x...x...x...x...] e [x.x.x..x........], cujas representações ciclicas estão ilustradas na figura 6 e 7, resultam em valores de uniformidade 32 e 23[1], respectivamente. O primeiro ritmo é mais uniformemente espaçado em relação ao segundo. No entanto, *todos* os seis padrões fundamentais 4/4 tempos *clave* sino têm igual uniformidade cujo valor é igual a 48, ainda que a clave Rumba é claramente menos uniforme do que a clave Bossa-Nova. O uso de intervalos de comprimento de corda, proposto por Block e Douthet resulta numa medida mais discriminatória, e no entanto é a medida preferida para a uniformidade.

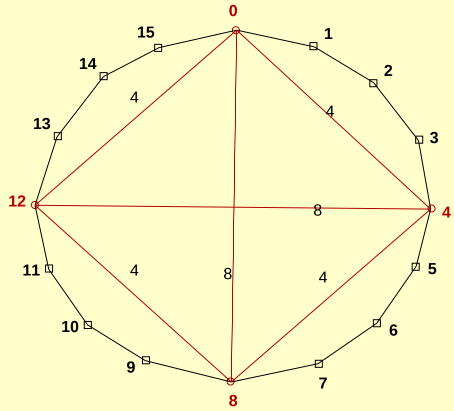


Figura 6

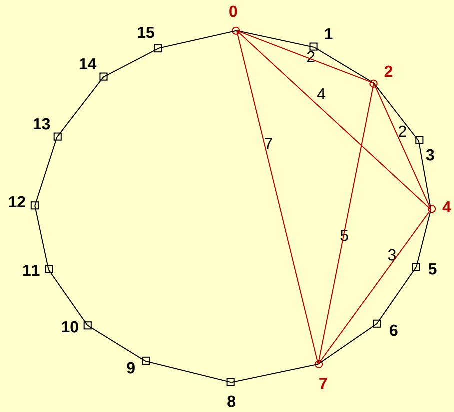


Figura 7

[1]soma do comprimento das geodésicas do círculo correspondente à sua representação ciclíca

Ritmos Flamengos

Os quatro ritmos flamengos aqui propostos, (não aparece o Fandango pois é totalmente simétrico) na sua representação geométrica ciclica, irão permitir estudar as propriedades da circunferência, inserida no currículo de Matemática do 9º Ano, associadas a situações concretas neste caso do ritmo musical, tal como nos ritmos clave anteriormente ilustrados.

Ao invés dos ritmos clave cujo compasso é de 4/4, nos ritmos flamengos os padrões rítmicos ternários são tocados num compasso 12/8.

A diferença substancial reside no facto de que os ritmos flamengos têm 5 batimentos dispostos ao longo de doze unidades de tempo rítmicas.

Uma questão que suscita grande curiosidade entre os músicos, e daí mostrar essa curiosidade para com os alunos, reside no facto de saber por que critérios certos tipos de ritmos são preferidos em relação a outros, em certas tradições musicais.

As propriedades referidas anteriormente relativamente à disposição rítmica consistem em interpretar quando um ritmo é simétrico, ou seja, palindrómico, qual o significado do ângulo-recto na execução do ritmo e quais os ritmos que são maximamente-uniformes.

Estudar as propriedades dos ritmos flamengos tal como os ritmos *clave* constitui um desafio para os alunos. Saber interpretar a representação ciclica dos ritmos e ao mesmo tempo atingir os objectivos do currículo para a unidade do estudo da circunferência são metas que nos propomos alcançar.

Olhando para a representação ciclíca na figura 8, o aluno tem de identificar que o ritmo Bulería é o único que não apresenta nenhum ângulo-recto nem nenhum triângulo isósceles. Parece pois evidente que o ritmo Bulería, tal como o ritmo clave Rumba, são muito diferentes dos restantes ritmos, pois de acordo com a sua representação ciclica, nenhuma das propriedades anteriores coincide com a dos restantes ritmos. Mas serão estas propriedades demasiadamente importantes na distinção entre os ritmos?

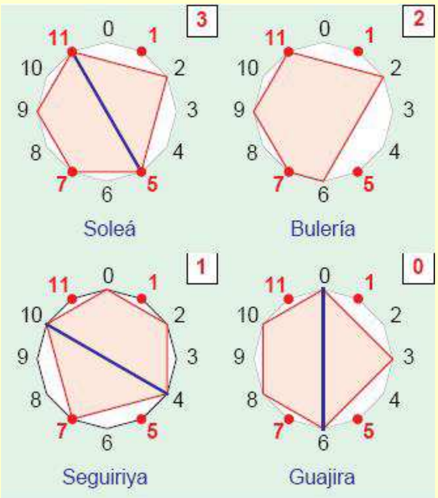


Figura 8

2.7 Estratégia pedagógica e a análise geométrica rítmica

A sala de aula é, sem dúvida, o melhor espaço de aprendizagem pelo que as propriedades das representações ciclicas dos ritmos clave e flamengos numa complementaridade com o estudo da circunferência se adequa perfeitamente ao novo enquadramento curricular da Matemática do 9º ano de escolaridade. Assim, a análise geométrica rítmica pode ser abordada paralelamente ao estudo das propriedades da circunferência.

A geometria surge como um meio que "ajuda a disciplinar o raciocínio ao contribuir para criar as estruturas lógico-dedutivas" e, na medida em que "oferece excelentes oportunidades para a realização de demonstrações simples e curtas que valem tanto pelos seus resultados como pelo facto de habituarem os alunos ao rigor de construção de provas lógicas". [2] Aspectos como a visualização espacial, uma componente importante do pensamento geométrico, a intuição geométrica, que Sebastião e Silva tão frequentemente defendia, ou a geometria como contexto para a aprendizagem da matematização da realidade, com tudo o que envolvem de criatividade, liberdade e espaço para a imaginação, são frequentemente esquecidas na Educação Matemática.

Neste sentido o estudo da análise geométrica rítmica constitui para o aluno, não um objecto matemático que é estudado como um fim em si mesmo no âmbito de unidades temáticas particulares, não um conjunto de algemas que reprime e restringe a sua imaginação para onde facilmente se resvala se o formato de demonstração não estiver subordinado à possibilidade de compreensão, mas sim um meio que lhe é útil para fazer matemática e progredir na compreensão seja da tarefa que tem no momento em mãos, seja dos objectos matemáticos com que, ao longo da escolaridade, vai lidando.

Além da análise geométrica ciclica dos ritmos clave e flamengos, outras propriedades são consideradas importantes, nomeadamente, os intervalos espectrais e as medidas de semelhanças rítmicas. Aqui, parece ser mais oportuno concretizar esta actividade sob um ponto de vista extra-curricular dado que os conteúdos a desenvolver são um pouco mais complicados e não se encontram abrangidos pelo currículo. A aprendizagem dos conteúdos abrangidos pelo currículo continua normalmente e, por outro lado, prolonga-se a curiosidade em volta dos ritmos musicais.

Para além do estudo geométrico relativamente à análise matemática dos ritmos, o presente documento finaliza com uma proposta de actividades, nomeadamente a comparação do desvio-padrão rítmico, que se enquadra na estatística do 10ºAno. O novo currículo do 10ºano entra em vigor no ano lectivo 2007/2008 e os novos desafios para os estudos estatísticos devem ir mais além do que os meros dados populacionais. Assim, a análise rítmica sob o ponto de vista estatístico é algo que nunca é abordado em nenhum manual escolar, talvez por desconhecimento dos autores. Abordar a estatística com a análise matemática dos ritmos permite reforçar ainda mais a principal linha de orientação curricular: mostrar a matemática como uma ciência de forte aplicabilidade em situações do nosso quotidiano.

2.8 Estudo da Circunferência e Polígonos através de uma análise geométrica de ritmos.

A unidade "Circunferência e Polígonos"insere-se no currículo de Matemática do 9º Ano de escolaridade do ensino público português. Esta unidade tem uma forte componente geométrica sendo por isso, muitas vezes, sinónimo de muitas dificuldades por parte dos alunos.

A maior dificuldade de compreensão da geometria euclidiana deve-se, em grande parte, ao facto de os alunos não possuírem grande capacidade de abstracção e de visualização no espaço a que se associa uma frequente incapacidade de interpretação dos enunciados.

Os problemas que hoje são colocados aos alunos não reflectem a relação entre as propriedades da circunferência a aspectos práticos do dia-a-dia ou com algo a que estejam familiarizados.

[2] João Pedro da Ponte; Leonor Santos in Revista Educação Matemática, "Edição nº79", Setembro/Outubro 2004, edição APM

Torna-se, por isso, necessário um maior enriquecimento das aprendizagens sob este ponto de vista podendo a análise rítmica contribuir para esse fim.

Actualmente os alunos ouvem bastante música e conhecem os ritmos musicais de que até agora falamos. Demonstrar as propriedades geométricas dos ritmos na aplicação do estudo da circunferência faz todo o sentido, pois mostra o lado prático da Matemática em vez do abstracto. Entender a Matemática como uma ciência do conhecimento para todas as áreas fará com que os alunos encarem a disciplina sob outras perspectivas.

Como se poderá promover esta interdisciplinaridade?

Um dos principais objectivos no ensino da Matemática consiste em mostrar ao aluno as diversas aplicações da Matemática com outras áreas do conhecimento. A implementação desta actividade em contexto de sala de aula permite um maior enquadramento interdisciplinar entre a Música e a Matemática. A arte e a ciência, que à primeira vista parecem tão afastadas, pode assim provar-se, que caminham lado a lado e que se complementam entre si.

Deste modo, o professor irá analisar com os alunos a geometria de cada um dos ritmos, quais as suas propriedades e de que modo se podem associar a esta unidade.

O enquadramento dos conteúdos do currículo do 9º ano relativamente ao estudo da circunferência poderão ser leccionados através de uma complementaridade com a análise geométrica rítmica, são os seguintes:

- Circunferência. Definição. Propriedades.
- Simetrias na circunferência. Propriedades.
- Ângulos ao centro. Arcos e cordas correspondentes.
- Ângulo inscrito num arco de circunferência.
- Polígonos.

1. **Circunferência. Definição. Propriedades.**

   A primeira abordagem será em torno do estudo da circunferência, a sua definição e as suas propriedades. Relembre aos alunos a noção de circunferência pelo que o enquadramento na análise rítmica ainda não parece oportuno.

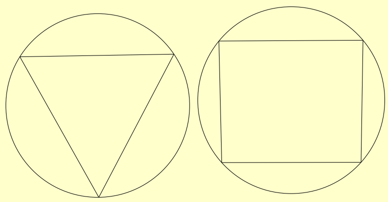
   Um assunto relacionado com a circunferência consiste no estudo dos polígonos inscritos e das suas simetrias. Não exponha desde logo todos os seis ritmos clave e flamengo através da sua representação em polígonos convexos. Reveja as propriedades da circunferência. O estudo ritmíco inicia-se através de uma introdução teórica sobre o seu conceito e como este foi desenvolvido para quem não sabe ler uma pauta musical, nomeadamente através da sua notação em caixa. De seguida, indique a noção de ritmo. Refira que os ritmos são ciclícos e portanto deverá associar o método de notação em caixa a uma *notação diferente*, onde o fim do tempo ritmíco do compasso, coincida com o início de outro tempo ritmíco no compasso. A notação sob a forma de um "relógio"com 16 horas ou 12 horas, corresponde a um hexadecágono para os ritmos clave e de um dodecágono para os ritmos flamengos, respectivamente. Foi referido previamente a necessidade em usar um compasso de 16 unidades de tempo para os ritmos clave e de 12 unidades de tempo para os ritmos flamengos. Reforce esta noção para com os alunos. Posteriormente, mostre todos os seis ritmos clave e como estes se representam na notação ritmíca ciclíca, designadamente, um polígono convexo inscrito num hexadecágono. Os ritmos flamengos inscrevem-se também num polígono convexo mas, desta vez, num dodecágono.

   Como construir o polígono convexo inscrito ao hexadecágono/dodecágono?

Depois de conhecer cada um dos ritmos clave no método de notação em caixa explique que, para se construir o polígono convexo dentro do hexadecágono, cada um dos seus vértices corresponderá a um batimento do ritmo e cada uma das arestas será uma pausa entre os batimentos. Deste modo proceder-se-á à construção de cada um dos ritmos clave e flamengo na notação ritmíca ciclíca, designadamente, o polígono convexo inscrito, no respectivo ritmo, no hexadecágono/dodecágono. Num determinado ritmo, por exemplo o Soukous, a sua representação ciclíca será construída por si, os restantes ritmos poderão ser representados pelos alunos.

2. **Simetrias na circunferência. Propriedades**

   Para demonstrar a complementariedade entre a análise geométrica rítmica e a circunferência propõe-se uma simples tarefa, isto é, determinar eixos de simetria de cada um dos seguintes polígonos inscritos.



Sugere-se uma comparação entre a análise rítmica e um triângulo correspondente a um ritmo com três batimentos e o quadrado a outro ritmo com quatro batimentos. Depois de desenhados todos os ritmos clave e flamengos, pode assim passar a analisar algumas das suas propriedades. Numa primeira análise aborde quais são os ritmos simétricos.

Muitas vezes os alunos têm uma fraca noção sobre o significado da noção de simetria e qual o sentido atribuído. Apenas um conceito de simetria baseado em figuras contrapostas uma à outra, tipo espelhar, como habitualmente é ensinado, carece de fundamento reflexivo e de interpretação por parte do aluno sobre o verdadeiro significado da simetria.

Através de uma análise ritmíca o aluno pode explora mais profundamente a noção de simetria e qual o seu significado na Música. O aluno conjectura se um ritmo, sendo simétrico, poderá ser mais audível em relação a um ritmo que não o seja. O aluno reflecte e pensa: qual a importância da simetria em termos musicais? Será que num ritmo altamente simétrico o som produzido adapta-se melhor ao ouvido humano? As conjecturas lançadas pelos alunos permitirão o enriquecimento desta actividade. O aluno reflecte sobre o verdadeiro significado da simetria em termos musicais e deixa de a ver como uma propriedade somente relacionada a figuras.

Também uma propriedade interessante que está relacionada com a simetria consiste no facto de um ritmo ser palindrómico. Com efeito, poderá desenvolver esta propriedade em cada um dos ritmos. De modo a reforçar a aprendizagem e se, de facto, a simetria é uma característica importante na audição de um ritmos, mostre a animação realizada em flash para cada um dos ritmos que se encontra disponível no ficheiro multimédia na referida página web http://www.fc.up.pt/cmup/matmusica/ritmos. Cada um dos ritmos será entoado e em seguida, verifique se os alunos conseguem distinguir um ritmo que seja simétrico de outro que o não seja. Os resultados podem ser imprevisíveis e, quem sabe, a simetria ritmíca poderá ser uma propriedade importante na construção de uma partitura musical.

Assim, passamos a descodificar os recônditos segredos da música cubana, africana, flamenga e brasileira, os alunos passam a ouvir a música destes países de uma outra maneira, mais conscientes do compasso rítmico que elas entoam. A matemática e a música complementam-se entre si. A música passa a ser encarada como tendo uma linguagem matemática subjacente. Os alunos passam a estar mais atentos à música que ouvem e por outro lado passam a ver a matemática de um modo mais prático e lúdico.

3. **Ângulos ao Centro. Arcos e cordas correspondentes.**

A originalidade em leccionar a geometria da circunferência será associá-la à análise geométrica rítmica. A noção de ângulo ao centro, em paralelo com a geometria rítmica pode ser iniciada por um raciocínio análogo ao anterior, ou seja, inscrever um triângulo e um quadrado no hexadecágono/dodecágono e depois determinar a amplitude dos ângulos ao centro, correspondentes, no respectivo arco. No que diz respeito à análise rítmica, leve os alunos a descobrirem cada uma das amplitudes do ângulo ao centro em cada um dos respectivos ritmos. O ritmo clave que melhor se adapta ao estudo do ângulo ao centro será o Shiko uma vez que a linha imaginária da base do triângulo isósceles e do eixo de simetria intersectam-se no centro do hexadecágono. No que diz respeito aos ritmos flamengos os que poderão ser utilizados para trabalhar a noção de ângulo ao centro serão a Soleá, a Seguiriya e a Guajira pela mesma razão anterior, mas inseridos no dodecágono. A partir daqui poderá explorar o facto de um ângulo produzido por estas duas linhas é igual a 90^o ou seja $1/4$ da amplitude da circunferência. O aluno conclui assim que a amplitude do ângulo ao centro de uma circunferência é igual à amplitude do arco respectivo. Uma questão interessante tem a ver com o grau de aperfeiçoamento musical com que os músicos compõe. Consciencialize os alunos a pensar a razão pela qual certos tipos de ritmos são preferidos a outros em certas culturas musicais. Assim, aprofunde mais esta ideia a partir de um ponto de vista matemático. Com efeito, reforce a aprendizagem referindo a noção de um conjunto ser maximamente-uniforme.

Dada a visualização geométrica de um ritmo, dois batimentos dizem-se uniformes se, unindo-os através de uma linha imaginária, esta será a base de um triângulo isósceles.

Será esta uma característica também importante para uma boa sonoridade musical, semelhante ao que foi descrito para a simetria. Um ritmo maximamente-uniforme soará melhor? Sabe-se que a Bossa-Nova é um ritmo bastante apreciado e sendo um ritmo simétrico, maximamente-uniforme podemos estar a concluir a razão, ou não, da sua popularidade.

O modo como se pode leccionar a noção de ângulo ao centro a partir de uma experiência musical irá, de facto, dar outra visão sobre a Matemática associado ao facto de que esta descreve a Música.

4. **Ângulo inscrito num arco de circunferência**

Observando cada um dos ritmos, na sua representação geométrica ciclica, deparamo-nos com uma vasta aplicação prática relativamente ao conteúdo a leccionar. Assim entende-se que esta deva ser faseada, para uma melhor compreensão.

(a) **Determinar a amplitude do ângulo inscrito num determinado ritmo.** Escolha um ritmo e peça aos alunos que determinem a amplitude que um determinado batimento teve ao longo do ciclo rítmico.

(b) **Interpretação da amplitude dos ângulos.**

Saber determinar a amplitude do ângulo inscrito numa circunferência, aparentemente não levanta dificuldades, mas saber interpretar qual a sua lógica num contexto isolado e sem qualquer utilidade prática, torna-se algo difícil de compreender. Assim, o professor deve deixar os alunos descobrirem a relação existente entre o andamento de um ritmo e a amplitude que cada um produz na representação geométrica ciclica.

Poderá a amplitude do ângulo determinar o prolongamento do som? Será que quanto maior fôr o ângulo, maior terá de ser o acentuamento? São questões como estas que valorizam significativamente estas aprendizagens e as tornam estimulantes e enriquecedoras de conhecimento.

Para, eventualmente, dar resposta os alunos poderão ouvir os ritmos clave e flamengo que foram previamente idealizados numa animação em flash, como anteriormente foi sugerido na página da web: http://www.fc.up.pt/cmup/matmusica/ritmos.

(c) **Ângulo de 90º inscrito numa semi-circunferência.**

A amplitude correspondente a 90º, metade da amplitude do arco, diz respeito a um batimento numa semi-circunferência. O aluno deve verificar que, se um ângulo está inscrito num semi-hexadecágono terá amplitude igual a 90º e, consequentemente, na circunferência esse ângulo também terá amplitude igual a 90º. Também deve entender o significado da amplitude de um ângulo igual a 90º, num contexto rítmico.

Os restantes quatro batimentos estão situados no outro semi-hexadecágono. Questione os alunos para o seguinte facto: Quando se produz este batimento, cuja amplitude seja de 90º, não se poderá traduzir num batimento mais acentuado em relação aos restantes? Os ritmos que têm um ângulo inscrito de 90º são originários de África enquanto que os restantes são da América, a Bossa-Nova do Brasil e de Cuba. Porque razão isto acontece? Será devido aos materiais utilizados? ou poderá ser o ângulo de 90º uma diferenciação entre os ritmos africanos e americanos ou é mera coincidência? A curiosidade, em torno da geometria rítmica, estimula a aprendizagem e devem ser os alunos a assumirem o papel de investigadores a fim de tentar responder a estas questões.

Um olhar diferente sobre uma estratégia alternativa relativamente à que, tradicionalmente, se usa nas aulas de matemática, permite associar a geometria rítmica ao estudo destas propriedades. O estudo da circunferência é assim abordado de uma perspectiva musical o que permitirá estimular a aprendizagem dos alunos. A Música, sendo uma das grandes paixões dos alunos, engrandece uma aprendizagem da circunferência entusiasmante e motivante.

5. **Polígonos**

Todos os ritmos, na sua representação geométrica ciclica, são desenhados sob a forma de um polígono convexo. Também aqui é preferível descrever por etapas cada um dos conteúdos a abordar, relativamente, à representação geométrica rítmica.

(a) **Soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono**

Uma boa implementação deste conteúdo será lançar um desafio aos alunos no sentido de preencherem a seguinte tabela. Deste modo identificam a relação entre os polígonos já conhecidos e os que são produzidos pelos ritmos.

Assim o professor pede aos alunos que preencham a seguinte tabela:

Polígono	Nºlados	Representação Geométrica	Nº triângulos em que ficou dividido	Soma dos ângulos internos do polígono
Triângulo	3		1	180º
Quadrilátero	4		2	2×180º
Ritmo Shiko				...×180º
Ritmo Rumba				...×180º
Ritmo Guajira				
Hexágono				....×180º

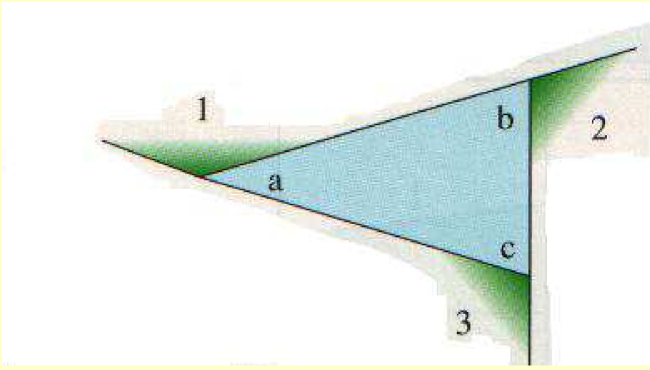
O aluno ao preencher o quadro deve chegar à conclusão de que a soma S_n das amplitudes dos ângulos internos de um polígono (convexo) com n lados é dada pela expressão:

$$S_n\text{=(n-2)}\times 180^{\text{o}}$$

A identificação desta fórmula, por parte do aluno como parte integrante da sua investigação rítmica, poderá traduzir-se num grau de dificuldade acrescido devido ao alto grau de generalização. Porém deve-se deixar o aluno fazer as suas próprias investigações no sentido de conjecturar sobre as várias hipóteses de polígonos apresentadas. Apesar de o aluno poder formular conceitos ou ideias erradas o professor pode aproveitar esse conhecimento investigativo e encaminhá-lo para a formulação correcta. O professor deve dar sugestões de resolução e não as soluções.

(b) **Soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono**

Explique o modo como se determina a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono usando como possível exemplo um triângulo isósceles, dado que este é o polígono mais simples. De seguida, poderá passar ao cálculo da soma das amplitudes dos ângulos externos, em cada um dos ritmos. Assim, o procedimento normal será pedir aos alunos que determinem a amplitude dos ângulos externos do seguinte triângulo:



procedendo do seguinte modo,

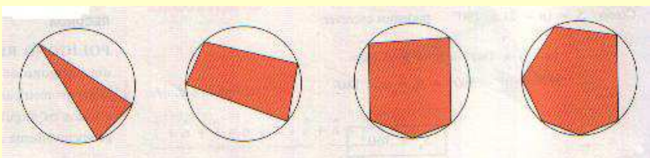
$$\hat{1}+\hat{a}=180^{\text{o}}$$
$$\hat{2}+\hat{b}=180^{\text{o}}$$
$$\hat{3}+\hat{c}=180^{\text{o}}$$
$$\text{Logo, } \underbrace{\hat{1}+\hat{a}}_{180^{\text{o}}}+\underbrace{\hat{2}+\hat{b}}_{180^{\text{o}}}+\underbrace{\hat{3}+\hat{c}}_{180^{\text{o}}}=3\times180^{\text{o}}$$
$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=3\times180^{\text{o}}\text{-}\underbrace{(\hat{a}+\hat{b}+\hat{c})}_{180^{\text{o}}}$$
$$\text{O que resulta, } \hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=360^{\text{o}}$$

O que acontece no caso do quadrilátero?

Um problema semelhante deve ser proposto para os ritmos clave e flamengos. Os ritmos clave e flamengos têm cinco batimentos cada. Assim a sua representação geométrica ciclíca corresponde a um pentágono. O estudo para o pentágono poderá ser realizado apenas para um ritmo clave e flamengo, respectivamente de modo a que a actividade não se torne demasiado repetitiva. Depois de enveredar mais uma vez pela correlação entre a música e a matemática o aluno deve chegar à conclusão de que a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono (convexo) é sempre igual a 360º.

(c) **Polígonos inscritos numa circunferência**

Um polígono cíclico está inscrito numa circunferência, quando os respectivos vértices a intersectam. Exemplos:



Refira que todos os polígonos regulares podem ser inscritos numa circunferência. No entanto, determinados polígonos irregulares não podem ser inscritos, excepto os triângulos, que podem ser todos. Alguns dos ritmos aqui considerados na sua representação geométrica ciclíca, correspondem a um polígono irregular, mais vincadamente a Rumba nos ritmos clave e a Buleria nos ritmos flamengos.

Dê exemplos de polígonos irregulares que não podem ser inscritos numa circunferência.

Os ritmos aqui descritos estão inscritos num polígono regular, nomeadamente os ritmos clave num hexadecágono e os ritmos flamengos num dodecágono, uma vez que todos os seus batimentos (vértices) são pontos dos respectivos polígonos.

Por último, e sem fazer alusão à geometria rítmica ciclica, finaliza-se este conteúdo mostrando que todos os polígonos regulares podem ser inscritos numa circunferência e, por conseguinte, determinar-se-á a área respectiva.

Os ritmos que não possuem qualquer uma destas propriedades terão menos sonoridade? A Rumba ou a Bulería, ritmos altamente irregulares na sua representação geométrica ciclica, terão, consequentemente, uma sonoridade irregular? Será que a geometria rítmica fornece uma explicação para a boa sonoridade musical?

As respostas a estas perguntas não são objectivas dado que a sonoridade de cada ritmo não depende somente das propriedades anteriormente estudadas. A análise geométrica rítmica apenas providencia uma nova perspectiva sobre a Música rítmica.

Através das animações em flash e do estudo desenvolvido anteriormente poderemos apreciar a arte e a ciência sobre uma perspectiva didáctica sem precedentes.

A grande capacidade que a matemática tem em descodificar a música pode explicar os gostos musicais de cada um de nós. Apesar da Rumba não possuir qualquer uma das propriedades anteriormente mencionadas não significa que não possa ser apreciada. São inúmeros os públicos que apreciam a Rumba e, quem sabe, a sua irregularidade geométrica não fez dela um ritmo bastante famoso A Bossa-Nova apesar de ter todas as propriedades pode até ser um ritmo com pouca importância em certas comunidades. A análise geométrica apenas nos dá uma visão científica dos ritmos, a música entoada é sempre uma agradável harmonia e um prazer para o vasto público.

A matemática permite visualizar algumas características que se escondem atrás das notas musicais para aqueles que não são músicos e, quem sabe, explicar o gosto musical de cada um de nós.

2.9 Intervalos espectrais dos Ritmos

Debrucemos agora o nosso estudo sobre a forma do espectro de frequências respeitante às durações entre os batimentos. Na teoria musical este espectro designa-se por vector-intervalo. Por exemplo, o vector-intervalo para o padrão clave Son é dado por [0,1,2,2,0,3,2,0]. Consiste num vector de dimensão 8 porque existem oito diferentes possibilidades de duração dos intervalos (diagonais do polígono) entre os pares dos batimentos definido num hexadecágono.

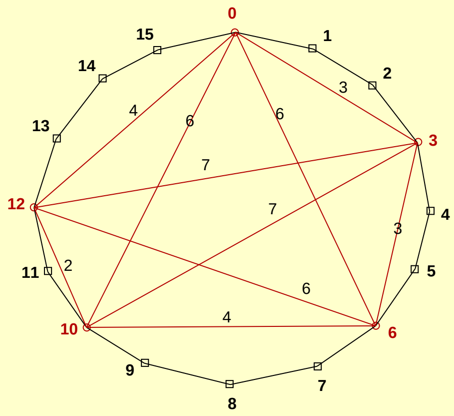


Figura 9

O vector-intervalo para o padrão clave Son é dado por [0,1,2,2,0,3,2,0] onde cada número representa a frequência absoluta de uma diagonal ou lado do polígono cíclico. Esquematicamente temos:

Comprimento da Geodésica x_i		Frequência Absoluta n_i
1	-	0
2	-	1
3	-	2
4	-	2
5	-	0
6	-	3
7	-	2
8	-	0

Graficamente:

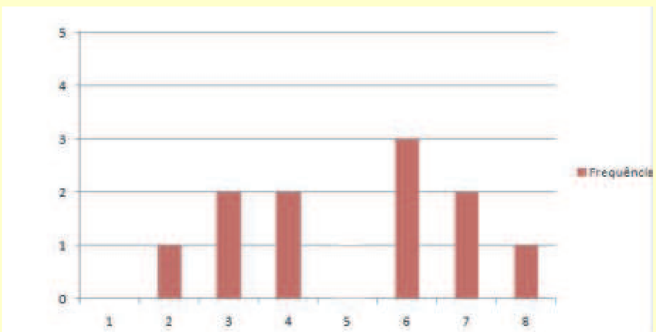


Figura 10

Para a clave Son existem 10 batimentos (5 pares de batimentos), resulta que a soma do vector-intervalo é igual a dez. Uma representação mais convincente e útil de um vector intervalo corresponde a um histograma. A figura 11 mostra os diagramas de barras (vectores intervalo) de todos os conjuntos de intervalos e de todos os padrões rítmicos clave-sino do compasso 4/4.

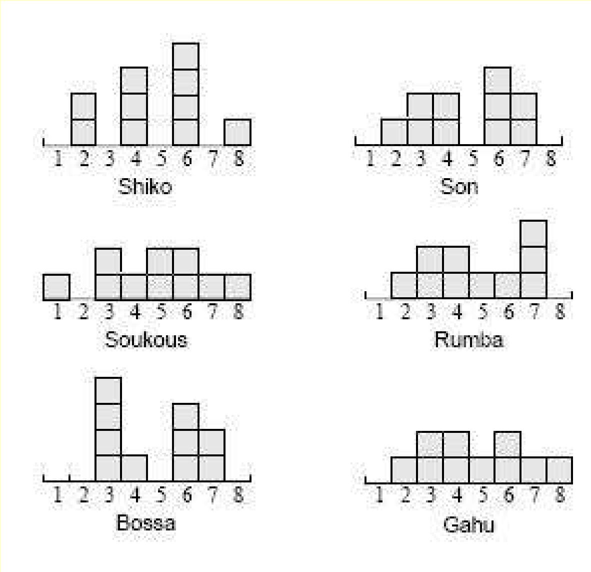


Figura 11

Olhando para os seis gráficos de barras suscita-nos uma interessante variedade de campos do conhecimento: musicologia, geometria, combinatória, teoria de números e estatística. Por exemplo, David Locke tem dado explicações matemáticas para a caracterização do padrão de sinos Gahu (ilustrado no final da figura 11) como uma "potência rítmical", exibindo uma "intrigante" qualidade, criando um "efeito espiral" levando a "ilusões auditivas". Comparando o gráfico de barras do padrão Gahu em relação aos restantes cinco gráficos de barras, observa-se que Gahu é o único padrão que tem uma barra com comprimento máximo dois e uma conexão[3] entre dois comprimentos simples. O outro ritmo que só tem uma conexão simples é a Rumba, mas tem três intervalos de comprimento sete. No ritmo Soukous o comprimento máximo do intervalo é dois consiste no Soukous, porém tem duas componentes, pois não existe um intervalo de comprimento dois. Apenas Soukous e Gahu usam 7 das 8 possibilidades de duração dos intervalos.

As observações anteriores sugerem que, talvez, outros ritmos com relações uniformes nos gráficos de barras, e alguns, com brechas nos respectivos gráficos possam ser interessantes do ponto de vista musical. Poderá a forma do gráfico de barras do ritmo Gahu desempenhar um papel significante nos ritmos em especial nas propriedades musicológicas? Se sim, esta propriedade geométrica poderá providenciar uma heurística para a descoberta da geração automática de outros ritmos "bons". Com isto em mente podemos questionar se existem ritmos com valores possíveis satisfazendo estas propriedades. Vamos designar a família de todos os ritmos consistindo em k batimentos num espaço de tempo cíclico de n unidades por $R[k, n]$. Por outras palavras $R[k, n]$ consiste em todos os n-bit ciclos da sequência binária com k 1's. Então, todos os padrões de tempo clave-sino 4/4 na figura 3 pertencem a $R[5, 16]$.

Uma questão natural que emerge tem a ver com o facto de que existem alguns ritmos cujos intervalos entre os batimentos têm perfeitos gráficos de barras planos de altura, sem brechas.

[3]Os comprimentos simples 7 e 8 são adjacentes

Isto claramente não é possível com $R[5,16]$. Apenas existem 8 possibilidades diferentes de comprimentos de intervalo e 10 distâncias entre pares[4], teria de existir pelo menos uma barra com altura maior do que um. A segunda questão natural diz respeito à existência de um ritmo $R[5,16]$ que utilize todos os oito intervalos. A resposta é afirmativa; tal padrão pode ser [xx...x.x.....x..], em que a sua representação ciclíca está representada na figura 12a), cujo vector intervalo é dado por [1,1,1,2,1,2,1,1]. No entanto, o ritmo [xx..x.x.....], pertencendo à família $R[4,12]$, traduz-se no círculo da figura 13a) e tem um gráfico de barras perfeito; cada um dos intervalos entre os batimentos ocorre exactamente uma única vez, o seu vector intervalo é dado por [1,1,1,1,1,1].

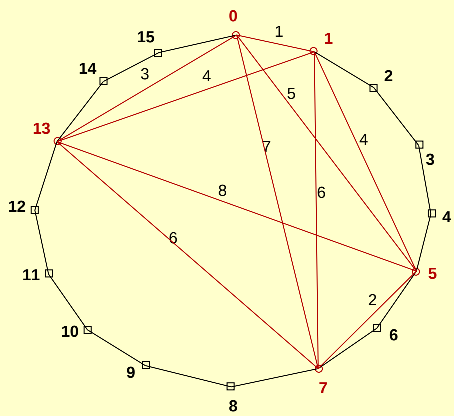
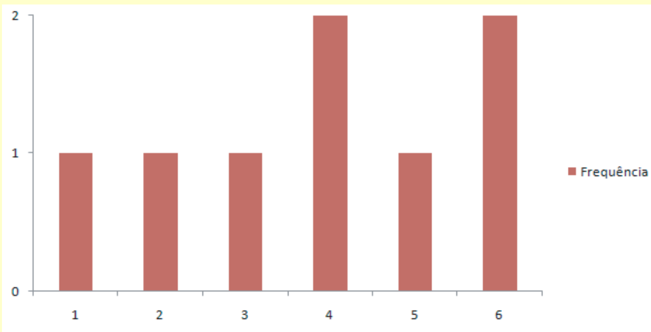


Figura 12 a)



Para um ritmo ter boa sonoridade não convém ter um intervalo silencioso demasiado longo, tal como o comprimento seis da figura 13a). Podemos questionar se não existirão outros ritmos em $R[4,12]$ cujo vector intervalo seja igual a [1,1,1,1,1,1] e se existir, sem qualquer pequena brecha silenciosa. A resposta é afirmativa. O ritmo [xx.x...x....] ilustrado na Figura 13b) satisfaz todas essas propriedades; a pausa silenciosa mais extensa corresponde a 5 unidades.

[4]A dimensão do grafo K_n é dado por $\frac{n(n-1)}{2}$. Então para n=5 (K_5) tem-se $\frac{5x4}{2}$=10

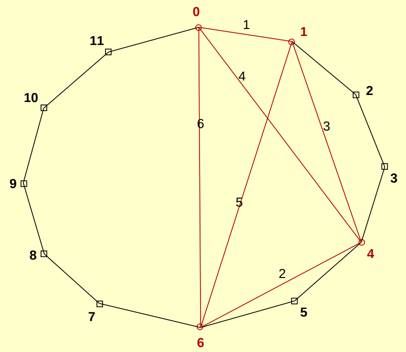


Figura 13a)

[xx..x.x.....]∈R(4,12)

Representação gráfica do vector intervalo [1,1,1,1,1,1] pertendo à família R(4,12) do ritmo [xx..x.x.....]

Figura 13b)

R(4,12)∋[xx.x...x....]

Representação gráfica do vector intervalo [1,1,1,1,1,1] pertendo à família R(4,12) do ritmo [xx.x...x....]

2.10 Medidas de semelhança rítmica

Para construir árvores filogenéticas (representação gráfica das medidas de semelhança rítmica) é necessário identificar uma distância que meça a semelhança rítmica. A distância deverá comportar-se de modo a que, quanto maior seja a distância entre os padrões rítmicos, menor seja a semelhança rítmica. As árvores filogenéticas não são mais do que representações gráficas das medidas de semelhança entre os diversos ritmos. Por exemplo, se dois ritmos estiverem afastados na respectiva árvore significa que não são muito semelhantes, caso se encontrem perto diz-se que existe uma forte semelhança entre eles. Usaremos duas distâncias para medir a semelhança rítmica: A distância Hamming e a distância da permutação dirigida. A primeira será calculada para os ritmos clave enquanto a segunda para os ritmos flamengos.[5]

A distância *Hamming*

Para sequências binárias (com 0's e 1's) uma medida natural de distância, ou não-semelhança entre elas, de uso frequente é a distância Hamming também usada na criptografia. A distância Hamming consiste simplesmente no número de posições das sequências onde os elementos não coincidem. Por exemplo os ritmos Gahu [10010010 001**0**00**1**0] e Soukous [10010010 001**1**00**0**0] diferem em dois batimentos. Resulta que são duas as posições na série binária em 16-bit onde uma nota não coincide e a distância Hamming entre Gahu e Soukous é igual a 2. Por este motivo a distância Hamming é um dos mais simples tipos de modelos de correspondência. Note-se que nesta aproximação cada ritmo é representado por um vector X=$(x_1, x_2, ..., x_{16})$ onde x_i representa o valor binário que caracteriza o ritmo. Se uma nota é tocada num tempo unidade i então x_i=1 e caso contrário x_i=0. Os ritmos são pois representados como pontos de um espaço vectorial espaço 16-dimensional sobre Z_2(usualmente designado como hipercubo). A distância Hamming entre dois pontos X=$(x_1, x_2, ..., x_{16})$ e Y=$(y_1, y_2, ..., y_{16})$ neste espaço é dada por:

$$d_H(X,Y) = \sum_{i=1}^{16} |x_i - y_i|$$

onde $|x|$ designa o valor absoluto de x. A distância Hamming entre os ritmos da figura 5 (ou 3) está ilustrada na figura 14 sob a forma de uma tabela. A última linha da figura 14 mostra para cada um dos ritmos a soma das suas distâncias Hamming em relação a todos os outros cinco ritmos.

Matriz de distância *Hamming*

	Shiko	Son	Soukous	Rumba	Bossa	Gahu
Shiko	0	2	4	4	4	4
Son	2	0	2	2	2	2
Soukous	4	2	0	4	2	2
Rumba	4	2	4	0	4	4
Bossa-Nova	4	2	2	4	0	2
Gahu	4	2	2	4	2	0
$\sum$	18	10	14	18	14	14

Figura 14

[5] A utilização diferenciada das distâncias nos ritmos permitirá distinguir cada uma delas. Ambas as distâncias são válidas nos ritmos aqui descritos pelo que não seria razoável a repetição dos mesmos procedimentos. Proponha aos alunos uma inversão da resolução aqui proposta e assim confrontar os resultados obtidos por cada uma das distâncias em cada um dos ritmos.

O somatório das distâncias ressalva a diferença de um ritmo em relação aos restantes do grupo. Note-se que de acordo com esta medida Son é o ritmo mais semelhante em relação aos restantes.

A distância Hamming, porém, não é muito apropriada para o nosso problema da semelhança de ritmos uma vez que pode modificar-se substancialmente um padrão rítmico e a distância pode não variar. Se num ritmo movermos apenas uma nota numa grande distância, mantendo os restantes batimentos, e num outro ritmo mover-se os batimentos apenas uma posição, a distância Hamming é idêntica, no entanto, o som produzido irá ser muito diferente entre os dois ritmos. Por exemplo, a distância Hamming entre Gahu e Soukous é a mesma da que a distância Hamming entre Gahu e Bossa-Nova. Contudo os últimos dois são muito mais próximos em relação um ao outro. De modo a suprimir esta deficiência da distância Hamming têm-se proposto numerosas variações e generalizações. Uma distância de medição de semelhança que poderá colmatar esta incoerência será a "distância de permutação dirigida"que se baseia num conceito muito simples: a permutação.

A distância da permutação dirigida

A medida de semelhança que aqui se mostra baseia-se num conceito muito simples, a permutação. Uma permutação é uma mudança entre um "1"e um "0"que são adjacentes numa cadeia binária. Alterar a posição dos elementos nas cadeias de números é uma operação fundamental nos algoritmos de ordenação. No entanto, uma permutação pode ser uma mudança entre elementos não adjacentes. Quando os elementos são adjacentes, a permutação chama-se mini-permutação ou permutação primitiva. Aqui chamaremos, simplesmente permutação, à mudança de dois elementos adjacentes.

A *distância de permutação* entre dois padrões rítmicos define-se como o número *mínimo* de permutações necessárias para converter um padrão rítmico num outro. Por exemplo, o padrão X=[1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1] pode converter-se no padrão Y=[1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0] através de um mínimo de quatro permutações, a saber, alterando a terceira, a quinta, a sexta e a sétima posição com as correspondentes pausas que estão atrás deles. A distância de permutação pode ser vista como uma versão simplificada da distância de Hamming, que resulta somente quando se consideram desprezamentos, cujo custo, é a longitude do dito desprezamento. Esta medida parece mais apropriada para uma análise de semelhança entre vectores binários do que a distância Hamming.

Do ponto de vista musical é razoável utilizar esta distância. O ouvido humano considera como próximos dois padrões rítmicos, se o número de alterações entre acentuações é pequeno e se tais alterações ocorrem entre acentuações adjacentes. Além disso, é interessante observar que, o compasso *Bulería* resulta precisamente da permutação de um "1"e um "0"para o compasso *Soleá*. Um exemplo desta distância aplicada a padrões rítmicos do flamengo está ilustrada na figura 15.

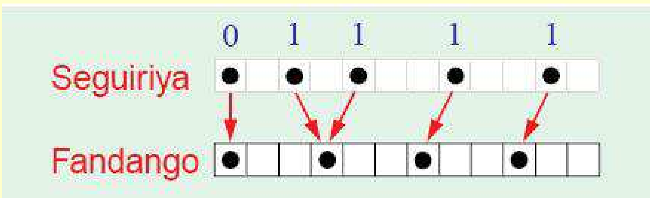


Figura 15

A *distância de permutação dirigida* é uma generalização da distância de permutação, pensada para tratar a comparação de padrões que não têm o mesmo número de acentuações "1's"(uns).

Por exemplo, o *Fandango*, tem quatro acentuamentos em vez de cinco e, portanto, esta generalização torna-se necessária. Sejam X e Y duas sucessões binárias de comprimento n que representam dois padrões. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que X tem mais "1's"(uns) que Y. A distância de permutação dirigida é o número mínimo de permutações necessárias para converter X em Y se obedece às seguintes condições:

1. Cada "1"de X tem de mover-se para uma posição "1"de Y.

2. Todas as posições "1"de Y têm de receber pelo menos um "1"de X.

3. Nenhum "1"pode percorrer através da fronteira entre a posição zero e a n-ésima.

Observando a figura 15 conclui-se que são necessárias 4 permutações nos acentuamentos do ritmo Seguiriya para poder obter o padrão rítmico Fandango A construção de algoritmos deficientes de resolução para a distância de permutação dirigida encontra-se atualmente em investigação. Neste caso podemos realizar os cálculos manualmente e obtém-se a distância matricial da figura 16.

Matriz de distância Permutação Dirigida

	Soleá	Buleria	Seguiriya	Guajira	Fandango
Soleá	0	1	11	7	7
Buleria		0	12	8	8
Seguiriya			0	4	4
Guajira				0	2
Fandango					0
$\sum$	26	29	31	21	21

Figura 16

As medidas de semelhança rítmica

As medidas de semelhança rítmica aqui apresentadas foram essencialmente duas: a distância Hamming e a distância de permutação dirigida. Medir a semelhança entre os ritmos constitui um grande desafio para os músicos a fim de entenderem quais os ritmos que se adequam a um determinado ambiente. Por exemplo se um ritmo africano a ser tocado em Cuba irá ter boa sonoridade é algo com que os músicos estão sempre preocupados. Também se um ritmo flamengo, por exemplo o Fandango, fora da sua zona de referência irá ter sonoridade musical numa região onde por exemplo a Bulería é mais apreciada. Este intercâmbio entre as diversas zonas irá ter repercursões entre os músicos pois estes precisam de identificar os ritmos que mais se adequam à sua plateia, conforme a região em que actuem.

As duas medidas de semelhança aqui estudadas reflectem essa preocupação com que os músicos se enfrentam. Qual o melhor ritmo que se possa tocar de acordo com o gosto dos ouvintes?

Estudar a semelhança entre os ritmos obriga a que professores e alunos dispendam tempo de estudo pelo que seria conveniente que estas actividades fossem implementadas em contexto extra-curricular. As actividades devem ser abertas a todos os alunos, preferencialmente, do ensino secundário devido ao seu grau de dificuldade.

Distância Hamming

Como atrás foi referido a primeira abordagem que o professor deve fazer, será mostrar aos alunos a importância das medidas de semelhança rítmica e qual a sua utilidade sob o ponto de vista musical. Depois de traçar os objectivos, o professor pode começar por definir o modo como se determina a distância Hamming e qual o seu significado na medição da semelhança entre os ritmos.

A seguir, cada um dos alunos determina a distância Hamming entre os ritmos e o professor incentiva-os a desenharem a representação gráfica dessas distâncias entre os ritmos.

Depois de construída a matriz das distâncias e a respectiva representação gráfica o professor explica a razão pela qual a distância Hamming não traduz da melhor forma a verdadeira medida de semelhança entre os ritmos, dando para isso vários exemplos. Assim, uma outra distância terá de ser estudada a fim de se obter um resultado mais preciso, nomeadamente a distância da permutação dirigida.

Distância Permutação Dirigida

A distância de permutação dirigida traduz de uma forma mais assertiva a medida de seme lhança rítmica. Tal como atrás foi referido o professor deve explicar a razão pela qual a distância Hamming não é uma boa medida para explicar as semelhanças rítmicas. Os alunos devem ve rificar que a distância Hamming poderá ter o mesmo valor entre dois ritmos muito diferentes ao passo que na distância de permutação dirigida isso não acontece.

O professor deve em primeiro lugar definir o modo como se determina a distância de permutação dirigida entre os diversos ritmos e compará-los com a matriz da distância Hamming.

Finalmente proceder-se-á à representação gráfica da matriz da distância da permutação dirigida e à devida interpretação pelos alunos.

Obs: Repare-se que a distância Hamming foi determinada nos ritmos claves enquanto que a distância da permutação dirigida para os ritmos Flamengos. Nas actividades extra-curriculares o professor poderá inverter o cálculo destas distância a fim de os alunos poderem comparar os resultados obtidos.

Quais as conclusões a que os alunos deverão chegar?

A principal referência será descobrir quais os ritmos que são mais semelhantes entre si e aqueles que mais se distinguem. Apesar de a distância Hamming não traduzir da melhor forma essa medida de semelhança o professor deverá mostrar que também é importante. Com esta actividade o aluno deve ser capaz de identificar que a Matemática desempenha um papel fundamental em torno da sonoridade musical. O principal objectivo desta actividade consiste em mostrar a utilidade da matemática na elaboração de ritmos que se adequem ao meio envolvente em que o músico irá actuar.

2.11 Splits Tree (Árvore de Ramificação)

Distância de permutação dirigida

Consideremos agora a construção da "splits tree", árvore de ramificação, para os ritmos Flamengos. A técnica está baseada num processo interactivo de divisão e dá como resultado o surgimento de um grafo plano com a propriedade de que a distância entre dois nós reflicta, tanto quanto possível, a verdadeira distância entre os dois padrões rítmicos correspondentes na matriz de distâncias. Este método tem, além disso, uma óptima propriedade, em que constrói um grafo, e não uma árvore, quando a estrutura de proximidade subjacente não é intrinsecamente do tipo árvore. De facto, se a estrutura de árvore não coincide perfeitamente com os dados, introduzem-se novos nós com o objectivo de obter um melhor ajuste. Podem visualizar-se estes nós sem etiquetas na figura 17 e o comprimento das arestas resulta da matriz de distâncias da permutação dirigida.

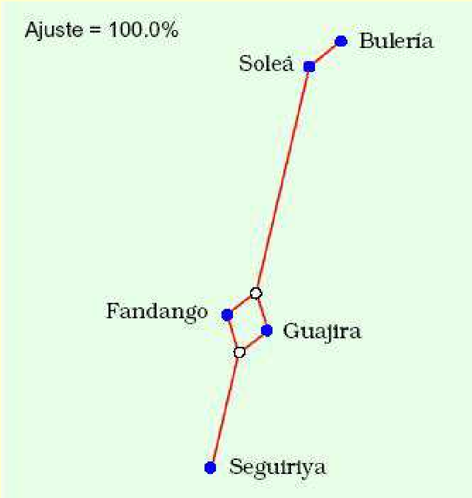


Figura 17

A interpretação do grafo obtido é a seguinte. A soma das longitudes das arestas mais curtas entre um padrão e outro é proporcional à distância real entre eles. Os novos nós incorporados (sem etiquetas) sugerem a existência de padrões rítmicos *ancestrais* donde os actuais poderiam ter evoluído. As arestas podem dividir-se para formar paralelogramos, como se vê no centro. Os tamanhos relativos destes paralelogramos são proporcionais ao seu *índice de distanciamento*, que indica quão significativas são as relações de agrupamento na matriz de distâncias.

No grafo da distância de permutação dirigida um primeiro grupo compõe a *Soleá* e *Bulería*, outro central, *Guajira* e *Fandango*, e por último a *Seguiriya* permanece num terceiro grupo. Os padrões rítmicos mais semelhantes aos restantes são a *Guajira* e *Fandango* que empatam a 21. É por isto que aparecem no "centro"do grafo. Aparecem dois nós sem etiqueta, perto da *Guajira* e do *Fandango*. Também é de destacar que *Seguiriya* e *Bulera* encontram-se nos extremos do grafo e são os padrões mais "distantes"em relação aos restantes, com uma distância total de 31 e 29, respectivamente.

Distância Hamming

Para a distância Hamming a "splits tree"ilustrada na Figura 17 corresponde a um diagrama com um ajuste perfeito. O padrão clave Son permanece no centro da árvore. De facto, a distância Hamming entre o Son e cada um dos outros ritmos é igual a dois. A árvore também contém um nó *ancestral* com Son, Soukous, Bossa-Nova e Gahu como os seus descendentes, com cada uma das distâncias igual a *um* a partir do seu ritmo ancestral. Este ritmo ancestral consiste no padrão de quatro batimentos [x..x..x...x.....]. Note-se que todos os seus quatro ritmos descendentes contém este padrão, e eles apenas diferem unicamente na localização do último (quinto) batimento que se situa na posição 12, 13, 14 e 15 para os ritmos Soukous, Son, Bossa-Nova e Gahu, respectivamente.

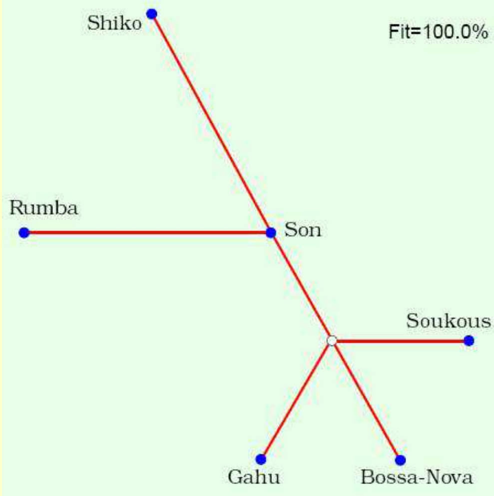


Figura 18

Finalmente, vale a pena observar que não existe um único par de candidatos que representem os dois ritmos mais distintos, a Rumba e o Shiko.

A teoria de grafos e a representação gráfica dos ritmos

Os alunos da disciplina de MACS, e também os que não têm esta disciplina abrangida pelo currículo, poderão assim reforçar a aprendizagem da teoria de grafos nomeadamente a propriedade que está subjacente às árvores. Deste modo facilmente constantam que a representação gráfica, relativamente à medida da distância Hamming dos ritmos clave, consiste numa árvore uma vez que é um grafo conexo e que não tem circuitos. No entanto, poderá fazer constar aos alunos o facto de a representação gráfica da medida da distância da permutação dirigida não representa uma árvore pois, apesar de ser conexo, existe um circuito em torno dos vértices dos ritmos Fandango e Guajira e dos restantes dois vértices que representam padrões ancestrais rítmicos. O estudo da teoria de grafos sai também assim reforçado podendo assim este conteúdo ser alargado aos restantes alunos que não estão incluídos no currículo das Ciências Sociais. A representação gráfica dos padrões de semelhança rítmica ajuda a construir uma visão cada vez mais dinâmica e representativa de como a Matemática ajuda a compreender os ritmos musicais de várias culturas mundiais e como eles se podem associar entre si.

2.12 A abordagem rítmica no ensino da Estatística

Ao invés do que se pode propôr como actividade em contexto de sala-de-aula relativamente ao estudo geométrico dos ritmos, aqui a melhor opção para abordar as componentes de estudo rítmico, intervalos espectrais, medidas de semelhança rítmica e árvores filogenéticas seria melhor e mais aprofundada em actividades extra-curriculares. Esta opção deve-se ao facto de que o estudo dos "intervalos espectrais rítmicos"deveria ser implementado no estudo da Estatística do 10º ano uma vez que aí é feita uma abordagem aos gráficos de barras/histogramas. Porém o estudo da Estatística do 10º Ano é muito limitado e pouco interessante pois a única novidade para os alunos consiste no cálculo do desvio-padrão de uma amostra e no estudo das distibuições bidimensionais. Pelo facto de ter menos importância que os anteriores, em geral, o professor opta que os alunos desenvolvam trabalhos escritos que foquem o uso da estatística em situações quotidianas. Assim, o estudo dos intervalos espectrais rítmicos faz mais sentido que seja desenvolvido pelos alunos como trabalho escrito para que possa ser apresentado no final do ano lectivo. No que diz respeito aos restantes temas a desenvolver, as medidas de semelhança rítmicas e as respectivas representações gráficas, através das árvores filogenéticas, faz mais sentido que sejam implementadas numa escola secundária onde a disciplina de MACS faz parte integrante do currículo. Devido a esta miscelânea de aplicabilidade dos ritmos em cada um dos níveis de escolaridade e de áreas de ensino, considera-se que é preferível optar por uma diferenciação em cada um dos temas a abordar no estudo da Matemática. Deste modo, iremos em descrever uma possível opção estratégica da implementação da Estatística do 10º Ano em conjunto com os intervalos espectrais rítmicos e posteriormente o cálculo do desvio-padrão para cada um dos ritmos.

A Estatística e os Intervalos Espectrais Rítmicos

Como tivemos oportunidade de verificar o estudo dos intervalos espectrais ritmícos envolvem, de certo modo, um estudo estatístico de cada um dos ritmos, nomeadamente a descoberta das propiedades musicológicas, isto é, de que modo podemos verificar quando um ritmo é perfeito na sua sonoridade. A melhor maneira de abordar esta complementariedade será, portanto, em actividade extra-curricular de modo a reforçar a aprendizagem da Matemática como uma ciência aberta a todos os campos do conhecimento.

Como se poderá implementar esta actividade?

1º passo: O professor depois de integrado num clube de apoio às Ciências na Escola poderá tomar partido desta iniciativa e dar a conhecer aos alunos que a Matemática desempenha um papel de relevo na sonoridade musical, em especial, nos ritmos. Assim, o professor deverá dar a conhecer cada um dos ritmos clave e flamengos e as suas definições e propriedades tal como designadas anteriormente.

2º passo: Depois de conhecidos cada um dos ritmos o professor explica que existe uma outra propriedade que ajuda a relacionar os ritmos entre si, ou seja, descobrir de entre os respectivos ritmos qual o que tem melhor sonoridade. Para esse efeito o aluno deve saber interpretar cada um dos gráficos de barras anteriormente representados.

3º passo: Para se chegar ao desenho do gráfico de barras explique que este se obtém a partir do vector-intervalo, que corresponde à frequência absoluta de cada uma das diagonais e arestas do polígono cíclico que representa o ritmo em estudo. Sabe-se que este polígono resulta da representação geométrica de cada um dos ritmos. Assim, o professor pede aos alunos que construam o respectivo polígono e que liguem por arestas cada um dos batimentos do ritmo. O total de arestas depende do número de batimentos assim como o respectivo tempo rítmico. No caso dos ritmos clave temos um total de 16 tempos no compasso para 5 batimentos. O professor explica que essa representação é dada por $R[k, n]$ em que n significa o tempo rítmico do compasso e k o número de batimentos. Com efeito, para os ritmos clave tem-se $R[5, 16]$.

4ºpasso: De seguida, passamos a contruir a tabela de frequências absolutas de cada um dos ritmos, ou seja, contar os comprimentos de arco que unem dois batimentos, tal como se realizou no estudo do vector-intervalo Son. Depois de contado cada um dos comprimentos das diagonais passa-se a definir o vector-intervalo e a sua representação.

5º passo: Quando todos os vectores-intervalo estiverem definidos passamos à elaboração do gráfico de barras e à sua respectiva interpretação, tal como se viu anteriormente.

6º passo: Ficar apenas pelo estudo das frequências absolutas não corresponde às expectativas do referido estudo pelo que se terá de aprofundar ainda mais a complementariedade rítmica com a Estatística do 10º Ano, nomeadamente, o estudo do desvio padrão entre os ritmos. O estudo das distribuições bidimensionais não é mencionado uma vez que se torna algo dúbia a sua aplicabilidade ao estudo rítmico.

O desvio padrão e a análise rítmica

A novidade no tema estatística do 10º ano, diz respeito ao cálculo do desvio-padrão de uma amostra. Assim, antes de passarmos à elaboração da tabela correspondente ao cálculo do desvio-padrão, relativamente à frequência absoluta, com que o comprimento de um arco de um determinado ritmo aparece ao longo da música, convém definir a fórmula com que se calcula a respectiva medida de dispersão.

O desvio-padrão é das medidas estatísticas de dispersão mais utilizadas.

É definido como a raiz quadrada da variância e representa-se por σ (sigma)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1} n_i(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

De seguida, poderá comparar o desvio-padrão relativamente ao intervalo espectral de dois ritmos, por exemplo o Son e o Soukous.

Relembrando a tabela correspondente às frequências absolutas, calcula-se o desvio-padrão, em cada um dos ritmos considerados, do seguinte modo:

Ritmo Son x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i.(x_i - \bar{x})^2$
1	0		
2	1		
3	2		
4	2		
5	0		
6	3		
7	2		
8	0		
	N=$\sum_{i=1}^{8} n_i$=10		

Ritmo Soukous x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i.(x_i - \bar{x})^2$
1	1		
2	0		
3	2		
4	1		
5	2		
6	2		
7	1		
8	1		
	N=$\sum_{i=1}^{8} n_i$=10		

Um dos grandes desafios do estudo da estatística através dos ritmos consiste na respectiva interpretação desta medida no contexto musical. Qual a importância que lhe poderá ser atribuída? O cálculo do desvio-padrão entre os ritmos poderá mostrar o grau de semelhança entre cada um dos ritmos. Assim quanto mais perto os valores do desvio-padrão se situarem entre si mais semelhantes serão os respectivos ritmos. Foi visto que o ritmo Son é o mais parecido entre todos, logo o valor deste terá de se situar numa zona intermédia em relação aos restantes. Um valor alto ou um valor baixo poderá ter influência na respectiva composição musical?

Serão a estas e outras perguntas que esta actividade permitirá esclarecer de modo a comparar com os resultados dos temas "Intervalos espectrais"e "distãncia Hamming".

A Estatística assume também uma outra perspectiva no sentido de explorar ritmos musicais e compará-los entre si. Os alunos tomam consciência das várias aplicações das diferentes áreas da Matemática através do estudo rítmico. Consegue-se assim uma visão mais alargada do conhecimento matemático complementado com a arte musical.

2.13 Conclusão final

Várias conclusões gerais e específicas podem ser tiradas a partir deste estudo. Primeiro considerem--se as conclusões gerais. Três medidas da complexidade dos ritmos foram comparadas em relação aos seis ritmos clave da música em África, Brasil e Cuba. A distância Hamming para os ritmos *clave* e a distância da permutação dirigida para os ritmos flamengos, foram definidas por se tratarem de boas medidas na comparação da semelhança dos ritmos. A representação em árvores filogenéticas, *splits tree*, parece ser útil para a visualização e para o conjunto da análise dos ritmos. Observando os vectores intervalo como multiconjuntos e as permutações geradas por estes multiconjuntos providenciam uma maneira fácil de gerar novos e interessantes ritmos a partir de um dado ritmo.

Voltando às conclusões específicas acerca dos ritmos *clave* podemos sintetizar os resultados do seguinte modo: Foi mostrado que é possível com três simples características classificar automaticamente os seis ritmos sem conhecimento da sua nota inicial. O padrão clave Son (o único palindrómico fraco neste conjunto) é o mais parecido com todos os outros. É, num certo sentido, o centro de todos os claves. Tem elementos de todos os outros ritmos clave e, talvez devido a isto, é acessível a uma grande audiência. É também um dos ritmos mais simples e mais ricos. Talvez seja esta uma das razões para a sua popularidade mundial. A Son, Rumba e Gahu pertencem à mesma família do intervalo-espectral. Apenas Bossa-Nova e Shiko são palindrómicas fortes, que indicam uma forte estrutura simétrica.

A fundamental agregação evidente a partir da construção algorítmica da splits tree é (1) Gahu e Bossa-Nova, (2) os restantes quatro ritmos. Rumba é o mais distinto dos seis ritmos claves. Do ponto de vista geométrico o seu polígono não contém um triângulo isósceles, nem ângulos rectos nem eixos de simetria. Gahu é o ritmo mais complicado de acordo com as medidas de complexidade consideradas aqui. Do ponto de vista matemático é o que difere mais dos restantes. Estes resultados juntam-se a um suporte matemático relativamente a uma análise matemática providenciada do ritmo Gahu de Locke [6].

O estudo das características matemáticas que envolvem os ritmos podem então ser englobados no actual currículo de matemática. A estreita relação entre a geometria rítmica e a geometria euclidiana, nomeadamente a circunferência, constitui um importante passo na diferenciação das aprendizagens e vai de encontro ao principal objectivo do currículo: mostrar a matemática numa complementariedade com outras áreas do conhecimento, no caso particular, o ritmo musical.

No que diz respeito aos ritmos flamengos o estudo aqui proposto permite comparar os padrões rítmicos da música flamenga sob um ponto de vista científico. Para cada uma das áreas de investigação permite-se obter conclusões acerca das teorias musicológicas existentes e, deste modo, fomentar debates conscientes sobre a génese e evolução dos estilos flamengos.

Deste modo, o que vem a seguir não são senão perguntas e sugestões, às quais, deverá responder o musicólogo. Observamos o facto de a Guajira aparecer praticamente no centro dos padrões rítmicos ternários o que indica a sua semelhança aos restantes estilos.

[6] David Locke. Drum Gahu: *An Introduction to African Rhythm*. White Cliffs Media, Gilsum, New Hampshire, 1998.

Poderia isto interpretar-se como aquela influência que tem exercido nos outros estilos no chamado padrão rítmico?

Tendo em conta a "recente" incorporação da Guajira na Splits Tree, gerado pela distância de permutação dirigida, pensa-se que o Fandango é o ritmo mais primitivo, dado que é outro o padrão rítmico que se encontra no centro.

A relação entre a Matemática e a Música entendida a partir do ponto de vista pedagógico, numa relação entre o estudo rítmico, sai desta forma mais valorizada. As ideias aqui propostas, que se poderão adaptar ao ensino da Matemática, através dos ritmos constituem um desafio ao professor pois permite mostrar aos alunos a grande aplicação da Matemática em situações reais.

Além disso o estudo da circunferência de acordo com o actual currículo não fomenta a descoberta e a interacção entre os diversos campos do saber. Visto que é um tema de enorme importância no desenvolvimento cognitivo do aluno, mostrar a intrínseca relação com um tema do agrado dos alunos, o ritmo musical, constitui uma alternativa à forma tradicional de leccionar.

A natureza das tarefas que os professores propôe aos alunos e o que estes fazem nas aulas de Matemática são questões centrais no ensino desta disciplina, principalmente numa perspectiva de *Matemática* para todos e numa sociedade que exige, cada vez mais, cidadãos competentes e literados. Este projecto de análise geométrica rítmica tem potencialidades no desenvlvimento de cidadãos com esse tipo de perfil e, por isso mesmo, merecia que tivesse uma grande visabilidade no ensino da Matemática. Na realização deste tipo de projectos os alunos abordam e desenvolvem vários aspectos fundamentais do currículo, de uma forma integrada e dando verdadeiro sentido às aprendizagens.

A autonomia e a responsabilidade no próprio processo de aprendizagem são aspectos muito visíveis, o pensamento crítico e o desenvolvimento de competências de nível superior, por exemplo, a capacidade de reflectirem sobre o desenvolvimento do processo e de alterarem caminhos, entre muitos aspectos.

Uma nova filosofia de desenvolvimento, assente no princípio materialista segundo o qual os custos de desaptadação de cada um recaem sobre todos os outros, é causa e consequência de novos conceitos de Educação e justifica um sistema educativo promotor do sucesso para todos, com características diversas do que temos conhecido, mas a partir do qual se definirão conceitos de cidadania e civilidade.

Bibliografia

[1] McGUIRE, Gary; *"Bells, Motels and Permutation Groups"*, 28 Maio 2003, Ireland.

[2] POLSTER, B.; *"The Mathematics of Juggling"*, Springer 2000.

[3] HARKLEROAD, L.; *The Math Behind Music"*, Cambridge U Press 2006.

[4] WHITE, Arthur; WILSON, Robin; *"The Hunting Group"*; Western Michigan University, The Open University.

[5] BUDDEN, F. J.; *"The Fascination of Groups"*, Cambridge U Press 1072.

[6] WHITE, Arthur T.; *"Fabian Stedman: The First Group Theorist?"*, Department of Combinatories and Optimization, University of Waterloo, Canada.

[7] RECIO, Tomás; *"La Columna de Matemática Computacional"*, 2005, La Gaceta de la RSME, Vol 8.2 pág. 489-509.

[8] TOUISSANT, Godfried; *"The Geometry of Musical Rhythm"*, McGill University.

[9] TOUISSANT, Godfried; *"A Mathematical Analysis of African, Brazilian and Cuban Clave Rhythms"*, 13 de Maio de 2002, McGill University Montréal, Québec, Canada.

[10] Revista Educação e Matemática, Edição 68, Maio/Junho 2002, Edição APM

[11] Revista Educação e Matemática, Edição 78, Maio/Junho 2004, Edição APM

[12] Revista Educação e Matemática, Edição 79, Setembro/Outubro 2002, Edição APM

[13] Revista Educação e Matemática, Edição 81, Janeiro/Fevereiro 2005, Edição APM

[14] Revista Educação e Matemática, Edição 84, Setembro/Outubro 2005, Edição APM

[15] COSTA, Belmiro; RODRIGUES, Maria; Espaço 10A-10ºAno, Edições ASA

[16] NEVES, Maria Augusta Ferreira; GUERREIRO, Luís; LEITE, António Neves; Matemática A, Estatística 10, Porto Editora

[17] PASSOS, Iolanda Centeno; CORREIA, Olga Flora; Matemática em acção - 9ºAno, Lisboa Editora