FCUP
Dep. Matemática Pura

Geometria das Equações Diferenciais

RESUMO das Aulas Teóricas e Práticas

□

João Nuno Tavares

Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências do Porto
4099-002 Porto, Portugal[1]

[1] E-mail adress: jntavar@fc.up.pt

ÍNDICE

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Equação de Pfaff $P\,dx + Q\,dy = 0$

Vamos começar por considerar uma equação diferencial ordinária (ODE), de primeira ordem:

$$\frac{dy}{dx} = y' = F(x, y) \tag{1.1.1}$$

Formalmente, esta equação pode ser escrita como uma "equação com diferenciais" na forma:

$$dy - F(x, y)\,dx = 0$$

Para generalizar esta situação, vamos considerar uma **equação de Pfaff**, do tipo seguinte:

$$\boxed{\boldsymbol{\theta} = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0} \tag{1.1.2}$$

onde o primeiro membro:

$$\boldsymbol{\theta} = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

é uma 1-forma diferencial definida num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ (P e Q são duas funções de classe C^∞ nesse aberto U). Suponhamos ainda que $\boldsymbol{\theta}$ nunca se anula em U. Então, em cada ponto $(x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, a equação de Pfaff (1.1.2), $\boldsymbol{\theta} = P\,dx + Q\,dy = 0$, define uma recta $\ell(x, y)$ no espaço tangente $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$, perpendicular ao vector $(P(x, y), Q(x, y))$. Desta forma fica definido um campo de linhas:

$$\{\ell(x, y) : \quad (x, y) \in U\}$$

em $U \subseteq \mathbb{R}^2$ (ver a figura 1.1). Por exemplo, no caso da ODE (1.1.1), a equação de Pfaff correspondente é $\boldsymbol{\theta} = -F(x, y)\,dx + dy = 0$, que define o campo de linhas $\{\ell(x, y)\}$, onde, em cada ponto (x, y), a linha correspondente é a recta perpendicular ao vector $(-F(x, y), 1)$, no espaço tangente $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$. Note que, neste caso, essas linhas nunca são verticais (paralelas ao eixo dos yy).

Figure 1.1: Campo de linhas definido por $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$

Uma curva regular $\mathcal{C}$, diz-se uma **curva integral** da equação $\boldsymbol{\theta} = P\,dx + Q\,dy = 0$, se existir uma parametrização, $\alpha : I \to U$, de $\mathcal{C}$, tal que $\alpha^*\boldsymbol{\theta} = 0$, isto é, $\alpha'(\tau) \in \ell(\alpha(\tau))$, $\forall \tau \in I$, ou ainda:

$$\boldsymbol{\theta}_{\alpha(\tau)}(\alpha'(\tau)) = P(x(\tau), y(\tau))\,x'(\tau) + Q(x(\tau), y(\tau))\,y'(\tau) = 0 \qquad \forall \tau \in I \tag{1.1.3}$$

onde pusemos $\alpha(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$, $\tau \in I \subseteq \mathbb{R}$. Note que, se $\beta = \alpha \circ \varphi$ é uma reparametrização de $\mathcal{C}$, onde $\varphi : J \to I$ é um difeomorfismo, então $\beta^*\boldsymbol{\theta} = 0$ se e só se $\alpha^*\boldsymbol{\theta} = 0$, uma vez que $(\alpha \circ \varphi)^*\boldsymbol{\theta} = \varphi^*\alpha^*\boldsymbol{\theta} = 0$. Portanto, ser curva integral é uma característica da curva $\mathcal{C}$, e não da forma como a parametrizamos.

- <u>**Proposição**</u> **1.1.1** ... *Calcular uma solução da equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = y' = F(x, y)$, *é equivalente a calcular uma curva integral da equação* $\boldsymbol{\theta} = dy - F(x, y)\,dx = 0$.

- <u>Dem.</u> ... Seja $y = y(x)$ uma solução da equação diferencial $y' = F(x, y)$. Então o gráfico dessa solução é a curva parametrizada regular $\tau \mapsto \alpha(\tau) = (\tau, y(\tau))$, para a qual se tem:

$$\boldsymbol{\theta}(\alpha') = y'(\tau) - F(\tau, y(\tau)) = 0$$

Recìprocamente, seja $\alpha : \tau \mapsto \alpha(\tau) = (u(\tau), v(\tau))$, uma curva parametrizada regular, tal que:

$$\boldsymbol{\theta}(\alpha') = v'(\tau) - F(u(\tau), v(\tau))u'(\tau) = 0 \tag{1.1.4}$$

Se $u'(\tau) = 0$, para algum τ, então também $v'(\tau) = 0$, o que contraria o facto de α ser regular. Portanto $u'(\tau) \neq 0$, $\forall \tau$, e u é um difeomorfismo tal que:

$$\frac{v'(\tau)}{u'(\tau)} = F(u(\tau), v(\tau))$$

Finalmente, introduzindo uma nova variável $x = u(\tau) \Rightarrow \tau = u^{-1}(x)$, e pondo $y(x) = v[u^{-1}(x)]$, obtemos pela regra da cadeia que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} = \frac{\frac{dv}{d\tau}}{\frac{dx}{d\tau}} = \frac{v'(\tau)}{u'(\tau)} = F(x, y(x))$$

■.

Uma 1-forma diferencial $\boldsymbol{\theta} = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, de classe C^∞ num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, diz-se **exacta**, se existir uma função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, tal que $df = \boldsymbol{\theta}$, isto é:

$$\begin{aligned} df &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \\ &= P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

ou ainda:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y).} \tag{1.1.6}$$

Uma 1-forma $\boldsymbol{\theta} = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, de classe C^∞ no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, diz-se **fechada** se $d\boldsymbol{\theta} = 0$, isto é:

$$\boxed{P_y - Q_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0} \tag{1.1.7}$$

Toda a 1-forma exacta é fechada, uma vez que $d^2 = 0$. No entanto o recíproco é falso, como o prova a 1-forma $\boldsymbol{\theta} = \frac{-y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$, em $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$.

- **Proposição 1.1.2** ... *Seja* $\boldsymbol{\theta} = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *uma 1-forma diferencial, de classe* C^∞ *num aberto* $U \subseteq \mathrm{IR}^2$*, e* $f : U \to \mathrm{IR}$ *uma função de classe* C^∞ *tal que* $df = \boldsymbol{\theta}$*. Suponhamos que* $c \in \mathrm{IR}$ *é valor regular de* f (isto é, $\nabla f(x,y) \neq \mathbf{0}$, $\forall (x,y) \in f^{-1}(c)$).

  Então, $f^{-1}(c)$ *é localmente uma reunião finita de curvas integrais da equação* $\boldsymbol{\theta} = 0$*. Além disso, qualquer curva integral da equação* $\boldsymbol{\theta} = 0$*, está contida num conjunto de nível de* f*.*

  – Dem. ... Se $\alpha : I \subseteq \mathrm{IR} \to U$ é uma parametrização regular de uma curva $\mathcal{C}$, contida em $f^{-1}(c)$, então $f \circ \alpha \equiv c$, em I, e portanto (uma vez que $df = \boldsymbol{\theta}$):

  $$\begin{aligned} 0 &= \nabla f\,(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\,x'(\tau) + \frac{\partial f}{\partial y}\,y'(\tau) \\ &= P(x(\tau), y(\tau))\,x'(\tau) + Q(x(\tau), y(\tau))\,y'(\tau) \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

  o que significa que $\mathcal{C}$ é uma curva integral de $\boldsymbol{\theta} = 0$.

  Recìprocamente, se $\alpha : I \subseteq \mathrm{IR} \to U$ é uma parametrização regular de uma curva integral $\mathcal{C}$, de $\boldsymbol{\theta} = 0$, então (1.1.8) verifica-se, e portanto $f \circ \alpha$ é constante em I,

  ■.

Uma função $f : U \subseteq \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$, de classe C^∞, diz-se um **integral da equação** $\boldsymbol{\theta} = 0$, se $df = \boldsymbol{\theta}$. Quando f é um integral de $\boldsymbol{\theta} = 0$, os segmentos regulares das curvas de nível de f, isto é, as curvas às quais se retira os pontos do conjunto $K = \{(x,y) \in U : \nabla f(x,y) = 0\}$, representam todas as soluções regulares de $\boldsymbol{\theta} = 0$.

- **Proposição 1.1.3** **Lema de Poincaré** ... *Seja* $R \subseteq \mathrm{IR}^2$ *um rectângulo aberto e* $\boldsymbol{\theta} = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *uma 1-forma de classe* C^∞ *em* R*. Então se* $\boldsymbol{\theta}$ *é fechada,* $\boldsymbol{\theta}$ *é exacta em* R*.*

  – Dem. ... Suponhamos que $f : R \to \mathrm{IR}$ é uma função de classe C^∞, que satisfaz $df = \boldsymbol{\theta}$.

  Temos então que:

  $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

  Integrando a primeira equação, de x_o a x, com y fixo, obtemos:

  $$f(x,y) = \Big(\int_{x_o}^{x} P(t,y)\,dt \Big) + h(y) \tag{1.1.9}$$

  onde $h(y)$ é uma "constante de integração", de classe C^1 como função de y. Derivando (1.1.9) em ordem a y, obtemos:

  $$Q(x,y) = f_y(x,y) = \Big(\int_{x_o}^{x} P_y(t,y)\,dt \Big) + h'(y)$$

  e portanto:

  $$h'(y) = Q(x,y) - \int_{x_o}^{x} P_y(t,y)\,dt \tag{1.1.10}$$

  Uma vez que $\boldsymbol{\theta}$ é fechada, i.e., $Q_x = P_y$, obtemos:

  $$\frac{\partial}{\partial x}\Big[Q(x,y) - \int_{x_o}^{x} P_y(t,y)\,dt \Big] = Q_x(x,y) - P_y(x,y) = 0$$

o que significa que o membro direito de (1.1.10) é uma função apenas de y, e portanto h pode ser determinada por integração:

$$h(y) = \int_{y_o}^{y} \Big[Q(x,s) - \int_{x_o}^{x} P_y(t,s)\,dt \Big]\, ds$$

Finalmente obtemos:

$$\boxed{f(x,y) = \textstyle\int_{x_o}^{x} P(t,y)\,dt \;+\; \int_{y_o}^{y} \Big[Q(x,s) - \int_{x_o}^{x} P_y(t,s)\,dt \Big]\, ds} \tag{1.1.11}$$

para um qualquer ponto arbitrário $(x_o, y_o) \in R$.
Concluindo, se $df = \boldsymbol{\theta}$, então f tem necessàriamente a forma (1.1.11). Reciprocamente, definindo $f : R \to \mathbb{R}$, através de (1.1.11), para um qualquer ponto arbitrário $(x_o, y_o) \in R$, é imediato verificar que $df = \boldsymbol{\theta}$,

$\blacksquare$.

Atendendo à proposição 1.1.2, o problema da integração da equação $\boldsymbol{\theta} = 0$, pode ser considerado resolvido se fôr possível determinar um integral f para a forma $\boldsymbol{\theta}$, o que, pelo Lema de Poincaré, é sempre possível localmente, desde que a forma $\boldsymbol{\theta}$ seja fechada. Neste caso, se se pretende uma solução que contenha um dado ponto (x_o, y_o), a **solução geral** (local) é obtida na seguinte forma implícita:

$$f(x,y) = c$$

onde a "constante de integração" c, é determinada pela condição de que $f(x_o, y_o) = c$.

- **Exemplo 1.1.1** ... Calcular a solução geral da equação:

$$\boldsymbol{\theta} = \underbrace{(y\cos x + 2xe^y)}_{P(x,y)}\, dx + \underbrace{(\sin x + x^2 e^y + 2)}_{Q(x,y)}\, dy = 0$$

Neste caso $R = \mathbb{R}^2$ e como:

$$P_y = \cos x + 2xe^y = Q_x$$

$\boldsymbol{\theta}$ é fechada, logo exacta, pela proposição anterior. Se f satisfaz $df = \boldsymbol{\theta}$, então:

$$f_x = P = y\cos x + 2xe^y \qquad e \qquad f_y = Q = \sin x + x^2 e^y + 2 \tag{1.1.12}$$

Integrando a primeira equação em ordem a x, obtemos:

$$f(x,y) = y\sin x + x^2 e^y + h(y)$$

Derivando relativamente a y, e usando a segunda equação em (1.1.12), vem que:

$$\sin x + x^2 e^y + h'(y) = f_y = \sin x + x^2 e^y + 2$$

donde se deduz que $h'(y) = 2$, isto é, $h(y) = 2y$. Portanto:

$$f(x,y) = y\sin x + x^2 e^y + 2y$$

e a solução geral de $\boldsymbol{\theta} = 0$ é:

$$f(x,y) = y\sin x + x^2 e^y + 2y = c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$\blacksquare$.

Se $\boldsymbol{\theta}$ é uma 1-forma no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, e se $\mu : U \to \mathbb{R}$ é uma função que **nunca se anula** em U, então é fácil ver que as equações $\boldsymbol{\theta} = 0$ e $\mu\,\boldsymbol{\theta} = 0$ têm as mesmas curvas integrais. Quando $\mu\boldsymbol{\theta}$ é exacta, diz-se que μ é um **factor integrante** para $\boldsymbol{\theta}$.

Seja $\boldsymbol{\theta} = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ uma 1-forma de classe C^∞ no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, e $\mu : U \to \mathbb{R}$ um factor integrante para $\boldsymbol{\theta}$. Por definição $\mu\boldsymbol{\theta}$ é exacta, logo fechada, e portanto $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$, isto é:

$$\boxed{P\,\mu_y - Q\,\mu_x + (P_y - Q_x)\,\mu = 0} \tag{1.1.13}$$

que é uma PDE quasi-linear de primeira ordem para a função $\mu = \mu(x,y)$, como veremos em breve. Aplicando o Lema de Poincaré, quando U é um rectângulo em $\mathbb{R}^2$, podemos afirmar que se $\mu : U \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^∞, que nunca se anula em U, e que satisfaz a equação (1.1.13), então μ é um factor integrante para $\boldsymbol{\theta}$. Na prática, é muitas vezes vezes possível encontrar soluções para a equação (1.1.13), da forma $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu(xy)$, etc...

- **Exemplo 1.1.2** ... Encontrar a solução geral da equação:

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)\frac{dy}{dx} = 0$$

O problema é equivalente a calcular a solução geral da equação:

$$\boldsymbol{\theta} = \underbrace{(\frac{y^2}{2} + 2ye^x)}_{P(x,y)}\,dx + \underbrace{(y + e^x)}_{Q(x,y)}\,dy = 0$$

$\boldsymbol{\theta}$ não é exacta, já que:

$$P_y = y + 2e^x \neq e^x = Q_x$$

Tentemos encontrar um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$. Neste caso a equação (1.1.13), reduz-se à equação diferencial ordinária:

$$-Q\mu' + (P_y - Q_x)\mu = 0$$

onde $\mu' = d\mu/dx$, isto é:

$$\mu' = \mu$$

em que uma das soluções é:

$$\mu(x) = e^x$$

Portanto $\mu(x) = e^x$ é um factor integrante de $\boldsymbol{\theta}$, o que significa que $e^x\boldsymbol{\theta}$ é exacta, isto é, existe uma função f, tal que $df = e^x\boldsymbol{\theta}$. Portanto:

$$f_x = e^x\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right) \quad e \quad f_y = e^x(y + e^x)$$

Integrando a primeira equação em ordem a x, com y fixo, vem que:

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + g(y)$$

Derivando esta última, em ordem a y e usando a segunda equação, obtemos:

$$f_y = ye^x + e^{2x} + g'(y) = e^x(y + e^x)$$

donde se deduz que $g'(y) = 0$, i.e., $g(y) \equiv c$ (constante). Portanto:

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} = c$$

e a solução geral pretendida é obtida resolvendo esta equação em ordem a y:

$$y(x) = -e^x \pm [e^{2x} + 2Ce{-}x]^{1/2}$$

- **Exemplo 1.1.3** ... Consideremos a seguinte **equação linear de primeira ordem não homogénea**:

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = a(x)\,y + b(x)} \tag{1.1.14}$$

A integração desta equação é equivalente à integração da equação:

$$\boldsymbol{\theta} = [a(x)\,y + b(x)]\,dx - dy = 0 \tag{1.1.15}$$

Aqui $P(x,y) = a(x)\,y + b(x)$ e $Q(x,y) = -1$. Em geral $\boldsymbol{\theta}$ não é fechada, já que $P_y = a(x) \neq 0 = Q_y$, em geral. Vamos tentar encontrar um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$. Neste caso a equação (1.1.13), reduz-se à equação diferencial ordinária:

$$\mu' = -a\mu$$

cuja solução é:

$$\mu(x) = e^{-\int_{x_o}^{x} a(\tau)\,d\tau} \qquad x_o \in I$$

Temos então que $\mu\boldsymbol{\theta}$ é exacta, e seguindo o método proposto anteriormente, determinamos a solução geral de (1.1.14), na forma $f(x,y) = c$, onde:

$$f(x,y) = \mu(x)\,y - \int_{x_0}^{x} \mu(\tau)b(\tau)d\tau \qquad x \in I$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ é dado, resolvendo a equação implícita:

$$f(x,y) = f(x_o, y_o) = \mu(x_o)y_o$$

em ordem a y, obtemos a função:

$$y(x) = \frac{\mu(x_o)}{\mu(x)}\,y_o + \int_{x_o}^{x} \frac{\mu(\tau)}{\mu(x)}\,b(\tau)d\tau$$

De (1.1.15), concluímos então que:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int_{x_o}^{x} a(\tau)\,d\tau}\,y_o + \int_{x_o}^{x} e^{\int_{s}^{x} a(\tau)\,d\tau}\,b(s)ds \\ &= U(x;x_o)\,y_o + \int_{x_o}^{x} U(x;s)\,b(s)ds, \qquad x \in I \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

é solução do $(PVI)_{(x_o,y_o)}$, definido por:

$$\begin{cases} y' = a(x)\,y + b(x) \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

Em (1.1.16) pusemos $U(x;y) \overset{\text{def}}{=} e^{\int_{y}^{x} a(\tau)\,d\tau}$, para o chamado propagador da ODE dada. Se $\widehat{y} : I \to \mathbb{R}$ é uma outra solução do mesmo PVI, então $u = \widehat{y} - y$ é solução da equação linear homogénea:

$$\begin{cases} u' = a(x)\,u \\ u(x_o) = 0 \end{cases}$$

e portanto $u \equiv 0$, isto é $\widehat{y} = y$. Podemos assim enunciar o seguinte teorema:

- **Proposição 1.1.4** ... *Seja* $I \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$, *e* $a, b : I \to \mathbb{R}$ *duas funções* C^∞ *em* I. *Então,* $\forall (x_o, y_o) \in yI \times \mathbb{R}$, *o* $(PVI)_{(x_o,y_o)}$, *definido por:*

$$\begin{cases} y' = a(x)\,y + b(x) \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

correspondente à **equação linear de primeira ordem não homogénea** $y' = a(x)\,y + b(x)$, *admite uma única solução global dada por:*

$$\boxed{y(x) = U(x; x_o)\,y_o + \int_{x_o}^{x} U(x; s) b(s) ds \qquad x \in I} \tag{1.1.17}$$

onde U *é o chamado* **propagador** *ou* **operador de evolução**, *definido por:*

$$\boxed{U(x; y) = e^{\int_y^x a(\tau) d\tau} \qquad \forall y, x \in I} \tag{1.1.18}$$

■.

O "truque" usual para resolver o $(PVI)_{(x_o,y_o)}$, definido por:

$$\begin{cases} y' = a(x)\,y + b(x) \\ y(x_o) = y_o \end{cases}$$

é o chamado **método da variação das constantes**. Neste método, começamos por determinar uma solução arbitrária da equação homogénea:

$$y' = a(x)\,y \tag{1.1.19}$$

como por exemplo:

$$u(x) = e^{\int_{x_o}^{x} a(\tau) d\tau} \tag{1.1.20}$$

Em seguida, tentamos encontrar uma solução da equação não homogénea:

$$y' = a(x)\,y + b(x) \tag{1.1.21}$$

que seja da forma:

$$y(x) = c(x) u(x) \tag{1.1.22}$$

para alguma função desconhecida c (a "constante variável"). Substituindo (1.1.22) em (1.1.21), obtemos:

$$c'u + u'c = acu + b$$

e portanto, usando (1.1.19):

$$c' = \frac{b}{u}$$

Integrando esta última equação e usando (1.1.20) bem como a condição inicial, obtemos finalmente a fórmula (1.1.17).

- **Exemplo 1.1.4** ... Calcular a solução do $(PVI)_{(x_o,y_o)}$, definido por:

$$\begin{cases} y' = -2x\,y - x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Comecemos por determinar uma solução arbitrária da equação homogénea:

$$y' = -2x\,y$$

como por exemplo:

$$u(x) = e^{\int_1^x -2\tau d\tau} = e^{1-x^2}$$

Em seguida, tentamos encontrar uma solução da equação não homogénea, que seja da forma:

$$y(x) = c(x)u(x)$$

para alguma função desconhecida $c = c(x)$. Como antes, obtemos:

$$c' = \frac{b}{u} = \frac{-x}{e^{1-x^2}} = -xe^{x^2-1}$$

Integrando esta última equação, vem que:

$$c(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2-1} + C$$

Usando agora $y(x) = c(x)u(x)$ e a condição inicial, obtemos finalmente:

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{1-x^2}$$

- **Exemplo 1.1.5** ... Calcular a solução do $(PVI)_{(x_o,y_o)}$, definido por:

$$\begin{cases} y' = -y + \frac{1}{1+x^2} \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

Comecemos por determinar uma solução arbitrária da equação homogénea:

$$y' = -y$$

como por exemplo:

$$u(x) = e^{\int_2^x -d\tau} = e^{2-x}$$

Em seguida, tentamos encontrar uma solução da equação não homogénea, que seja da forma:

$$y(x) = c(x)u(x)$$

para alguma função desconhecida $c = c(x)$. Como antes, obtemos:

$$c' = \frac{b}{u} = \frac{e^{x-2}}{1+x^2}$$

Integrando esta última equação, vem que:

$$c(x) = \int_2^x \frac{e^{\tau-2}}{1+\tau^2} d\tau \; + C$$

Usando agora $y(x) = c(x)u(x)$ e a condição inicial, obtemos finalmente:

$$y(x) = 3e^{2-x} + e^{2-x} \int_2^x \frac{e^{\tau-2}}{1+\tau^2} d\tau$$

$\blacksquare$.

1.2 PDE de primeira ordem linear $P\,u_x + Q\,u_y = R\,u + S$.

Consideremos a PDE linear de primeira ordem:

$$\boxed{P(x,y)\,u_x + Q(x,y)\,u_y = R(x,y)\,u + S(x,y)} \tag{1.2.1}$$

onde P, Q, R, S são funções de classe C^∞, num aberto de $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

O campo de vectores:

$$\boxed{\mathbf{Z}(x,y) = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}} \tag{1.2.2}$$

diz-se o **campo característico** da equação (1.2.1), e as respectivas curvas integrais dizem-se as **curvas características** dessa mesma equação. Portanto, uma curva $\boldsymbol{\alpha} : \tau \mapsto (x(\tau), y(\tau))$, é uma curva característica da equação (1.2.1), sse:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(\tau) & = & P(x(\tau), y(\tau)) \\ y'(\tau) & = & Q(x(\tau), y(\tau)) \end{array} \right. \tag{1.2.3}$$

Consideremos agora uma solução $u = u(x,y)$, da equação (1.2.1), e calculemos a derivada de u, ao longo de uma curva característica $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \frac{du(\boldsymbol{\alpha}(\tau))}{d\tau} &= \frac{d}{d\tau}\,u(x(\tau), y(\tau)) \\ &= u_x(x(\tau), y(\tau))\,x'(\tau) + u_y(x(\tau), y(\tau))\,y'(\tau) \\ &= P(x(\tau), y(\tau))\,u_x(x(\tau), y(\tau)) + Q(x(\tau), y(\tau))\,u_y(x(\tau), y(\tau)), \qquad \text{por (1.2.3)} \\ &= R(x(\tau), y(\tau))\,u(\boldsymbol{\alpha}(\tau)) + S(x(\tau), y(\tau)), \qquad \text{uma vez que } u \text{ é solução de (1.2.1)} \\ &= R(\boldsymbol{\alpha}(\tau))\,u(\boldsymbol{\alpha}(\tau)) + S(\boldsymbol{\alpha}(\tau)) \end{aligned}$$

Concluímos portanto que, dada uma curva característica fixa $\tau \mapsto \boldsymbol{\alpha}(\tau)$, e uma solução $u = u(x,y)$, da equação (1.2.1), a função composta $u \circ \boldsymbol{\alpha}$, deverá satisfazer a ODE de primeira ordem:

$$\frac{du(\boldsymbol{\alpha}(\tau))}{d\tau} = R(\boldsymbol{\alpha}(\tau))\,u(\boldsymbol{\alpha}(\tau)) + S(\boldsymbol{\alpha}(\tau)) \tag{1.2.4}$$

Por consequência, $u \circ \boldsymbol{\alpha}$ fica unìvocamente determinada, uma vez especificado o valor inicial $u(\boldsymbol{\alpha}(\tau_o))$. Por outras palavras, uma vez especificado o valor $u(x_o, y_o)$, para uma solução u da equação (1.2.1), essa solução fica completamente determinada ao longo da curva característica $\boldsymbol{\alpha}$, que passa em (x_o, y_o) (ver a figura 1.2).

Figure 1.2: Curva característica.

Em particular, se a equação (1.2.1) fôr homogénea ($R = S = 0$):

$$\boxed{P\,u_x + Q\,u_y = 0} \tag{1.2.5}$$

então $\frac{du(\boldsymbol{\alpha}(\tau))}{d\tau} = 0$, e a solução u será **constante** e igual a $u(x_o, y_o)$, ao longo da curva característica $\boldsymbol{\alpha}$, que passa em (x_o, y_o). Por outras palavras, u é um **integral primeiro** do campo característico (1.2.2) da equação (1.2.5).

Suponhamos agora que $\boldsymbol{\gamma}$ é uma curva que intersecta uma família de curvas características (ver a figura 1.2). Se especificarmos de forma arbitrária os valores de u, em cada ponto de $\boldsymbol{\gamma}$, então a solução ficará determinada pelo menos numa certa vizinhança de $\boldsymbol{\gamma}$, resolvendo a ODE (1.2.4), para cada uma das curvas características que passam em $\boldsymbol{\gamma}$. Há no entanto certas condições naturais a impôr. De facto:

- $\boldsymbol{\gamma}$ não poderá conter qualquer curva característica. Caso contrário, não poderíamos especificar de forma arbitrária os valores de u ao longo de $\boldsymbol{\gamma}$.
- $\boldsymbol{\gamma}$ não pode auto intersectar-se, pelo mesmo motivo anterior.
- $\boldsymbol{\gamma}$ não poderá sequer ser tangente a qualquer curva característica. Caso contrário, se $\boldsymbol{\gamma}$ fôsse tangente a uma curva característica $\boldsymbol{\alpha}$, num certo ponto $p_o = \boldsymbol{\alpha}(\tau_o)$, a derivada direccional $D_{\boldsymbol{\alpha}'(\tau)}u(p_o) = D_{\mathbf{Z}(p_o)}u(p_o)$, seria determinada pela equação (1.2.4), de uma forma que estaria eventualmente em conflito com os valores de u, especificados de forma arbitrária ao longo de $\boldsymbol{\gamma}$.

Concluindo, devemos exigir que o campo característico (1.2.2), seja **transversal** à curva $\boldsymbol{\gamma}$. Podemos então enunciar o teorema seguinte:

- **<u>Teorema</u> 1.2.1** ... *Sejam P, Q, R, S funções de classe C^∞, num aberto de $U \subseteq \mathbb{R}^2$, e $\boldsymbol{\gamma} : [a, b] \to U$ uma curva suave, regular e injectiva, tal que, em cada ponto $\boldsymbol{\gamma}(s)$, os vectores $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\gamma}(s)) = P(\boldsymbol{\gamma}(s))\, \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\boldsymbol{\gamma}(s)} + Q(\boldsymbol{\gamma}(s))\, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\boldsymbol{\gamma}(s)}$ e $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ são linearmente independentes. Suponhamos ainda que $u_o : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função suave [1].*

  Então existe uma função suave $u = u(x, y)$, definida numa vizinhança V de $\boldsymbol{\gamma}([a, b])$, tal que u é solução da PDE (1.2.1):

  $$P\,u_x + Q\,u_y = R\,u + S$$

  em V, que satisfaz a condição inicial:

  $$u(\boldsymbol{\gamma}(s)) = u_o(s), \qquad \forall s \in [a, b]$$

  Além disso, quaisquer duas funções com as propriedades referidas, coincidem numa vizinhança de $\boldsymbol{\gamma}([a, b])$.

  ■.

- **<u>Exemplo</u> 1.2.1** ... Consideremos a equação homogénea:

  $$a\,u_x + u_t = 0$$

  (Relativamente às notações anteriores, pusemos $y = t$, e $P \equiv a$ (constante), $Q = 1, R = S = 0$). Vamos calcular a solução u, que satisfaz a condição inicial:

  $$u(x, 0) = f(x)$$

[1] esta condição pode ser relaxada...

A curva $\boldsymbol{\gamma}$ é, neste caso o eixo $t = 0$, que parametrizamos por:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (s, 0)$$

O campo característico (1.2.2), é:

$$\mathbf{Z}(x,t) = a\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

que é sempre transversal a $\boldsymbol{\gamma}$. As curvas características $\boldsymbol{\alpha}(\tau) = (x(\tau), t(\tau))$ são as soluções de:

$$\begin{cases} x'(\tau) &= a \\ t'(\tau) &= 1 \end{cases}$$

A curva característica que, no instante inicial $\tau = 0$, passa em $\boldsymbol{\gamma}(s) = (s, 0)$, é portanto:

$$\boldsymbol{\alpha}(\tau; s) = (x(\tau; s) = a\tau + s, t(\tau; s) = \tau)$$

Note que, numa vizinhança da curva γ (que é o eixo dos xx, neste caso), s e τ podem ser adoptados como coordenadas locais.

Como a equação é homogénea, o valor de u vai ser constante ao longo de $\boldsymbol{\alpha}$:

$$(u \circ \boldsymbol{\alpha})(\tau) = u(at + s, t) \equiv u(\boldsymbol{\alpha}(0)) = u(s, 0) = f(s)$$

Regressando às coordenadas iniciais x e y (pondo $x = at + s \Rightarrow s = x - at$), obtemos:

$$u(x,t) = f(x - at)$$

Se interpretamos a função inicial $u(x, 0) = f(x)$, como sendo uma onda no instante $t = 0$, a solução $u(x,t) = f(x - at)$, mostra que um ponto x, para o qual $x - at \equiv$ constante, ocupa sempre a mesma posição sobre a onda. Se $a > 0$, esse ponto x move-se para a direita com velocidade $dx/dt = a$. Como x é um ponto típico da onda, isto significa que toda a onda inicial $f(x)$ se move para a direita, sem se deformar, com velocidade $dx/dt = a > 0$, (se $a < 0$, a onda mover-se-á para a esquerda).

Como u se mantem constante ao longo de cada curva característica $x - at \equiv s$, os dados iniciais são transmitidos ao longo dessas características, com velocidade a.

- **Exemplo 1.2.2** ... Resolver o P.V.I.:

$$y\,u_x + u_y = x, \qquad\qquad u(x, 0) = x^2$$

Aqui $P = y, Q = 1, R = 0$ e $S = x$. A curva $\boldsymbol{\gamma}$ é, neste caso o eixo $y = 0$, que parametrizamos por:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (s, 0)$$

O campo característico é:

$$\mathbf{Z}(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

que é sempre transversal a $\boldsymbol{\gamma}$, e as curvas características $\boldsymbol{\alpha}(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ são as soluções de:

$$\begin{cases} x'(\tau) &= y(\tau) \\ y'(\tau) &= 1 \end{cases}$$

A curva característica que, no instante inicial $\tau = 0$, passa em $\boldsymbol{\gamma}(s) = (s, 0)$, é portanto:

$$\boldsymbol{\alpha}(\tau; s) = \left(x(\tau; s) = \frac{\tau^2}{2} + s, y(\tau; s) = \tau \right)$$

Para calcular a solução u, ao longo de uma curva característica $\boldsymbol{\alpha}$, de tal forma que u satisfaça a condição inicial $u(s, 0) = s^2$, devemos resolver a ODE (1.2.4), na incógnita $(u \circ \alpha)(\tau)$:

$$\frac{du(\boldsymbol{\alpha}(\tau))}{d\tau} = R(\boldsymbol{\alpha}(\tau))\, u(\boldsymbol{\alpha}(\tau)) + S(\boldsymbol{\alpha}(\tau))$$

que neste caso tem a forma seguinte:

$$\frac{du(\boldsymbol{\alpha}(\tau))}{d\tau} = S(\boldsymbol{\alpha}(\tau)) = \frac{\tau^2}{2} + s$$

Portanto:

$$(u \circ \boldsymbol{\alpha})(\tau) = \frac{\tau^3}{6} + s\tau + c$$

onde a constante c fica determinada pela condição $u(\boldsymbol{\alpha}(0)) = u(s, 0) = s^2$, isto é, $c = s^2$. A solução é pois:

$$(u \circ \boldsymbol{\alpha})(\tau) = u\left(\frac{\tau^2}{2} + s, \tau\right) = \frac{\tau^3}{6} + s\tau + s^2$$

Regressando às coordenadas iniciais x e y (pondo $x = \frac{\tau^2}{2} + s$ e $y = \tau$, o que implica que $s = x - \frac{y^2}{2}$ e $\tau = y$), virá por substituição:

$$u(x, y) = \frac{y^3}{6} + y\left(x - \frac{y^2}{2}\right) + \left(x - \frac{y^2}{2}\right)^2$$

que é a solução procurada.

1.3 PDE homogénea de primeira ordem $\mathbf{X}u = 0$.

Consideremos a PDE homogénea linear de primeira ordem:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}} u = \mathbf{X}u = 0} \tag{1.3.1}$$

onde $\mathbf{X}$ é um campo de vectores que, em coordenadas $x^1, \cdots, x^n$, se exprime na forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_{i=1}^{n} X^i(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} \qquad \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

e $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma função suave. A equação (1.3.1) escreve-se então na forma:

$$\boxed{\textstyle\sum_{i=1}^{n} X^i(x^1, \cdots, x^n) \frac{\partial u}{\partial x^i} = X^1 \frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + X^n \frac{\partial u}{\partial x^n} \;=\; 0} \tag{1.3.2}$$

onde $X^i = X^i(x^1, \cdots, x^n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Seja u uma solução da equação (1.3.2), e consideremos uma qualquer hipersuperfície de nível $\mathcal{N}_c = \{u \equiv c\}$, de u. Como $\nabla u(\mathbf{x})$ é perpendicular a $\mathcal{N}_c$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}_c$, a equação (1.3.2) diz-nos que

$\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{N}_c$, o que significa que o campo $\mathbf{X}$ é tangente a todas as hipersuperfície de nível $\mathcal{N}_c = \{u \equiv c\}$, de u.

Por outras palavras, uma solução da equação (1.3.2) é uma função $u = u(x^1, \cdots, x^n) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que é constante ao longo das órbitas do campo de vectores $\mathbf{X}$, isto é, u é um **integral primeiro** da equação diferencial vectorial:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n \tag{1.3.3}$$

Esta última equação diferencial, que nas coordenadas x^i, corresponde ao sistema de ODE's:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^1, \cdots, x^n), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.3.4}$$

diz-se o **sistema característico** associado à PDE (1.3.2). É usual escrever o sistema (1.3.4), na forma simétrica seguinte:

$$\frac{dx^1}{X^1(x^1, \cdots, x^n)} = \cdots = \frac{dx^n}{X^n(x^1, \cdots, x^n)} \tag{1.3.5}$$

No entanto, enquanto que a equação vectorial (1.3.3) (ou equivalentemente, o sistema (1.3.4)) fornece uma curva integral parametrizada α do campo $\mathbf{X}$: $\alpha'(\tau) = \mathbf{X}(\alpha(\tau))$, o sistema (1.3.4) fornece uma curva integral da distribuição unidimensional gerada pelo campo $\mathbf{X}$. Esta última curva integral é, em geral, calculada em forma implícita.

Vamos então tentar encontrar as curvas solução do sistema (1.3.4), como intersecção de $(n-1)$ hipersuperfícies em $\mathbb{R}^n$, dadas pelas equações funcionalmente independentes:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u^1(x^1, \cdots, x^n) & = & c_1 \\ & \vdots & \\ u^{n-1}(x^1, \cdots, x^n) & = & c_{n-1} \end{array} \right. \tag{1.3.6}$$

onde ∇u^j são linearmente independentes, e os c_j são constantes ($j = 1, \cdots, n-1$).

Suponhamos que $\mathcal{C}$ é uma curva dada implìcitamente pelas equações (1.3.6). Para que $\mathcal{C}$ seja uma órbita do campo de vectores $\mathbf{X}$, este terá de ser tangente à curva $\mathcal{C}$, em cada um dos seus pontos, e, portanto, $\mathbf{X}$ terá de ser ortogonal a todos os vectores ∇u^j, para $j = 1, \cdots, n-1$. Concluindo, para que as equações (1.3.6) representem órbitas do campo de vectores $\mathbf{X}$, as funções u^j, $j = 1, \cdots, n-1$, devem satisfazer as PDE's seguintes:

$$\mathbf{X} \cdot \nabla u^j = 0, \qquad j = 1, \cdots, n-1$$

isto é:

$$X^1 \frac{\partial u^j}{\partial x^1} + \cdots + X^n \frac{\partial u^j}{\partial x^n} = 0, \qquad j = 1, \cdots, n-1 \tag{1.3.7}$$

Por outras palavras, as soluções do sistema (1.3.4), ficam determinadas (a menos de reparametrização), se conhecermos $(n-1)$ integrais primeiros, funcionalmente independentes, dessa mesma equação.

Por outro lado, se F é uma qualquer função de $(n-1)$ variáveis, e se u^j, $j = 1, \cdots, n-1$, são $(n-1)$ integrais primeiros funcionalmente independentes da equação característica (1.3.3), associada à PDE (1.3.2), então a solução geral da PDE (1.3.2), é:

$$u(x^1, \cdots, x^n) = F(u^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, u^{n-1}(x^1, \cdots, x^n)) \tag{1.3.8}$$

Façamos a demonstração deste facto, para o caso de $n = 3$ variáveis. Assim, suponhamos que temos a PDE:

$$X(x, y, z)\, u_x + Y(x, y, z)\, u_y + Z(x, y, z)\, u_z = 0$$

cujo campo característico é:

$$\mathbf{X} = X\,\frac{\partial}{\partial x} + Y\,\frac{\partial}{\partial y} + Z\,\frac{\partial}{\partial z}$$

O sistema (1.3.4) tem, neste caso, o aspecto seguinte:

$$\frac{dx}{X(x,y,z)} = \frac{dy}{y(x,y,z)} = \frac{dz}{Z(x,y,z)} \tag{1.3.9}$$

Suponhamos que $v = v(x,y,z)$ e $w = w(x,y,z)$ são duas soluções (isto é, dois integrais primeiros do campo $\mathbf{X}$) funcionalmente independentes desse sistema, e que $u = u(x,y,z)$ é uma terceira solução. Então o sistema de 3 equações homogéneas:

$$\begin{cases} X\,u_x + Y\,u_y + Z\,u_z &= 0 \\ X\,v_x + Y\,v_y + Z\,v_z &= 0 \\ X\,w_x + Y\,w_y + Z\,w_z &= 0 \end{cases}$$

admite uma solução não trivial $(X,Y,Z) \neq (0,0,0)$ e portanto o seu determinante é nulo:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 0$$

No entanto como essa matriz tem característica 2 (as duas últimas linhas são linearmente independentes, já que v e w são funcionalmente independentes), cocluímos, pelo teorema da função implícita, que $u = F(v(x,y,z), w(x,y,z))$, para alguma função $F = F(v,w)$. As curvas solução do sistema (1.3.9), formam (localmente) uma congruência de curvas em $\mathbb{R}^3$, isto é, uma família de curvas que depende de dois parâmetros.

- **Exemplo 1.3.1** ... Consideremos a equação:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy(z^2+1)}$$

Da primeira equação $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, deduzimos que:

$$\frac{y}{x} = c_1$$

e portanto a função $u^1(x,y,z) = \frac{y}{x}$, é um integral primeiro da equação dada, já que satisfaz a PDE:

$$x\,u_x + y\,u_y + xy(z^2+1)\,u_z = 0 \tag{1.3.10}$$

Para obter um segundo integral primeiro, substituimos $y/x = c_1$, na equação:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{xy(z^2+1)}$$

para obter:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{c_1\,x^2(z^2+1)}$$

cuja integração dá:

$$c_1\frac{x^2}{2} = \text{arc tg}\,z + c_2$$

Substituindo $c_1 = y/x$, obtemos:

$$\frac{1}{2}xy - \text{arc tg}\,z = c_2$$

É fácil verificar que $u^2(x,y,z) = \frac{1}{2}xy - \text{arc tg}\,z$ verifica a PDE (1.3.10), e que, além disso, é funcionalmente independente de u^1.

- **Exemplo 1.3.2** ... Consideremos a equação:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}$$

Adicionando os numeradores e denominadores da primeira e última fracções, obtemos $\frac{d(x+z)}{x+z}$, que igualamos à segunda, para obter:

$$\frac{d(x+z)}{x+z} = \frac{dy}{y}$$

A solução geral desta equação é:

$$u^1 = \frac{x+z}{y} = c_1$$

que é um integral primeiro da equação dada, já que satisfaz a PDE:

$$(y+z)\,u_x + y\,u_y + (x-y)\,u_z = 0 \qquad (1.3.11)$$

Para obter um segundo integral primeiro, subtraímos os numeradores e denominadores das duas primeiras fracções, que igualamos à terceira, para obter:

$$\frac{d(x-y)}{z} = \frac{dz}{x-y}$$

A solução geral desta equação é:

$$u^2 = (x-y)^2 - z^2 = c_2$$

que é também um integral primeiro da equação dada, já que satisfaz a PDE (1.3.11).

- **Exemplo 1.3.3** ... Consideremos a PDE:

$$x\,u_x + y\,u_y + z\,u_z = 0$$

que é da forma (1.3.2), com:

$$\mathbf{X} = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} + z\,\frac{\partial}{\partial z}$$

O sistema característico (1.3.4), associado à PDE dada, é:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

É fácil ver que:

$$u^1 = \frac{y}{x} = c_1 \qquad \text{e} \qquad u^2 = \frac{z}{x} = c_2$$

são dois integrais, funcionalmente independentes, da equação dada. Portanto a solução geral é da forma:

$$u = F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

onde F é uma função arbitrária.

1.4 Simetrias e factores integrantes

Consideremos novamente uma **equação de Pfaff**, com duas variáveis x, y:

$$\boxed{\boldsymbol{\theta} = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0} \tag{1.4.1}$$

onde $\boldsymbol{\theta}$ é uma 1-forma que nunca se anula em $U \subseteq \mathbb{R}^2_{xy}$. Como já vimos, em cada ponto $(x, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, a equação $\boldsymbol{\theta} = 0$, define uma recta $\ell(x, y) = \ker \boldsymbol{\theta}_{(x,y)}$, no espaço tangente $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$, perpendicular ao vector $P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$. Este campo de linhas pode ser (localmente) gerado pelo campo de vectores:

$$\boxed{\mathbf{Z}(x,y) = -Q(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + P(x,y)\frac{\partial}{\partial y}} \tag{1.4.2}$$

uma vez que $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{Z}) = 0$. Calcular as curvas integrais de (1.4.1) é equivalente a calcular as curvas integrais do campo $\mathbf{Z}$ (a menos de reparametrização), e, por sua vez, este problema é equivalente a calcular um integral primeiro f para o campo $\mathbf{Z}$, isto é, uma solução da PDE:

$$\mathbf{Z}f = -Q(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + P(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{1.4.3}$$

As curvas integrais de (1.4.1) são dadas então por $f(x, y) \equiv c =$ constante.

Suponhamos agora que a equação (1.4.1) admite uma simetria (infinitesimal) não trivial $\mathbf{X}$, da forma:

$$\mathbf{X} = \xi(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.4.4}$$

Então, por definição:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \lambda\,\mathbf{Z}, \qquad \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^2_{xy})$$

mas $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}) \neq 0$. É fácil ver que, se f é um integral primeiro do campo $\mathbf{Z}$, então $\mathbf{X}f$ é também um integral primeiro do campo $\mathbf{Z}$. De facto:

$$0 = [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]\,f = \mathbf{X}\mathbf{Z}f - \mathbf{Z}\mathbf{X}f = -\mathbf{Z}(\mathbf{X}f)$$

e portanto, como vimos na secção anterior:

$$\mathbf{X}f = F(f)$$

onde $F(f)$ não pode anular-se, já que a simetria $\mathbf{X}$ é não trivial. Além disso, por uma escolha conveniente desta função F, podemos até supôr que:

$$\mathbf{X}f = 1$$

De facto, se f é um integral primeiro de $\mathbf{Z}$, também o é $G(f)$, para qualquer função G que nunca se anule, uma vez que $\mathbf{Z}G(f) = G'(f)\mathbf{Z}f = 0$. Como $\mathbf{X}G(f) = G'(f)\mathbf{X}(f) = G'(f)F(f)$, escolhendo $G'(f)$, de tal forma a que $G' = 1/F$, virá $\mathbf{X}G(f) = 1$, e basta então substituir f por $G(f)$.

Desta forma, obtemos as duas equações seguintes:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}f &= -Q\,f_x + P\,f_y &= 0 \\ \mathbf{X}f &= \xi\,f_x + \eta\,f_y &= 1 \end{cases} \tag{1.4.5}$$

donde se deduz que:

$$f_x = \frac{P}{\xi P + \eta Q} \qquad\qquad f_y = \frac{Q}{\xi P + \eta Q} \tag{1.4.6}$$

isto é:

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})} = \frac{1}{\xi P + \eta Q}} \tag{1.4.7}$$

é um factor integrante de $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mu\boldsymbol{\theta} = df$$

e a solução geral de (1.4.1) é dada por:

$$\boxed{f(x,y) = \int \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})} = \int \frac{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}{\xi P + \eta Q} = c} \tag{1.4.8}$$

onde a integração é feita ao longo de um qualquer caminho que une um ponto $\mathbf{x}_o$, fixo arbitràriamente, ao ponto $\mathbf{x} = (x, y)$.

Resumindo todas esta discussão, podemos enunciar o seguinte:

- **Teorema 1.4.1** (Lie) ... *Se a equação de Pffaf $\boldsymbol{\theta} = P\,dx + Q\,dy = 0$, admite uma simetria infinitesimal $\mathbf{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y}$ não trivial, então $\mu = \frac{1}{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})} = \frac{1}{\xi P + \eta Q}$ é um factor integrante dessa equação.*

  ■.

- **Exemplo 1.4.1** ... A equação:

$$y' = \phi(y)$$

admite a simetria não trivial:

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x}$$

De facto, adoptando as notações anteriores, podemos escrever a referida equação em forma de Pfaff:

$$\boldsymbol{\theta} = \phi(y)\ dx - dy = 0$$

isto é, $P(x,y) = \phi(y)$ e $Q(x,y) = -1$. Portanto, o campo $\mathbf{Z}$ é neste caso:

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial}{\partial x} + \phi(y)\frac{\partial}{\partial y}$$

Calculando o comutador $[\mathbf{X}, \mathbf{Z}]$, obtemos:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} + \phi(y)\frac{\partial}{\partial y}\right] = 0$$

$\mathbf{X}$ será uma simetria não trivial desde que $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}) = \phi(y) \neq 0$. A função $\mu = \frac{1}{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})} = \frac{1}{\phi}$ é factor integrante para $\boldsymbol{\theta}$, isto é, $\mu\boldsymbol{\theta}$ é exacta, $\mu\boldsymbol{\theta} = df$, e a solução geral da equação dada é:

$$f = \int \frac{\phi\,dx - dy}{\phi} = x - \int \frac{dy}{\phi} = c$$

- **Exemplo 1.4.2** ... A equação:

$$y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

admite a simetria não trivial:

$$\mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

De facto, adoptando as notações anteriores, podemos escrever a referida equação em forma de Pfaff:

$$\boldsymbol{\theta} = \phi\left(\frac{y}{x}\right)\, dx - dy = 0$$

isto é, $P(x,y) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ e $Q(x,y) = -1$. Portanto, o campo $\mathbf{Z}$ é neste caso:

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial}{\partial x} + \phi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

Calculando o comutador, obtemos:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] &= \left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + \phi\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&= -\mathbf{Z}
\end{aligned}$$

$\mathbf{X}$ será uma simetria não trivial desde que $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}) = -y + x\phi\left(\frac{y}{x}\right) \neq 0$. A função $\mu = \frac{1}{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})} = \frac{1}{-y+x\,\phi}$ é factor integrante para $\boldsymbol{\theta}$, e a solução geral da equação dada é:

$$f = \int \frac{\phi\, dx - dy}{-y + x\,\phi} = c$$

- **Exemplo 1.4.3** ... Consideremos de novo a equação linear de primeira ordem não homogénea:

$$\boxed{y' = a(x)\, y + b(x)} \tag{1.4.9}$$

que admite a simetria não trivial:

$$\mathbf{X} = \phi(x)\frac{\partial}{\partial y}$$

onde $\phi(x)$ é uma solução da correspondente equação homogénea $y' - a(x)\, y = 0$, isto é:

$$\phi'(x) - a(x)\phi(x) = 0$$

De facto, adoptando as notações anteriores, podemos escrever a referida equação em forma de Pfaff:

$$\boldsymbol{\theta} = (a(x)\, y + b(x))\, dx - dy = 0$$

isto é, $P(x,y) = a(x)\, y + b(x)$ e $Q(x,y) = -1$. Portanto, o campo $\mathbf{Z}$ é neste caso:

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial}{\partial x} + (a(x)\, y + b(x))\frac{\partial}{\partial y}$$

Calculando o comutador, obtemos:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] &= \left[\phi(x)\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + (a(x)\, y + b(x))\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
&= -(\phi' - a\,\phi)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\mathbf{X}$ será uma simetria não trivial desde que $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}) = -\phi(x) \neq 0$. A função $\mu = \frac{1}{\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X})} = \frac{-1}{\phi}$ é factor integrante para $\boldsymbol{\theta}$, e a solução geral da equação dada é:

$$f = \int \frac{(a(x)\, y + b(x))\, dx - dy}{\phi} = c$$

■.

1.5 PDE quasi-linear de primeira ordem $A\,u_x + B\,u_y = C$.

Consideremos a equação às derivadas parciais, quasi-linear de primeira ordem:

$$\boxed{A(x,y,u)\,u_x + B(x,y,u)\,u_y = C(x,y,u)} \tag{1.5.1}$$

onde supômos que A, B, C são funções de classe C^∞, num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^3_{x,y,u}$, que nunca se anulam simultâneamente em U.

Consideremos o gráfico $S = \operatorname{gr} u$, de uma solução $u = u(x,y)$ da equação (1.5.1). S diz-se uma **superfície integral** da equação (1.5.1). O plano tangente $T_P S$, a S num ponto $P = (x,y,u(x,y)) \in S$, é o plano de $T_P\mathbb{R}^3$, perpendicular ao vector:

$$u_x \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_P + u_y \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_P - \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_P \qquad \text{onde} \quad P = (x,y,u = u(x,y)) \tag{1.5.2}$$

Se considerarmos também a recta ℓ_P, em $T_P\mathbb{R}^3$, gerada pelo **vector característico**:

$$\mathbf{Z} = A\,\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_P + B\,\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_P + C\,\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_P \tag{1.5.3}$$

a chamada a **recta característica** em P, então a equação (1.5.1) traduz o facto geométrico de que a recta característica ℓ_P pertence ao plano $T_P S$, isto é:

$$(u_x, u_y, -1)\cdot(A,B,C) = 0$$

Portanto o problema da integração da equação pode ser formulado geomètricamente da seguinte forma:

- *"A equação* (1.5.1) *associa, a cada ponto $P = (x,y,u) \in \mathbb{R}^3$, uma recta característica ℓ_P, em $T_P\mathbb{R}^3$, gerada pelo vector* (1.5.3)*. Integrar essa equação é determinar uma superfície integral S, que seja o gráfico de uma função $u = u(x,y)$, e que, em cada um dos seus pontos $P \in S$, o respectivo plano tangente $T_P S$, contenha a recta característica ℓ_P."*

Esta formulação geométrica leva-nos a considerar as curvas integrais do campo de rectas características $\{\ell_P\}$ - as chamadas **curvas características** da equação (1.5.1), que são dadas pelas equações diferenciais:

$$\boxed{\tfrac{dx}{A} = \tfrac{dy}{B} = \tfrac{du}{C}} \tag{1.5.4}$$

que exprimem a colinearidade do vector tangente à curva característica, com a recta característica. Toda a superfície integral S é gerada por curvas características.

Suponhamos que integramos as equações diferenciais (1.5.4), e que a família de curvas características é dada implìcitamente por:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x,y,u) &=& a \\ g(x,y,u) &=& b \end{array}\right. \tag{1.5.5}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes arbitrárias, e f e g são dois integrais primeiros, funcionalmente independentes do campo característico (1.5.3). A família de curvas características depende pois de dois parâmetros a, b e formam uma **congruência de curvas em $\mathbb{R}^3_{x,y,u}$**. Para obter uma superfície integral gerada por essas características, devemos estabelecer uma relação arbitrária entre os dois parâmetros a, b, digamos da forma $\Psi(a,b) = 0$, e a superfície integral correspondente terá por equação implícita:

$$\Psi\left(f(x,y,u), g(x,y,u)\right) = 0$$

- **Exemplo 1.5.1** ... A equação:

$$y\,u_x - x\,u_y = 0$$

tem como equações das características (1.5.4):

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{du}{0}$$

que admite dois integrais primeiros funcionalmente independentes:

$$u = a \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = b$$

As características são círculos centrados no eixo dos uu, e situados em planos paralelos ao plano xy. As superfícies integrais são superfícies de revolução em torno do eixo dos uu.

- **Exemplo 1.5.2** ... Integrar a equação:

$$x\,u_x + y\,u_y = u \tag{1.5.6}$$

As equações das características (1.5.4), são neste caso:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}$$

que admite os dois integrais primeiros funcionalmente independentes:

$$\frac{y}{x} = a \qquad \text{e} \qquad \frac{u}{x} = b$$

A solução geral da equação referida é portanto:

$$\Psi\left(\frac{y}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0$$

onde Ψ é uma função C^∞ arbitrária. Por exemplo, se $\Psi(a,b) = a - b$, então obtemos $\frac{y}{x} - \frac{u}{x} = 0$, isto é, $u(x,y) = y$, que é uma solução de (1.5.6), definida em todo o $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, se $\Psi(a,b) = a - b^2$, obtemos $\frac{y}{x} - \frac{u^2}{x^2} = 0$. Na parte onde $u > 0$, é possível definir u como função de x e y:

$$u(x,y) = \sqrt{xy}$$

que é uma solução de (1.5.6), definida em $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) : xy < 0\}$.

- **Exemplo 1.5.3** ... Seja:

$$F(x,y,u) = c$$

a equação de uma família (a um parâmetro c) SS_c, de superfícies em $\mathbb{R}^3$, de tal forma que por cada ponto passa uma e uma só dessas superfícies. Pretende-se determinar uma outra superfície S, representada pelo gráfico de uma função:

$$u = u(x,y)$$

que intersecta ortogonalmente, em cada um dos seus pontos, a superfície SS que por aí passa.

O vector normal à superfície SS_c, num dos seus pontos $p = (x, y, u) \in SS_c$, é $\nabla F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial u}\right)$, enquanto que a normal à superfície $S = \operatorname{gr} f$, em $p = (x, y, u(x, y)) \in S \cap SS_c$, é $(u_x, u_y, -1)$. A condição de ortogonalidade conduz pois à equação quasi-linear:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\, u_x + \frac{\partial F}{\partial y}\, u_y = \frac{\partial F}{\partial u}$$

As correspondentes curvas características, dadas pelas equações (1.5.4), que neste caso têm a forma:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{du}{\frac{\partial F}{\partial u}} \tag{1.5.7}$$

são curvas que, em cada um dos seus pontos, intersectam ortogonalmente a superfície SS que por aí passa, e portanto S pode ser gerada por estas características.

■.

Como $S = \operatorname{gr} u$ é reunião de curvas características, é de esperar que, dada uma condição inicial u_o, ao longo de uma **curva inicial** $\boldsymbol{\gamma}$, em $\mathbb{R}^2$, dada paramètricamente por:

$$\boldsymbol{\gamma} : s \mapsto (x_o(s), y_o(s))$$

seja possível construir uma única solução u, cujo gráfico $S = \operatorname{gr} u$ passe pela curva em $\mathbb{R}^3$, dada paramètricamente por: :

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}} : s \longmapsto (x_o(s), y_o(s), u_o(s))$$

Para isso devemos tomar, muito simplesmente, a reunião de todas as curvas características que passam nos pontos de $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$. É claro que devemos impôr que os vectores $(x_o'(s), y_o'(s))$ e $(A(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)), B(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)))$, sejam linearmente independentes, $\forall s$.

- **Exemplo 1.5.4** ... Consideremos a PDE quasi-linear:

$$(y + u)\, u_x + y\, u_y = x - y$$

e a curva inicial:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (s, 1), \qquad s \in \mathbb{R}$$

e calculemos a solução $u = u(x, y)$ que, na curva inicial toma os valores:

$$u(s, 1) = 1 + s$$

Geomètricamente, o que se pretende é construir uma superfície integral $S = \operatorname{gr} u$, da equação dada, que passe pela curva:

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = (s, 1, s + 1)$$

Como vimos essa superfície será construída como a reunião de todas as curvas características que passam nos pontos de $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$.

O campo característico é, neste caso, o campo:

$$\mathbf{Z}(x, y, u) = (y + u)\, \frac{\partial}{\partial x} + y\, \frac{\partial}{\partial y} + (x - y)\, \frac{\partial}{\partial u}$$

e, em cada ponto $\boldsymbol{\gamma}(s) = (s, 1)$, satisfaz a condição de que os vectores $(x_o'(s), y_o'(s)) = (1, 0)$ e $(A(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s)), B(\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s))) = (1 + s + 1, 1)$, são linearmente independentes, $\forall s$. De facto:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & s+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0, \qquad \forall s$$

As equações das características são:

$$\frac{dx}{y+u} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x-y}$$

Para encontrar dois integrais primeiros, funcionalmente independentes, para este sistema, podemos proceder da seguinte forma: adicionando os numeradores e denominadores da primeira e última fracções, e igualando à segunda, obtemos:

$$\frac{d(x+u)}{x+u} = \frac{dy}{y}$$

cuja solução geral é:

$$\frac{x+u}{y} \equiv a$$

Por outro lado, subtraindo os numeradores e denominadores das duas primeiras fracções, e igualando à terceira, obtemos:

$$\frac{d(x-y)}{u} = \frac{du}{x-y} \qquad \Rightarrow \qquad (x-y)\,d(x-y) = u\,du$$

cuja solução geral é:

$$(x-y)^2 - u^2 \equiv b$$

Estes integrais primeiros são funcionalmente independentes no domínio $y > 0$, que contem a curva $\widetilde{\gamma}$. Portanto as curvas características $C_{a,b}$ são dadas implìcitamente pelas equações:

$$C_{a,b}: \qquad \begin{cases} \frac{x+u}{y} & \equiv & a \\ (x-y)^2 - u^2 & \equiv & b \end{cases}$$

Para que a curva característica $C_{a,b}$ contenha o ponto $\widetilde{\gamma}(s) = (s, 1, s+1)$, deveremos ter:

$$\begin{cases} a & = & \frac{s+s+1}{1} & = & 2s+1 \\ b & = & (s-1)^2 - (s+1)^2 & = & -4s \end{cases}$$

isto é, essa curva característica C_s é dada implìcitamente pelas equações:

$$C_s: \qquad \begin{cases} \frac{x+u}{y} & \equiv & 2s+1 \\ (x-y)^2 - u^2 & \equiv & -4s \end{cases}$$

Finalmente, para obter a superfície integral $S = \mathrm{gr}\,u$, da equação dada, que passe pela curva $\widetilde{\gamma}(s) = (s, 1, s+1)$, eliminamos s nas equações anteriores. Vem então:

$$2 - (x-y)^2 + u^2 - 2\frac{x+u}{y} = 0$$

que determina implìcitamente a solução procurada. Esta última equação pode ser factorizada na forma:

$$(x-y+u)[2 + (x-y-u)y] = 0$$

donde se deduz as duas soluções para u:

$$u = y - x \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad u = \frac{2}{y} + x - y, \qquad y > 0$$

A única que satisfaz os dados iniciais impostos, é esta última:

$$u = \frac{2}{y} + x - y, \qquad y > 0.$$

- <u>**Exemplo**</u> **1.5.5** ... Uma **lei de conservação** é uma equação quasi-linear do tipo:

$$A(u)\,u_x + u_t = 0 \tag{1.5.8}$$

com condição inicial:

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{1.5.9}$$

(relativamente às notações anteriores, pusemos $y = t$, como é mais usual, o que nos permite interpretar a solução $u(x,t)$ como uma onda, cuja configuração no instante t, é dada pelo gráfico de $x \mapsto u(x,t)$ ...).

Geomètricamente, o que se pretende é construir uma superfície integral $S = \operatorname{gr} u$, da equação dada, que passe pela curva:

$$\widetilde{\gamma}(s) = (s, 0, \phi(s)), \quad s \in \mathbb{R}$$

Como vimos essa superfície será construída como a reunião de todas as curvas características $C_{a,b}$ que passam nos pontos de $\widetilde{\gamma}$. Essas curvas são dadas pelas equações (1.5.4), que neste caso têm a forma:

$$\frac{dx}{A(u)} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}$$

e são, por isso, definidas implìcitamente por:

$$C_{a,b}: \quad \begin{cases} u & \equiv a \\ x - A(u)\,t & \equiv b \end{cases}$$

Note que $C_{a,b}$ é uma recta no plano $u = a$, paralela à recta $x - A(a)\,t = b$ no plano $u = 0$. Para que uma curva característica contenha o ponto $\widetilde{\gamma}(s) = (s, 0, \phi(s))$, deveremos ter:

$$\begin{cases} a = \phi(s) \\ b = s - A(\phi(s))\,0 = s \end{cases}$$

isto é, essa curva característica C_s é dada implìcitamente pelas equações:

$$C_s: \quad \begin{cases} u & \equiv \phi(s) \\ x - A(u)\,t & \equiv s \end{cases}$$

Finalmente, para obter a superfície integral $S = \operatorname{gr} u$, da equação dada, que passe pela curva $\widetilde{\gamma}(s) = (s, 0, \phi(s))$, eliminamos s nas equações anteriores. Vem então:

$$\boxed{u = \phi(x - A(u)\,t)}$$

que determina implìcitamente a solução procurada.

Note que cada ponto da recta $t = 0$, em $\mathbb{R}^2_{x,t}$, é não característico para o problema de Cauchy (1.5.8), (1.5.9), e, portanto, para $|t|$ pequeno a solução desse problema de Cauchy é definida implìcitamente por:

$$\Phi(x,t,u) \stackrel{\text{def}}{=} u - \phi(x - A(u)\,t) = 0 \tag{1.5.10}$$

Se:

$$\Phi_u = 1 + \phi'(x - A(u)\,t)\,A'(u)\,t \neq 0 \tag{1.5.11}$$

a equação (1.5.10) define implìcita e localmente uma única superfície integral dada pelo gráfico de $u = u(x,t)$. Para as derivadas parciais de u, obtemos:

$$\begin{cases} u_x = -\frac{\Phi_x}{\Phi_u} = \frac{\phi'\big(x - A(u)\,t\big)}{1 + \phi'\big(x - A(u)\,t\big)\,A'(u)\,t} \\ u_t = -\frac{\Phi_t}{\Phi_u} = \frac{-\phi'\big(x - A(u)\,t\big)\,A(u)}{1 + \phi'\big(x - A(u)\,t\big)\,A'(u)\,t} \end{cases} \tag{1.5.12}$$

que tendem para infinito, quando $\Phi_u = 1 + \phi'(x - A(u)\,t)\,A'(u)\,t = 0$. Em cada um destes pontos, a solução tem uma descontinuidade chamada **choque**.

Fixemos um valor x_o para x, e seja $u_o = \phi(x_o) = u(x_o, 0)$. A recta em $\mathbb{R}^3_{x,t,u}$, definida por:

$$\begin{cases} u & \equiv & u_o \\ x - A(u_o)t & \equiv & x_o \end{cases} \tag{1.5.13}$$

é uma curva característica da equação (1.5.8), que no instante $t = 0$ passa em $(x_o, 0, u_o)$, e portanto está contida na superfície integral definida por (1.5.10). Concluímos portanto que, ao longo da recta:

$$x - A(u_o)t = x_o \tag{1.5.14}$$

no plano x, t, a solução u tem sempre o mesmo valor constante, igual a $u_o = \phi(x_o)$.

Se duas quaisquer das rectas (1.5.14), não se intersectam no plano x, t, a solução $u = u(x, t)$ existe e é diferenciável $\forall t > 0$. No entanto, se existem duas dessas rectas que se intersectam, para $t > 0$, então no ponto de intersecção temos uma incompatibilidade, uma vez que a solução não pode tomar dois valores diferentes nesse ponto.

Mais concretamente, sejam $x_1 < x_2$ dois pontos distintos na curva inicial $t = 0$, e $\phi(x_1) = u_1 \neq u_2 = \phi(x_2)$. Suponhamos ainda que $A(u_1) > A(u_2)$. Então as rectas:

$$x - A(u_1)t \equiv x_1 \qquad \text{e} \qquad x - A(u_2)t \equiv x_2$$

intersectam-se no ponto $p_c = (x_c, t_c)$, onde (ver a figura 1.3):

$$t_c = \frac{x_2 - x_1}{A(u_1) - A(u_2)} > 0$$

No ponto p_c, temos então uma incompatibilidade já que $\phi(x_1) = u_1 \neq u_2 = \phi(x_2)$, e, como sabemos, a solução tem um valor constante ao longo de cada uma das rectas referidas. Portanto essa solução não pode ser definida para tempo $t \geq t_c$, e diz-se então que ocorreu um choque no ponto p_c [2].

Figure 1.3: Choque em leis de conservação.

[2] Sobre a ocorrência de choques ver Lax, P. D. *"The formation and decay of shock waves"*, Amer. Math. Monthly, 79 (1972), 227-241.

1.6 PDE de primeira ordem $F(x, y, u, p, q) = 0$

Consideremos uma PDE de primeira ordem do tipo:

$$\boxed{F\,(x, y, u, p, q) = 0} \tag{1.6.1}$$

onde usamos as notações tradicionais:

$$p = u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad q = u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Uma primeira **interpretação geométrica**[3] possível desta equação, é a seguinte - em cada ponto $P_o = (x_o, y_o, u_o) \in \mathbb{R}^3_{xyu}$, podemos considerar o conjunto de todos os vectores em $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, que são da forma:

$$p\ \frac{\partial}{\partial x}\Big|_{P_o} + q\ \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{P_o} - \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{P_o}$$

que satisfazem a equação:

$$F(\underbrace{x_o, y_o, u_o}_{P_o}; p, q) = 0$$

e ainda a correspondente família $\mathcal{F}(P_o)$, de 2-planos $\Pi_{P_o} \subset T_{P_o}\mathbb{R}^3$, que são perpendiculares a esses vectores:

$$\boxed{\mathcal{F}(P_o) = \Big\{\Pi_{P_o} \subset T_{P_o}\mathbb{R}^3 : \quad p\ dx|_{P_o} + q\ dy|_{P_o} - du|_{P_o} = 0, \quad \text{e} \quad F\,(P_o; p, q) = 0\Big\}} \tag{1.6.2}$$

Um tal plano Π_{P_o}, diz-se um **elemento integral** da equação (1.6.1), no ponto P_o.

Quando fixamos o ponto $P_o = (x_o, y_o, u_o)$, a equação $F\,(P_o; p, q) = 0$ define pois uma família $\mathcal{F}(P_o)$, a um parâmetro, de elementos integrais da equação (1.6.1), no ponto P_o, cuja envolvente é, em geral, um cone $K(P_o)$, com vértice em P_o, chamado o **cone de Monge** em P_o (ver a figura 1.4).

Figure 1.4: Cones de Monge da equação $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$.

- **Notas e exemplos**...
  - Se a equação (1.6.1) é quasi-linear, isto é, se:

$$F\,(x, y, u, p, q) = A(x, y, u)\, p + B(x, y, u)\, q - C(x, y, u) = 0$$

[3]No capítulo 3 desenvolvemos uma segunda interpretação geométrica, baseada em geometria de contacto...

então $F(P_o; p, q) = A(P_o)\, p + B(P_o)\, q - C(P_o) = 0$, e o conjunto dos vectores de coordenadas $(p, q, -1)$, no espaço tangente $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, que verificam a equação $A(P_o)\, p + B(P_o)\, q = C(P_o)$, formam uma recta situada no plano afim $du|_{P_o} = -1$, em $T_{P_o}\mathbb{R}^3$ (p e q podem ser considerados como coordenadas cartesinas nesse plano (figura 1.5)). Neste caso, $\mathcal{F}(P_o)$ é o feixe de planos em $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, cujo eixo é a recta gerada pelo vector característico $(A(P_o), B(P_o), C(P_o))$, de $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, e o cone de Monge $K(P_o)$ degenera nessa recta característica.

Figure 1.5: Cones de Monge da equação quasi-linear $A(x, y, u)\, p + B(x, y, u)\, q - C(x, y, u) = 0$.

– Se $u = u(x, y)$ é uma solução da PDE (1.6.1), o plano tangente $T_{P_o}S$, ao gráfico $S = \mathrm{gr}\, u$ em $P_o = (x_o, y_o, u(x_o, y_o))$, tem por equação:

$$u_x(x_o, y_o)\ dx|_{P_o} + u_y(x_o, y_o)\ dy|_{P_o} - du|_{P_o} = 0$$

e é portanto um elemento integral, i.e., é um membro da família $\mathcal{F}(P_o)$, que é tangente ao cone de Monge em P_o, ao longo de uma das suas geratrizes.

Como se descreve analìticamente o cone de Monge $K(P_o)$?

Por definição, $K(P_o)$ é a envolvente da família $\mathcal{F}(P_o)$, de elementos integrais da equação (1.6.1), no ponto P_o. Geomètricamente, cada geratriz do cone $K(P_o)$, deverá pois ser a posição limite da linha de intersecção de dois planos da família $\mathcal{F}(P_o)$, quando estes se aproximam arbitràriamente um do outro. Suponhamos que é possível explicitar q como função de p, na equação:

$$F(x_o, y_o, u_o, p, q) = 0$$

isto é, que existe uma função $q = q(p)$, tal que:

$$F(x_o, y_o, u_o, p, q(p)) = 0$$

Um plano da família $\mathcal{F}(P_o)$ pode ser descrito por (omitindo o subíndice P_o nas diferenciais):

$$p\, dx + q(p)\, dy - du = 0$$

e um plano próximo deste, por:

$$(p + \epsilon)\, dx + q(p + \epsilon)\, dy - du = 0$$

Os pontos de coordenadas (dx, dy, du), no espaço tangente $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, na intersecção dos planos anteriores, satisfazem:

$$\epsilon\, dx + [q(p + \epsilon) - q(p)]\ dy = 0$$

e portanto:

$$dx + \left[\frac{q(p+\epsilon) - q(p)}{\epsilon}\right] dy = 0$$

e, quando $\epsilon \to 0$, a linha limite deverá ser dada por:

$$\begin{cases} 0 &= p\,dx + q(p)\,dy - du \\ 0 &= dx + q'(p)\,dy \end{cases} \tag{1.6.3}$$

Por outro lado, derivando implìcitamente $F(x_o, y_o, u_o, p, q(p)) = 0$, em ordem a p, obtemos $0 = F_p(.) + q'(p)\,F_q(.)$, donde se deduz que:

$$q'(p) = \frac{-F_p(x_o, y_o, u_o, p, q(p))}{F_q(x_o, y_o, u_o, p, q(p))} \tag{1.6.4}$$

De (1.6.3) e (1.6.4), deduzimos então que os pontos de coordenadas (dx, dy, du), no espaço tangente $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, e que pertencem ao cone de Monge $K(P_o)$, devem satisfazer:

$$\begin{cases} du &= p\,dx + q\,dy, \qquad \text{onde } p \text{ e } q \text{ devem satisfazer } F(x_o, y_o, u_o, p, q) = 0 \\ \frac{dx}{F_p} &= \frac{dy}{F_q} \end{cases} \tag{1.6.5}$$

onde as derivadas parciais F_p e F_q, devem ser avaliadas em (x_o, y_o, u_o, p, q).

Consideremos agora uma solução $u = u(x, y)$ da equação (1.6.1), e ainda os valores:

$$u_o = u(x_o, y_o), \qquad p_o = u_x(x_o, y_o), \qquad q_o = u_y(x_o, y_o)$$

O plano tangente $T_{P_o}S$, a $S = \mathrm{gr}\,u$ no ponto $P_o = (x_o, y_o, u_o)$, é dado por:

$$du = p_o\,dx + q_o\,dy$$

(omitindo mais uma vez o subíndice P_o nas diferenciais), onde $F(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o) = 0$, e portanto, como aliás já notamos, esse plano é um elemento integral, i.e., é um membro da família $\mathcal{F}(P_o)$, que é tangente ao cone de Monge em P_o, ao longo de uma das suas geratrizes.

Desta forma fica definido em $S = \mathrm{gr}\,u$ um campo de linhas - em cada ponto $P_o \in S$, a linha correspondente será a referida geratriz de tangência. As curvas integrais deste campo de linhas dizem-se as **curvas características da solução** $u = u(x, y)$ (ver a figura 1.4).

Atendendo a (1.6.5), os pontos de coordenadas (dx, dy, du), no espaço tangente $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, que estão simultâneamente neste plano e no cone de Monge em P_o, devem satisfazer as **equações das características da solução** $u = u(x, y)$, seguintes:

$$\boxed{\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{p_oF_p + q_oF_q}} \tag{1.6.6}$$

onde as derivadas parciais F_p e F_q, devem ser avaliadas em $(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o)$. É claro que estas curvas estão em $S = \mathrm{gr}\,u$. As equações (1.6.6) são pois as equações homogéneas da recta em $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, que é a geratriz de contacto do cone de Monge $K(P_o)$ com o plano $T_{P_o}S$, tangente em P_o ao gráfico $S = \mathrm{gr}\,u$ da solução $u = u(x, y)$ da PDE dada.

Um curva característica da solução $u = u(x, y)$, é portanto uma curva em $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\alpha} : \tau \mapsto \boldsymbol{\alpha}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), u(\tau))$, que satisfaz as ODE's seguintes:

$$\begin{cases} x'(\tau) &= F_p(\cdot) \\ y'(\tau) &= F_q(\cdot) \\ u'(\tau) &= u_x(x(\tau), y(\tau))\,F_p(\cdot) + u_y(x(\tau), y(\tau))\,F_q(\cdot) \end{cases} \tag{1.6.7}$$

onde $(\cdot) = \Big(x(\tau), y(\tau), u(\tau), u_x(x(\tau), y(\tau)), u_y(x(\tau), y(\tau))\Big)$.

Quando a equação (1.6.1), é quasi-linear (1.5.1), isto é:

$$F\,(x, y, u, p, p) = A(x, y, u)\, p + B(x, y, u)\, q - C(x, y, u) = 0$$

com $p = u_x$ e $q = u_y$, estas equações (1.6.7), reduzem-se às equações das características (1.5.4), para essa equação quasi-linear (1.5.1). De facto, neste caso tem-se que $F_p = A$, $F_q = B$ e $pF_p + qF_q = pA + qB = C$. Para uma equação quasi-linear, o cone de Monge degenera numa recta, exactamente a recta característica, como já vimos.

A grande diferença para o caso geral de uma equação do tipo (1.6.1), é que, sem o conhecimento prévio de u, e portanto de $p(\cdot) = u_x(\cdot)$ e $q(\cdot) = u_y(\cdot)$, as equações (1.6.7) formam um **sistema subdeterminado** de 3 equações para as 5 funções x, y, u, p, q de τ.

No entanto, é possível completar este sistema, juntando mais duas equações. Para isso, seja $u = u(x, y)$ uma solução de (1.6.1), e consideremos as derivadas parciais, relativamente a x e y, respectivamente, da equação:

$$F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = 0$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} F_x + u_x\, F_u + u_{xx}\, F_p + u_{xy}\, F_q &= 0 & (1.6.8)\\ F_y + u_y\, F_u + u_{yx}\, F_p + u_{yy}\, F_q &= 0 & (1.6.9)\end{aligned}$$

e ao longo de uma curva característica da solução u, temos que, por (1.6.7), e uma vez que $p(\tau) = u_x\,(x(\tau), y(\tau))$:

$$\begin{aligned} p'(\tau) &= u_{xx}(x(\tau), y(\tau))\, x'(\tau) + u_{xy}(x(\tau), y(\tau))\, y'(\tau) \\ &= u_{xx}(x(\tau), y(\tau))\, F_p(\cdot) + u_{xy}(x(\tau), y(\tau))\, F_q(\cdot) \quad \text{por (1.6.7)} \\ &= -F_x(\cdot) - u_x(x(\tau), y(\tau))\, F_u(\cdot) \quad \text{por (1.6.8)} \\ &= -F_x(\cdot) - p(\tau)\, F_u(\cdot) \end{aligned}$$

e, de forma análoga:

$$q'(\tau) = -F_y(\cdot) - q(\tau)\, F_u(\cdot)$$

Juntando estas duas últimas equações, ao sistema (1.6.7), obtemos finalmente um sistema de 5 equações diferenciais ordinárias para as 5 funções x, y, u, p, q de τ (pondo $' = d/d\tau$):

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& F_p \\ y' &=& F_q \\ u' &=& p\,F_p + q\,F_q \\ p' &=& -F_x - p\,F_u \\ q' &=& -F_y - q\,F_u \end{array}\right.} \qquad (1.6.10)$$

que **não exige** o conhecimento prévio da superfície integral $S = \mathrm{gr}\, u$, para a sua resolução! Estas equações dizem-se as **equações características** da PDE $F\,(x, y, u, p, p) = 0$.

Ainda mais uma observação importante: F é um integral primeiro do sistema (1.6.10), isto é, F é constante ao longo de uma qualquer solução. De facto:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\tau} &= F_x\, x' + F_y\, y' + F_u\, u' + F_p\, p' + F_q\, q' \\ &= F_x F_p + F_y F_q + F_u\,(p\,F_p + q\,F_q) + F_p\,(-F_x - p\,F_u) + F_q\,(-F_y - q\,F_u) \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (1.6.11)$$

Portanto, ao longo de uma qualquer curva solução do sistema (1.6.10), temos que $F = 0$, $\forall \tau$, se $F = 0$ para algum valor particular de τ.

Para interpretar geomètricamente os cálculos anteriores, vamos introduzir de seguida mais alguns conceitos geométricos[4].

Um vector de coordenadas $(x, y, u, p, q) \in \mathbb{R}^5$, pode ser interpretado como um **elemento plano (de contacto)** em $\mathbb{R}^3$, isto é, como um par constituído pelo ponto (x, y, u) de $\mathbb{R}^3$ - o chamado **suporte** do elemento - e por um plano em $\mathbb{R}^3$, que passa em (x, y, u) e é perpendicular ao vector $(p, q, -1)$. Uma curva $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$, em $\mathbb{R}^5$, de equações paramétricas:

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} : \tau \longmapsto \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), u(\tau), p(\tau), q(\tau)) \tag{1.6.12}$$

pode portanto ser interpretada como uma família a um parâmetro τ, de elementos planos, ou, por outras palavras, como uma família de planos ao longo da **curva suporte** (ou curva base) $\boldsymbol{\alpha} : \tau \mapsto c(\tau) = (x(\tau), y(\tau), u(\tau))$.

Uma tal curva $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$, em $\mathbb{R}^5$, diz-se uma **faixa de contacto** ao longo da curva $\boldsymbol{\alpha}$, se em cada ponto $\boldsymbol{\alpha}(\tau)$, o respectivo vector tangente $\boldsymbol{\alpha}'(\tau)$, pertence ao elemento plano $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(\tau)$, isto é:

$$(x'(\tau), y'(\tau), u'(\tau)) \cdot (p(\tau), q(\tau), -1) = 0$$

ou ainda:

$$\boxed{u'(\tau) = p(\tau)\, x'(\tau) + q(\tau)\, y'(\tau), \qquad \forall \tau} \tag{1.6.13}$$

Por outras palavras, $\boldsymbol{\alpha}$ é uma curva integral da chamada 1-**forma de contacto**, em $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^5_{xyupq}$:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = du - p\, dx - q\, dy} \tag{1.6.14}$$

Note que qualquer solução das equações características (1.6.10), é automàticamente uma faixa de contacto (pelas três primeiras equações em (1.6.10)).

Uma curva $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(\tau) = (x(\tau), y(\tau), u(\tau), p(\tau), q(\tau))$ diz-se uma **faixa de contacto característica (ou integral)** da PDE $F(x, y, u, p, p) = 0$, se $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ é solução das equações características (1.6.10), e se, além disso, satisfaz a condição:

$$F(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}(\tau)) = F(x(\tau), y(\tau), u(\tau), p(\tau), q(\tau)) \equiv 0, \qquad \forall \tau \tag{1.6.15}$$

Por (1.6.11), esta condição verifica-se $\forall \tau$, desde que se verifique para um dado valor particular de τ!

Uma superfície parametrizada $S = \boldsymbol{\Phi}(s, \tau)$, em $\mathbb{R}^3_{x,y,u}$, pode ser vista como sendo constituída por uma família a dois parâmetros (s, τ), de elementos planos:

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(s, \tau) = (x(s, \tau), y(s, \tau), u(s, \tau), p(s, \tau), q(s, \tau))$$

formados pelos pontos de S e pelos respectivos planos tangentes. No entanto, nem toda a família a dois parâmetros de elementos planos $(s, \tau) \mapsto \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(s, \tau)$, formam uma superfície. É novamente necessário que $du = p\, dx + q\, dy$ se verifique, ou mais exactamente que $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^*(\boldsymbol{\omega}) = 0$, isto é que:

$$\begin{aligned}
0 &= \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^*(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^*(du - p\, dx - q\, dy) \\
&= d(u \circ \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}) - (p \circ \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}) d(x \circ \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}) - (q \circ \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}) d(y \circ \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}) \\
&= (u_s ds + u_\tau d\tau) - p\, (x_s ds + x_\tau d\tau) - q\, (y_s ds + y_\tau d\tau) \\
&= (u_s - p\, x_s - q\, y_s)\, ds + (u_\tau - p\, x_\tau - q\, y_\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

[4] Este conceitos servem como uma introdução à geometria de contacto no espaço, que será desenvolvida com todo o rigor no capítulo 3.

ou ainda:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} &= p\,\frac{\partial x}{\partial s} + q\,\frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= p\,\frac{\partial x}{\partial \tau} + q\,\frac{\partial y}{\partial \tau} \end{cases}$$

Os elementos planos têm que se ajustar uns aos outros, como se fossem escamas de um peixe!

Uma faixa característica da PDE (1.6.1), sendo solução das equações características, fica determinada por um dos seus elementos. Se esse elemento consiste de um ponto P numa superfície integral S, de (1.6.1), juntamente com o plano tangente a S em P, então a referida faixa é constituída pela curva característica de S, que passa em P, juntamente com cada um dos planos tangentes a S ao longo dessa curva. Se uma outra superfície integral é tangente a S em P, então ela será tangente ao longo de toda a curva característica de S.

As equações características (1.6.10), descrevem portanto uma "lei de propagação" de elementos característicos, isto é, de planos tangentes a uma superfície integral S, ao longo de uma curva característica de S.

O **problema de Cauchy** para a PDE (1.6.1), consiste em construir uma superfície integral que passe numa curva "inicial" suave arbitrária $\boldsymbol{\gamma}$, dada paramètricamente por:

$$s \in I \longmapsto \boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s), y(s), u(s)) \tag{1.6.16}$$

Para conseguir isso, faremos passar por $\boldsymbol{\gamma}(I)$, faixas características apropriadas. Mas antes do mais, devemos completar $\boldsymbol{\gamma}$ numa faixa de elementos característicos, isto é, devemos encontrar funções:

$$p = p(s) \qquad \text{e} \qquad q = q(s)$$

tais que (pondo agora $' = d/ds$):

$$\begin{cases} u'(s) - x'(s)\,p - y'(s)\,q &= 0 \\ F(x(s), y(s), u(s);\, p, q) &= 0 \end{cases} \tag{1.6.17}$$

Como a segunda equação é não linear, poderá haver uma, várias ou nenhuma solução (p,q), de (1.6.18). Suponhamos que é dada um solução específica (p_o, q_o) de:

$$\begin{cases} u'(s_o) - x'(s_o)\,p_o - y'(s_o)\,q_o &= 0 \\ F(x(s_o), y(s_o), u(s_o);\, p_o, q_o) &= 0 \end{cases} \tag{1.6.18}$$

tal que:

$$x'(s_o)\,F_q(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o) - y'(s_o)\,F_p(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o) \neq 0 \tag{1.6.19}$$

isto é, o plano característico tangente a $\boldsymbol{\gamma}$, em $P_o = (x_o, y_o, u_o)$, tem uma geratriz de contacto com o cone de Monge em P_o, cuja projecção no plano xy é não colinear com a projecção da tangente a $\boldsymbol{\gamma}$, em P_o. Pelo teorema da função implícita, existem então funções suaves únicas $p(s), q(s)$, perto de s_o, que satisfazem (1.6.18), e que se reduzem a p_o, q_o, para $s = s_o$.

Com efeito, o sistema (1.6.18) é do tipo:

$$\begin{cases} f(s,p,q) &= u'(s) - x'(s)\,p - y'(s)\,q &= 0 \\ g(s,p,q) &= F(x(s), y(s), u(s);\, p, q) &= 0 \end{cases}$$

que se pretende resolver em ordem a s, numa vizinhança de $s = s_o$. Pelo teorema da função implícita, isto é possível se:

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(p,q)}\right|_{(s_o,p_o,q_o)} = \left| \begin{array}{cc} f_p & f_q \\ g_p & g_q \end{array} \right|_{(s_o,p_o,q_o)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cc} -x'(s) & -y'(s) \\ F_p & F_q \end{array} \right|_{(s_o, p_o, q_o)} \\
&= \left| \begin{array}{cc} -x'(s_o) & -y'(s_o) \\ F_p(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o) & F_q(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o) \end{array} \right| \\
&= -x'(s_o) F_q(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o) + y'(s_o) F_p(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o) \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

que é exactamente a condição de transversalidade (1.6.19).

Posto isto, por cada elemento $(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s))$, passamos agora a única faixa característica, que se reduz a esse elemento para $\tau = 0$. Desta forma construímos 5 funções:

$$x = x(s, \tau), \quad y = y(s, \tau), \quad u = u(s, \tau), \quad p = p(s, \tau), \quad q = q(s, \tau) \tag{1.6.20}$$

definidas para $|s - s_o|$ e $|t|$, suficientemente pequenos, que satisfazem, para cada s fixo, as equações características (1.6.10), como funções de τ, e que para $\tau = 0$, se reduzem respectivamente a $x(s), y(s), u(s), p(s)$ e $q(s)$. Além disso, a relação $F(x(s, \tau), y(s, \tau), u(s, \tau), p(s, \tau), q(s, \tau)) = 0$, verifica-se idênticamente em s e τ, uma vez que se verifica para $\tau = 0$.

Concluindo - se existir uma superfície integral S, que passe em $\boldsymbol{\gamma}$, e que contenha o elemento $(x_o, y_o, u_o, p_o, q_o)$, então S deverá ser a reunião dos suportes das faixas características que acabamos de construir. Em particular as 3 primeiras equações em (1.6.20), devem formar uma parametrização de S.

Recìprocamente, vamos agora provar que (1.6.20), representa uma solução do problema de Cauchy, dada em forma paramétrica, numa vizinhança de P_o. Em primeiro lugar, podemos resolver as duas primeiras equações (1.6.20), para (s, τ) como funções de (x, y), para (x, y) perto de (x_o, y_o). Com efeito:

$$x_o = x(s_o, 0), \qquad \text{e} \qquad y_o = y(s_o, 0)$$

e para $(s, \tau) = (s_o, 0)$, pondo $(\cdot) = (x_o, y_o, u_o, p_o, q_o)$, vem que:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, \tau)} = \det \begin{bmatrix} x_s & y_s \\ x_\tau & y_\tau \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x'(s_o) & y'(s_o) \\ F_p(\cdot) & F_q(\cdot) \end{bmatrix} \neq 0$$

por (1.6.19). Substituindo então na terceira equação (1.6.20), obtemos uma equação explícita $u = u(x, y)$, para uma superfície S, que passa em $\boldsymbol{\gamma}$.

Para provar que S é superfície integral, como a relação $F(x(s, \tau), y(s, \tau), u(s, \tau), p(s, \tau), q(s, \tau)) = 0$, se verifica idênticamente em s e τ, resta provar que p e q, definidas pelas duas últimas equações (1.6.20), são idênticamente iguais a u_x e u_y, respectivamente. Esta verificação fica a cargo do leitor !...

- **Exemplo 1.6.1** ... Consideremos o problema de Cauchy:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = u_x \, u_y - 1 = 0, \qquad u(x, 0) = x$$

A curva "inicial" $\boldsymbol{\gamma}$ é dada paramètricamente por:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s) = s, y(s) = 0, u(s) = s) \tag{1.6.21}$$

As equações (1.6.18), que permitem completar $\boldsymbol{\gamma}$ numa faixa de elementos característicos, i.e., que permitem calcular $p = p(s)$ e $q = q(s)$, são (pondo $' = d/ds$):

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(s) - x'(s)\,p - y'(s)\,q &=& 0 \\ F(x(s), y(s), u(s);\, p, q) &=& 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 1 - p &=& 0 \\ pq - 1 &=& 0 \end{array}\right.$$

donde se deduz:

$$p = p(s) \equiv 1, \qquad q = q(s) \equiv 1$$

e portanto a faixa inicial de elementos característicos é:

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = (x = s, y = 0, u = s, p = 1, q = 1)$$

A condição (1.6.19), é válida $\forall s$, já que:

$$x'(s)\,F_q(\cdot) - y'(s)\,F_p(\cdot) \;=\; p \;=\; 1 \;\neq 0, \qquad \forall s$$

As equações características (1.6.10), são (pondo agora $' = d/d\tau$):

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& F_p \\ y' &=& F_q \\ u' &=& p\,F_p + q\,F_q \\ p' &=& -F_x - p\,F_u \\ q' &=& -F_y - q\,F_u \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x' &=& q \\ y' &=& p \\ u' &=& 2pq \\ p' &=& 0 \\ q' &=& 0 \end{array}\right.$$

A curva inicial $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$, corresponde a $\tau = 0$. Como p e q são constantes ao longo das características, temos que:

$$p(s,\tau) = p(s,0) = 1, \qquad q(s,\tau) = q(s,0) = 1 \tag{1.6.22}$$

Resolvendo agora as equações características, para x, y e u, usando (1.6.21) e (2.3.1), obtemos:

$$x = x(s,\tau) = \tau + s, \qquad y = y(s,\tau) = \tau, \qquad u = u(s,\tau) = 2\tau + s$$

Invertendo as duas primeiras equações, obtemos $\tau = y$, $s = x - y$, e inserindo na terceira, obtemos finalmente a solução:

$$u = x + y$$

- **Exemplo 1.6.2** ... Consideremos o problema de Cauchy:

$$F(x,t,u,u_x,u_t) = u_t + u_x^2 = 0, \qquad u(x,0) = ax$$

onde a é uma constante.

A curva "inicial" $\boldsymbol{\gamma}$ é dada paramètricamente por:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s) = s, t(s) = 0, u(s) = as) \tag{1.6.23}$$

As equações (1.6.18), que permitem completar $\boldsymbol{\gamma}$ numa faixa de elementos característicos, i.e., que permitem calcular $p(s)$ e $q(s)$, são (pondo $' = d/ds$):

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(s) - x'(s)\,p - t'(s)\,q &=& 0 \\ F(x(s), t(s), u(s);\, p, q) &=& 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcl} a - p &=& 0 \\ q + p^2 &=& 0 \end{array}\right.$$

donde se deduz:

$$p(s) \equiv a, \qquad q(s) \equiv -a^2$$

e portanto a faixa inicial de elementos característicos é:

$$\widetilde{\gamma}(s) = \Big(x = s, t = 0, u = as, p = a, q = -a^2\Big)$$

A condição (1.6.19), é válida $\forall s$, já que:

$$x'(s)\, F_q(\cdot) - t'(s)\, F_p(\cdot) \;=\; p \;=\; 1 \;\neq\; 0, \qquad\qquad \forall s$$

As equações características (1.6.10), são (pondo agora $' = d/d\tau$):

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & F_p \\ t' & = & F_q \\ u' & = & p\,F_p + q\,F_q \\ p' & = & -F_x - p\,F_u \\ q' & = & -F_t - q\,F_u \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2p \\ t' & = & 1 \\ u' & = & 2p^2 + q \\ p' & = & 0 \\ q' & = & 0 \end{array}\right.$$

A curva inicial $\widetilde{\gamma}$, corresponde a $\tau = 0$. Como p e q são constantes ao longo das características, temos que:

$$p(s, \tau) = p(s, 0) = a, \qquad\qquad q(s, \tau) = q(s, 0) = -a^2 \tag{1.6.24}$$

Resolvendo agora as equações características, para x, y e u, usando (1.6.23) e (1.6.24), obtemos:

$$x = x(s, \tau) = 2a\tau + s, \qquad t = t(s, \tau) = \tau, \qquad u = u(s, \tau) = a^2\tau + as$$

Invertendo as duas primeiras equações, obtemos $\tau = t$, $s = x - 2at$, e inserindo na terceira, obtemos finalmente a solução:

$$u = (x - at)\, a$$

que representa uma onda plana que se move com velocidade a (para a direita se $a > 0$, e para a esquerda se $a < 0$, ver a figura 1.6).

Figure 1.6: Onda plana.

- **Exemplo 1.6.3** ... **Equação eiconal da óptica geométrica** em duas variáveis espaciais x, y:

$$\|\nabla u\|^2 = u_x^2 + u_y^2 = n^2$$

onde n é uma constante não nula. Como condição inicial, consideramos a seguinte:

$$u(x, y)\big|_{y=x} = u(x, x) = ax$$

onde a é uma constante.

A curva "inicial" $\boldsymbol{\gamma}$ é dada paramètricamente por:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s) = s, y(s) = s, u(s) = as) \tag{1.6.25}$$

As equações (1.6.18), que permitem completar $\boldsymbol{\gamma}$ numa faixa de elementos característicos, i.e., que permitem calcular $p(s)$ e $q(s)$, são (pondo $' = d/ds$):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'(s) - x'(s)\,p - y'(s)\,q & = & 0 \\ F(x(s), y(s), u(s);\, p, q) & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a - p - q & = & 0 \\ q^2 + p^2 - n^2 & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.6.26}$$

esta última equação diz que o vector $(p/n, q/n)$ é unitário. Seja $\theta \in [0, 2\pi[$, um valor <u>constante</u>, e definamos:

$$p(s) \equiv n\,\cos\theta, \qquad q(s) \equiv n\,\sin\theta$$

Então a segunda equação (1.6.26) é verificada, enquanto que a primeira o será se:

$$\cos\theta + \sin\theta = 2\cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{n}$$

(seleccionaremos uma das soluções θ, desta última equação. Assim, por exemplo, se $a/n = 1$, podemos tomar $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$).

A faixa inicial de elementos característicos é portanto:

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = (x = s, y = s, u = as, p = n\,\cos\theta, q = n\,\sin\theta)$$

onde θ satisfaz $2\cos\theta = a/n$. A condição (1.6.19), requer ainda que:

$$x'(s)\,F_q(\cdot) - y'(s)\,F_p(\cdot) = 2q - 2p = 2(\sin\theta - \cos\theta) \neq 0, \qquad \forall s$$

Como esta expressão se anula apenas quando $\theta = \pi/4$ ou $5\pi/4$, devemos excluir estes valores de θ, bem como os valores de a relacionados, i.e., $a = \pm n\sqrt{2}$.

As equações características (1.6.10), são (pondo agora $' = d/d\tau$):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & F_p \\ y' & = & F_q \\ u' & = & p\,F_p + q\,F_q \\ p' & = & -F_x - p\,F_u \\ q' & = & -F_y - q\,F_u \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 2p \\ y' & = & 2q \\ u' & = & 2p^2 + 2q^2 \\ p' & = & 0 \\ q' & = & 0 \end{array} \right.$$

A curva inicial $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$, corresponde a $\tau = 0$. Como p e q são constantes ao longo das características, temos que:

$$p(s, \tau) = p(s, 0) = n\,\cos\theta, \qquad q(s, \tau) = q(s, 0) = n\,\sin\theta \tag{1.6.27}$$

Resolvendo agora as equações características, para x, y e u, usando (1.6.25) e (1.6.27), obtemos:

$$x = x(s, \tau) = s + 2n\tau\,\cos\theta, \quad y = y(s, \tau) = s + 2n\tau\,\sin\theta, \quad u = u(s, \tau) = 2n^2\tau + (\sin\theta + \cos\theta)n\,s$$

Invertendo as duas primeiras equações, obtemos:

$$\tau = \frac{y - x}{2n(\sin\theta - \cos\theta)}, \qquad s = \frac{x\sin\theta - y\cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

e inserindo na terceira, obtemos finalmente a solução (uma onda plana):

$$u = n\,(x\cos\theta + y\sin\theta) \tag{1.6.28}$$

No contexto da óptica geométrica, se $u = u(x, y)$ é uma solução da equação eiconal, as linhas de nível $u(x, y) =$ constante, representam as **frentes de onda**, enquanto que a projecção das características no plano xy, isto é, as curvas $\tau \mapsto (x(\tau, s), y(\tau, s))$, para cada s fixo, representam os **raios de luz**. No caso anteriormente analisado, as linhas de nível da solução (1.6.28), são linhas rectas. Note que a normal a uma frente de onda $u(x, y) =$ constante, é o vector $\nabla u = (u_x, u_y) = (p, q)$, enquanto que a tangente a um raio de luz é $(x', y') = 2(p, q)$. Portanto os raios de luz são ortogonais às frentes de onda.

A intensidade da luz é caracterizada pela convergência ou divergência dos raios de luz. Um ponto (x_o, y_o) onde convergem todos os raios de luz diz-se um **foco**. É pois um ponto de elevada intensidade luminosa. Outras regiões de elevada intensidade luminosa são as chamadas **cáusticas**, i.e., curvas no plano xy, que são envolventes dos raios de luz.

1.7 Apêndice

1.7.1 Grupos a um parâmetro de difeomorfismos e geradores infinitesimais

Um **fluxo (global)** em $\mathbb{R}^n$, é uma aplicação C^∞:

$$\mathbf{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{1.7.1}$$

que verifica as duas condições seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{x} \\ \mathbf{\Phi}(\tau, \mathbf{\Phi}(\eta, \mathbf{x})) &= \mathbf{\Phi}(\tau + \eta, \mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

$\forall \tau, \eta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Alternativamente um fluxo $\mathbf{\Phi}$ em $\mathbb{R}^n$, pode ser visto como um **grupo a um parâmetro de difeomorfismos** de $\mathbb{R}^n$, isto é, como um homomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ no grupo $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ dos difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \mathbf{\Phi} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \text{Diff}(\mathbb{R}^n) \\ & \tau & \longmapsto & \mathbf{\Phi}_\tau \end{array}}$$

que verifica as condições seguintes:

$$\mathbf{\Phi}_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} \qquad \mathbf{\Phi}_\tau \circ \mathbf{\Phi}_\eta = \mathbf{\Phi}_{\tau+\eta} \qquad \mathbf{\Phi}_{-\tau} = \mathbf{\Phi}_\tau^{-1} \tag{1.7.3}$$

Para cada $\tau \in \mathbb{R}$ fixo, o difeomorfismo $\mathbf{\Phi}_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se a "aplicação de avanço no tempo τ". Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, a curva:

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \tau & \longmapsto & \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Phi}_\tau(\mathbf{x}) \end{array}} \tag{1.7.4}$$

chama-se a **linha de fluxo** ou **curva integral** que passa em $\mathbf{x}$. A imagem $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n$ diz-se a **órbita** de $\mathbf{x}$.

Por cada ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ passa uma única órbita. De facto a relação $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{\Phi}_\tau(\mathbf{x})$, para algum $\tau \in \mathbb{R}$, é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^n$, cujas classes de equivalência são exactamente as órbitas do fluxo. Por outro lado, é possível mostrar que uma linha de fluxo apenas pode ser de um e um só dos seguintes tipos:

- uma imersão injectiva.
- uma imersão periódica, i.e., $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é imersão e existe algum $p > 0$ tal que $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x}(\tau + p) = \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x}(\eta)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$.
- constante. Neste caso $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x}(\tau) \equiv \mathbf{x}$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ diz-se um **ponto fixo**.

Quando temos um fluxo em $\mathbb{R}^n$ e U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, em geral as linhas de fluxo dos pontos de U não permanecem em U quando o "tempo" τ avança. No entanto, por continuidade, podemos afirmar que dado $\mathbf{x} \in U$, a linha de fluxo $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{x}$ deve permanecer em U durante algum pequeno intervalo de tempo $I_\mathbf{x} \subset \mathbb{R}$ com $0 \in I_\mathbf{x}$. Isto conduz-nos à seguinte definição:

- **Definição 1.7.1** ... *Um* **fluxo local** *ou um* **grupo local a um parâmetro de difeomorfismos** *em* $\mathbb{R}^n$*, é uma aplicação* C^∞*:*

$$\mathbf{\Phi} : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{1.7.5}$$

definida num aberto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, que verifica as condições seguintes* (ver a figura 1.7)*:*

– $\mathcal{O}$ *contem* $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ *e para cada* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *a intersecção* $I_{\mathbf{x}} \stackrel{def}{=} \mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{\mathbf{x}\})$ *é conexa.*

– $\boldsymbol{\Phi}$ *satisfaz:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(0,\mathbf{x}) &= \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\Phi}(\tau, \boldsymbol{\Phi}(\eta,\mathbf{x})) &= \boldsymbol{\Phi}(\tau+\eta,\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

$\forall \tau, \eta, \mathbf{x}$ *para os quais ambos os membros estão definidos.*

Figure 1.7: Fluxo local

Claramente que um fluxo local para o qual $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é um fluxo (global). Note que para um fluxo local não podemos em geral falar do difeomorfismo $\boldsymbol{\Phi}_\tau$ uma vez que para um $\tau \neq 0$ fixo, a aplicação $\mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\Phi}_\tau(\mathbf{x})$ pode não estar definida em todo o $\mathbb{R}^n$. A linha de fluxo $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}} : \tau \mapsto \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}_\tau(\mathbf{x})$ que passa em $\mathbf{x}$, agora está definida num intervalo aberto $I_{\mathbf{x}} = \mathcal{O} \cap (\mathbb{R} \times \{\mathbf{x}\})$ de $\mathbb{R}$ que contem 0.

- **Exemplo 1.7.1** ... O fluxo em $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\Phi}: \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\tau,(x,y)) & \longmapsto & \boldsymbol{\Phi}(\tau,(x,y)) = (x+\tau, y) \end{array}$$

é global. Mas não podemos definir um fluxo global em $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, por restrição de $\boldsymbol{\Phi}$ a $\mathbb{R} \times U$, uma vez que os pontos do conjunto fechado $F = \{(\tau,(x,0)) : \tau + x = 0\} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(0,0)$ são transformados por $\boldsymbol{\Phi}$ em $(0,0)$.

No entanto se definirmos o aberto $\mathcal{O} = (\mathbb{R} \times U) - (F \cap (\mathbb{R} \times U))$ então $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}|_{\mathcal{O}}$ é um fluxo local em U. Para cada ponto $\mathbf{x} = (x,y) \in U$, com $y \neq 0$, a respectiva órbita (a imagem da linha de fluxo $\tau \mapsto \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(\tau) = \boldsymbol{\Phi}_\tau(\mathbf{x})$ é a recta $y \equiv$ constante em U. Se $\mathbf{x} = (x,0) \in U$, a respectiva órbita é a parte do eixo dos xx (menos a origem) que contem $\mathbf{x}$. Esta linha de fluxo não está definida em todo o $\mathbb{R}$.

- **Exemplo 1.7.2** ... Se $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ e $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, o fluxo $\boldsymbol{\Phi}(t,z) = e^{it}z$ é global. $0 \in \mathbb{C}$ é ponto fixo e as outras órbitas são circunferências concêntricas centradas na origem.

$\blacksquare$.

Dado um grupo (local ou global) a um parâmetro de difeomorfismos $\mathbf{\Phi}$, em $\mathrm{I\!R}^n$, ao campo de vectores:

$$\boxed{\mathbf{X} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\alpha}'_{\mathbf{x}}(0) \in T_{\mathbf{x}}\mathrm{I\!R}^n} \tag{1.7.7}$$

chama-se o **campo de velocidades** ou o **gerador infinitesimal** de $\mathbf{\Phi}$ (ver a figura 1.8). Recìprocamente, temos o teorema fundamental seguinte:

Figure 1.8: Campo de velocidades de um fluxo

Teorema 1.7.1 **"Teorema da integrabilidade para campos de vectores"** ... *Todo o campo de vectores* $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathrm{I\!R}^n)$ *é gerador infinitesimal de um único grupo a um parâmetro de difeomorfismos maximal* $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}$ *em* $\mathrm{I\!R}^n$. *Quando* $\mathbf{X}$ *tem suporte compacto,* $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}$ *é um grupo a um parâmetro de difeomorfismos global.*

– Dem. ... (esboço) ... O teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias implica que, para cada $\mathbf{x} \in \mathrm{I\!R}^n$ existe um intervalo aberto maximal $I_{\mathbf{x}} \subset \mathrm{I\!R}$, que contem 0, e uma única curva integral $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}} : I_{\mathbf{x}} \to \mathrm{I\!R}^n$ de $\mathbf{X}$, tal que $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$. Definimos então:

$$\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau, \mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(\tau) \tag{1.7.8}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}$ é a única curva integral $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}} : I_{\mathbf{x}} \to \mathrm{I\!R}^n$ de $\mathbf{X}$, acima referida. $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau, \mathbf{x})$ é uma função de classe C^∞, atendendo ao teorema da dependência diferenciável das soluções de equações diferenciais ordinárias, relativamente às condições iniciais. Além disso, se $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}$ está definida em $(\tau, \mathbf{x})$ também está definida para $(\eta, \mathbf{y})$ próximo.

As condições $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\eta, \mathbf{x})) = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau + \eta, \mathbf{x})$ deduzem-se do facto de que, para cada $\mathbf{y} \in \mathrm{I\!R}^n$, $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}\Big|_{I_{\mathbf{y}} \times \{\mathbf{y}\}}$ é uma curva integral de $\mathbf{X}$. Com efeito, por (1.7.8) vem que $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(0, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$. Por outro lado:

$$\tau \longmapsto \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau + \eta, \mathbf{x}) \qquad \text{e} \qquad \tau \longmapsto \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\eta, \mathbf{x}))$$

(para todo o τ para o qual estão definidas) são duas curvas integrais maximais de $\mathbf{X}$, que no instante $\tau = 0$ passam ambas em $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\eta, \mathbf{x})$, e por unicidade coincidem portanto. Resta mostrar que:

$$\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathrm{I\!R}^n} I_{\mathbf{x}} \times \{\mathbf{x}\}$$

é um aberto que contem $\{0\} \times \mathrm{I\!R}^n$ (claro!), e que $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}$ é diferenciável. A demonstração completa destes factos pode ser vista em [Sp], vol.1, por exemplo.

Suponhamos finalmente que $K = supp(\mathbf{X})$ é compacto. Então o compacto $\{0\} \times K$ tem distância positiva relativamente ao conjunto fechado disjunto $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) - \mathcal{O}$ (se este fôr não vazio!). Portanto $[-\epsilon, \epsilon] \times K \subset \mathcal{O}$, para algum $\epsilon > 0$. Se $x \notin K$ então $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = 0$, e por isso $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall \tau$ e $\mathbb{R} \times \{\mathbf{x}\} \subset \mathcal{O}$. Portanto $[-\epsilon, \epsilon] \times \mathbb{R}^n \subset \mathcal{O}$. Como $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau+\epsilon, \mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\tau, \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}(\epsilon, \mathbf{x}))$ existe para $|\tau| \geq \epsilon$, temos que $[-2\epsilon, 2\epsilon] \times \mathbb{R}^n \subset \mathcal{O}$, e repetindo este argumento obtemos finalmente que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathcal{O}$.

$\blacksquare$.

- **Exemplo 1.7.3** ... Consideremos o grupo a um parâmetro de difeomorfismos, em $\mathbb{R}^2$, dado por:

$$\mathbf{\Phi}_\tau(x, y) = (e^\tau\, x, e^{2\tau}\, y)$$

que representa um grupo a um parâmetro de dilatações, de "peso" $(1, 2)$, em $\mathbb{R}^2$. Neste caso:

$$\boldsymbol{\alpha}_{(x,y)}(\tau) = \left(e^\tau\, x, e^{2\tau}\, y\right)$$

e:

$$\boldsymbol{\alpha}'_{(x,y)}(\tau) = \left(e^\tau\, x, 2e^{2\tau}\, y\right)$$

Como $\mathbf{X}(x, y) = \boldsymbol{\alpha}'_{(x,y)}(0)$, vem que:

$$\boxed{\mathbf{X}(x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}}$$

A equação diferencial correspondente ao grupo a um parâmetro de difeomorfismos, acima referido, tem a forma seguinte:

$$(x'(\tau), y'(\tau)) = (x(\tau), 2y(\tau))$$

ou, com uma notação mais simplificada $(x', y') = (x, 2y)$. Podemos ainda escrever esta equação diferencial, na forma matricial seguinte:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **Exemplo 1.7.4** ... Consideremos o grupo a um parâmetro de difeomorfismos, em $\mathbb{R}^3$, dado por:

$$\mathbf{\Phi}_\tau(x, y, z) = (x \cos\tau + y \sin\tau, y \cos\tau - x \sin\tau, z + \tau)$$

que representa um grupo a um parâmetro de movimentos helicoidais, em torno do eixo dos zz, em $\mathbb{R}^3$. Neste caso:

$$\boldsymbol{\alpha}_{(x,y,z)}(\tau) = (x \cos\tau + y \sin\tau, y \cos\tau - x \sin\tau, z + \tau)$$

e:

$$\boldsymbol{\alpha}'_{(x,y,z)}(\tau) = (-x \sin\tau + y \cos\tau, -y \sin\tau - x \cos\tau, 1)$$

e a expressão do gerador infinitesimal é:

$$\boxed{\mathbf{X}(x, y, z) = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}}$$

A equação diferencial correspondente a este grupo a um parâmetro de difeomorfismos, tem a forma seguinte (com notação simplificada):

$$(x', y', z') = \mathbf{X}(x, y, z) = (y, -x, 1)$$

Podemos ainda escrever esta equação diferencial, na forma matricial seguinte:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Exemplo 1.7.5** ... Consideremos os campos em $\mathbb{R}^2$ do tipo:

$$\boxed{\mathbf{X}(x, y) = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}}$$

O respectivo grupo a um parâmetro de difeomorfismos global é:

$$\mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}(x, y) = (e^{a\tau}\, x, e^{b\tau}\, y)$$

- **Exemplo 1.7.6** ... Consideremos o campo em $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\mathbf{X}(x, y) = (ax - cy)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + ay)\frac{\partial}{\partial y}}$$

O respectivo grupo a um parâmetro de difeomorfismos global é:

$$\mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}(x, y) = e^{a\tau} \begin{bmatrix} \cos(c\tau) & -\sin(c\tau) \\ \sin(c\tau) & \cos(c\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

é a composta de uma homotetia de razão $e^{a\tau}$ com uma rotação de centro 0 e ângulo $c\tau$.

■.

Um campo de vectores $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ define uma derivação da álgebra $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, i.e., uma aplicação $\mathbb{R}$-linear:

$$\mathbf{X} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

definida por:

$$(\mathbf{X}f)(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}_\mathbf{x}(f) = df_\mathbf{x}(\mathbf{X}(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1.7.9}$$

que verifica:

$$\mathbf{X}(fg) = f\mathbf{X}(g) + g\mathbf{X}(f) \tag{1.7.10}$$

e que é local, no sentido em que:

$$\mathbf{X}|_U(f|_U) = (\mathbf{X}f)|_U \tag{1.7.11}$$

Recíprocamente, é possível provar que toda a derivação $\mathcal{D}$ em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz (1.7.11), define um campo de vectores em $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ são vistos como derivações em $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então:

$$\boxed{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{XY} - \mathbf{YX} \qquad \text{(parêntisis de Lie de } \mathbf{X} \text{ e } \mathbf{Y})} \tag{1.7.12}$$

é ainda uma derivação de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que pela observação anterior, define um campo de vectores em $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ que se chama o **parêntisis de Lie** de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. O parêntisis de Lie define uma aplicação $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ que é $\mathbb{R}$-bilinear e que verifica as seguintes propriedades:

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{X},\mathbf{X}] = \mathbf{0} \\
&[\mathbf{X},[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y},[\mathbf{Z},\mathbf{X}]] + [\mathbf{Z},[\mathbf{X},\mathbf{Y}]] = 0 \qquad \underline{\textbf{“identidade Jacobi”}}
\end{aligned} \tag{1.7.13}
$$

e que portanto mune $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ de estrutura de álgebra de Lie.

Além disso:

$$\boxed{[f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}] = fg[\mathbf{X},\mathbf{Y}] + f(\mathbf{X}g)\mathbf{Y} - g(\mathbf{Y}f)\mathbf{X}} \tag{1.7.14}$$

onde, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ designa o campo $(f\mathbf{X})(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x})$.

- **Teorema 1.7.2 Teorema da rectificação local para campos de vectores** ...

  - **(i).** *Seja* $\mathbf{X}$ *um campo de vectores* C^∞*, definido numa vizinhança de um ponto* $\mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$*, e tal* $\mathbf{X}(\mathbf{x}_o) \neq 0$*. Então existem coordenadas locais* $(r^1, \cdots, r^n)$*, definidas numa vizinhança* U *de* $\mathbf{x}_o$*, e tais que:*

    $$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial r^1} \qquad \text{em } U$$

    Mais geralmente:

  - **(ii).** *Sejam* $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_k$ *campos de vectores* C^∞*, definidos e* **linearmente independentes** *numa vizinhança de um ponto* $\mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$*. Então se:*

    $$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = 0 \qquad \forall i,j = 1,\cdots,k \tag{1.7.15}$$

    existem coordenadas locais $(r^1, \cdots, r^n)$*, definidas numa vizinhança* U *de* $\mathbf{x}_o$*, tais que:*

    $$\mathbf{X}_i = \frac{\partial}{\partial r^i} \qquad \text{em } U \qquad i = 1,\cdots,k$$

  - Dem. ...

  - (i). Sejam $x^1, \cdots, x^n$, as coordenadas usuais em $\mathbb{R}^n$, relativamente às quais a expressão de $\mathbf{X}$ é:

    $$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n X^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

    Como $\mathbf{X}(\mathbf{x}_o) \neq \mathbf{0}$, pelo menos uma das componentes $X^i(\mathbf{x}_o)$ não se anula. Suponhamos por exemplo que $X^1(\mathbf{x}_o) \neq 0$, o que significa que o campo $\mathbf{X}$ é transversal ao hiperplano $x^1 = x^1_o$, numa vizinhança de $\mathbf{x}_o = (x^1_o, x^2_o, \cdots, x^n_o)$.
    A ideia da prova é agora utilizar o facto de que, por cada ponto $(x^1_o, x^2, \cdots, x^n)$ do hiperplano $x^1 = x^1_o$, passa, no instante $\tau = 0$, uma única curva integral de $\mathbf{X}$, numa vizinhança de $\mathbf{x}_o$. Se $\mathbf{x}$ pertence à curva integral que, no instante $\tau = 0$, passa em $(x^1_o, x^2, \cdots, x^n)$, então $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(x^1_o, x^2, \cdots, x^n)$ para um único τ, e atribuímos a $\mathbf{x}$ as novas coordenadas $(\tau, x^2, \cdots, x^n)$ (ver a figura 1.9).

    Mais detalhadamente, consideremos a **aplicação de rectificação** seguinte:

    $$\boxed{\phi(r^1, \cdots, r^n) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_{r^1}(x^1_o, x^2_o + r^2, \cdots, x^n_o + r^n)} \tag{1.7.16}$$

Figure 1.9: Rectificação local de um campo de vectores.

que está definida e é diferenciável numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n_{r^i}$, e satisfaz:

$$\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{\Phi}_0^{\mathbf{X}}(x_o^1, x_o^2, \cdots, x_o^n) = (x_o^1, x_o^2, \cdots, x_o^n) = \mathbf{x}_o$$

Calculando as derivadas direccionais no ponto $\mathbf{0}$, para $i = 2, \cdots, n$, vem que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial r^i}(\mathbf{0}) &= \lim_{t\to 0} \frac{\phi(0, \cdots, 0, t, 0, \cdots, 0) - \phi(0, \cdots, 0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{\Phi}_0^{\mathbf{X}}(x_o^1, x_o^2, \cdots, x_o^i + t, \cdots, x_o^n) - (x_o^1, x_o^2, \cdots, x_o^n)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x_o^1, x_o^2, \cdots, x_o^i + t, \cdots, x_o^n) - (x_o^1, x_o^2, \cdots, x_o^n)}{t} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{x}_o)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $\mathbf{a} = (a^1, \cdots, a^n)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial r^1}(\mathbf{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{\phi(a^1 + t, a^2, \cdots, a^n) - \phi(a^1, \cdots, a^n)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{\Phi}_{a^1+t}^{\mathbf{X}}(x_o^1, x_o^2 + a^2, \cdots, x_o^n + a^n) - \phi(a^1, \cdots, a^n)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{\Phi}_t^{\mathbf{X}} \circ \mathbf{\Phi}_{a^1}^{\mathbf{X}}(x_o^1, x_o^2 + a^2, \cdots, x_o^n + a^n) - \phi(a^1, \cdots, a^n)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{\Phi}_t^{\mathbf{X}}(\phi(\mathbf{a})) - \phi(\mathbf{a})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{\alpha}_{\phi(\mathbf{a})}(t) - \boldsymbol{\alpha}_{\phi(\mathbf{a})}(0)}{t} \\
&= \mathbf{X}(\phi(\mathbf{a}))
\end{aligned} \tag{1.7.17}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}$ designa a curva integral do fluxo, que, no instante $t = 0$, passa em $\mathbf{x}$. Em particular $\frac{\partial \phi}{\partial r^1}(\mathbf{0}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$, e como suposemos $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0)$ transversal ao hiperplano $x^1 = x_o^1$, o cálculo anterior mostra que a matriz Jacobiana de ϕ tem característica máxima e igual a n, no ponto $\mathbf{0}$, isto é, ϕ é uma parametrização local de uma vizinhança de $\mathbf{x}_o$, e portanto $(r^1, \cdots, r^n)$ podem servir de novas coordenadas para essa vizinhança. Ficou além disso provado, atendendo a (1.7.17), que:

$$d\phi_{\mathbf{a}}\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial r^1}(\mathbf{a}) = \mathbf{X}(\phi(\mathbf{a})) \tag{1.7.18}$$

como se pretendia.

– (ii). Para facilitar a prova, escolhemos coordenadas lineares $(x^1, \cdots, x^n)$, em $\mathbb{R}^n$, relativamente a uma base conveniente, de tal forma a que $\mathbf{x}_o = \mathbf{0}$, e ainda:

$$\mathbf{X}_i(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{0}) \qquad\qquad i = 1, \cdots, k$$

(se necessário fazemos uma mudança linear de coordenadas). Suponhamos agora que $\mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}_i}$ é o fluxo local de cada campo $\mathbf{X}_i$, e consideremos a **aplicação de rectificação**:

$$\boxed{\phi(r^1, \cdots, r^n) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{\Phi}_{r^1}^{\mathbf{X}_1} \circ \mathbf{\Phi}_{r^2}^{\mathbf{X}_2} \circ \cdots \circ \mathbf{\Phi}_{r^k}^{\mathbf{X}_k})(0, \cdots, 0, r^{k+1}, \cdots, r^n)}$$

que está definida e é diferenciável numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n_{r^i}$. Calculando de forma análoga à parte (i), obtemos:

$$d\phi_{\mathbf{0}}\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right) = \begin{cases} \mathbf{X}_i(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial r^i}(\mathbf{0}) & \text{para} \quad i = 1, \cdots, k \\ \frac{\partial}{\partial r^i}\big|_{\mathbf{0}} & \text{para} \quad i = k+1, \cdots, n \end{cases}$$

o que significa que a diferencial $d\phi_{\mathbf{0}}$ é a identidade e portanto, ϕ é uma parametrização de uma certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n_{x^i}$. Além disso:

$$d\phi_{\mathbf{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\right) = \mathbf{X}_1(\phi(\mathbf{r})$$

para $\mathbf{r}$ perto de $\mathbf{0}$, tal como em (i). Note que até aqui, não foi usada a hipótese (1.7.15). Mas esta hipótese é equivalente à comutação dos fluxos $\mathbf{\Phi}_t^{\mathbf{X}_i}$, $(i = 1, \cdots, k)$, e em particular vemos que, para cada $i = 1, \cdots, k$, ϕ pode também ser escrita na forma:

$$\phi(r^1, \cdots, r^n) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{\Phi}_{r^i}^{\mathbf{X}_i} \circ \mathbf{\Phi}_{r^1}^{\mathbf{X}_1} \circ \cdots \circ \mathbf{\Phi}_{r^k}^{\mathbf{X}_k})(0, \cdots, 0, r^{k+1}, \cdots, r^n)$$

e o argumento anterior mostra que:

$$d\phi_{\mathbf{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right) = \mathbf{X}_i(\phi(\mathbf{r}) \qquad\qquad i = 1, \cdots, k$$

■.

- <u>**Exemplo**</u> **1.7.7** ... Consideremos o campo em $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\mathbf{X}(x, y) = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}}$$

Perto de um ponto $(a, b) \neq (0, 0)$, o campo $\mathbf{X}$ não se anula e pode por isso ser rectificado. Se $a \neq 0$, $\mathbf{X}$ é transversal ao eixo dos yy, e a aplicação de rectificação (1.7.16), é neste caso (com mudanças óbvias de notações):

$$\phi(r, s) = \mathbf{\Phi}_r^{\mathbf{X}}(a, b + s)$$

definida numa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2_{rs}$. O fluxo de $\mathbf{X}$ foi calculado anteriormente:

$$\mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}(x, y) = (e^\tau x, e^\tau y)$$

e portanto:

$$\phi(r, s) = \mathbf{\Phi}_r^{\mathbf{X}}(a, b + s) = (e^r a, e^r(b + s))$$

Podemos verificar directamente a condição (1.7.18):

$$d\phi_{(r,s)}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \begin{bmatrix} ae^r & 0 \\ (b+s)e^r & e^r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^r \\ (b+s)e^r \end{bmatrix} = (ae^r)\frac{\partial}{\partial x} + (b+s)e^r\frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{X}(\phi(r, s))$$

- **Exemplo 1.7.8** ... Consideremos o campo em $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\mathbf{X}(x,y) = -y\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial y}}$$

Perto de um ponto $(a,b) \neq (0,0)$, o campo $\mathbf{X}$ não se anula e pode por isso ser rectificado. Se $b \neq 0$, $\mathbf{X}$ é transversal ao eixo dos yy, e a aplicação de rectificação (1.7.16), é neste caso:

$$\phi(r,s) = \mathbf{\Phi}_r^{\mathbf{X}}(a, b+s)$$

definida numa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2_{rs}$. O fluxo de $\mathbf{X}$ foi calculado anteriormente:

$$\mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\phi(r,s) = \mathbf{\Phi}_r^{\mathbf{X}}(a,b+s) = (a\,\cos r - (b+s)\,\sin r, a\,\sin r + (b+s)\,\cos r)$$

$\blacksquare$.

Na prática, não há motivo nenhum para impôr que $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_o$. Assim, no último exemplo, as coordenadas polares usuais para $\mathbb{R}^2$:

$$\psi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

são também "boas" coordenadas na vizinhança de um qualquer ponto diferente de $\mathbf{0}$, e rectificam o campo $\mathbf{X}$, que é, como já vimos, o gerador infinitesimal de uma rotação plana em torno da origem. Com efeito:

$$d\psi_{(r,\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{X}(\psi(r,\theta))$$

- **Exemplo 1.7.9** ... Consideremos o grupo local a um parâmetro de inversões em $\mathbb{R}^2$, dado por:

$$\boxed{\mathbf{\Phi}_\tau(x,y) = \left(\tfrac{x}{1-\tau x}, \tfrac{y}{1-\tau x}\right)}$$

O seu gerador infinitesimal calcula-se da seguinte forma:

$$\mathbf{X}(x,y) = \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\left(\frac{x}{1-\tau x}, \frac{y}{1-\tau x}\right) = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}$$

e é portanto igual a :

$$\boxed{\mathbf{X}(x,y) = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}} \tag{1.7.19}$$

Vamos rectificar este campo na vizinhança de um ponto $\mathbf{x}_o = (a,b)$, onde $a \neq 0$. A aplicação de rectificação (1.7.16), é neste caso:

$$\begin{aligned} \phi(r,s) &= \mathbf{\Phi}_r^{\mathbf{X}}(a,b+s) \\ &= \left(\frac{a}{1-ra}, \frac{b+s}{1-ra}\right) \end{aligned}$$

Mais uma vez não há motivo nenhum para impôr que $\phi(\mathbf{0}) = (a, b)$. Aliás, por uma mudança linear de coordenadas podemos supôr que $a = 1$ e $b = 0$, o que simplifica ψ, que fica com o aspecto seguinte:

$$\phi(r, s) = \left(\frac{1}{1-r}, \frac{s}{1-r}\right)$$

e tomando $-r$ em vez de $1 - r$, obtemos ainda mais a simplificação seguinte:

$$\phi(r, s) = \left(-\frac{1}{r}, -\frac{s}{r}\right)$$

Calculando:

$$d\phi_{(r,s)}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \begin{bmatrix} 1/r^2 & 0 \\ s/r^2 & 1/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/r^2 \\ s/r^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{s}{r^2}\frac{\partial}{\partial y} = \mathbf{X}(\phi(r, s))$$

■.

O difeomorfismo de rectificação:

$$\phi : \mathbb{R}^n_{r^i} \longrightarrow \mathbb{R}^n_{x^i}$$

fica definido pela condição seguinte:

$$d\phi_{\mathbf{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\right) = \mathbf{X}\left(\phi\left(\mathbf{r}\right)\right)$$

Mais concretamente, se:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{r} = (r^1, \cdots, r^n) & \longmapsto & \left(x^1(r^1, \cdots, r^n), \cdots, x^n(r^1, \cdots, r^n)\right) \end{array} \tag{1.7.20}$$

e se:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X^i(x^1, \cdots, x^n)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.7.21}$$

então a condição anterior traduz-se na seguinte:

$$\frac{\partial x^i}{\partial r^1}\left(r^1; r^2 \cdots, r^n\right) = X^i\left(x^1\left(r^1; r^2 \cdots, r^n\right), \cdots, x^n\left(r^1; r^2 \cdots, r^n\right)\right), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1.7.22}$$

Olhando para r^1 como uma variável e para $r^2, \cdots, r^n$ como parâmetros, o sistema (1.7.22) representa um sistema de ODE's com $n - 1$ parâmetros, que devemos resolver impondo a condição inicial:

$$x^i(0; r^2 \cdots, r^n) = r^i, \qquad i = 2, \cdots, n \tag{1.7.23}$$

- **Exemplo 1.7.10** ... Consideremos de novo o campo:

$$\boxed{\mathbf{X}(x, y) = x^2\,\frac{\partial}{\partial x} + xy\,\frac{\partial}{\partial y}}$$

O difeomorfismo de rectificação será:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r, s) & \longmapsto & (x(r, s), y(r, s)) \end{array}$$

onde as respectivas componentes são determinadas pelo sistema de ODE's, parametrizado por s:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r}(r;s) &= x^2(r;s) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r;s) &= x(r;s)y(r;s) \\ x(-1;s) &= 1 \\ y(-1;s) &= s \end{cases}$$

Note que $\mathbf{X}(0,y) = \mathbf{0}$ e que $\mathbf{X}(x,0) = x^2\,\frac{\partial}{\partial x}$ e portanto o campo não é transversal a qualquer dos eixos. Como, por exemplo, $\mathbf{X}(1,y) = \frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}$ é sempre transversal à recta $x = 1$, impômos as condições iniciais indicadas, que são as que simplificam mais os cálculos.

A primeira equação dá $x(r;s) = \frac{-1}{r+c(s)}$. Como $1 = x(-1;s) = \frac{-1}{-1+c(s)}$, vem que $c(s) = 0$, e portanto $x(r,s) = \frac{-1}{r}$. A segunda equação dá então $\frac{\partial y}{\partial r}(r;s) = \frac{-1}{r}\,y(r;s)$, donde $y(r;s) = \frac{d(s)}{r}$. Como $s = y(-1;s) = \frac{d(s)}{-1}$, vem que $d(s) = -s$ e portanto $y(r;s) = \frac{-s}{r}$. Obtemos assim o resultado já deduzido antes:

$$\phi(r,s) = \left(\frac{-1}{r}, \frac{-s}{r}\right)$$

■.

Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo (local) e se $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é um campo de vectores em $\mathbb{R}^n$, define-se um novo campo de vectores $F_*\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, chamado a **imagem de X por** F (ou o "push-forward" de $\mathbf{X}$ por F), através de:

$$\boxed{F_*\mathbf{X}(\mathbf{y}) = dF_{\mathbf{x}}\left(\mathbf{X}(\mathbf{x})\right), \qquad \text{onde } \mathbf{y} = F(\mathbf{x})} \tag{1.7.24}$$

- **Proposição 1.7.1** ... *Se $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ gera o grupo (local) a um parâmetro de difeomorfismos $\mathbf{\Phi}_\tau = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau$, então o campo $F_*\mathbf{X}$ gera o grupo (local) $F \circ \mathbf{\Phi}_\tau \circ F^{-1}$:*

$$\boxed{\mathbf{\Phi}^{F_*\mathbf{X}}_\tau = F \circ \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau \circ F^{-1}} \tag{1.7.25}$$

Em particular, $F_*\mathbf{X} = \mathbf{X}$ se e só se $F \circ \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau \circ F$.

– Dem. ... ... Com efeito, designemos por $\tau \mapsto \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(\tau)$, a única curva integral de $\mathbf{X}$, que, no instante $\tau = 0$ passa em $\mathbf{x}$. Então, como já vimos, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(\tau)$ e $\boldsymbol{\alpha}'_{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{X}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(\tau)\right)$. Vem então que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} F\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(x)\right) &= \frac{d}{d\tau}\left(F \circ \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}\right)(\tau) \\ &= dF_{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{x}}(\tau)}\left(\boldsymbol{\alpha}'_{\mathbf{x}}(\tau)\right) \\ &= dF_{\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(\mathbf{x})}\left(\mathbf{X}\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(\mathbf{x})\right)\right) \\ &= (F_*\mathbf{X})\left(F\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(\mathbf{x})\right)\right) \end{aligned} \tag{1.7.26}$$

e como $F\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_0(\mathbf{x})\right) = F(\mathbf{x})$, concluímos que $\tau \mapsto F\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(x)\right)$ é uma curva integral do campo de vectores $F_*\mathbf{X}$, que, no instante $\tau = 0$, passa em $F(\mathbf{x})$. Portanto:

$$F\left(\mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau(\mathbf{x})\right) = \mathbf{\Phi}^{F_*\mathbf{X}}_\tau(F(\mathbf{x})) \qquad \Rightarrow \qquad F \circ \mathbf{\Phi}^{\mathbf{X}}_\tau = \mathbf{\Phi}^{F_*\mathbf{X}}_\tau \circ F$$

■.

Vamos agora introduzir algumas derivadas de Lie ao longo de um campo de vectores $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Nomeadamente para cada $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se $\mathbf{\Phi}_\tau = \mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}$ designa o respectivo fluxo (local), define-se a:

- **Derivada de Lie de uma função** $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\boxed{\mathcal{L}_X f(x) = \mathbf{X}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\mathbf{\Phi}_\tau(\mathbf{x})) = \mathbf{X}(\mathbf{x})f = D_{\mathbf{X}(\mathbf{x})}f} \tag{1.7.27}$$

- **Derivada de Lie de um campo de vectores** $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{d}{dt}\Big|_{\tau=0} d(\mathbf{\Phi}_{-\tau})_{\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}\left[\mathbf{Y}_{\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})}\right]} \tag{1.7.28}$$

É possível mostrar que são válidas as propriedades seguintes (ver [Spivak, vol.1, Cap. 5]):

–

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \qquad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)}$$

– Sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ dois campos de vectores C^∞, e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ um ponto onde $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ não se anulam. Defina-se para τ suficientemente pequeno, a curva $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\boldsymbol{\gamma}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Phi}_{-\tau}^{\mathbf{Y}}\mathbf{\Phi}_{-\tau}^{\mathbf{X}}\mathbf{\Phi}_{\tau}^{\mathbf{Y}}\mathbf{\Phi}_{\tau}^{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

Então:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_{\mathbf{x}} = \lim_{\tau \to 0} \boldsymbol{\gamma}'(\sqrt{\tau})$$

– Se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, então as condições seguintes são equivalentes:
  * $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$
  * $(\mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}})_*\mathbf{Y} = \mathbf{Y}$, sempre que definidos.
  * $\mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}} \circ \mathbf{\Phi}_\eta^{\mathbf{Y}} = \mathbf{\Phi}_\eta^{\mathbf{Y}} \circ \mathbf{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}$, sempre que definidos.

1.7.2 Distribuições. Teorema de Frobenius

Uma **distribuição** ou **sistema diferencial** $\mathcal{D}$ de dimensão k, num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que, a cada ponto $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, associa um subespaço $\mathcal{D}_{\mathbf{x}}$, de dimensão k, em $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$.

Diz-se que um campo de vectores $\mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(U)$ pertence à distribuição $\mathcal{D}$, se $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}}$, $\forall \mathbf{x} \in U$. É claro que, se $\mathbf{Z}$ pertence à distribuição $\mathcal{D}$, também o campo $f\mathbf{Z}$ pertence a $\mathcal{D}$, $\forall f \in C^\infty(U)$. Portanto o conjunto dos campos que pertencem a $\mathcal{D}$ tem estrutura de módulo sobre $C^\infty(U)$, que representamos por $\Gamma(\mathcal{D})$. Uma distribuição será de classe C^∞ se, na vizinhança de cada ponto de U, existirem k campos de vectores de classe C^∞ que, em cada ponto $\mathbf{x}$, constituam uma base de $\mathcal{D}_{\mathbf{x}}$.

Uma distribuição $\mathcal{D}$ em $\mathbb{R}^n$ diz-se **involutiva** se verifica a condição:

$$[\Gamma(\mathcal{D}), \Gamma(\mathcal{D})] \subseteq \Gamma(\mathcal{D}) \tag{1.7.29}$$

isto é, $\Gamma(\mathcal{D})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Uma distribuição $\mathcal{D}$ em $\mathbb{R}^n$ diz-se **completamente integrável** se, na vizinhança de cada ponto de $U \subseteq \mathbb{R}^n\mathbb{R}^n$, existem coordenadas locais $r^1, \cdots, r^n$, tais que os campos de vectores coordenados:

$$\frac{\partial}{\partial r^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial r^k}$$

constituem uma base local para $\mathcal{D}$, isto é, $\forall \mathbf{x}$, $\{\frac{\partial}{\partial r^i}|_x\}_{i=1,\cdots,k}$ é uma base para $\mathcal{D}_x \subset T_x\mathbb{R}^n$.

Uma **variedade integral de dimensão** ℓ da distribuição $\mathcal{D}$, é uma subvariedade imersa conexa (S, ϕ), definida num aberto $S \subseteq \mathbb{R}^\ell$, que verifica a condição:

$$d\phi_{\mathbf{u}}(T_{\mathbf{u}}S) \subseteq \mathcal{D}_{\phi(\mathbf{u})} \qquad \forall \mathbf{u} \in S \tag{1.7.30}$$

Quando uma distribuição $\mathcal{D}$ de dimensão k, em $\mathbb{R}^n$ é completamente integrável, então localmente, na vizinhança de cada ponto $\mathbf{x} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, existem sempre variedades integrais de dimensão máxima $\ell = k$. De facto, se $r^1, \cdots, r^n$ são coordenadas locais em torno de $\mathbf{x}$, que "rectificam" a distribuição $\mathcal{D}$, então as equações:

$$(r^{k+1} \circ \Phi^{-1})(\mathbf{x}) = c_{k+1}, \; \cdots, (r^n \circ \Phi^{-1})(\mathbf{x}) = c_n$$

definem uma família a $(n-k)$-parâmetros de subvariedades de dimensão k, que são variedades integrais de $\mathcal{D}$ (uma para cada escolha de $c = (c_{k+1}, \cdots, c_n)$). Além disso, por cada ponto $x \in U$ passa uma variedade integral desse tipo.

- **Exemplo 1.7.11** ... Os campos de vectores:

$$\mathbf{Z}_1 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{Z}_2 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{Z}_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, geram uma distribuição de dimensão 2 em $U = \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, que é involutiva já que:

$$[\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2] = \mathbf{Z}_3, \qquad [\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3] = \mathbf{Z}_1, \qquad [\mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_1] = \mathbf{Z}_2$$

e completamente integrável, uma vez que admite variedades integrais de dimensão máxima 2, que são as esferas concêntricas centradas na origem, em $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$.

- **Exemplo 1.7.12** ... A distribuição $\mathcal{D}$ de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, onde $\mathcal{D}_{(x,y,z)}$ é igual ao plano perpendicular ao vector $\mathbf{n}(x, y, z) = (y, -x, 1)$ (com a identificação usual $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$), não admite variedades integrais de dimensão máxima 2 (superfícies) que passem em $\mathbf{0}$. Se houvesse uma tal superfície, ela seria tangente na origem ao plano xy. No entanto um pequeno lacete nessa superfície, envolvendo o eixo dos zz, não poderia existir. De facto, nem sequer poderia fechar, já que a sua z-coordenada cresce, sempre que se completa uma volta em torno do eixo dos zz.

  Uma base para $\mathcal{D}$ é, por exemplo, constituída pelos campos de vectores:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \qquad\qquad \mathbf{Z}_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}$$

  Note que $[\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2] = -2\frac{\partial}{\partial z} \notin \Gamma(\mathcal{D})$, já que $(0, 0, -2)$ nunca é perpendicular a $\mathbf{n}(x, y, z) = (y, -x, 1)$. Portanto $\mathcal{D}$ não é involutiva.

O conceito de distribuição surge no contexto dos **sistemas de equações às derivadas parciais de primeira ordem homogéneos**, do tipo seguinte:

$$\boxed{\mathbf{Z}_j(f) = 0 \qquad\qquad j = 1, \cdots, k} \tag{1.7.31}$$

onde $\{\mathbf{Z}_i\}_{i=1,\cdots,k}$ é um conjunto de k campos de vectores num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, linearmente independentes em cada ponto. Localmente, num sistema de coordenadas locais (x^i) o sistema escreve-se na forma:

$$\boxed{\sum_i a^i_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = 0 \qquad\qquad j = 1, \cdots, k} \tag{1.7.32}$$

onde $a^i_j \in C^\infty(U)$. O problema consiste em determinar as funções $f(x^1, \cdots, x^n) \in C^\infty(U)$, que satisfaçam o sistema de equações às derivadas parciais de primeira ordem (1.7.32). Uma tal função (se existir) diz-se um **integral primeiro** do sistema (1.7.32).

Em termos geométricos, o conjunto de k campos de vectores em $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{Z}_i\}_{i=1,\cdots,k}$, define uma distribuição $\mathcal{D}$ de dimensão k, em U:

$$\mathcal{D} : \mathbf{x} \longmapsto \mathcal{D}_\mathbf{x} = \langle \mathbf{Z}_1(\mathbf{x}), \cdots, \mathbf{Z}_k(\mathbf{x}) \rangle_\mathbb{R} \tag{1.7.33}$$

e (1.7.31) traduz-se no problema de encontrar uma função $f \in C^\infty(U)$, tal que:

$$\mathbf{Z}(f) = 0 \qquad \forall \mathbf{Z} \in \Gamma(\mathcal{D})$$

ou ainda, tal que:

$$df_\mathbf{x}(\mathcal{D}_\mathbf{x}) = 0 \qquad\qquad \forall \mathbf{x} \in U$$

Note que, se $\mathcal{D}$ admite variedades integrais (conexas), então f será constante em cada variedade integral (daí o nome "integral primeiro" para f).

Dada uma distribuição $\mathcal{D}$ de dimensão k, em $U \subseteq \mathbb{R}^n$, põe-se naturalmente o problema de determinar variedades integrais para $\mathcal{D}$, a partir de integrais primeiros. Assim suponhamos que é possível encontrar um tal f, tal que $df_x \neq 0$, $\forall x$. As hipersuperfícies de nível:

$$N_f(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in U : f(\mathbf{x}) \equiv c\} \qquad\qquad c \in f(U) \subseteq \mathbb{R}$$

verificam evidentemente a condição:

$$\mathcal{D}_\mathbf{x} \subseteq T_\mathbf{x}(N_f(c))$$

Portanto, se existir uma variedade integral, ela estará contida em algum $N_f(c)$.

Mais geralmente, se fôr possível encontrar $(n-k)$ integrais primeiros $f^1, \cdots, f^{n-k}$, que sejam **funcionalmente independentes** em U (isto é, as rspectivas diferenciais $df_\mathbf{x}$ são linearmente independentes em cada ponto $\mathbf{x} \in U$), então as subvariedades:

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in U : f^1(\mathbf{x}) \equiv c^1, \cdots, f^{n-k}(\mathbf{x}) \equiv c^{n-k}\}$$

são subvariedades integrais de $\mathcal{D}$. De facto, neste caso $\mathcal{D}$ pode ser expressa localmente na forma:

$$\mathcal{D}_\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker df^i_\mathbf{x}$$

Se $\mathbf{Z}, \mathbf{W} \in \Gamma(\mathcal{D})$ vemos que $[\mathbf{Z}, \mathbf{W}] \in \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker df^i_\mathbf{x} = \mathcal{D}$, isto é, $\mathcal{D}$ é involutiva.

<u>**Teorema**</u> **1.7.3** **"Teorema de Frobenius (1.^{a} versão)"**... *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição C^∞ de dimensão k, num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Então as condições seguintes são equivalentes:*

- *$\mathcal{D}$ é* **involutiva**, isto é, existe uma base local $\{\mathbf{Z}_i\}_{i=1,\cdots,k}$, para $\mathcal{D}$ na vizinhança de cada ponto, tal que:

$$\boxed{[\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j] = \sum_{\ell=1}^k a^\ell_{ij}\, \mathbf{Z}_\ell} \tag{1.7.34}$$

  $\forall i, j = 1, \cdots, k$, onde a^ℓ_{ij} são <u>funções</u> C^∞ nessa vizinhança."

- $\mathcal{D}$ *é* **completamente integrável** (isto é, localmente, na vizinhança de cada ponto de U, existem coordenadas locais $r^1, \cdots, r^n$, tais que $\{\frac{\partial}{\partial r^i}\}_{i=1,\cdots,k}$ formam uma base local para $\mathcal{D}$).

  - Dem. ...

  - Suponhamos que $\mathcal{D}$ é involutiva. Como o resultado é local, podemos supôr (por uma escolha conveniente de eixos cordenados) que $p = \mathbf{0}$ e que $\mathcal{D}_\mathbf{0} \subset T_\mathbf{0}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ é gerado por:
  $$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_\mathbf{0}, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_\mathbf{0}$$
  Seja $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a projecção nos primeiros k factores. Então $\pi_{*\mathbf{0}} : \mathcal{D}_\mathbf{0} \to \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo, e por continuidade $d\pi_\mathbf{x}$ é injectiva em $\mathcal{D}_\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ perto de $\mathbf{0}$. Portanto perto de $\mathbf{0}$, podemos sempre escolher de forma única campos de vectores:
  $$\mathbf{X}_1(\mathbf{x}), \cdots, \mathbf{X}_k(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_\mathbf{x}$$
  tais que:
  $$\pi_*\mathbf{X}_i(\mathbf{x}) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\pi(\mathbf{x})} \qquad i = 1, \cdots, k$$
  Isto significa que os campos $\mathbf{X}_i$, definidos numa vizinhança de $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^n$, e os campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$ em $\mathbb{R}^k$, estão π-relacionados, e portanto $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]$ e $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \mathbf{0}$ também estão π-relacionados:
  $$\pi_*[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]_\mathbf{x} = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]_{\pi(\mathbf{x})} = \mathbf{0}$$
  Mas por hipótese, $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j]_\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\mathbf{x}$, e como $\pi_{*\mathbf{x}}$ é injectiva em $\mathcal{D}_\mathbf{x}$, concluímos que $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \mathbf{0}$. Pelo teorema da rectificação de campos de vectores, visto na secção anterior, existe um sistema de coordenadas locais $(U; x^i)$ tal que:
  $$\mathbf{X}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad i = 1, \cdots, k$$
  e portanto $\mathcal{D}$ é integrável.

  - Suponhamos agora que $\mathcal{D}$ é integrável. Seja $S \overset{i}{\hookrightarrow} M$ uma variedade integral (local), e $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \Gamma(\mathcal{D})$. Então existem campos C^∞ únicos $\overline{X}, \overline{\mathbf{Y}}$ em S tais que $Ti(\overline{\mathbf{X}}) = \mathbf{X}$ e $Ti(\overline{\mathbf{Y}}) = \mathbf{Y}$, isto é $\mathbf{X}, \overline{\mathbf{X}}$ e $\mathbf{Y}, \overline{\mathbf{Y}}$ estão i-relacionados. Portanto $[\overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{Y}}]$ e $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ estão também i-relacionados:
  $$di_\mathbf{x}[\overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{Y}}]_x = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_\mathbf{x}$$
  e como $[\overline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{Y}}]_\mathbf{x} \in T_\mathbf{x}S$, isto mostra que $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\mathbf{x}$, o que significa que $\mathcal{D}$ é involutiva.

  ■.

Analisemos agora a dualidade natural entre distribuições, no sentido de Frobenius, e sistemas de Pfaff gerados por uma colecção finita de 1-formas.

Por definição, um **sistema de Pfaff** $\mathcal{P}$, é um ideal finitamente gerado por um conjunto $\{\boldsymbol{\theta}^1, \cdots, \boldsymbol{\theta}^r\}$ de 1-formas, ou **formas de Pfaff** em $\mathbb{R}^n$. Um sistema de Pfaff $\mathcal{P}$ é fechado sse as derivadas exteriores das 1-formas geradoras pertencerem ao ideal $\mathcal{P}$, e portanto puderem ser escritas na forma:
$$d\boldsymbol{\theta}^i = \sum_{j=1}^r \boldsymbol{\eta}^i_j \wedge \boldsymbol{\theta}^j, \qquad i = 1, \cdots, r$$

para certas 1-formas $\boldsymbol{\eta}^i_j \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de dimensão k em $\mathbb{R}^n$. Consideremos o conjunto $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathcal{D}}$ de todas as 1-formas que se anulam em $\mathcal{D}$, isto é:

$$\mathcal{I}^{(1)}_{\mathcal{D}} = \{\boldsymbol{\theta} \in \Omega^1(\mathbb{R}^n) : \boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}) = 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma(\mathcal{D})\,\}$$

e seja $\mathcal{D}^\perp = \mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ o ideal gerado por $\mathcal{I}^{(1)}_{\mathcal{D}}$. A $\mathcal{D}^\perp$ chamamos o **ideal dual à distribuição** $\mathcal{D}$. Se $\mathcal{D}$ é (localmente) gerada por k campos de vectores $\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_k \in \Gamma(\mathcal{D})$, que são linearmente independentes em cada ponto, então $\mathcal{D}^\perp$ será gerado por $n-k$ formas de grau 1, $\boldsymbol{\theta}^1 \cdots, \boldsymbol{\theta}^{n-k}$, que são também linearmente independentes em cada ponto. Em particular o rank do ideal $\mathcal{D}^\perp$ é igual ao corank de $\mathcal{D}$.

Recìprocamente, se $\mathcal{P}$ é um sistema de Pfaff, gerado por uma colecção finita de 1-formas, então a distribuição dual $\mathcal{P}^\perp$ define-se como sendo a distribuição gerada por todos os campos de vectores que são anulados por todas as 1-formas diferenciais em $\mathcal{P}$. Portanto $\mathbf{X} \in \Gamma(\mathcal{D})$ se e só se $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}) = 0$, $\forall \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{P}$. A proposição) seguinte é clara:

- <u>**Proposição**</u> **1.7.2** ... *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de rank k em $\mathbb{R}^n$, e $\mathcal{D}^\perp$ o ideal dual associado, de rank $n-k$. Uma subvariedade imersa $S \hookrightarrow M$ é uma variedade integral do ideal $\mathcal{D}^\perp$ se e só se fôr uma variedade integral da distribuição $\mathcal{D}$.*

A condição análoga à condição de involução, é a de fecho do ideal dual:

- <u>**Proposição**</u> **1.7.3** ... *Uma distribuição $\mathcal{D}$ de rank k em M é involutiva se e só se o respectivo ideal dual $\mathcal{D}^\perp$ fôr fechado, i.e.:*

$$d\mathcal{D}^\perp \subseteq \mathcal{D}^\perp$$

  e portanto fôr um ideal diferencial.

- <u>Dem.</u> ... Como $\mathcal{D}^\perp$ é gerado por 1-formas, é suficiente verificar que $d\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{D}^\perp$, $\forall \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{D}^\perp$. A prova resulta agora imediatamente da identidade já conhecida:

$$d\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\theta}(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}\,\boldsymbol{\theta}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\theta}\left([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\right)$$

  onde $\boldsymbol{\theta} \in \Omega^1(M)$ e $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$,

■.

Podemos finalmente enunciar a segunda versão do Teorema de Frobenius:

- <u>**Teorema**</u> **1.7.4** <u>**Teorema de Frobenius - 2.ª versão**</u>... *Seja $\mathcal{P}$ um sistema de Pfaff de rank $n-k$, gerado (localmente) por uma colecção de 1-formas $\{\boldsymbol{\theta}^1, \cdots, \boldsymbol{\theta}^{n-k}\}$, em $\mathbb{R}^n$. Então $\mathcal{P}$ é k-integrável se e só se uma das seguintes condições equivalentes se verifica:*
  - *$\mathcal{P}$ é um ideal diferencial.*
  - $d\boldsymbol{\theta}^j \wedge \boldsymbol{\theta}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\theta}^{n-k} = 0, \quad j = 1, \cdots, n-k$

- **Exemplo**... Em $M = \mathbb{R}^3$ considere o sistema de Pfaff gerado por uma 1-forma:

$$\boldsymbol{\theta} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

que nunca se anula em qualquer ponto. $\mathcal{P}$ será fechado sse $d\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{P}$, i.e., sse $d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{\theta}$ para algum $\boldsymbol{\eta} \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. É fácil ver que esta condição é equivalente à seguinte $d\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\theta} = 0$, o que conduz à seguinte condição de integrabilidade:

$$P(R_y - Q_z) + Q(P_z - R_x) + R(Q_x - P_y) = 0$$

Identificando $\boldsymbol{\theta}$ com o campo de vectores $\mathbf{X} = P\,\frac{\partial}{\partial x} + Q\,\frac{\partial}{\partial y} + R\,\frac{\partial}{\partial z}$, a condição anterior significa que:

$$(\nabla \times \mathbf{X}) \cdot \mathbf{X} = 0$$

isto é, o rotacional de $\mathbf{X}$ é sempre perpendicular a $\mathbf{X}$.

■.

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição em $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ um campo de vectores e $\boldsymbol{\Phi}_\tau = \boldsymbol{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}$ o respectivo grupo local a um parâmetro de difeomorfismos (ou fluxo local).. Para cada τ, o difeomorfismo local $\boldsymbol{\Phi}_\tau$ transforma o subespaço $\mathcal{D}_{\mathbf{x}} \subset T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^n$ no subespaço $d\,(\boldsymbol{\Phi}_\tau)_{\mathbf{x}}\,(\mathcal{D}_{\mathbf{x}}) \subset T_{\boldsymbol{\Phi}_\tau(\mathbf{x})}\mathbb{R}^n$.

Diz-se que a distribuição $\mathcal{D}$ é **invariante sob o grupo local a um parâmetro $\boldsymbol{\Phi}_\tau$** se:

$$\boxed{d(\Phi_t)_x(\mathcal{D}_x) = \mathcal{D}_{\Phi_t(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n} \tag{1.7.35}$$

Neste caso diz-se também que $\mathbf{X}$ é uma **simetria (infinitesimal)** da distribuição $\mathcal{D}$. Representaremos por $\mathrm{Sim}(\mathcal{D})$, o conjunto constituído pelas simetrias infinitesimais de $\mathcal{D}$.

Teorema 1.7.5 ... *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de dimensão k num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(U)$ um campo de vectores. Então as condições seguintes são equivalentes:*

- 1. *$\mathcal{D}$ é invariante sob o grupo local a um parâmetro $\boldsymbol{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}$, isto é, $\mathbf{X} \in \mathrm{Sim}(\mathcal{D})$.*

- 2. *Se $\mathcal{D}$ é (localmente) gerada pelos campos $\mathbf{Z}_1, \cdots, \mathbf{Z}_k$, então:*

$$\boxed{[\mathbf{X}, \mathbf{Z}_i] = \sum_{j=1}^k a_i^j\,\mathbf{Z}_j} \tag{1.7.36}$$

para certas funções $a_i^j \in C^\infty(U)$.

- 3. *Se $\mathcal{D}$ é (localmente) definida pelas 1-formas $\boldsymbol{\theta}^1, \cdots, \boldsymbol{\theta}^{n-k}$, então:*

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}^i = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}^i = \sum_{j=1}^{n-k} b_j^i\,\boldsymbol{\theta}^j} \tag{1.7.37}$$

para certas funções $b_i^j \in C^\infty(U)$.

  – Dem. ... 1 $\Rightarrow$ 2. Seja $\mathbf{X}$ uma simetria da distribuição $\mathcal{D}$, e $\boldsymbol{\Phi}_\tau = \boldsymbol{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}$ o respectivo fluxo local. Como o difeomorfismo $\boldsymbol{\Phi}_\tau$ preserva $\mathcal{D}$, $\forall\tau$, a imagem dos campos $\mathbf{Z}_i \in \Gamma(\mathcal{D})$ pertencem também a $\Gamma(\mathcal{D})$:

$$(\boldsymbol{\Phi}_\tau)_*\,(\mathbf{Z}_i) = \sum_j \mu_{ij}(\tau)\mathbf{Z}_j$$

onde $\mu_{ij}(\tau)$ é uma família de funções que depende diferenciàvelmente de τ. Derivando esta relação em ordem a τ, para $\tau = 0$, obtemos:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Z}_i] = \sum_j a_{ij} \mathbf{Z}_j$$

onde $a_{ij} = -\mu'_{ij}(0)$.

$2 \Rightarrow 3$. Suponhamos que $\mathbf{X}$ satisfaz $[\mathbf{X}, \mathbf{Z}_i] = \sum_{j=1}^k a_i^j \, \mathbf{Z}_j$, e que $\boldsymbol{\theta}$ é uma 1-forma que se anula em todos os campos $\mathbf{Z}_i$: $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{Z}_i) = 0$, $\forall i$. Então:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \left(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{Z}_i) \right) \\ & = & \left(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} \right) (\mathbf{Z}_i) + \boldsymbol{\theta} \left(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}_i \right) \\ & = & \left(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} \right) (\mathbf{Z}_i) + \boldsymbol{\theta} \left([\mathbf{X}, \mathbf{Z}_i] \right) \\ & \Longrightarrow & \\ \left(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} \right) (\mathbf{Z}_i) & = & -\boldsymbol{\theta} \left(a_j^i \, \mathbf{Z}_j \right) \\ & = & -a_j^i \, \boldsymbol{\theta} \left(\mathbf{Z}_j \right) \\ & = & 0 \end{array}$$

o que implica que $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} = b_j \boldsymbol{\theta}^j$.

$3 \Rightarrow 1$. Seja $\mathbf{X}$ um campo de vectores e $\boldsymbol{\Phi}_\tau = \boldsymbol{\Phi}_\tau^{\mathbf{X}}$ o respectivo fluxo local. Como $\boldsymbol{\Phi}^*_{\tau+\eta} = \boldsymbol{\Phi}^*_\tau \circ \boldsymbol{\Phi}^*_\eta =$, vem que:

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau = \eta} \left(\boldsymbol{\Phi}^*_\tau \boldsymbol{\theta} \right) = \boldsymbol{\Phi}^*_\eta \left(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\theta} \right) = \boldsymbol{\Phi}^*_\eta \left(\mathbf{X} \boldsymbol{\theta} \right)$$

Por outro lado, consideremos a $(n-k+1)$-forma $\Omega_i(\tau)$, dependente de τ:

$$\Omega_i(\tau) = \boldsymbol{\Phi}^*_\tau(\boldsymbol{\theta}_i) \wedge \boldsymbol{\theta}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\theta}_{n-k}$$

Como $\boldsymbol{\Phi}^*_0(\boldsymbol{\theta}_i) = \boldsymbol{\theta}_i$, temos que $\Omega_i(0) = 0$. De facto, $\Omega_i(\tau) = 0$, para todo o τ. Com efeito:

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau} \Omega_i(\tau) = \boldsymbol{\Phi}^*_\tau(\mathbf{X} \boldsymbol{\theta}_i) \wedge \boldsymbol{\theta}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\theta}_{n-k} = \sum \left(\boldsymbol{\Phi}^*_\tau b_j^i \right) \Omega_j(\tau)$$

Portanto, o vector cujas componentes são $\Omega_1(\tau), \cdots, \Omega_{n-k}(\tau)$, é solução de um sistema linear homogéneo de equações diferenciais ordinárias, com condição inicial nula, e daí que $\Omega_i(\tau) = 0$, $\forall \tau$. $\boldsymbol{\Phi}^*_\tau(\boldsymbol{\theta}_i)$ é então combinação linear dos $\boldsymbol{\theta}_i$, $\forall \tau$, i.e., $\boldsymbol{\Phi}_\tau$ é uma simetria de $\mathcal{D}$.

■.

O conjunto $\mathrm{Sim}(\mathcal{D})$, constituído pelas simetrias infinitesimais de $\mathcal{D}$, é uma álgebra de Lie, isto é:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathrm{Sim}(\mathcal{D}) & \Rightarrow & a\mathbf{X} + b\mathbf{Y} \in \mathrm{Sim}(\mathcal{D}), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \\ \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathrm{Sim}(\mathcal{D}) & \Rightarrow & [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathrm{Sim}(\mathcal{D}) \end{array} \tag{1.7.38}$$

De facto, a primeira igualdade é óbvia, enquanto que a segunda resulta da identidade Jacobi.

Entre as simetrias infinitesimais $\mathbf{X}$, de uma distribuição $\mathcal{D}$, encontram-se as que pertencem a $\mathcal{D}$, isto é, $\mathbf{X} \in \Gamma(\mathcal{D})$. Estas simetrias dizem-se **simetrias triviais (ou características)**. O conjunto $\mathrm{Sim}(\mathcal{D}) \cap \Gamma(\mathcal{D})$ das simetrias características de $\mathcal{D}$, será notado por $\mathrm{Car}(\mathcal{D})$:

$$\mathrm{Car}(\mathcal{D}) = \mathrm{Sim}(\mathcal{D}) \cap \Gamma(\mathcal{D})$$

É fácil ver que $\mathrm{Car}(\mathcal{D})$ é um ideal da álgebra de Lie $\mathrm{Sim}(\mathcal{D})$. De facto, se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathrm{Sim}(\mathcal{D})$, com $\mathbf{Y} \in \Gamma(\mathcal{D})$, então $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \Gamma(\mathcal{D})$, como resulta imediatamente do teorema 1.7.5. A álgebra de Lie quociente:

$$\boxed{\mathcal{S}(\mathcal{D}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Sim}(\mathcal{D})/\mathrm{Car}(\mathcal{D})} \tag{1.7.39}$$

diz-se a **álgebra de simetrias não triviais de** $\mathcal{D}$. Note que, se $\mathcal{D}$ é completamente integrável, então $\mathrm{Car}(\mathcal{D}) = \Gamma(\mathcal{D})$ e portanto $\mathcal{S}(\mathcal{D}) = \mathrm{Sim}(\mathcal{D})/\Gamma(\mathcal{D})$, neste caso.

- **Exemplo 1.7.13** ... Seja:

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

Como:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{Z}$$

os campos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Z}$ geram uma álgebra de Lie de dimensão 2. A condição $[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{Z}$, significa ainda que: (i). a distribuição (bidimensional) gerada por $\mathbf{X}$ e por $\mathbf{Z}$ é completamente integrável, e ainda que: (ii). $\mathbf{X}$ é uma simetria (infinitesimal) da distribuição (unidimensional) gerada por $\mathbf{Z}$.

Calculemos as variedades integrais (locais) da distribuição $\mathcal{D}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z}\rangle$. É claro que qualquer solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ de $\mathbf{Z}u = 0$, é da forma $u = u(y, z)$. Uma função deste tipo será também solução de $\mathbf{X}u = 0$, sse:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) u(y, z) = yu_y + zu_z = 0$$

cuja solução geral é $v = v(y/z)$.

Capítulo 2

Geometria de contacto das Equações Diferenciais Ordinárias (ODE's)

2.1 ODE's de Primeira Ordem

2.1.1 Geometria da equação $F(x, u, u') = 0$.

Consideremos uma ODE de primeira ordem:

$$\boxed{F(x, u, u') = 0} \tag{2.1.1}$$

Para interpretar geomètricamente esta equação, consideremos o espaço $J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ dos elementos de contacto regulares de $\mathbb{R}^2_{xu}$. Um **elemento de contacto** no **espaço de configuração** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_{xu}$, é, por definição, um par $c = (m, \ell_m)$, constituído por um ponto $m = (x, u) \in \mathbb{R}^2$ e por uma recta $\ell_m \in T_m\mathbb{R}^2$. O ponto m diz-se o **suporte** de $c = (m, \ell_m)$. O elemento de contacto $c = (m, \ell_m)$ diz-se **regular** quando a recta ℓ_m é não vertical, i.e., não colinear com $\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_m$ (ver figura 2.1).

Figure 2.1: Elemento de contacto $c = (m, \ell_m)$ em $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_{xu}$.

Como $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_m, \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_m \right\}$ constituem uma base para o espaço tangente $T_m\mathbb{R}^2$, onde $m = (x, u) \in \mathbb{R}^2$, e como $\left\{ dx|_m, du|_m \right\}$ é a respectiva base dual, a recta ℓ_m (sendo não vertical) tem por equação:

$$du|_m = p\ dx|_m \tag{2.1.2}$$

onde $p \in \mathbb{R}$ é o respectivo declive (ver figura 2.1). Isto leva-nos a considerar o espaço $J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ dos elementos de contacto regulares de $\mathbb{R}^2_{xu}$, que não é mais do que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3_{xup}$.

À equação (2.1.1) vamos associar agora uma superfície no espaço $J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, definida por:

$$\boxed{\Sigma = \Sigma_F = \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^3 :\ F(x, u, p) = 0\,\}} \tag{2.1.3}$$

(Vamos supôr, de aqui em diante, que 0 é valor regular de F, i.e., que $\nabla F|_\Sigma \neq \mathbf{0}$). De acordo com Sophus Lie, a interpretação geométrica da ODE (2.1.1), consiste em munir a superfície SS_F de uma estrutura adicional, chamada **estrutura de contacto**, que vamos explicar de seguida.

Consideremos a projecção canónica $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, que a cada elemento de contacto associa o respectivo suporte:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & c = (m, \ell_m) = (x, u, p) & \longmapsto & m = (x, u) \end{array} \tag{2.1.4}$$

Existe uma distribuição de 2-planos $\mathbf{\Pi} : c \mapsto \mathbf{\Pi}_c \subset T_c\mathbb{R}^3$, canònicamente definida em $\mathbb{R}^3$, da seguinte forma - um vector tangente $\boldsymbol{\xi} \in T_c\mathbb{R}^3$, onde $c = (m, \ell_m)$, pertence ao 2-plano $\mathbf{\Pi}_c$ se e só se $\pi_*(\boldsymbol{\xi}) \in \ell_m$ (ver figura 2.2), isto é:

$$\mathbf{\Pi}_c = \pi_*^{-1}(\ell_m) \subset T_c\mathbb{R}^3, \qquad\qquad c = (m, \ell_m) \tag{2.1.5}$$

Portanto um vector tangente $\boldsymbol{\xi} \in T_c\mathbb{R}^3$, onde $c = (m, \ell_m)$, pertencerá ao 2-plano $\mathbf{\Pi}_c$, se e só se a sua projecção no espaço de configuração pertence à recta $\ell_m \in T_m\mathbb{R}^2$.

Como a recta ℓ_m é dada pela equação (2.1.2), deduzimos que um vector $\boldsymbol{\xi} \in T_c\mathbb{R}^3$ está em $\mathbf{\Pi}_c$ sse $(du - p\,dx)(\pi_*\boldsymbol{\xi}) = 0$, isto é, sse $\pi^*(du - p\,dx)(\boldsymbol{\xi}) = (du - p\,dx)(\boldsymbol{\xi}) = 0$, e portanto $\mathbf{\Pi}$ fica definida pela 1-forma:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = du - p\,dx} \tag{2.1.6}$$

em $\mathbb{R}^3$, a que chamamos **forma de contacto** em $\mathbb{R}^3$. À distribuição de 2-planos $\mathbf{\Pi} = \ker \boldsymbol{\omega}$, chamamos a **distribuição de contacto** em $\mathbb{R}^3$ (ver a figura 2.2). Note que esta distribuição não é completamente integrável, uma vez que $\boldsymbol{\omega} \wedge d\boldsymbol{\omega} = dx \wedge du \wedge dp \neq 0$ (ver a secção 1.7.2), e por isso as suas variedades integrais, de máxima dimensão, têm dimensão 1 - são curvas integrais de $\mathbf{\Pi} = \ker \boldsymbol{\omega}$.

Figure 2.2: Distribuição de contacto em $\mathbb{R}^3$.

O espaço $J^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ pode também ser definido como o **espaço dos 1-jactos** de funções $u = f(x)$, que identificamos com o espaço $\mathbb{R}^3$, munido das coordenadas (x, u, p).

Vejamos o que isto significa:

Duas funções diferenciáveis $u = f(x)$ e $u = g(x)$ definem o mesmo 1-jacto num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, se e só se $f(x_0) = g(x_0)$ e $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}$. Portanto um 1-jacto de função $u = f(x)$, num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, fica definido por 3 dados - o ponto x_0, o valor u_0 de $u = f(x)$ em x_0 e, finalmente, o valor $p_0 = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, da derivada de $u = f(x)$ em x_0.

Dada uma função diferenciável $u = f(x)$, o seu **1-gráfico** é, por definição, a **curva parametrizada** em $J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3_{xup}$, dada por:

$$\boxed{j^1(f) : x \mapsto j^1(f)(x) = (x, f(x), f'(x))} \tag{2.1.7}$$

O respectivo vector tangente num ponto $c = (x, u, p) = (x, f(x), f'(x))$, é o vector:

$$\mathbf{v}_c = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_c + f'(x)\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_c + f''(x)\left.\frac{\partial}{\partial p}\right|_c$$

que satisfaz as duas condições seguintes:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} dx_c(\mathbf{v}_c) & = & 1 & \neq & 0 \\ (du - p\,dx)|_c(\mathbf{v}_c) & = & f'(x) - f'(x) & = & 0 \end{array}\right. \tag{2.1.8}$$

Concluímos portanto que uma curva da forma (2.1.7) é uma curva integral da distribuição de contacto $\mathbf{\Pi} = \ker\boldsymbol{\omega} = \ker(du - p\,dx)$, i.e., o seu vector tangente $\mathbf{v}$ está sempre em $\ker\boldsymbol{\omega}$, e além disso satisfaz a **condição de independência** $dx \neq 0$ (e portanto pode ser parametrizada por x).

O recíproco é também válido - uma curva integral da distribuição de contacto $\mathbf{\Pi} = \ker\boldsymbol{\omega}$, que satisfaz a condição de independência $dx \neq 0$, é necessàriamente da forma $j^1(f)$ para alguma função $u = f(x)$ (Prova?).

Após estes preliminares, regressemos à **interpretação geométrica** da ODE (2.1.1). Recorde que a essa equação associamos a superfície $\Sigma = \{(x, u, p) \in \mathbb{R}^3 : F(x, u, p) = 0\}$ em $J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Em cada ponto $c \in \Sigma$ temos dois planos - o plano de contacto $\mathbf{\Pi}_c$ e o plano tangente $T_c\Sigma$. Um ponto $c \in \Sigma$ diz-se **regular** quando $\mathbf{\Pi}_c \neq T_c\Sigma$. Em cada ponto regular $c \in \Sigma$, a intersecção $\mathbf{\Pi}_c \cap T_c\Sigma = \mathcal{C}_{SS}|_c$ é uma recta $\mathcal{C}_{SS}|_c$ bem definida, tangente a Σ em c.

Portanto, no conjunto dos pontos regulares de Σ (que é um aberto em Σ), fica definido um campo de rectas $\mathcal{C}_{SS}$, chamado o **campo de direcções características** da equação (2.1.1) (ver a figura 2.3):

$$\boxed{\mathcal{C}_{SS: c \in SS} \longmapsto \mathcal{C}_{SS}|_c = \mathbf{\Pi}_c \cap T_c\Sigma} \tag{2.1.9}$$

Figure 2.3: Campo de direcções características $\mathcal{C}_{SS}$ da equação $F(x, u, u') = 0$.

Vamos considerar os casos seguintes:

- O plano tangente $T_c\Sigma$ <u>não é vertical</u> (não é paralelo ao eixo dos pp).

  Como $\nabla F(c) = F_x(c)\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_c + F_u(c)\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_c + F_p(c)\left.\frac{\partial}{\partial p}\right|_c$ é perpendicular a $T_c\Sigma$, isto significa que:

  $$F_p(c) \neq 0$$

  e portanto, pelo teorema das funções implícitas, a superfície SS é, numa vizinhança de c, o gráfico de uma função:

  $$p = p(x, u)$$

  definida para (x, u) perto de $m = \pi(c)$.

Como, por outro lado, o plano de contacto $\mathbf{\Pi}_c$ é sempre vertical, por conter $\frac{\partial}{\partial p}\Big|_c$, concluímos que um tal ponto $c \in SS$ é regular - os dois planos são distintos e intersectam-se segundo uma recta <u>não vertical</u> (não paralela ao eixo dos pp).

A única curva integral Γ, do campo de direcções características, que passa em c, projecta-se então numa curva do plano de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$, que passa em $m = \pi(c)$. O vector tangente a Γ, em c, por ser um vector do plano de contacto, projecta-se num vector contido na recta ℓ_m, de declive $p = p(x, u)$ (isto por definição de $\mathbf{\Pi}_c$). Portanto, a curva Γ projecta-se numa curva, que é curva integral da equação deferencial $\frac{du}{dx} = p(x, u)$.

- O plano tangente $T_c\Sigma$ <u>é vertical</u> (paralelo ao eixo dos pp), ou, de forma equivalente, c é um ponto crítico para a projecção $\pi|_{SS}$, mas <u>é distinto</u> do plano de contacto $\mathbf{\Pi}_c$ (c é regular).

  Neste caso $c = (x, u, p)$ pertence ao conjunto definido pelas duas equações:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F(x,u,p) & = & 0 \\ F_p(x,u,p) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.1.10}$$

  que, <u>em geral</u>, é uma curva em SS, chamada a **curva criminante** da equação $F = 0$. A respectiva projecção no plano de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$, chama-se a **curva discriminante** da equação $F = 0$.

  Num tal ponto c, os dois planos $T_c\Sigma$ e $\mathbf{\Pi}_c$, são ambos paralelos ao eixo dos pp, e a sua intersecção é uma recta também paralela ao eixo dos pp.

  O vector tangente à única curva integral Γ, do campo de direcções características, que passa em c, é agora vertical, e por isso, Γ projecta-se numa curva, no plano $\mathbb{R}^2_{xu}$, que tem um ponto de regressão em $m = \pi(c)$. A curva discriminante é portanto o lugar dos pontos de regressão das curvas integrais da equação dada.

- O plano tangente $T_c\Sigma$ <u>é vertical</u> (paralelo ao eixo dos pp), ou, de forma equivalente, c é um ponto crítico para a projecção $\pi|_{SS}$, e coincide com o plano de contacto $\mathbf{\Pi}_c$ (c é singular ou não regular).

  Como $\mathbf{\Pi}_c = \ker \boldsymbol{\omega}_c$ e $T_c\Sigma = \ker dF_c$, então c deverá satisfazer a condição $dF_c = \lambda\, \boldsymbol{\omega}_c$,para algum $\lambda = \lambda(c) \neq 0$, isto é:

$$F_x\, dx + F_u\, du + F_p\, dp = \lambda\,(du - p\, dx)$$

  ou ainda:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F(x,u,p) & = & 0 \\ F_p(x,u,p) & = & 0 \\ F_x(x,u,p) + p\, F_u(x,u,p) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.1.11}$$

  Se estas equações definem uma curva S em SS, diz-se que esta curva é **solução singular** da equação dada. As soluções singulares surgem como envolventes da família de soluções clássicas (ver os exemplos).

Uma **solução generalizada** [1] da equação (2.1.1) é, por definição, uma curva integral (contida em SS), do campo de direcções características $\mathcal{C}_{SS}$. Entre estas soluções encontram-se as **soluções clássicas**, isto é, as curvas integrais de $\mathcal{C}_{SS}$, que se projectam difeomòrficamente sobre o eixo dos xx, e que, por isso, são 1-gráficos de soluções usuais da equação (2.1.1).

[1] nã confundir esta terminologia com a usada para soluções distribucionais...

- **Exemplo 2.1.1** ... Considere a equação:

$$\boxed{(u')^2 + u^2 = 1}$$

Neste caso:

$$\Sigma = \{(x,u,p) : F(x,u,p) = p^2 + u^2 - 1 = 0\}$$

que é um cilindro em $\mathbb{R}^3$, cujo eixo é o eixo dos xx (ver a figura 2.4).

Figure 2.4: A equação $(u')^2 + u^2 = 1$.

A direcção característica num ponto $c = (x,u,p) \in SS$, isto é, a recta $\mathcal{C}_{SS}|_c = \mathbf{\Pi}_c \cap T_c SS$, é definida pelas equações seguintes:

$$\begin{cases} p^2 + u^2 &= 1 & \text{o ponto está em } SS \\ du - p\,dx &= 0 & \text{a recta está em } \mathbf{\Pi}_c \\ p\,dp + u\,du &= 0 & \text{a recta está em } T_c SS \end{cases}$$

No entanto, conseguiremos uma muito maior simplicidade nos cálculos, se usarmos coordenadas (locais) adequadas à geometria de SS, isto é, se usarmos coordenadas cilíndricas (θ, x), neste caso. Nestas coordenadas, um ponto $c = (x,u,p) \in SS$ será parametrizado por (θ, x). Vamos pois usar a seguinte parametrização (local) de SS:

$$\phi : (\theta, x) \longmapsto (x,\ u = \sin\theta,\ p = \cos\theta)$$

O pull-back da forma de contacto a SS é então dado, nas coordenadas (θ, x), por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{SS} &\stackrel{\text{def}}{=} \phi^*(\boldsymbol{\omega}) \\ &= (du - p\,dx)|_{u=\sin\theta,\, p=\cos\theta} \\ &= d(\sin\theta) - (\cos\theta)\,dx \\ &= (\cos\theta)\,d\theta - (\cos\theta)\,dx \\ &= (\cos\theta)\,d(\theta - x) \end{aligned}$$

O respectivo núcleo, $\ker \boldsymbol{\omega}_{SS}$, define a distribuição característica de SS, nos pontos em que $\boldsymbol{\omega}_{SS \neq 0}$. Os pontos onde $\boldsymbol{\omega}_{SS=0}$ (pontos singulares de SS, onde o plano de contacto coincide com o plano tangente), são dados por $\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi/2$, isto é, são os pontos das rectas $u = \pm 1$, no plano de configuração $p = 0$, que são as soluções singulares da equação.

No complementar das rectas $p = 0, u = \pm 1$, em SS, a distribuição característica é dada por $d\theta - dx = d(\theta - x) = 0$, e é claro que as respectivas curvas integrais são dadas por $\theta - x = a$, $a \in \mathbb{R}$ constante, que são hélices circulares em SS (ver a figura 2.4):

$$\theta = x + a, \qquad a \in \mathbb{R}$$

ou:

$$x \mapsto (x, \sin(x+a), \cos(x+a)), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Estas hélices projectam-se difeomòrficamente sobre o eixo dos xx, e a sua projecção no plano de configuração $p = 0$, são os gráficos das soluções clássicas da equação $(u')^2 + u^2 = 1$, dadas por:

$$u = \sin(x + a)$$

Note que as **soluções singulares** $u = \pm 1$ são as envolventes da família de soluções clássicas $u = \sin(x + a)$ (ver a figura 2.5).

Figure 2.5: As soluções singulares $u = \pm 1$ são as envolventes da família de soluções clássicas $u = \sin(x + a)$.

■.

O campo de direcções características $\mathcal{C}_{SS}$, da ODE $F(x, u, u') = 0$, pode ser definido por um campo de vectores $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_F \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ (pelo menos localmente). Vejamos como se define este campo. Suponhamos que:

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial p}$$

Por definição, $\mathbf{Z}$ deverá verificar as seguintes condições:

$$\begin{cases} dF(\mathbf{Z})|_\Sigma &= 0 & \qquad \mathbf{Z} \text{ deve ser tangente a } \Sigma \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{Z})|_\Sigma &= 0 & \qquad \mathbf{Z} \text{ deve pertencer ao plano de contacto } \mathbf{\Pi} \end{cases}$$

A segunda condição diz que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{Z}) &= (du - p\,dx)\left(\boldsymbol{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial u} + \gamma \frac{\partial}{\partial p}\right) \\ &= \beta - p\,\boldsymbol{\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

enquanto que a primeira é equivalente à existência de uma função λ tal que $\mathbf{Z}F = \lambda F$, isto é:

$$\boldsymbol{\alpha}\, F_x + \beta\, F_u + \gamma\, F_p = \lambda\, F$$

Substituindo $\beta = p\boldsymbol{\alpha}$, vem que:

$$\boldsymbol{\alpha}\ (F_x + p\, F_u) + \gamma\, F_p = \lambda\, F$$

e é óbvio que esta condição se verifica pondo $\lambda = 0$, $\boldsymbol{\alpha} = -F_p$ e $\gamma = F_x + p\, F_u$. Portanto o campo de vectores $\mathbf{Z}_F$, que define o campo de direcções características (2.1.9) tem a forma:

$$\boxed{\mathbf{Z}_F = -F_p \left(\tfrac{\partial}{\partial x} + p\, \tfrac{\partial}{\partial u}\right) + (F_x + p\, F_u)\, \tfrac{\partial}{\partial p}} \tag{2.1.13}$$

$\mathbf{Z}_F$ diz-se o **campo característico** da equação (2.1.1). As respectivas curvas integrais são dadas pelas equações diferenciais:

$$\boxed{\tfrac{dx}{-F_p} = \tfrac{du}{-p\, F_p} = \tfrac{dp}{F_x + p\, F_u}} \tag{2.1.14}$$

Em particular, quando a equação (2.1.1) é resolúvel em ordem a $p = u'$, isto é, quando $F = -p + G(x,u)$, de tal forma que $\Sigma = \mathrm{gr}\, G = \{(x,u,p) : \, p = G(x,u)\}$ [2], o campo de vectores $\mathbf{Z}_F$, que define o campo de direcções características, tem a forma:

$$\mathbf{Z}_F = \frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial u} + (G_x + p\,G_u)\,\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.1.15}$$

e a projecção deste campo no espaço de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$ tem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} + G(x,u)\,\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.1.16}$$

É óbvio que as curvas integrais deste campo, são os gráficos das soluções clássicas da equação (2.1.1).

Vejamos quais as condições que definem um ponto singular $c \in \Sigma$, isto é, um ponto c onde $\mathbf{\Pi}_c = T_c\Sigma$. Por definição, c deverá satisfazer as condições:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F(c) & = & 0 \\ dF_c & = & \lambda(c)\,\boldsymbol{\omega}_c \end{array} \right. \tag{2.1.17}$$

para alguma função $\lambda \in C^\infty(\Sigma)$. Em coordenadas, com $c = (x,u,p)$, estas condições exprimem-se na forma:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} F(x,u,p) & = & 0 \\ F_x\,dx + F_u\,du + F_p\,dp & = & \lambda(du - p\,dx) \end{array} \right.$$

isto é:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F & = & 0 \\ F_p & = & 0 \\ F_x + p\,F_u & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.1.18}$$

Comparando com a expressão (2.1.13), para o campo característico $\mathbf{Z}_F$, vemos que os pontos singulares de Σ, são exactamente aqueles onde $\mathbf{Z}_F$ se anula.

- **Exemplo 2.1.2** ... Considere a equação:

$$\boxed{(3x - 2u)u' = u}$$

Neste caso:

$$\Sigma = \{(x,u,p) : \, F(x,u,p) = (3x - 2u)p - u = 0\}$$

O campo característico é:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_F &= -F_p\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial u}\right) + (F_x + p\,F_u)\,\frac{\partial}{\partial p} \\ &= (2u - 3x)\frac{\partial}{\partial x} + p(2u - 3x)\frac{\partial}{\partial u} + (2p - 2p^2)\frac{\partial}{\partial p} \\ &= (2u - 3x)\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} + (2p - 2p^2)\frac{\partial}{\partial p}, \qquad \text{em } \Sigma \end{aligned}$$

(a última igualdade é válida em SS, onde $p(2u - 3x) = u$). Existem dois pontos singulares em Σ: $(0,0,0)$ e $(0,0,1)$, onde $\mathbf{Z}_F$ se anula.

[2] Pelo teorema da função implícita, isto acontece localmente num ponto $c \in \Sigma$, onde $\left.\frac{\partial F}{\partial p}\right|_c \neq 0$.

A projecção do campo $\mathbf{Z}_F$ no plano de configuração $\mathbb{R}^2_{x,u}$, é:

$$(2u-3x)\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}$$

e as respectivas curvas integrais obtêm-se resolvendo o sistema seguinte:

$$\begin{cases} x' &=& 2u-3x \\ u' &=& -u \end{cases}$$

Portanto $u = a\,e^{-t}$ e $x = a\,e^{-t} + b\,e^{-3t}$, isto é, $x = u + b\,u^3$, com $b \in \mathbb{R}$ constante (ver a figura 2.6).

Figure 2.6: Curvas integrais da ODE: $(3x-2u)u' = u$.

- **Exemplo 2.1.3** ... Considere a **equação de Clairaut**:

$$\boxed{u = xu' + f(u')} \tag{2.1.19}$$

onde f é uma função C^∞. Neste caso:

$$\Sigma = \{(x,u,p) :\ u = xp + f(p)\}$$

SS é o gráfico da função $u = u(x,p) = xp + f(p)$ e podemos pois parametrizar (globalmente) SS usando as coordenadas (x,p):

$$\phi : (x,p) \longmapsto (x, xp + f(p), p)$$

Nestas coordenadas, a forma de contacto $\boldsymbol{\omega}_{SS}$ é dada por:

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\omega}_{SS} & \stackrel{\text{def}}{=} & \phi^*(\boldsymbol{\omega}) \\ & = & \phi^*(du - p\,dx) \\ & = & d(xp + f(p)) - p\,dx \\ & = & p\,dx + x\,dp + f'(p)\,dp - p\,dx \\ & = & (x + f'(p))\,dp \end{array}$$

Um vector característico $\mathbf{Z}_F = \boldsymbol{\alpha}\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial p} \in T_{\phi(x,p)}SS$, terá de satisfazer a condição:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \boldsymbol{\omega}_{SS(\mathbf{Z}_F)} \\ & = & (x + f'(p))\,dp(\mathbf{Z}_F) \\ & = & (x + f'(p))\,\beta \end{array}$$

Se $x + f'(p) \neq 0$ então $\beta = 0$ e $\mathbf{Z}_F = \frac{\partial}{\partial x}$, cujas curvas integrais são $p \equiv a =$ (constante). As imagens sob ϕ em SS, são as curvas parametrizadas por x:

$$x \longmapsto (x, ax + f(a), a)$$

cuja projecção no espaço de configuração é a família (a um parâmetro a) de rectas:

$$u = ax + f(a)$$

Os pontos de SS que satisfazem a condição $x + f'(p) = 0$, pontos onde $\boldsymbol{\omega}_{SS=0}$, formam uma curva de pontos singulares em SS:

$$p \mapsto (-f'(p), p) \stackrel{\phi}{\longmapsto} (-f'(p), -pf'(p) + f(p), p)$$

A projecção desta curva no espaço de configuração (a chamada **curva discriminante** da equação SS), é o gráfico de uma solução singular da equação de Clairaut:

$$p \longmapsto (-f'(p), -pf'(p) + f(p))$$

Por exemplo, se $f(p) = -p^2/2$, então a curva discriminante é $p \longmapsto (x = p, u = p^2/2)$, que é a parábola $u = x^2/2$, e cada uma das soluções clássicas, i.e., cada uma das rectas $u = ax + f(a) = ax - a^2/2$, é tangente a essa parábola (no ponto $(a, a^2/2)$). Por outras palavras, a solução singular, representada pela parábola $u = x^2/2$, é a **envolvente** da família de soluções clássicas $\{u = ax - a^2/2\}_{a\in\mathbb{R}}$ (ver a figura 2.7).

Figure 2.7: Soluções da equação de Clairaut $u = xu' - \frac{(u')^2}{2}$.

- **Exemplo 2.1.4** ... Considere a equação:

$$\boxed{u = x(u')^2 + (u')^3} \tag{2.1.20}$$

Neste caso:

$$\Sigma = \{(x, u, p) : u = xp^2 + p^3\}$$

SS é o gráfico da função $u = u(x, p) = xp^2 + p^3$ e podemos pois parametrizar (globalmente) SS usando as coordenadas (x, p):

$$\phi : (x, p) \longmapsto (x, xp^2 + p^3, p)$$

Nestas coordenadas, a forma de contacto $\boldsymbol{\omega}_{SS}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{SS} &\stackrel{\text{def}}{=} \phi^*(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \phi^*(du - p\,dx) \\ &= d(xp^2 + p^3) - p\,dx \\ &= p^2\,dx + 2xp\,dp + 3p^2\,dp - p\,dx \\ &= (p^2 - p)\,dx + (2xp + 3p^2)\,dp \end{aligned}$$

Esta forma anula-se nos pontos da forma $(x, 0)$, cuja imagem em SS, constituem a curva:

$$x \longmapsto (x, 0, 0)$$

que se projecta na curva $u = 0$ do espaço de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$. Portanto $u = 0$ é solução singular da equação dada. A forma $\boldsymbol{\omega}_{SS}$ também se anula no ponto de coordenadas $(x = -3/2, p = 1)$, cuja imagem em SS é o ponto singular $\phi(-3/2, 1) = (-3/2, -1/2, 1)$, que se projecta no ponto $(-3/2, -1/2)$ do espaço de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$.

Fora dos pontos singulares, onde $p = 0$, podemos dividir $\boldsymbol{\omega}$ por p, para obter:

$$\boldsymbol{\omega} = (p-1)\,dx + (2x+3p)\,dp$$

e o campo de vectores característico é:

$$\mathbf{Z}_F = (2x+3p)\frac{\partial}{\partial x} + (1-p)\frac{\partial}{\partial p}$$

As curvas integrais do campo característico $\mathbf{Z}_F$, são dadas pelas equações diferenciais:

$$\frac{dx}{2x+3p} = \frac{dp}{1-p}$$

ou:

$$\frac{d(x+p)}{2(x+p)+1} = \frac{dp}{1-p}$$

e são dadas implìcitamente por:

$$(1-p)^2(2x+2p+1) \equiv C$$

Resolvendo em ordem a x, vem que:

$$x = -\frac{1}{2} - p + \frac{C}{(1-p)^2}$$

e portanto:

$$u = xp^2 + p^3 = -\frac{p^2}{2} - p^3 + \frac{Cp^2}{(1-p)^2} + p^3$$

isto é, as curvas integrais do campo característico $\mathbf{Z}_F$, são dadas paramètricamente por:

$$p \longmapsto \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -\frac{1}{2} - p + \frac{C}{(1-p)^2} \\ u & = & -\frac{p^2}{2} + \frac{Cp^2}{(1-p)^2} \end{array} \right.$$

Para $p = 1$, obtemos a solução $u = x + 1$, como é fácil verificar (ver a figura 2.8).

Figure 2.8: Curvas integrais da equação $u = x(u')^2 + (u')^3$.

2.1.2 Transformações de Contacto

Um difeomorfismo (local) $\Phi : J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to J^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ diz-se uma **transformação (local) de contacto**, se Φ preserva a distribuição de contacto $\mathbf{\Pi}$, isto é:

$$d\Phi_c(\mathbf{\Pi}_c) = \mathbf{\Pi}_{\Phi(c)} \tag{2.1.21}$$

ou de forma equivalente:

$$\boxed{\Phi^*(\boldsymbol{\omega}) = \lambda\,\boldsymbol{\omega}} \tag{2.1.22}$$

para alguma função $\lambda \in C^\infty(J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}))$, que nunca se anule. Por outras palavras, Φ é uma simetria (finita) da distribuição de contacto.

Em **coordenadas canónicas** (x,u,p) para $J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3_{xup}$, e continuando a notar por Φ a expressão de Φ, nas coordenadas (x,u,p), de tal forma que:

$$\Phi : (x,u,p) \longmapsto (X = X(x,u,p), U = U(x,u,p), P = P(x,u,p))$$

(isto é, $X = \Phi^*x$, $U = \Phi^*u$ e $P = \Phi^*p$), esta última condição (2.1.22), significa que:

$$\boxed{\Phi^*(du - p\,dx) = dU - P\,dX = \lambda\,(du - p\,dx)} \tag{2.1.23}$$

Note que Φ transforma a equação diferencial:

$$SS = SS_F = \{(x,u,p) \in J^1 :\ F(x,u,p) = 0\}$$

na equação diferencial:

$$\Phi(SS) = \{(X,U,P) \in J^1 :\ F \circ \Phi^{-1}(X,U,P) = 0\} \tag{2.1.24}$$

- **Exemplo 2.1.5** ... Uma translacção na direcção do eixo dos xx:

$$\Phi(x,u,p) = (x+a,u,p)$$

bem como uma translacção na direcção do eixo dos uu:

$$\Phi(x,u,p) = (x,u+b,p)$$

são claramente transformações de contacto. No entanto, uma translacção na direcção do eixo dos pp:

$$\Phi(x,u,p) = (x,u,p+k)$$

não é transformação de contacto, já que, $dU - P\,dX = du - (p+k)\,dx \neq \lambda\,(du - p\,dx)$.

- **Exemplo 2.1.6** - **Transformações pontuais** ... Uma difeomorfismo (local) do espaço de configuração:

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,u) & \longmapsto & \phi(x,u) = (X = X(x,u),\, U = U(x,u)) \end{array}$$

pode ser naturalmente levantado (ou prolongado) a uma transformação (local) de contacto, que notamos por:

$$\phi^{(1)} : J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \longrightarrow J^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$$

De facto, seja $c=(m,\ell_m)$ um elemento de contacto. Recordemos que isto significa que $m=(x,u)$, é um ponto no espaço de configuração $\mathbb{R}^2$, e ℓ_m é uma recta em $T_m\mathbb{R}^2$ (ver figura 2.1). $\phi^{(1)}(c)$ será pois naturalmente definido como sendo o elemento de contacto $(\phi(m), d\phi_m(\ell_m))$.

Recordemos ainda que, em coordenadas canónicas (x,u,p), p representa o declive da recta ℓ_m, isto é, ℓ_m é gerada pelo vector $\frac{\partial}{\partial x}\Big|_m + p\,\frac{\partial}{\partial u}\Big|_m$. Este vector é transformado pela diferencial $d\phi_m$ no vector:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial u} \end{bmatrix}_{m=(x,u)} \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} + p\,\frac{\partial X}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial U}{\partial x} + p\,\frac{\partial U}{\partial u} \end{bmatrix}$$

que gera a recta $d\phi_m(\ell_m)$. Portanto o declive desta recta é igual a:

$$P = \frac{\frac{\partial U}{\partial x} + p\,\frac{\partial U}{\partial u}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p\,\frac{\partial X}{\partial u}} = \frac{U_x + p\,U_u}{X_x + p\,X_u}$$

e, em coordenadas canónicas, $\phi^{(1)}$ é dada por:

$$\boxed{\phi^{(1)}(x,u,p) = \Big(X = X(x,u),\, U = U(x,u),\, P = P(x,u,p) = \tfrac{U_x + p\,U_u}{X_x + p\,X_u}\Big)} \tag{2.1.25}$$

É óbvio que, por construção, $\phi^{(1)}$ é uma transformação (local) de contacto. Note que P esá relacionado com p através de uma transformação homográfica.

Como casos particulares de transformações pontuais, podemos considerar os seguintes:

– **Transformações clássicas** - as que são levantamentos de difeomorfismos do espaço de configuração, do tipo:

$$\phi(x,u) = (X = X(x),\, U = U(u))$$

em que as variáveis independente e dependente mudam separadamente. Neste caso:

$$\phi^{(1)}(x,u,p) = \left(X(x),\, U(u),\, p\,\frac{U'(u)}{X'(x)}\right)$$

e P esá relacionado com p através de uma homotetia.

– **Transformações de gauge** - as que são levantamentos de difeomorfismos do espaço de configuração, do tipo:

$$\phi(x,u) = (X = X(x),\, U = U(x,u))$$

Neste caso:

$$\phi^{(1)}(x,u,p) = \left(X(x),\, U(x,u),\, \frac{U_x + p\,U_u}{X'(x)}\right)$$

e P esá relacionado com p através de uma transformação afim.

• **Exemplo 2.1.7** - **Transformação de Legendre** ... Em coordenadas canónicas (x,u,p), é a transformação dada por:

$$\boxed{\mathcal{L} : (x,u,p) \longmapsto (p,\, xp-u,\, x)} \tag{2.1.26}$$

É uma transformação de contacto uma vez que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(du - p\,dx) &= d(u \circ \mathcal{L}) - (p \circ \mathcal{L})d(x \circ \mathcal{L}) \\
&= dU - P\,dX \\
&= d(xp - u) - x\,dp \\
&= p\,dx + x\,dp - du - x\,dp \\
&= -(du - p\,dx)
\end{aligned}$$

A transformação de Legendre transforma a 1-faixa de contacto[3]:

$$\mathcal{F}_m : p \longmapsto (a, b, p), \qquad p \in \mathbb{R}$$

de suporte fixo $m = (a, b) \in \mathbb{R}^2_{xu}$, na 1-faixa $\mathcal{L} \circ \mathcal{F}_m$ dada por:

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{F}_m : p \longmapsto (p, a\,p - b, a)$$

cuja suporte, isto é, cuja projecção no plano de configuração, é a recta $u = a\,x - b$ (ver a figura 2.9)!

Figure 2.9: Transformação de Legendre $\mathcal{L}$.

- **Exemplo 2.1.8** - **Transformação de Legendre e a equação de Clairaut** ... A transformação de Legendre transforma a equação de Clairaut, do exemplo 2.1.3: $u = xu' - f(u')$, isto é:

$$\Sigma = \{(x, u, p) : u = xp - f(p)\}$$

na equação obtida da seguinte forma. Calculamos primeiro $\mathcal{L}^{-1}$:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} X &= p \\ U &= xp - u \\ P &= x \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}^{-1} : \begin{cases} x &= P \\ u &= X\,P - U \\ p &= X \end{cases}$$

Em seguida calculamos:

$$\begin{aligned}
0 &= u - xp + f(p) \\
&= (X\,P - U) - P\,X + f(X) \\
&= -U + f(X)
\end{aligned}$$

e portanto $\mathcal{L}$ transforma a equação de Clairaut, na equação:

$$U = f(X) \tag{2.1.27}$$

[3]Por definição, uma 1-**faixa de contacto** é uma curva imersa $\mathcal{F} : I \subseteq \mathbb{R} \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, que é curva integral da distribuição de contacto: $\mathcal{F}^* \boldsymbol{\omega} = 0$.

que não contem derivadas, e por isso está automàticamente resolvida. Note que a equação $U = f(X)$ deve ser interpretada, no presente contexto, como uma equação diferencial do tipo $F(X, U, P) = 0$, onde P é arbitrário. As soluções de $U = f(X)$ são as rectas verticais $P \mapsto (a, f(a), P)$, "por cima" de cada ponto $(a, f(a))$ do gráfico de f, e podem ser interpretadas como 1-faixas de contacto, de suporte $A = (a, f(a))$!

Por outras palavras, para cada $X = a$ fixo, a curva parametrizada:

$$\mathcal{F}_a : P \longmapsto (a, f(a), P)$$

é uma solução generalizada da equação (2.1.27). Com efeito, essa curva está contida em $\{(X, U, P) : U - f(X) = 0\}$, e $\mathcal{F}_a^*(\boldsymbol{\omega}) = \mathcal{F}_a^*(dU - PdX) = 0$, uma vez que $X \equiv a$ está fixo. $\mathcal{F}_a$ é a 1-faixa de contacto, de suporte $A = (a, f(a))$.

Sob a transformação de Legendre, cada uma destas soluções transforma-se numa solução da equação de Clairaut:

$$\phi_a \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{-1} \circ \mathcal{F}_a : P \longmapsto (x = P, u = aP - f(a), p = a)$$

cujo suporte é a recta $u = ax - f(a)$, no plano de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$.

Desta forma obtemos uma família a 1 parâmetro $\{\phi_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ de soluções da equação de Clairaut:

$$\{u = ax - f(a)\}_{a \in \mathbb{R}} \tag{2.1.28}$$

a que se chama o **integral completo** da equação de Clairaut. A envolvente desta família a 1 parâmetro de rectas, obtem-se eliminando o parâmetro a, nas equações:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u - ax + f(a) & = & 0 \\ -x + f'(a) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.1.29}$$

Suponhamos por exemplo que $f(p) = \frac{1}{2}p^2$. Então:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u - ax + a^2/2 & = & 0 \\ -x + a & = & 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & x \\ u & = & x^2/2 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad u = x^2/2$$

e a envolvente é a parábola $u = x^2/2$, que fornece a chamada **solução singular** da equação de Clairaut. Note que a solução clássica $u = ax - a^2/2$ é a recta tangente à solução singular $u = x^2/2$, no ponto $(a, a^2/2)$ (ver a figura 2.10)!

Figure 2.10: Transformação de Legendre e a equação de Clairaut.

- **Exemplo 2.1.9** - **Dilatações** ... Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ definem-se através de:

$$\mathcal{D}_\lambda : (x, u, p) \longmapsto \left(x + \frac{\lambda p}{\sqrt{1 + p^2}}, u - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + p^2}}, p \right) \tag{2.1.30}$$

Cada $\mathcal{D}_\lambda$ transforma a 1-faixa $\mathcal{F}_m : p \longmapsto (a,b,p)$, $p \in \mathbb{R}$, de suporte $m = (a,b)$, na 1-faixa $\mathcal{D}_\lambda \circ \mathcal{F}_m$ dada por:

$$p \longmapsto \left(a + \frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}, b - \frac{\lambda}{\sqrt{1+p^2}}, p\right)$$

cuja projecção no plano de configuração tem suporte na circunferência de equação $(x-a)^2 + (u-b)^2 = \lambda^2$, centrada em m e de raio λ (ver a figura 2.11).

Figure 2.11: Dilatação $\mathcal{D}_\lambda$.

■.

2.1.3 Método de Lie-Jacobi, para gerar transformações de contacto

Vamos agora descrever um método, que se deve a Lie e Jacobi, para construir transformações de contacto através de uma equação, dita **equação directriz**, no espaço de configuração.

Consideremos então uma transformação de contacto $\Phi : J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to J^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, que transforma cada elemento de contacto $c = (x,u,p) \in J^1$ num outro elemento de contacto:

$$C = \Phi(c) = (X = X(x,u,p), U = U(x,u,p), P = P(x,u,p)) \in J^1$$

Seja:

$$\mathcal{F}_m : \alpha \longmapsto (\underbrace{x,u}_{m}; p = \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.1.31}$$

uma 1-faixa de contacto[4] **suporte fixo** $m = (x,u)$. Recorde que isto significa que $\mathcal{F}_m$ é uma curva imersa em $J^1 = \mathbb{R}^3_{xup}$, que satisfaz a condição:

$$\mathcal{F}_m^*(du - p\,dx) = 0$$

Ambas as condições são óbvias neste caso, já que $\mathcal{F}_m'(\boldsymbol{\alpha}) = (0,0,1)$ e x,u são constantes. Então $\Phi(\mathcal{F}_m)$ será também uma 1-faixa, porque Φ é uma transformação de contacto. $\Phi(\mathcal{F}_m)$ é a curva imersa, em $J^1 = \mathbb{R}^3_{xup}$, parametrizada por:

$$\Phi \circ \mathcal{F}_m \;:\; \boldsymbol{\alpha} \longmapsto (X(m;\boldsymbol{\alpha}), U(m;\boldsymbol{\alpha}), P(m;\alpha)) \tag{2.1.32}$$

(não esqueça que $m = (x,u)$ está fixo). Vamos considerar as duas situações seguintes, conforme a matriz Jacobiana da aplicação $\pi \circ \Phi \circ \mathcal{F}_m : \alpha \mapsto (X(m;\boldsymbol{\alpha}), U(m;\boldsymbol{\alpha}))$:

$$\mathcal{J}(m;\alpha) = [X_\alpha \quad U_\alpha] \tag{2.1.33}$$

tenha característica 0 e 1.

[4] ou variedade de Legendre de dimensão 1 em J^1 ...

- $\mathcal{J}(m;\alpha)$ tem característica 0, $\forall(m=(x,u),\alpha)$. Neste caso X e U, em (2.1.32) não dependem de α, e Φ transforma toda a 1-faixa $\mathcal{F}_m$, de suporte fixo m, numa 1-faixa $\Phi(\mathcal{F}_m)$, também de suporte fixo $\pi(\Phi(m)) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(m) = (X(m), U(m))$. Como:

$$\begin{aligned}
\lambda(du - p\,dx) &= \Phi^*(du - p\,dx)\\
&= dU - P\,dX\\
&= (U_x\,dx + U_u\,du) - P\,(X_x\,dx + X_u\,du)\\
&= (U_x - P\,X_x)\,dx + (U_u - P\,X_u)\,du
\end{aligned}$$

vem que $U_u - P\,X_u = \lambda$ e $U_x - P\,X_x = -\lambda p$, e portanto:

$$P = \frac{U_x + p\,U_u}{X_x + p\,X_u}$$

o que significa que P está relacionado homogràficamente com p, e Φ, é uma transformação pontual: $\Phi = \phi^{(1)}$ (ver o exemplo 2.1.6).

- $\mathcal{J}(m;\alpha)$ tem característica 1, $\forall(m=(x,u),\alpha)$. Neste caso, a projecção da 1-faixa $\Phi(\mathcal{F}_m)$, no plano de configuração, é uma curva imersa, parametrizada por:

$$\pi\circ\Phi\circ\mathcal{F}_m:\ \alpha \longmapsto (X = X(m;\alpha), U = U(m;\alpha))$$

(não esqueça que $m=(x,u)$ está fixo), que descrevemos (localmente) como curva de nível de uma função do tipo:

$$H(x,u;X,U) = 0$$

(por eliminação do parâmetro α, com x e u fixos). Permitindo agora que o suporte $m=(x,u)$ de $\mathcal{F}_m$ varie, obtemos uma família a 2 parâmetros (x,u) (eventualmente ligados...), de curvas regulares $\Gamma_m = \Gamma_{(x,u)}$, no plano de configuração (ver a figura 2.12). Cada curva $\Gamma_m = \Gamma_{(x,u)}$ dessa família será descrita por uma equação do tipo:

$$\Gamma_m = \Gamma_{(x,u)}: \qquad H(x,u;X,U) = 0 \tag{2.1.34}$$

em X, Y, que se chama a **equação directriz** da transformação de contacto Φ, que gera as curvas referidas. Por construção, os elementos de contacto da curva $\Gamma_m = \Gamma_{(x,u)}$, são os transformados por Φ, dos elementos de contacto de suporte fixo $m=(x,u)$ (ver a figura 2.12).

Figure 2.12: Equação directriz $H(x,u;X,U)=0$.

O problema agora consiste em deduzir relações entre H e as funções X, U, P, que definem Φ, e que nos permitam reconstruir Φ a partir de H.

A ideia geométrica é a seguinte: consideremos um elemento de contacto $c=(m,\ell)$, constituído pelo ponto m e pela recta $\ell \in T_m\mathbb{R}^2_{xu}$, e consideremos uma curva regular $\mathfrak{c}$, no plano $\mathbb{R}^2_{xu}$, que seja tangente a ℓ, em m.

Quando m varia em $\mathfrak{c}$, obtemos uma família de curvas, no plano $\mathbb{R}^2_{XY}$, gerada pela equação directriz (2.1.34), mas que agora depende de um único parâmetro:

$$\{\Gamma_m\}_{m\in\mathfrak{c}}: \qquad H(m;X,U)=0$$

A 1-faixa $\mathcal{F}_m$ e a curva $\mathfrak{c}$, têm o elemento de contacto comum (m,ℓ). Consideremos agora a curva imagem $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \pi\circ\Phi(\mathfrak{c}^{(1)})$. Como Φ é transformação de contacto, $\mathcal{E}$ e Γ_m têm um elemento de contacto comum, nomeadamente, o elemento $(M,L)=\Phi(m,\ell)$, onde M é o ponto de contacto de $\mathcal{E}$ com Γ_m, e L é a respectiva recta tangente comum, em M. Mas isto significa exactamente que $\mathcal{E}$ é a envolvente da família $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathfrak{c}}$.

Concluindo - *"a imagem da curva $\mathfrak{c}$, sob a transformação de contacto Φ, é a envolvente das curvas Γ_m, correspondentes aos diversos pontos m de $\mathfrak{c}$"*.

Desta forma, Φ fica definida geomètricamente através da correspondência:

$$\Phi:(m,\ell)\longmapsto(M,L)$$

onde M é o ponto de contacto de Γ_m com a envolvente $\mathcal{E}$ da família de curvas $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathfrak{c}}$, e L é a tangente comum.

Para definir analìticamente Φ, suponhamos que a curva $\mathfrak{c}$ é dada por $u=u(x)$. Então a família $\{\Gamma_m\}_{m\in\mathfrak{c}}$ é dada por:

$$\{\Gamma_x\}_x: \qquad H(x,u(x);X,U)=0 \tag{2.1.35}$$

e a envolvente $\mathcal{E}$, desta família é definida pelas equações:

$$\begin{cases} H(x,u(x);X,U) &= 0\\ H_x(\cdot)+p\,H_u(\cdot) &= 0\end{cases} \tag{2.1.36}$$

onde $p=u'(x)$. Estas equações, quando resolvidas em ordem a X e U, dão as coordenadas $(X(x,u,p),U(x,u,p))$ do ponto de contacto M, onde a curva Γ_x toca a envolvente $\mathcal{E}$, e portanto dão as duas primeiras componentes de Φ. Para determinar a terceira componente $P(x,u,p)$, de Φ, que não é mais do que o declive da recta L, tangente a $\mathcal{E}$ em M, ela calcula-se a partir de:

$$H_X+P\,H_U=0 \tag{2.1.37}$$

depois de substituirmos X e U pelos valores encontrados ao resolver o sistema (2.1.36).

- **Exemplo 2.1.10** ... Consideremos o círculo de equação $x^2+u^2=1$ (de equação $\xi^2+\eta^2-\zeta^2=0$, em coordenadas homogéneas (ξ,η,ζ) tais que $x=\xi/\zeta$ e $u=\eta/\zeta$), no plano de configuração. A forma polar associada à forma quadrática $\xi^2+\eta^2-\zeta^2$ é $\xi\xi'+\eta\eta'-\zeta\zeta'$, ou em coordenadas afins $x=\xi/\zeta$, $u=\eta/\zeta$, $X=\xi'/\zeta'$ e $U=\eta'/\zeta'$, $H(x,u,X,U)=xX+uU-1$.

Tomemos então como equação directriz:

$$H(x,u,X,U)=xX+uU-1=0$$

O sistema (2.1.36) é neste caso:

$$\begin{cases} H(x,u;X,U) &= xX+uU-1 &= 0\\ H_x+p\,H_u &= X+p\,U &= 0\end{cases}, \qquad \text{isto é:} \qquad \begin{cases} X &= \frac{p}{px-u}\\ U &= -\frac{1}{px-u}\end{cases} \tag{2.1.38}$$

Para calcular P, usamos a equação (2.1.37), isto é:

$$H_X + P\,H_U = x + Pu = 0, \qquad \text{isto é:} \qquad P = -\frac{x}{u} \tag{2.1.39}$$

Obtemos assim a transformação:

$$\Phi:\ (x,u,p) \longmapsto \left(X = \frac{p}{px-u}, U = -\frac{1}{px-u}, P = -\frac{x}{u}\right) \tag{2.1.40}$$

Esta é a transformação de contacto, no plano (x,u), dada por **polares recíprocas** relativamente ao círculo $x^2+u^2=1$. De facto, a cada ponto $m=(x,u)$ está associada a respectiva recta polar $\mathcal{P}_m$, relativamente ao círculo $x^2+u^2=1$, dada por:

$$\mathcal{P}_m : \quad x\,\alpha + u\,\beta - 1 = 0$$

onde (α,β) são coordenadas correntes sobre essa recta. Consideremos agora dois pontos $m=(x,u)$ e $M=(X,U)$, conjugados relativamente ao círculo $x^2+u^2=1$, isto é, tais que:

$$xX + uU - 1 = 0$$

Temos então que $M \in \mathcal{P}_m$ e $m \in \mathcal{P}_M$, e a transformação por polares recíprocas, relativamente ao círculo $x^2+u^2=1$, é:

$$(m,\mathcal{P}_M) \longmapsto (M,\mathcal{P}_m)$$

O declive P da recta polar $\mathcal{P}_m$ é $P=-x/u$, enquanto que o declive p da recta polar $\mathcal{P}_M$ é $p=-X/U$. Portanto:

$$X + p\,U = 0 \qquad \text{e} \qquad x + P\,u = 0$$

que conjuntamente com $xX+uU-1=0$, constituem o sistema de equações (2.1.38) e (2.1.39), (ver a figura 2.13).

Figure 2.13: Transformação dada por polares recíprocas.

- **Exemplo 2.1.11** - **Transformação pedal** ... Neste caso usamos a equação directriz:

$$H(x,u,X,U) = X^2 + U^2 - xX - uU = 0$$

O sistema (2.1.36) é neste caso:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} H\,(x,u;X,U) & = & X^2+U^2-xX-uU & = & 0 \\ H_x + p\,H_u & = & -X-p\,U & = & 0 \end{array}\right., \qquad \text{isto é:} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} X & = & \frac{(xp-u)p}{1+p^2} \\ U & = & \frac{xp-u}{1+p^2} \end{array}\right.$$

Para calcular P, usamos a equação (2.1.37), isto é:

$$H_X + P\,H_U = 2X + P(2U-u) = 0$$

que, após substituirmos X e U pelos valores já encontrados, nos permite obter para P o seguinte valor:

$$P = \frac{xp^2 - x - 2up}{up^2 - u + 2xp}$$

Obtemos assim a transformação:

$$\Phi : (x,u,p) \longmapsto \left(X = \frac{(xp-u)p}{1+p^2}, U = \frac{xp-u}{1+p^2}, P = \frac{xp^2 - x - 2up}{up^2 - u + 2xp} \right) \tag{2.1.41}$$

2.1.4 Transformações de Contacto Infinitesimais ou Campos de Contacto

Uma **transformação de contacto infinitesimal** ou **campo de contacto**, é um campo de vectores $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}))$, tal que:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \lambda\,\boldsymbol{\omega}, \qquad \text{para alguma função } \lambda \in C^\infty(J^1(\mathbb{R};\mathbb{R})) \tag{2.1.42}$$

$\mathbf{X}$ diz-se ainda uma **simetria infinitesimal** da distribuição de contacto $\boldsymbol{\Pi}$. Suponhamos que, em coordenadas canónicas (x,u,p) para $J^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\mathbf{X}$ é dado por:

$$\mathbf{X} = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial u} + \gamma\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.1.43}$$

A condição (2.1.42), traduz-se então nas igualdades seguintes:

$$\begin{aligned}
\lambda\,(du - p\,dx) &= \lambda\,\boldsymbol{\omega} \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} \\
&= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(du - p\,dx) \\
&= d(\mathbf{X}u) - (\mathbf{X}p)\,dx - p\,d(\mathbf{X}x) \\
&= d\beta - \gamma\,dx - p\,d\alpha \\
&= (\beta_x - \gamma - p\,\alpha_x)\,dx + (\beta_u - p\,\alpha_u)\,du + (\beta_p - p\,\alpha_p)\,dp
\end{aligned}$$

donde se deduz que:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \beta_p - p\,\alpha_p &=& 0 \\ \beta_u - p\,\alpha_u &=& \lambda \\ \beta_x - \gamma - p\,\alpha_x &=& -p\lambda \end{array} \right. \qquad \text{isto é:} \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \beta_p - p\,\alpha_p &=& 0 \\ \beta_x - \gamma - p\,\alpha_x &=& -p(\beta_u - p\,\alpha_u) \end{array} \right. \tag{2.1.44}$$

Portanto, os campos de contacto são campos de vectores $\mathbf{X}$ da forma (2.1.43), onde α e β são duas funções arbitrárias que satisfazem a relação $\beta_p - p\,\alpha_p = 0$, e γ é dada por $\gamma = \beta_x + p\,\beta_u - p\,\alpha_x - p^2\,\alpha_u$.

Consideremos agora a função:

$$\begin{aligned}
f &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}) \\
&= (du - p\,dx)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial u} + \gamma\frac{\partial}{\partial p}\right) \\
&= \beta - p\,\alpha
\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

Temos então que $f_p = \beta_p - p\alpha_p - \alpha$, e para que seja válida a relação $\beta_p - p\,\alpha_p = 0$, basta pôr $\alpha = -f_p$. Virá então que $\beta = f - p\,f_p$ e $\gamma = f_x + p\,f_u$, isto é, o campo de contacto $\mathbf{X} = \mathbf{X}_f$ é dado por:

$$\boxed{\mathbf{X}_f = -f_p\tfrac{\partial}{\partial x} + (f - p\,f_p)\tfrac{\partial}{\partial u} + (f_x + p\,f_u)\tfrac{\partial}{\partial p}} \tag{2.1.46}$$

onde f é a chamada **função geradora** de $\mathbf{X} = \mathbf{X}_f$.

- **Exemplo 2.1.12** ... O campo de vectores $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x}$ é de contacto, uma vez que $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega} = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(du - p\,dx) = d(\mathbf{X}u) - p\,d(\mathbf{X}x) = 0$. A função geradora é $f = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}) = -p$. Anàlogamente, $Y = \frac{\partial}{\partial u}$ é de contacto, com função geradora $g = \boldsymbol{\omega}(Y) = 1$. Mas $\frac{\partial}{\partial p}$ não é de contacto.

- **Exemplo 2.1.13** ... Um campo de vectores:

$$\boldsymbol{\xi} = a(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \in \mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^2_{xu}\right) \tag{2.1.47}$$

no espaço de configuração, pode ser levantado a um campo de contacto $\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}^{(1)} \in \mathfrak{X}(J^1)$, da seguinte forma. Seja $\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\xi}}_\tau$ o fluxo (local) de $\boldsymbol{\xi}$. Então o levantamento $\boldsymbol{\Phi}_\tau = \left(\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\xi}}_\tau\right)^{(1)}$, constitui um fluxo (local) de transformações de contacto em J^1. O campo $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, não é mais do que o gerador infinitesimal deste fluxo, isto é:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}^{(1)}(c) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \left(\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\xi}}_\tau\right)^{(1)}(c), \qquad\qquad c \in J^1} \tag{2.1.48}$$

Suponhamos que o fluxo (local) de $\boldsymbol{\xi}$ é dado por:

$$\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\xi}}_\tau(x,u) = (X(x,u;\tau), U(x,u;\tau))$$

onde:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} X(x,u;\tau) = a(x,u) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} U(x,u;\tau) = b(x,u), \qquad \forall (x,u) \tag{2.1.49}$$

e ainda:

$$X(x,u;0) = x \qquad \text{e} \qquad U(x,u;0) = u \qquad \forall (x,u) \tag{2.1.50}$$

Atendendo à fórmula (2.1.25), o levantamento de cada $\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\xi}}_\tau$, é dado por:

$$\left(\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{\xi}}_\tau\right)^{(1)}(x,u,p) = \left(X = X(x,u;\tau),\ U = U(x,u;\tau),\ P = P(x,u,p;\tau) = \frac{U_x(x,u;\tau) + p\,U_u(x,u;\tau)}{X_x(x,u;\tau) + p\,X_u(x,u;\tau)}\right)$$

onde pusemos $\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$, etc.... Derivando em ordem a τ, para $\tau = 0$, e atendendo a (2.1.49) e (2.1.50), obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} P(x,u,p;\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} \frac{U_x(x,u;\tau) + p\,U_u(x,u;\tau)}{X_x(x,u;\tau) + p\,X_u(x,u;\tau)} \\ &= b_x + (b_u - a_x)\,p - a_u\,p^2 \end{aligned}$$

e portanto o campo de contacto $\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}^{(1)} \in \mathfrak{X}(J^1)$, é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}^{(1)} = a(x,u)\tfrac{\partial}{\partial x} + b(x,u)\tfrac{\partial}{\partial u} + [b_x + (b_u - a_x)\,p - a_u\,p^2]\tfrac{\partial}{\partial p}} \tag{2.1.51}$$

A função geradora deste campo é:

$$\begin{aligned} f &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}) \\ &= (du - p\,dx)\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial u} + (b_x + (b_u - a_x)\,p - a_u\,p^2)\frac{\partial}{\partial p}\right) \\ &= b(x,u) - a(x,u)\,p \end{aligned} \tag{2.1.52}$$

linear em p, portanto.

- **Exemplo 2.1.14** ... Suponhamos que $\boldsymbol{\xi}$ é a rotação infinitesimal no plano de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$:
$$\boldsymbol{\xi} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u}$$
Então, o respectivo levantamento a J^1, é o campo de contacto:
$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1+p^2)\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.1.53}$$

- **Exemplo 2.1.15** ... Suponhamos que $\boldsymbol{\xi}$ é uma mudança de escala infinitesimal no plano de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$, dada por:
$$\boldsymbol{\xi} = rx\frac{\partial}{\partial x} + su\frac{\partial}{\partial u}$$
(onde $r, s \in \mathbb{R} - \{0\}$ são escalares fixos). Então, o respectivo levantamento a J^1, é o campo de contacto:
$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = rx\frac{\partial}{\partial x} + su\frac{\partial}{\partial u} + (s-r)\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.1.54}$$

- **Exemplo 2.1.16** ... Se $\boldsymbol{\xi} = xu\frac{\partial}{\partial x} + u^2\frac{\partial}{\partial u}$, o respectivo levantamento a J^1, é o campo de contacto:
$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = xu\frac{\partial}{\partial x} + u^2\frac{\partial}{\partial u} + (u-xp)\,p\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.1.55}$$

2.1.5 Simetrias e simetrias infinitesimais de ODE's de primeira ordem

Consideremos de novo uma ODE de primeira ordem:
$$F(x, u, u') = 0$$
e a superfície associada $\Sigma = \{F = 0\} \subset J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, munida da distribuição característica $\mathcal{C}_\Sigma$. Recorde que uma curva integral de $\mathcal{C}_\Sigma$, contida em Σ, diz-se uma **solução generalizada** da equação Σ.

Definição 2.1.1 ...

- *Uma* **transformação (local) de contacto** $\Phi : J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *diz-se uma* **simetria finita de contacto** *(local) da equação* $\Sigma = \{F = 0\} \subset J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$*, se* $\Phi(\Sigma) = \Sigma$*, ou de forma equivalente, se:*
$$\boxed{\Phi^*(F) \overset{def}{=} F \circ \Phi = \mu\, F} \tag{2.1.56}$$
para alguma função $\mu \in C^\infty(J^1)$*, que nunca se anule.*

- *Um* **campo de contacto** $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^1)$*, diz-se uma* **simetria infinitesimal de contacto***, ou simplesmente uma* **simetria** *da equação* $\Sigma = \{F = 0\} \subset J^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$*, se* $\mathbf{X}$ *é tangente a SS, ou de forma equivalente, se:*
$$\boxed{dF(\mathbf{X}) = \mathbf{X}F = \lambda\, F} \tag{2.1.57}$$
para alguma função $\lambda \in C^\infty(J^1)$*.*

- **Exemplo 2.1.17** ... A equação $u' = f(x)$, isto é:

$$F(x, u, p) = p - f(x) = 0$$

é evidentemente invariante sob o grupo a um parâmetro de translacções ao longo do eixo dos uu:

$$\tau \mapsto \mathbf{\Phi}_\tau(x, u) = (X = x, U = u + \tau)$$

ou mais exactamente, sob o respectivo levantamento a J^1, dado por (2.1.25), isto é: $\tau \mapsto \mathbf{\Phi}_\tau{}^{(1)}(x, u, p) = (X = x, U = u + \tau, P = p)$. De facto:

$$F(X, U, P) = F(x, u + \tau, p) = p - f(x) = F(x, u, p)$$

- **Exemplo 2.1.18** ... A equação $u' = f\left(\frac{u}{x}\right)$, isto é:

$$F(x, u, p) = p - f\left(\frac{u}{x}\right) = 0$$

é invariante sob o grupo a um parâmetro de mudanças de escala:

$$\tau \mapsto \mathbf{\Phi}_\tau(x, u) = (X = e^{k\tau} x, U = e^{k\tau} u)$$

ou mais exactamente, sob o respectivo levantamento a J^1, dado por (2.1.25), isto é: $\tau \mapsto \mathbf{\Phi}_\tau{}^{(1)}(x, u, p) = (X = e^{k\tau} x, U = e^{k\tau} u, P = p)$. De facto:

$$F(X, U, P) = F(e^{k\tau} x, e^{k\tau} u, p) = p - f\left(\frac{e^{k\tau} u}{e^{k\tau} x}\right) = p - f\left(\frac{u}{x}\right) = F(x, u, p)$$

- **Exemplo 2.1.19** ... A ODE $u' = G(x, u)$, isto é:

$$F(x, u, p) = p - G(x, u) = 0$$

é invariante sob o campo de contacto:

$$X = \boldsymbol{\xi}^{(1)} = a(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, u)\frac{\partial}{\partial u} + c(x, u, p)\frac{\partial}{\partial p}$$

com $c = b_x + (b_u - a_x)\, p - a_u\, p^2$, obtido por levantamento de $\boldsymbol{\xi} = a(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, u)\frac{\partial}{\partial u}$, se e só se:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} F = 0, \qquad \text{sempre que} \qquad F = 0 \tag{2.1.58}$$

Como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{(1)} F &= \Big(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial u} + (b_x + (b_u - a_x)\, p - a_u\, p^2)\frac{\partial}{\partial p}\Big)(p - G(x, u)) \qquad (2.1.59)\\ &= -a\, G_x - b\, G_u + (b_x + (b_u - a_x)\, p - a_u\, p^2) \end{aligned}$$

a condição (2.1.58) escreve-se na forma (atendendo a que $F = 0 \Rightarrow p = G(x, u)$):

$$\boxed{b_x + (b_u - a_x)\, G - a_u\, G^2 - a\, G_x - b\, G_u = 0} \tag{2.1.60}$$

que é a equação que determina as simetrias infinitesimais "pontuais" da ODE $u' = G(x, u)$, isto é, as simetrias do tipo $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, para algum $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2_{xu}$.

Aqui conhecemos a equação diferencial $u' = G(x,u)$, isto é, a função G, e as incógnitas são as funções a e b que determinam a simetria pontual $\boldsymbol{\xi}$.

É fácil ver que $b = aG$ é solução da equação (2.1.60), qualquer que seja a função $a = a(x,u)$. Isto corresponde à **simetria trivial** da equação $u' = G(x,u)$ - a que deixa invariante cada solução da equação $u' = G(x,u)$. De facto, a equação $u' = G(x,u)$ corresponde ao campo de vectores:

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial}{\partial x} + G\,\frac{\partial}{\partial u}$$

a solução correspondente à simetria pontual é:

$$\boldsymbol{\xi} = a\left(\frac{\partial}{\partial x} + G\,\frac{\partial}{\partial u}\right) = a\,\mathbf{Z}$$

e tem-se que:

$$[a\mathbf{Z}, \mathbf{Z}] = -(\mathbf{Z}a)\mathbf{Z}$$

Qualquer que seja $a = a(x,u)$, a função:

$$b(x,u) = a(x,u)G(x,u) + \mathfrak{X}(x,u) \tag{2.1.61}$$

é a solução geral da equação (2.1.60), onde $\mathfrak{X}$ é a solução geral da PDE de primeira ordem:

$$\mathfrak{X}_x + G\mathfrak{X}_u - G_u\mathfrak{X} = 0 \tag{2.1.62}$$

$\blacksquare$.

Vamos de seguida analisar o problema inverso - o de determinar todas as ODE's de primeira ordem, do tipo $u' = G(x,u)$, que admitem uma dada simetria pontual $\boldsymbol{\xi}$.

Agora, conhecido o campo $\boldsymbol{\xi}$, isto é, as funções a e b, a equação (2.1.60), vista como uma PDE de primeira ordem na função G, determina as ODE's $u' = G(x,u)$ que admitem $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ como simetria infinitesimal.

A PDE (2.1.60), vista como uma PDE quasi-linear de primeira ordem na função G, tem a forma:

$$\boxed{a\,G_x + b\,G_u = b_x + (b_u - a_x)\,G - a_u\,G^2} \tag{2.1.63}$$

que é do tipo que foi estudado na secção 1.5, com mudanças óbvias de notações $y \to u, u \to G$. As equações características da PDE (2.1.63) são:

$$\boxed{\frac{dx}{a} = \frac{du}{b} = \frac{dG}{b_x + (b_u - a_x)\,G - a_u\,G^2}} \tag{2.1.64}$$

Vejamos alguns exemplos concretos.

- **Exemplo 2.1.20** ... Vejamos qual a forma da ODE $u' = G(x,u)$ que admite como simetria, a rotação infinitesimal:

$$\boldsymbol{\xi} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial u}$$

Neste caso $a = a(x,u) = -u$ e $b = b(x,u) = x$, e a equação (2.1.63) é:

$$-u\,G_x + x\,G_u = 1 + G^2$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{-u} = \frac{du}{x} = \frac{dG}{1+G^2}$$

Um integral primeiro é $f = x^2 + u^2$. Para encontrar um segundo integral funcionalmente independente, multiplicamos os numerador e denominador da primeira fracção por $-u$, e os da segunda por x, para obter:

$$\frac{x\,du - u\,dx}{x^2+u^2} = \frac{dG}{1+G^2}$$

e portanto: $g = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{u}{x}\right) - \operatorname{arc\,tg}(G)$ é um segundo integral. No entanto, é mais usual tomar como integral a tangente desta função, isto é:

$$h = \frac{u - xG}{x + uG}$$

atendendo a que $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. Substituindo G por u', concluímos que a ODE $u' = G(x,u)$ mais geral, que admite como simetria pontual, a rotação infinitesimal $\boldsymbol{\xi} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial u}$, é do tipo:

$$F\left(x^2+u^2, \frac{u-xu'}{x+uu'}\right) = 0$$

ou:

$$\boxed{\tfrac{u-xu'}{x+uu'} = f\left(x^2+u^2\right)} \tag{2.1.65}$$

- **Exemplo 2.1.21** ... Vejamos qual a forma da ODE $u' = G(x,u)$ que admite como simetria pontual:

$$\boldsymbol{\xi} = x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u}$$

Neste caso $a = a(x,u) = x$ e $b = b(x,u) = -u$, e a equação (2.1.63) é:

$$x\,G_x - u\,G_u = -2G$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{-u} = \frac{dG}{-2G}$$

Dois integrais primeiros são $f = xu$ e $g = x^2G$. Substituindo G por u', concluímos que a ODE $u' = G(x,u)$ mais geral, que admite como simetria pontual $\boldsymbol{\xi} = x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u}$, é do tipo:

$$F\left(xu, x^2u'\right) = 0$$

ou:

$$\boxed{x^2u' = f\,(xu)} \tag{2.1.66}$$

- **Exemplo 2.1.22** ... Consideremos a equação de Riccati:

$$\boxed{u' + u^2 - \tfrac{2}{x^2} = 0}$$

Esta equação é invariante sob o grupo a uma parâmetro:

$$\tau \longmapsto \mathbf{\Phi}_\tau(x,u) = \big(X = e^\tau\, x,\, U = e^{-\tau}\, u\big)$$

ou mais exactamente, sob o respectivo levantamento a J^1, dado por (2.1.25), isto é:

$$\tau \mapsto {\mathbf{\Phi}_\tau}^{(1)}(x,u,p) = \left(X = e^\tau\, x,\, U = e^{-\tau}\, u,\, P = \frac{pe^{-\tau}}{e^\tau}\right)$$

De facto, como neste caso $F(x,u,p) = p + u^2 - \frac{2}{x^2}$, vem que:

$$\begin{aligned}
F \circ {\mathbf{\Phi}_\tau}^{(1)}(x,u,p) &= F(X,U,P) \\
&= F\left(e^\tau\, x,\, e^{-\tau}\, u,\, pe^{-2\tau}\right) \\
&= pe^{-2\tau} + \left(e^{-\tau}\, u\right)^2 - \frac{2}{\left(e^\tau\, x\right)^2} \\
&= e^{-2\tau}\left(p + u^2 - \frac{2}{x^2}\right) \\
&= e^{-2\tau}\, F(x,u,p)
\end{aligned}$$

O gerador infinitesimal do grupo a um parâmetro $\mathbf{\Phi}_\tau$, é:

$$\boldsymbol{\xi} = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \left(e^\tau\, x,\, e^{-\tau}\, u\right) = x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u}$$

cujo prolongamento a J^1 é dado por (2.1.51):

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u} - 2p\,\frac{\partial}{\partial p}$$

e a versão infinitesimal da simetria da equação de Riccati, é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}^{(1)}\, F &= \left[x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u} - 2p\,\frac{\partial}{\partial p}\right]\left(p + u^2 - \frac{2}{x^2}\right) \\
&= -2\left(p + u^2 - \frac{2}{x^2}\right) \\
&= -2\, F
\end{aligned} \tag{2.1.67}$$

O difeomorfismo de rectificação ϕ, do campo $\boldsymbol{\xi}$, é:

$$\begin{array}{rccc}
\phi: & \mathbb{R}^2_{rs} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2_{xu} \\
& (r,s) & \longmapsto & (x(r,s), u(r,s))
\end{array}$$

onde as respectivas componentes são determinadas pelo sistema de ODE's, parametrizado por s:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\frac{\partial x}{\partial r}(r;s) &=& x(r;s) \\
\frac{\partial u}{\partial r}(r;s) &=& -u(r;s) \\
x(0;s) &=& 1 \\
u(0;s) &=& s
\end{array}\right.$$

A primeira equação dá $x(r,s) = a(s)\, e^r$. Mas como $x(0;s) = 1$, virá que $a(s) = 1$, e portanto $x = e^r$. Quanto à segunda equação, ela dá $u(r,s) = b(s)\, e^{-r}$. Como $u(0;s) = s$, virá que $b(s) = s$, e portanto $u = s\, e^{-r}$. Portanto o difeomorfismo de rectificação do campo $\boldsymbol{\xi}$, é:

$$\phi(r,s) = \left(x = e^r, u = s\, e^{-r}\right)$$

e o respectivo prolongamento a J^1:

$$\phi^{(1)} : \mathbb{R}^3_{rsw} \longmapsto \mathbb{R}^3_{xup}$$

é dado por (2.1.25), com as notações devidamente adaptadas:

$$\phi^{(1)}(r,s,w) = \left(x = e^r, u = s\,e^{-r}, p = \frac{u_r + w\,u_s}{x_r + w\,x_s} = e^{-2r}(w-s) \right)$$

Nas coordenadas $(r, s, w = s')$, a equação de Riccati dada, tem a forma seguinte:

$$\begin{aligned}
0 &= G(r,s,w) \\
&= F \circ \phi^{(1)}(r,s,w) \\
&= F\left(e^r, s\,e^{-r}, e^{-2r}(w-s)\right) \\
&= e^{-2r}(w-s) + \left(s\,e^{-r}\right)^2 - \frac{2}{(e^r)^2} \\
&= e^{-2r}\left[(w-s) + s^2 - 2\right]
\end{aligned}$$

isto é:

$$w = s' = s - s^2 + 2$$

que é òbviamente integrável.

2.2 ODE's de Segunda Ordem

Consideremos agora uma equação ordinária de 2.^{a} ordem:

$$\boxed{F(x,u,u',u'')=0} \tag{2.2.1}$$

Esta equação pode ser novamente interpretada como uma hipersuperfície $SS = SS_F = F^{-1}(\{0\})$, em $J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4_{xupq}$. Mais uma vez supômos que $dF|_{SS \neq 0}$.

O espaço $J^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ define-se como sendo o **espaço dos 2-jactos** de funções $u = f(x)$, que identificamos com o espaço $\mathbb{R}^4$, munido das coordenadas (x,u,p,q).

Vejamos o que isto significa - duas funções diferenciáveis $u = f(x)$ e $u = g(x)$ definem o mesmo 2-jacto num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, se e só se $f(x_0) = g(x_0)$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=x_0}$, e $\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=x_0}$. Portanto um 2-jacto de função $u = f(x)$, num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, fica definido por 4 dados - o ponto x_0, o valor u_0 de $u = f(x)$ em x_0, o valor $p_0 = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$, da primeira derivada de $u = f(x)$ em x_0, e, finalmente, o valor $q_0 = \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$, da segunda derivada de $u = f(x)$ em x_0.

Dada uma função diferenciável $u = f(x)$, o seu **2-gráfico** é, por definição, a curva parametrizada, imersa em $J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4_{(xupq)}$, dada por:

$$\boxed{j^2(f)(x) = (x, u = f(x), p = f'(x), q = f''(x))} \tag{2.2.2}$$

Note que:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} j^2(f)^*(du - p\,dx) & = & f'(x)dx - f'(x)dx & = & 0 \\ j^2(f)^*(dp - q\,dx) & = & f''(x)dx - f''(x)dx & = & 0 \end{array} \right.$$

o que nos leva a considerar a chamada **estrutura de contacto** em $J^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, definida pela distribuição de 2-planos:

$$\boxed{\mathbf{\Pi}_c \overset{\text{def}}{=} \ker \boldsymbol{\omega}^1 \cap \ker \boldsymbol{\omega}^2} \tag{2.2.3}$$

onde:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{\omega}^1 & = & du - p\,dx \\ \boldsymbol{\omega}^2 & = & dp - q\,dx \end{array} \right.} \tag{2.2.4}$$

Um difeomorfismo (local) $\Phi : J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to J^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ diz-se uma **transformação (local) de contacto** de ordem 2, se Φ preserva a distribuição de contacto $\mathbf{\Pi}$, isto é:

$$d\Phi_c(\mathbf{\Pi}_c) = \mathbf{\Pi}_{\Phi(c)} \tag{2.2.5}$$

ou de forma equivalente:

$$\boxed{\Phi^*(\boldsymbol{\omega}^i) = \textstyle\sum_{j=1}^2 \lambda^i_j\, \boldsymbol{\omega}^j, \qquad i = 1,2} \tag{2.2.6}$$

onde $\lambda^i_j \in C^\infty(J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ e $\det\lambda^i_j \neq 0$. Por outras palavras, Φ é uma simetria (finita) da distribuição de contacto. Em **coordenadas canónicas** (x,u,p,q) para $J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4_{xupq}$, e continuando a notar por Φ a expressão de Φ, nas coordenadas (x,u,p,q), de tal forma que:

$$\Phi : (x,u,p,q) \longmapsto (X = X(x,u,p,q), U = U(x,u,p,q), P = P(x,u,p,q), Q = Q(x,u,p,q))$$

(isto é, $X = \Phi^*x$, $U = \Phi^*u$, $P = \Phi^*p$ e $Q = \Phi^*q$), esta última condição (2.2.6), significa que:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rclcl} \Phi^*(du - p\,dx) & = & dU - P\,dX & = & \alpha\,(du - p\,dx) + \beta\,(dp - q\,dx) \\ \Phi^*(dp - q\,dx) & = & dP - Q\,dX & = & \gamma\,(du - p\,dx) + \delta\,(dp - q\,dx) \end{array} \right.} \tag{2.2.7}$$

(em vez dos λ^i_j usamos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$).

- **Exemplo 2.2.1** - **Transformações pontuais** ... Uma difeomorfismo (local) do espaço de configuração:

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,u) & \longmapsto & \phi(x,u) = (X = X(x,u),\, U = U(x,u)) \end{array}$$

pode ser naturalmente levantado a uma transformação (local) de contacto de ordem 2, que notamos por:

$$\phi^{(2)} : J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \longrightarrow J^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$$

De facto, calculando a partir das equações (2.2.7), deduzimos que a primeira implica que $\beta = 0$ e que $P = P(x,u,p)$ é dada pela fórmula (2.1.25):

$$P(x,u,p) = \frac{U_x + p\,U_u}{X_x + p\,X_u}$$

como aliás seria de prever. Por outro lado a segunda equação em (2.2.7) implica que:

$$Q(x,u,p,q) = \frac{P_x + p\,P_u + q\,P_p}{X_x + p\,X_u}$$

que por vezes se apresenta com a notação mais sugestiva:

$$Q(x,u,u',u'') = \frac{P_x + u'\,P_u + u''\,P_{u'}}{X_x + u'\,X_u}$$

Usando esta notação, concluímos portanto que o **prolongamento** a $J^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, de $\phi : \mathbb{R}^2_{xu} \to \mathbb{R}^2_{xu}$, é dado por:

$$\boxed{\phi^{(2)} : (x,u,u',u'') \longmapsto \left\{ \begin{array}{lclcl} X &=& X(x,u) && \\ U &=& U(x,u) && \\ P &=& P(x,u,p) &=& \frac{U_x+u'\,U_u}{X_x+u'\,X_u} \\ Q &=& Q(x,u,u',u'') &=& \frac{P_x+u'\,P_u+u''\,P_{u'}}{X_x+u'\,X_u} \end{array} \right.} \tag{2.2.8}$$

$\blacksquare$.

Suponhamos agora que:

$$\mathbf{\Phi}_\tau : \mathbb{R}^2_{xu} \longrightarrow \mathbb{R}^2_{xu}$$

é um grupo (local ou global) a um parâmetro de difeomorfismos no espaço de configuração $\mathbb{R}^2_{xu}$.

Podemos então prolongá-lo a $J^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, usando as fórmulas (2.2.8), obtendo desta forma um grupo (local ou global) a um parâmetro de difeomorfismos de $J^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$:

$$\mathbf{\Phi}^{(2)}_\tau : J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \longrightarrow J^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$$

É fácil mostrar que o respectivo gerador infinitesimal $\mathbf{X}$, é um campo de contacto em J^2, isto é, que verifica as condições:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}^i = \sum \lambda^i_j\,\boldsymbol{\omega}^j, \qquad i = 1,2} \tag{2.2.9}$$

Aliás, se $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2_{xu})$ é o gerador infinitesimal de $\mathbf{\Phi}_\tau$, então o gerador infinitesimal de $\mathbf{\Phi}^{(2)}_\tau$, diz-se o prolongamento a J^2 do campo $\boldsymbol{\xi}$ e nota-se por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$.

Se:

$$\boldsymbol{\xi} = a(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

então, calculando a partir das equações (2.2.9), podemos deduzir que $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ é dado por (com as notações $p = u'$ e $q = u''$):

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = a(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + c(x,u,u')\frac{\partial}{\partial u'} + d(x,u,u',u'')\frac{\partial}{\partial u''} \tag{2.2.10}$$

onde:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} c(x,u,u') & = & b_x + (b_u - a_x)\, u' - a_u\, (u')^2 \\ & & \\ d(x,u,u',u'') & = & b_{xx} + (2b_{xu} - a_{xx})\, u' + (b_{uu} - 2a_{xu})\, (u')^2 \\ & & \quad -a_{uu}(u')^3 + (b_u - 2a_x)\, u'' - 3a_u\, u'u'' \end{array}\right.} \tag{2.2.11}$$

2.2.1 Invariantes Diferenciais

Seja $\boldsymbol{\Phi}_\tau$ um grupo (local ou global) a um parâmetro de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2_{xu}$, e $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2_{xu})$ o respectivo gerador infinitesimal.

Definição 2.2.1 ... (**i**). *Uma função $F : \mathbb{R}^2_{xu} \to \mathbb{R}$ diz-se um* **invariante** (de ordem 0)*, do grupo $\boldsymbol{\Phi}_\tau$, se:*

$$F\left(\boldsymbol{\Phi}_\tau(\mathbf{x})\right) = F(\mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \tau \tag{2.2.12}$$

isto é, F é constante ao longo de cada órbita do grupo.

(**ii**). *Uma função $F : J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ diz-se um* **invariante diferencial de ordem** 1*, do grupo $\boldsymbol{\Phi}_\tau$, se:*

$$F\left(\boldsymbol{\Phi}^{(1)}_\tau(c)\right) = F(c), \qquad \forall c \in J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), \quad \forall \tau \tag{2.2.13}$$

(**iii**). *Uma função $F : J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ diz-se um* **invariante diferencial de ordem** 2*, do grupo $\boldsymbol{\Phi}_\tau$, se:*

$$F\left(\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_\tau(c)\right) = F(c), \qquad \forall c \in J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}), \quad \forall \tau \tag{2.2.14}$$

Se:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi} = a(x,u)\tfrac{\partial}{\partial x} + b(x,u)\tfrac{\partial}{\partial u}} \tag{2.2.15}$$

a tradução infinitesimal das definições anteriores é a seguinte:

(**i**). Uma função $F : \mathbb{R}^2_{xu} \to \mathbb{R}$ é um **invariante** (de ordem 0), do grupo $\boldsymbol{\Phi}_\tau$, sse:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}F = a\,\tfrac{\partial F}{\partial x} + b\,\tfrac{\partial F}{\partial u} = 0} \tag{2.2.16}$$

(**ii**). Uma função $F : J^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é um **invariante diferencial de ordem** 1, do grupo $\boldsymbol{\Phi}_\tau$, sse:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}^{(1)}F = a\,\tfrac{\partial F}{\partial x} + b\,\tfrac{\partial F}{\partial u} + c\,\tfrac{\partial F}{\partial u'} = 0} \tag{2.2.17}$$

(**iii**). Uma função $F : J^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é um **invariante diferencial de ordem** 2, do grupo $\boldsymbol{\Phi}_\tau$, sse:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}^{(2)}F = a\,\tfrac{\partial F}{\partial x} + b\,\tfrac{\partial F}{\partial u} + c\,\tfrac{\partial F}{\partial u'} + d\,\tfrac{\partial F}{\partial u''} = 0} \tag{2.2.18}$$

onde em (2.2.17) e (2.2.18), pusemos:

$$\begin{aligned} c &= c(x,u,u') \\ &= b_x + (b_u - a_x)\, u' - a_u\, (u')^2 \\ &= D_x b - u'\, D_x a \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

e:

$$\begin{aligned} d &= d(x,u,u',u'') \\ &= b_{xx} + (2b_{xu} - a_{xx})\, u' + (b_{uu} - 2a_{xu})\,(u')^2 \\ &\qquad -a_{uu}(u')^3 + (b_u - 2a_x)\, u'' - 3a_u\, u'u'' \\ &= D_x c - u''\, D_x a \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Em (2.2.19) introduzimos o operador de **derivação total** D_x, definido por:

$$\boxed{D_x \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} + u'\,\frac{\partial}{\partial u} + u''\,\frac{\partial}{\partial u'}} \tag{2.2.21}$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} D_x a &= a_x + u'\, a_u \\ D_x b &= b_x + u'\, b_u \\ D_x c &= c_x + u'\, c_u + u''\, c_{u'} \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

uma vez que $a = a(x,u)$, $b = b(x,u)$ e $c = c(x,u,u')$. Portanto:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \underbrace{\overbrace{a\,\frac{\partial}{\partial x} + b\,\frac{\partial}{\partial u}}^{\boldsymbol{\xi}} + \underbrace{[D_x b - u'\, D_x a]}_{c}\,\frac{\partial}{\partial u'}}_{\boldsymbol{\xi}^{(1)}} + \underbrace{[D_x c - u''\, D_x a]}_{d}\,\frac{\partial}{\partial u''} \tag{2.2.23}$$

Note que:

$$\begin{aligned} \left[D_x, \frac{\partial}{\partial u'}\right] &= -\frac{\partial}{\partial u} \\ \left[D_x, \frac{\partial}{\partial u''}\right] &= -\frac{\partial}{\partial u'} \end{aligned}$$

e portanto, após um cálculo fastidioso, obtemos que:

$$\left[\boldsymbol{\xi}^{(2)}, D_x\right] = -(D_x a)\, D_x - (D_x d)\frac{\partial}{\partial u''} \tag{2.2.24}$$

Lie indicou um método engenhoso para calcular um invariante diferencial de ordem 2, a partir do conhecimento de um invariante $f(x,u)$ e de um invariante diferencial $g(x,u,u')$, de ordem 1. Com efeito, como $\boldsymbol{\xi}^{(2)} f = 0 = \boldsymbol{\xi}^{(2)} g$, e usando (2.2.24), vem que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{(2)}\left(\frac{D_x g}{D_x f}\right) &= (D_x f)^{-2}\left\{\left(\boldsymbol{\xi}^{(2)} D_x g\right)\, D_x f - \left(\boldsymbol{\xi}^{(2)} D_x f\right)\, D_x g\right\} \\ &= (D_x f)^{-2}\left\{\left(\left[\boldsymbol{\xi}^{(2)}, D_x\right] g\right)\, D_x f - \left(\left[\boldsymbol{\xi}^{(2)}, D_x\right] f\right)\, D_x g\right\} \\ &= (D_x f)^{-2}\left\{\left(\left(-(D_x a)\, D_x - (D_x d)\frac{\partial}{\partial u''}\right) g\right)\, D_x f\right\} - \\ &\qquad (D_x f)^{-2}\left\{\left(\left(-(D_x a)\, D_x - (D_x d)\frac{\partial}{\partial u''}\right) f\right)\, D_x g\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que significa que:

$$h(x,u,u',u'') = \frac{D_x g}{D_x f} = \frac{g_x + u'\, g_u + u''\, g_{u'}}{f_x + u'\, f_u} \tag{2.2.25}$$

é um invariante diferencial de ordem 2, funcionalmente independente a f e g.

- **Exemplo 2.2.2** ... Consideremos o grupo a um parâmetro de homotetias, em $\mathbb{R}^2_{xu}$, dado por:

$$\mathbf{\Phi}_\tau(x,u) = (e^\tau\, x, e^\tau\, u)$$

cujo gerador infinitesimal é:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}(x,u) = x\,\tfrac{\partial}{\partial x} + u\,\tfrac{\partial}{\partial u}} \tag{2.2.26}$$

Aqui $a = x$ e $b = u$, e:

$$\begin{array}{rclcl} c & = & c(x,u,u') & = & D_x b - u'\, D_x a \\ & & & = & 0 \\ d & = & d(x,u,u',u'') & = & D_x c - u''\, D_x a \\ & & & = & -u'' \end{array} \tag{2.2.27}$$

Portanto, os prolongamentos de $\boldsymbol{\xi}$ a J^1 e J^2, são dados respectivamente por:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = x\,\frac{\partial}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.2.28}$$

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = x\,\frac{\partial}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial u} - u''\,\frac{\partial}{\partial u''} \tag{2.2.29}$$

Os invariantes de ordem 0, são as soluções $F = F(x,u)$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi} F = x\,\frac{\partial F}{\partial x} + u\,\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}$$

e a solução geral é:

$$\boxed{F = F\left(\tfrac{u}{x}\right)} \tag{2.2.30}$$

Os invariantes de ordem 1, são as soluções $F = F(x,u,u')$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} F = x\,\frac{\partial F}{\partial x} + u\,\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} = \frac{du'}{0}$$

e a solução geral é:

$$\boxed{F = F\left(\tfrac{u}{x}, u'\right)} \tag{2.2.31}$$

Finalmente, os invariantes de ordem 2, são as soluções $F = F(x,u,u',u'')$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} F = x\,\frac{\partial F}{\partial x} + u\,\frac{\partial F}{\partial u} - u''\,\frac{\partial F}{\partial u''} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} = \frac{du'}{0} = \frac{du''}{-u''}$$

e a solução geral é:

$$\boxed{F = F\left(\tfrac{u}{x}, u', xu''\right)} \tag{2.2.32}$$

- **Exemplo 2.2.3** ... Consideremos o grupo a um parâmetro de rotações, em $\mathbb{R}^2_{xu}$, dado por:

$$\mathbf{\Phi}_\tau(x,u) = (x\cos\tau - u\,\sin\tau, u\,\cos\tau + x\sin\tau)$$

cujo gerador infinitesimal é:

$$\boxed{\boldsymbol{\xi}(x,u) = -u\,\tfrac{\partial}{\partial x} + x\tfrac{\partial}{\partial u}} \tag{2.2.33}$$

Aqui $a = -u$ e $b = x$, e:

$$\begin{array}{rclcl} c &=& c(x,u,u') &=& D_x b - u'\,D_x a \\ &&&=& 1 + (u')^2 \\ d &=& d(x,u,u',u'') &=& D_x c - u''\,D_x a \\ &&&=& 3u'u'' \end{array} \tag{2.2.34}$$

Portanto, os prolongamentos de $\boldsymbol{\xi}$ a J^1 e J^2, são dados respectivamente por:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = -u\,\frac{\partial}{\partial x} + x\,\frac{\partial}{\partial u} + [1+(u')^2]\,\frac{\partial}{\partial u'} \tag{2.2.35}$$

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = x\,\frac{\partial}{\partial x} + u\,\frac{\partial}{\partial u} + [1+(u')^2]\,\frac{\partial}{\partial u'} + 3u'u''\,\frac{\partial}{\partial u''} \tag{2.2.36}$$

Os invariantes de ordem 0, são as soluções $F = F(x,u)$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi}F = -u\,\frac{\partial F}{\partial x} + x\,\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{-u} = \frac{du}{x}$$

e a solução geral é:

$$\boxed{F = F\left(x^2+u^2\right)} \tag{2.2.37}$$

Os invariantes de ordem 1, são as soluções $F = F(x,u,u')$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}F = -u\,\frac{\partial F}{\partial x} + x\,\frac{\partial F}{\partial u} + [1+(u')^2]\,\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{-u} = \frac{du}{x} = \frac{du'}{1+(u')^2}$$

Um integral primeiro é $f = x^2+u^2$. Para encontrar um segundo integral funcionalmente independente, multiplicamos os numerador e denominador da primeira fracção por $-u$, e os da segunda por x, para obter:

$$\frac{x\,du - u\,dx}{x^2+u^2} = \frac{du'}{1+(u')^2}$$

e portanto: $g = \text{arc tg}\left(\frac{u}{x}\right) - \text{arc tg}\,(u')$ é um segundo integral. No entanto, é mais usual tomar como integral a tangente desta função, isto é:

$$h = \frac{u - xu'}{x+uu'}$$

Portanto o invariante diferencial de ordem 1 mais geral é do tipo:

$$\boxed{F = F\left(x^2+u^2, \tfrac{u-xu'}{x+uu'}\right)} \tag{2.2.38}$$

Finalmente, os invariantes de ordem 2, são as soluções $F = F(x, u, u', u'')$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} F = -u\,\frac{\partial F}{\partial x} + x\,\frac{\partial F}{\partial u} + [1 + (u')^2]\,\frac{\partial F}{\partial u'} + 3u'u''\,\frac{\partial F}{\partial u''} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{-u} = \frac{du}{x} = \frac{du'}{1 + (u')^2} = \frac{du''}{3u'u''}$$

Usando as duas últimas fracções, obtemos um terceiro integral:

$$k = \frac{(u'')^2}{[1 + (u')^2]^3}$$

e portanto o invariante diferencial de ordem 2 mais geral é do tipo:

$$\boxed{F = F\left(x^2 + u^2, \tfrac{u - xu'}{x + uu'}, \tfrac{(u'')^2}{[1+(u')^2]^3}\right)} \tag{2.2.39}$$

- **Exemplo 2.2.4** ... Consideremos o grupo a um parâmetro, em $\mathbb{R}^2_{xu}$, cujo gerador infinitesimal é:

$$\boldsymbol{\xi}(x, u) = x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.2.40}$$

Fazendo cálculos análogos aos anteriores, podemos concluir que o invariante diferencial de ordem 2 mais geral é do tipo:

$$\boxed{F = F\left(xu, x^2u', x^3u''\right)} \tag{2.2.41}$$

- **Exemplo 2.2.5** ... Consideremos o grupo a um parâmetro, em $\mathbb{R}^2_{xu}$, cujo gerador infinitesimal é:

$$\boldsymbol{\xi}(x, u) = x\,\frac{\partial}{\partial x} + nu\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.2.42}$$

Fazendo cálculos análogos aos anteriores, podemos concluir que o invariante diferencial de ordem 2 mais geral é do tipo:

$$\boxed{F = F\left(\tfrac{u}{x^n}, \tfrac{u'}{x^{n-1}}, \tfrac{u''}{x^{n-2}}\right)} \tag{2.2.43}$$

2.2.2 Interpretação geométrica da equação $F(x, u, u', u'') = 0$

Regressemos à interpretação geométrica da equação (2.2.1). Recorde que a essa equação associamos a superfície $\Sigma = \{(x, u, p, q) \in \mathbb{R}^4 : F(x, u, p, q) = 0\}$ em $J^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Em cada ponto $c \in \Sigma$ temos dois subespaços - o 2-plano de contacto $\mathbf{\Pi}_c$ e o 3-plano tangente $T_c\Sigma$. Genèricamente, num aberto denso de SS, a intersecção $\mathbf{\Pi}_c \cap T_c\Sigma = \mathcal{C}_{SS}|_c$ é uma recta $\mathcal{C}_{SS}|_c$ bem definida, tangente a Σ em c.

Portanto, nesse aberto de Σ, fica definido um campo de rectas $\mathcal{C}_{SS}$, chamado o **campo de direcções características** da equação (2.2.1):

$$\mathcal{C}_{SS:c\mapsto\mathcal{C}_{SS}|_c=\mathbf{\Pi}_c\cap T_c\Sigma(2.2.44)}$$

Uma **solução generalizada** da equação (2.2.1) é, por definição, uma curva integral (contida em SS), do campo de direcções características $\mathcal{C}_{SS}$. Entre estas soluções encontram-se as **soluções clássicas**, isto é, as curvas integrais de $\mathcal{C}_{SS}$, que se projectam difeomòrficamente sobre o eixo dos xx, e que, por isso, são 2-gráficos de soluções usuais da equação (2.2.1).

O campo de direcções características $\mathcal{C}_{SS}$, da ODE $F(x,u,u',u'')=0$, pode ser definido por um campo de vectores $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}_F \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ (pelo menos localmente). Vejamos como se define este campo. Suponhamos que:

$$\mathbf{Z}=\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial u}+\gamma\frac{\partial}{\partial p}+\delta\frac{\partial}{\partial q}$$

Por definição, $\mathbf{Z}$ deverá verificar as seguintes condições:

$$\left\{\begin{array}{lcll} dF(\mathbf{Z})|_\Sigma &=& 0 & \mathbf{Z} \text{ deve ser tangente a } \Sigma \\ \boldsymbol{\omega}^1(\mathbf{Z})|_\Sigma &=& 0 & \\ \boldsymbol{\omega}^2(\mathbf{Z})|_\Sigma &=& 0 & \mathbf{Z} \text{ deve pertencer ao plano de contacto } \mathbf{\Pi}=\ker\boldsymbol{\omega}^1\cap\ker\boldsymbol{\omega}^2 \end{array}\right.$$

As duas últimas condições dizem que:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{\omega}^1(\mathbf{Z}) &=& (du-p\,dx)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial u}+\gamma\frac{\partial}{\partial p}+\delta\frac{\partial}{\partial q}\right) \\ &=& \beta-p\,\alpha \\ &=& 0 \\ \boldsymbol{\omega}^2(\mathbf{Z}) &=& (dp-q\,dx)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial u}+\gamma\frac{\partial}{\partial p}+\delta\frac{\partial}{\partial q}\right) \\ &=& \gamma-q\,\alpha \\ &=& 0 \end{array}\right. \tag{2.2.45}$$

enquanto que a primeira é equivalente à existência de uma função λ tal que $\mathbf{Z}F=\lambda F$, isto é:

$$\alpha\frac{\partial F}{\partial x}+\beta\frac{\partial F}{\partial u}+\gamma\frac{\partial F}{\partial p}+\delta\frac{\partial F}{\partial q}=\lambda\,F$$

Substituindo $\beta=p\alpha$ e $\gamma=q\,\alpha$, vem que:

$$\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\,\frac{\partial F}{\partial u}+q\,\frac{\partial F}{\partial p}\right)+\delta\frac{\partial F}{\partial q}=\lambda\,F$$

e é óbvio que esta condição se verifica pondo $\lambda=0$, $\alpha=-\frac{\partial F}{\partial q}$ e $\delta=\frac{\partial F}{\partial x}+p\,\frac{\partial F}{\partial u}+q\,\frac{\partial F}{\partial p}$. Portanto o campo de vectores $\mathbf{Z}_F$, que define o campo de direcções características, tem a forma:

$$\boxed{\mathbf{Z}_F=-F_q\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\,\frac{\partial}{\partial u}+q\,\frac{\partial}{\partial p}\right)+(F_x+p\,F_u+q\,F_p)\,\frac{\partial}{\partial q}} \tag{2.2.46}$$

ou em notação sugestiva:

$$\boxed{\mathbf{Z}_F=-F_{u''}\left(\frac{\partial}{\partial x}+u'\,\frac{\partial}{\partial u}+u''\,\frac{\partial}{\partial u'}\right)+(F_x+u'\,F_u+u''\,F_{u'})\,\frac{\partial}{\partial u''}} \tag{2.2.47}$$

$\mathbf{Z}_F$ diz-se o **campo característico** da equação (2.2.1). As respectivas curvas integrais são dadas pelas equações diferenciais:

$$\boxed{\frac{dx}{-F_q}=\frac{du}{-p\,F_q}=\frac{dp}{-q\,F_q}=\frac{dq}{F_x+p\,F_u+q\,F_p}} \tag{2.2.48}$$

ou, noutra forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} &=& -F_q \\ \dot{u} &=& -p\,F_q \\ \dot{p} &=& -q\,F_q \\ \dot{q} &=& F_x+p\,F_u+q\,F_p \end{array}\right. \tag{2.2.49}$$

Em particular, quando a equação (2.2.1) é resolúvel em ordem a $q = u''$, isto é, quando $F = -q + G(x, u, p)$, de tal forma que $\Sigma = \operatorname{gr} G = \{(x, u, p, q) : q = G(x, u, p)\}$, o campo de vectores $\mathbf{Z}_F$, que define o campo de direcções características, tem a forma (uma vez que $F_q = -1$):

$$\mathbf{Z}_F = \frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial u} + q\,\frac{\partial}{\partial p} + (G_x + p\,G_u + q\,G_p)\,\frac{\partial}{\partial q} \tag{2.2.50}$$

Este campo projecta-se num campo de vectores:

$$\mathbf{X}_G = \frac{\partial}{\partial x} + p\,\frac{\partial}{\partial u} + G(x, u, p)\,\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.2.51}$$

em $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3_{xup}$. Portanto uma ODE do tipo $u'' = G(x, u, u')$ é equivalente ao campo de vectores $\mathbf{X}_G$, em J^1, acima referido.

2.2.3 Simetrias da equação $F(x, u, u', u'') = 0$

Uma simetria (infinitesimal) da ODE de segunda ordem $F(x, u, u', u'') = 0$, é um campo de contacto de ordem 2, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(J^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$, tal que:

$$\mathbf{X}F = \lambda\, F$$

para alguma função $\lambda \in C^\infty(J^2)$. As simetrias mais estudadas são as simetrias pontuais $\mathbf{X} = \boldsymbol{\xi}^{(2)}$, onde $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2_{xu})$.

Consideremos uma ODE de segunda ordem cuja superfície associada é:

$$\Sigma = \{(x, u, p, q) \in \mathbb{R}^4 :\, F(x, u, p, q) = 0\,\}$$

em $J^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, e suponhamos que SS é invariante sob um grupo (local) a um parâmetro $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_\tau$, de transformações pontuais, onde $\boldsymbol{\Phi}_\tau : \mathbb{R}^2_{xu} \to \mathbb{R}^2_{xu}$. Então as órbitas de $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_\tau$ estão contidas em SS:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}_\tau(c) = 0, \qquad \forall c :\, F(c) = 0$$

e o gerador infinitesimal $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ desse grupo, é sempre tangente a SS. Suponhamos que este gerador nunca se anula em SS:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)}(c) \neq \mathbf{0}, \qquad \forall c :\, F(c) = 0$$

Então se $f(x, u)$, $g(x, u, u')$ e $h(x, u, u', u'') = \frac{D_x g}{D_x f}$ são invariantes diferenciais do grupo referido, as respectivas órbitas são dadas (localmente) por:

$$\begin{cases} f(x, u) & \equiv \alpha \\ g(x, u, u') & \equiv \beta \\ \frac{D_x g}{D_x f}(x, u, u', u'') & \equiv \gamma \end{cases} \tag{2.2.52}$$

Mas os invariantes f, g e $h = \frac{D_x g}{D_x f}$, são funcionalmente independentes e por isso a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}^4_{xupq} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3_{\alpha\beta\gamma} \\ & (x, u, p, q) & \longmapsto & \Big(\alpha = f(x, u), \beta = g(x, u, p), \gamma = \frac{D_x g}{D_x f}(x, u, p, q)\Big) \end{array}$$

tem característica 3, e é portanto uma submersão local, cujas fibras são as órbitas do grupo de simetria.

Como estas órbitas estão contidas em SS, existe (localmente) uma função $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que (localmente) SS é dada por $G(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ (isto é, localmente SS é um cilindro sobre a superfície

$G = 0$, em $\mathbb{R}^3_{\alpha\beta\gamma}$, cujas "geratrizes" são as órbitas do grupo). Portanto (localmente) SS é dada por:

$$G\left(f(x,u), g(x,u,u'), \frac{D_x g}{D_x f}(x,u,u',u'')\right) = 0 \tag{2.2.53}$$

que se diz a **representação invariante** da ODE dada. Se $u = u(x)$ é uma solução da equação dada, então $F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0$. Mas como:

$$\begin{aligned} \frac{D_x g}{D_x f}(x, u(x), u'(x), u''(x)) &= \frac{g_x(\cdot) + u'(x)\, g_u(\cdot) + u''(x)\, g_{u'}(\cdot)}{f_x(\cdot) + u'(x)\, f_u(\cdot)} \\ &= \frac{dg(x, u(x), u'(x))}{df(x, u(x))} \end{aligned}$$

deduzimos que, nas coordenadas α, β, γ, a equação escreve-se na forma:

$$G\left(\alpha, \beta, \frac{d\beta}{d\alpha}\right) = 0$$

que é uma ODE de ordem 1. Portanto a presença de uma simetria conduz à redução da ordem da ODE original.

- **Exemplo 2.2.6** ... Consideremos a ODE linear homogénea de segunda ordem:

$$u'' + A(x)\, u' + B(x)\, u = 0$$

que admite a simetria (infinitesimal) pontual:

$$\boldsymbol{\xi} = u \frac{\partial}{\partial u}$$

cujo prolongamento a J^2 é:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = u \frac{\partial}{\partial u} + u' \frac{\partial}{\partial u'}$$

Um invariante (de ordem 0) é $f(x,u) = x$, e um invariante diferencial de ordem 1 é $g(x,u,u') = \frac{u'}{u}$. Portanto deduzimos o invariante de ordem 2:

$$\begin{aligned} \frac{D_x g}{D_x f}(x,u,u',u'') &= \frac{g_x + u'\, g_u + u''\, g_{u'}}{f_x + u'\, f_u} \\ &= -u'\left(\frac{u'}{u^2}\right) + \frac{u''}{u} \end{aligned}$$

Pondo:

$$\begin{cases} f(x,u) &= x &\equiv \alpha \\ g(x,u,u') &= \frac{u'}{u} &\equiv \beta \\ \frac{D_x g}{D_x f}(x,u,u',u'') &= -\frac{(u')^2}{u^2} + \frac{u''}{u} &\equiv \gamma \end{cases} \tag{2.2.54}$$

Vem então que:

$$\gamma = \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{u''}{u} - \beta^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u''}{u} = \frac{d\beta}{d\alpha} + \beta^2$$

e portanto:

$$\begin{aligned} 0 &= u'' + A(x)\, u' + B(x)\, u \\ &= \frac{u''}{u} + A(x)\frac{u'}{u} + B(x) \\ &= \frac{d\beta}{d\alpha} + \beta^2 + A(\alpha)\,\beta + B(\alpha) \end{aligned}$$

Obtemos assim a equação reduzida:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} + \beta^2 + A(\alpha)\,\beta + B(\alpha) = 0$$

que é uma equação de Ricatti.

2.2.4 Integração de $F(x,u,u',u'')=0$ através de duas simetrias

Nesta secção vamos apenas analisar alguns exemplos de integração da ODE $F(x,u,u',u'')=0$, quando esta possui duas simetrias.

- **Exemplo 2.2.7** ... Considere a equação linear:

$$\boxed{u'' - \frac{2u}{x^2} = 0}$$

que admite as simetrias pontuais:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = u\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$$

De facto, com $F(x,u,p,q) = q - \frac{2u}{x^2}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}_1^{(2)}F &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + p\frac{\partial}{\partial p} + q\frac{\partial}{\partial q}\right)\left(q - \frac{2u}{x^2}\right) \\
&= q - \frac{2u}{x^2} = F \\
\boldsymbol{\xi}_2^{(2)}F &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - p\frac{\partial}{\partial p} - 2q\frac{\partial}{\partial q}\right)\left(q - \frac{2u}{x^2}\right) \\
&= -2q + \frac{4u}{x^2} = -2F
\end{aligned} \tag{2.2.55}$$

Note que $\boldsymbol{\xi}_1$ e $\boldsymbol{\xi}_2$ geram uma álgebra de Lie real de dimensão 2, abeliana, uma vez que $[\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2] = 0$.

Vamos rectificar o campo $\boldsymbol{\xi}_1 = u\frac{\partial}{\partial u}$. Este campo é transversal à recta $u = 1$. O difeomorfismo de rectificação:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,s) & \longmapsto & (x(r,s), u(r,s)) \end{array}, \qquad \text{com} \qquad \phi_*\frac{\partial}{\partial s} = \boldsymbol{\xi}_1$$

pode então ser escolhido de tal forma que as respectivas componentes são determinadas pelo sistema de ODE's, parametrizado por r:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial x}{\partial s}(r;s) &=& 0 \\ \frac{\partial u}{\partial s}(r;s) &=& u(r;s) \\ x(r;0) &=& r \\ u(r;0) &=& 1 \end{array}\right.$$

o que dá $x(r;s) = r$ e $u(r,s) = e^s$. O prolongamento de ϕ a J^2:

$$\phi^{(2)} : \mathbb{R}^4_{rswz} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{xupq}$$

é dado por (2.2.8), adaptando devidamente as notações:

$$\begin{aligned}
\phi^{(2)}(r,s,w,z) &= \left(r, e^s, \frac{u_r + wu_s}{x_r + wx_s}, \frac{p_r + wp_s + zp_w}{x_r + wx_s}\right) \\
&= \left(r, e^s, we^s, w^2e^s + ze^s\right)
\end{aligned}$$

A equação dada, nas novas coordenadas (r, s), tem o aspecto seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= G(r, s, w, z) \\ &= F \circ \phi^{(2)}(r, s, w, z) \\ &= F\left(r, e^s, we^s, w^2 e^s + ze^s\right) \\ &= w^2 e^s + ze^s - \frac{2e^s}{r^2} \end{aligned}$$

isto é:

$$(z + w^2)\, r^2 - 2 = (s'' + (s')^2)\, r^2 - 2 = 0$$

que não contem dependência explícita da variável s, como aliás seria de esperar uma vez que $\frac{\partial}{\partial s}$ é simetria pontual desta equação. Como $s' = w$, a equação pode escrever-se na forma:

$$(w' + w^2)\, r^2 = 2 \tag{2.2.56}$$

que é uma ODE de primeira ordem. Portanto a simetria pontual permitiu "baixar" a ordem da equação dada, de uma unidade. Calculemos agora a expressão da outra simetria pontual $\boldsymbol{\xi}_2 = x\,\frac{\partial}{\partial x}$, nas coordenadas (r, s). Será um campo de vectores da forma $\boldsymbol{\eta}_2(r, s) = a(r, s)\frac{\partial}{\partial r} + b(r, s)\frac{\partial}{\partial s}$, tal que $\phi_*(\boldsymbol{\eta}_2) = \boldsymbol{\xi}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x = r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& r \\ b &=& 0 \end{array} \right.$$

isto é:

$$\boldsymbol{\eta}_2 = r\frac{\partial}{\partial r}$$

O prolongamento a $J^2 = \mathbb{R}^4_{rswz}$ é:

$$\boldsymbol{\eta}_2^{(2)} = r\frac{\partial}{\partial r} - w\frac{\partial}{\partial w} - 2z\frac{\partial}{\partial z}$$

cuja projecção em $\mathbb{R}^3_{rwz}$, onde "vive" a equação reduzida (2.2.56), é dada pela mesma fórmula. Note que $\boldsymbol{\zeta} = r\frac{\partial}{\partial r} - w\frac{\partial}{\partial w} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2_{rw})$, é tal que $\boldsymbol{\zeta}^{(1)} = \boldsymbol{\eta}_2^{(2)}$. De facto, este campo $\boldsymbol{\zeta}$ é simetria pontual da equação reduzida (2.2.56). Com efeito, com $G(r, w, z) = (z + w^2)\, r^2 - 2$:

$$\boldsymbol{\zeta}^{(1)} G = \left(r\frac{\partial}{\partial r} - w\frac{\partial}{\partial w} - 2z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left((z + w^2)\, r^2 - 2\right) = 0$$

Podemos por isso integrar a equação reduzida utilizando por exemplo um factor integrante.

Concluindo, a ODE de segunda ordem dada, que admite uma álgebra de Lie abeliana, de dimensão 2, de simetrias pontuais, é integrável através da integração de uma ODE de primeira ordem (obtida por redução de ordem), seguida de uma quadratura.

- **Exemplo 2.2.8** ... Consideremos a equação de segunda ordem:

$$\boxed{u'' + u' - \tfrac{u}{x} = 0}$$

Esta equação admite as simetrias infinitesimais pontuais:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = x\,\frac{\partial}{\partial u}, \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = u\,\frac{\partial}{\partial u}$$

De facto, os respectivos prolongamentos a J^2 são dados por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1^{(2)} &= x\,\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial p} \\ \boldsymbol{\xi}_2^{(2)} &= u\,\frac{\partial}{\partial u}+p\,\frac{\partial}{\partial p}+q\,\frac{\partial}{\partial q} \end{aligned} \tag{2.2.57}$$

e, como a equação dada é:

$$F(x,u,p,q)=q+p-\frac{u}{x}=0$$

temos que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1^{(2)}\,F &= \left[x\,\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial p}\right]\left(q+2p-\frac{2u}{x}\right) \\ &= 0 \\ \boldsymbol{\xi}_2^{(2)}\,F &= \left[u\,\frac{\partial}{\partial u}+p\,\frac{\partial}{\partial p}+q\,\frac{\partial}{\partial q}\right]\left(q+p-\frac{u}{x}\right) \\ &= q+p-\frac{u}{x} \\ &= F \end{aligned} \tag{2.2.58}$$

Note que:

$$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]=\boldsymbol{\xi}_1$$

(e portanto $\left[\boldsymbol{\xi}_1^{(2)},\boldsymbol{\xi}_2^{(2)}\right]=\boldsymbol{\xi}_1^{(2)}$). Isto significa que a equação dada admite uma álgebra de Lie de simetrias infinitesimais pontuais, de dimensão 2, que é solúvel. O subespaço de dimensão 1, gerado por $\boldsymbol{\xi}_1$ é um ideal dessa álgebra. A primeira coisa a fazer é pois "quocientar" a simetria gerada por $\boldsymbol{\xi}_1$.

Calculemos as coordenadas que rectificam o campo $\boldsymbol{\xi}_1=x\,\frac{\partial}{\partial u}$, isto é, a aplicação de rectificação $\phi:\mathbb{R}^2_{rs}\to\mathbb{R}^2_{xu}$, tal que:

$$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)=\boldsymbol{\xi}_1$$

As suas componentes são dadas por:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial x}{\partial s}(r;s) &=& 0 \\ \frac{\partial u}{\partial s}(r;s) &=& x(r;s) \\ x(r;0) &=& r \\ u(r;0) &=& 0 \end{array}\right.$$

cujas soluções são $x(r;s)=r$ e $u(r;s)=rs$. O difeomorfismo ϕ é portanto:

$$\phi(r,s)=(r,rs)$$

e o seu prolongamento a J^2:

$$\phi^{(2)}:\mathbb{R}^4_{rswz}\longrightarrow\mathbb{R}^4_{xupq}$$

é dado por (2.2.8), adaptando devidamente as notações:

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(r,s,w,z) &= \left(r,rs,\frac{u_r+wu_s}{x_r+wx_s},\frac{p_r+wp_s+zp_w}{x_r+wx_s}\right) \\ &= (r,rs,s+wr,2w+rz) \end{aligned}$$

A equação dada, nas novas coordenadas (r,s), tem o aspecto seguinte:

$$\begin{aligned} 0 &= G(r,s,w,z) \\ &= F\circ\phi^{(2)}(r,s,w,z) \\ &= F\left(r, rs, s+wr, 2w+rz\right) \\ &= 2w+rz+s+wr-\frac{rs}{r} \\ &= 2w+rz+rw \end{aligned}$$

isto é:

$$(2+r)w+rz=(2+r)s'+rs''=0$$

que não contem dependência explícita da variável s, como aliás seria de esperar, uma vez que $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\partial}{\partial s}$ é simetria pontual desta equação. Como $s'=w$, a equação pode escrever-se na forma:

$$(2+r)w+rw'=0 \tag{2.2.59}$$

que é uma ODE de primeira ordem. Portanto a simetria pontual permitiu "baixar" a ordem da equação dada, de uma unidade.

Calculemos agora a expressão da outra simetria pontual $\boldsymbol{\xi}_2=u\frac{\partial}{\partial u}$, nas coordenadas (r,s). Será um campo de vectores da forma $\boldsymbol{\eta}_2(r,s)=a(r,s)\frac{\partial}{\partial r}+b(r,s)\frac{\partial}{\partial s}$, tal que $\phi_*(\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{\xi}_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ u=rs \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} a &= 0 \\ as+rb &= rs \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \begin{cases} a &= 0 \\ b &= s \end{cases}$$

isto é:

$$\boldsymbol{\eta}_2=s\frac{\partial}{\partial s}$$

Note que:

$$[\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2]=\left[\frac{\partial}{\partial s}, s\frac{\partial}{\partial s}\right]=\frac{\partial}{\partial s}$$

como aliás seria de esperar.

O prolongamento de $\boldsymbol{\eta}_2$ a $J^2=\mathbb{R}^4_{rswz}$ é:

$$\boldsymbol{\eta}_2^{(2)}=s\frac{\partial}{\partial s}+w\frac{\partial}{\partial w}+z\frac{\partial}{\partial z}$$

cuja projecção em $\mathbb{R}^3_{rwz}$, onde "vive" a equação reduzida (2.2.56), é dada por:

$$w\frac{\partial}{\partial w}+z\frac{\partial}{\partial z}$$

Note que $\boldsymbol{\zeta}=w\frac{\partial}{\partial w}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2_{rw})$, é tal que $\boldsymbol{\zeta}^{(1)}=w\frac{\partial}{\partial w}+z\frac{\partial}{\partial z}$. De facto, este campo $\boldsymbol{\zeta}$ é simetria pontual da equação reduzida (2.2.59). Com efeito, com $G(r,w,z)=(2+r)w+rz$, vem que:

$$\boldsymbol{\zeta}^{(1)}G=\left(w\frac{\partial}{\partial w}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)((2+r)w+rz)=G$$

Podemos por isso integrar a equação reduzida utilizando por exemplo um factor integrante.

Desta vez, a ODE de segunda ordem dada, admite uma álgebra de Lie solúvel, de dimensão 2, de simetrias pontuais, e é ainda integrável, através da integração de uma ODE de primeira ordem (obtida por redução de ordem), seguida de uma quadratura.

2.3 Exercícios e exemplos suplementares

- • **Exercício 2.3.1** ... Considere a equação:

$$(\mathbf{E})\ldots \qquad u' + u^2 = \frac{2}{x^2}$$

  - (i). Mostre que $\boldsymbol{\xi} = x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}$ é simetria infinitesimal de $(\mathbf{E})$.
  - (ii). Calcule o grupo local a um parâmetro $\boldsymbol{\Phi}_\tau = \boldsymbol{\Phi}_\tau^{\boldsymbol{\xi}}$, e mostre directamente que ele é simetria (finita) de $(\mathbf{E})$.
  - (iii). Calcule um factor integrante e integre a equação dada.
  - (iv). Integre agora $(\mathbf{E})$, usando "coordenadas canónicas" (relativas a $\boldsymbol{\xi}$.)

Resolução ...

(i). Reescrevendo $(\mathbf{E})$ em forma de Pfaff:

$$\boldsymbol{\theta} = du + (u^2 - 2/x^2)\, dx = 0$$

sabemos que $\mathbf{Z} = -\frac{\partial}{\partial x} + (u^2 - 2/u^2)\frac{\partial}{\partial u}$ gera a distribuiçãode linhas correspondente, e como:

$$[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{Z}] = \left[x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}, -\frac{\partial}{\partial x} + (u^2 - 2/x^2)\frac{\partial}{\partial u}\right] = -\mathbf{Z}$$

$\boldsymbol{\xi}$ é simetria infinitesimal de $(\mathbf{E})$.

(ii). As equações diferenciais que determinam $\boldsymbol{\Phi}_\tau$ são:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(\tau) & = & x(\tau) \\ u'(\tau) & = & -u(\tau) \end{array}\right. \qquad \text{com condição inicial, para } \tau = 0 \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x(0) & = & x \\ u(0) & = & u \end{array}\right.$$

Integrando vem que:

$$\boldsymbol{\Phi}_\tau(x, u) = (e^\tau\, x, e^{-\tau}\, u)$$

O respectivo prolongamento a J^1 é:

$$\boldsymbol{\Phi}_\tau^{(1)}(x, u) = \left(x\, e^\tau, u\, e^{-\tau}, p\, e^{-2\tau}\right)$$

Pondo $F(x, u, p) = p + u^2 - \frac{2}{x^2}$, vem que:

$$\begin{aligned} F \circ \boldsymbol{\Phi}_\tau^{(1)}(x, u) &= F\left(x\, e^\tau, u\, e^{-\tau}, p\, e^{-2\tau}\right) \\ &= p\, e^{-2\tau} + (u\, e^{-\tau})^2 - \frac{2}{(x\, e^\tau)^2} \\ &= e^{-2\tau}\left(p + u^2 - \frac{2}{x^2}\right) \\ &= e^{-2\tau} F(x, u, p) \end{aligned}$$

o que mostra que $\boldsymbol{\Phi}_\tau = \boldsymbol{\Phi}_\tau^{\boldsymbol{\xi}}$ é simetria (finita) de $(\mathbf{E})$.

(iii). Pelo teorema de Lie $\mu = \frac{1}{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi})}$ é um factor integrante, desde que $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$.

Mas $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) = \left(du + (u^2 - 2/x^2)\, dx\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u}\right) = -u + u^2 x - 2/x$ e, desde que este termo seja diferente de zero:

$$\mu = \frac{x}{x^2u^2 - xu - 2}$$

Vem então que:

$$\mu\boldsymbol{\theta} = \frac{x}{x^2u^2 - xu - 2}\, dx + \frac{x^2u^2 - 2}{x(x^2u^2 - xu - 2)}\, du$$

é uma forma fechada e portanto localmente exacta (lema de Poincaré): $\mu\boldsymbol{\theta} = df$ localmente. Como:

$$\mu\boldsymbol{\theta} = \frac{x\, du + u\, dx}{x^2u^2 - xu - 2} + \frac{dx}{x} = d\left(\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{xu-2}{xu+1}\right|\right)$$

obtemos o integral:

$$f(x,u) = x^3\frac{xu-2}{xu+1} = C$$

(iv). Cálculo.

- • **Exercício 2.3.2** ... Considere a equação:

$$(\mathbf{E})... \qquad\qquad xu' = u + F(x)$$

  - (i). Mostre que $\boldsymbol{\xi} = x\frac{\partial}{\partial u}$ é simetria infinitesimal de $(\mathbf{E})$.
  - (ii). Calcule o grupo local a um parâmetro $\boldsymbol{\Phi}_\tau = \boldsymbol{\Phi}_\tau^{\boldsymbol{\xi}}$, e mostre directamente que ele é simetria (finita) de $(\mathbf{E})$.
  - (iii). Calcule um factor integrante e integre a equação dada.
  - (iv). Integre a mesma equação $(\mathbf{E})$, usando agora "coordenadas canónicas" (relativas a $\boldsymbol{\xi}$.)

Resolução ...

(i). Reescrevendo $(\mathbf{E})$ em forma de Pfaff:

$$\boldsymbol{\theta} = x\, du - (u + F(x))\, dx = 0$$

sabemos que $\mathbf{Z} = x\frac{\partial}{\partial x} + (u + F(x))\frac{\partial}{\partial u}$ gera o campo de linhas correspondente, e como:

$$[\boldsymbol{\xi}, \mathbf{Z}] = \left[x\frac{\partial}{\partial u}, x\frac{\partial}{\partial x} + (u + F(x))\frac{\partial}{\partial u}\right] = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\xi}$ é simetria infinitesimal de $(\mathbf{E})$.

(ii). As equações diferenciais que determinam $\boldsymbol{\Phi}_\tau$ são:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(\tau) & = & 0 \\ u'(\tau) & = & x(\tau) \end{array}\right. \qquad \text{com condição inicial, para } \tau = 0 \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & x \\ u(0) & = & u \end{array}\right.$$

Integrando vem que:

$$\boldsymbol{\Phi}_\tau(x,u) = (x, x\tau + u)$$

O respectivo prolongamento a J^1 é:

$$\boldsymbol{\Phi}_\tau^{(1)}(x,u) = (x, x\tau + u, \tau + p)$$

Pondo $F(x,u,p) = xp - u - F(x)$, vem que:

$$\begin{array}{rcl} F \circ \boldsymbol{\Phi}_\tau^{(1)}(x,u,p) & = & F\left(x, x\tau + u, \tau + p\right) \\ & = & x(\tau + p) - (x\tau + u) - F(x) \\ & = & xp - u - F(x) \\ & = & F(x,u,p) \end{array}$$

o que mostra que $\mathbf{\Phi}_\tau = \mathbf{\Phi}_\tau^{\boldsymbol{\xi}}$ é simetria (finita) de (**E**).

(iii). Pelo teorema de Lie $\mu = \frac{1}{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi})}$ é um factor integrante, desde que $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$.

Mas $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\xi}) = (x\,du - (u + F(x))\,dx)\left(x\frac{\partial}{\partial u}\right) = x^2$ e, desde que $x \neq 0$ termo seja diferente de zero:

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

Vem então que, para $x \neq 0$:

$$\mu\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{x}\,du - \frac{u + F(x)}{x^2}\,dx = 0$$

é uma forma fechada e portanto localmente exacta (lema de Poincaré): $\mu\boldsymbol{\theta} = df$ localmente. Pondo:

$$f_x = \frac{-u + F(x)}{x^2} \qquad\qquad f_u = \frac{1}{x}$$

integramos $f_u = 1/x$ em ordem a u (com x fixo), para obter:

$$f(x,u) = \frac{u}{x} + g(x)$$

Por outro lado:

$$\frac{-u + F(x)}{x^2} = f_x = \frac{-u}{x^2} + g'(x) \qquad \Rightarrow \qquad g'(x) = \frac{F(x)}{x^2}$$

e o integral geral será:

$$f(x,y) = \frac{u}{x} + \int \frac{F(x)}{x^2}dx \equiv C$$

(iv). Escolhemos a transversal $u = 0$ para $\boldsymbol{\xi} = x\frac{\partial}{\partial u}$, para $\mathbf{x} \neq 0$ e designamos por:

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{R}^2_{rs} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2_{xu} \\ & (r,s) & \longmapsto & (x(r,s), u(r,s)) \end{array}$$

difeomorfismo de rectificação ϕ, do campo $\boldsymbol{\xi}$, que envia o campo $\frac{\partial}{\partial s}$ no campo $\boldsymbol{\xi} = x\frac{\partial}{\partial u}$. As respectivas componentes são pois determinadas pelo sistema de ODE's, parametrizado por r:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial x}{\partial s}(r;s) & = & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial s}(r;s) & = & x(r;s) \\ x(r;0) & = & r \\ u(r;0) & = & 0 \end{array}\right.$$

A primeira equação dá $x(r,s) = a(r)$. Mas como $x(r;0) = r$, virá que $a(r) = r$, e portanto $x(r,s) = r$. Quanto à segunda equação, ela dá $u(r,s) = rs + b(r)$. Como $u(r;0) = 0$, virá que $b(r) = 0$, e portanto $u(r,s) = rs$. Portanto o difeomorfismo de rectificação do campo $\boldsymbol{\xi}$, é:

$$\phi(r,s) = (x = r, u = rs)$$

e o respectivo prolongamento a J^1 é dado por:

$$\phi^{(1)}(r,s,w) = \left(x = r, u = rs, p = \frac{u_r + w\,u_s}{x_r + w\,x_s} = s + wr\right)$$

Nas coordenadas $(r,s,w = s')$, a equação (E), tem a forma seguinte (para $r \neq 0$):

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & G(r,s,w) \\ & = & F \circ \phi^{(1)}(r,s,w) \\ & = & F\,(r, rs, s + wr) \\ & = & r(s + wr) - rs - F(r) \\ & = & wr^2 - F(r) \end{array}$$

isto é:

$$w = s' = \frac{F(r)}{r^2}$$

que é òbviamente integrável:

$$s = \int \frac{F(r)}{r^2} dr$$

Regressando às variáveis originais xu, como $r = x$ e $s = \frac{u}{x}$ (para $x \neq 0$), vem:

$$u = x \int \frac{F(x)}{x^2} dx$$

- • **Exercício 2.3.3** ... Considere a equação:

$$(\mathbf{E})... \qquad u' = \frac{u}{x} + x\, F\left(\frac{u}{x}\right), \quad x \neq 0$$

– (i). Mostre que $\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{x}\frac{\partial}{\partial u}$ é simetria infinitesimal de (**E**).

– (ii). Calcule o grupo local a um parâmetro $\mathbf{\Phi}_\tau = \mathbf{\Phi}_\tau^{\boldsymbol{\xi}}$, e mostre directamente que ele é simetria (finita) de (**E**).

– (iii). Calcule um factor integrante e integre a equação dada.

– (iv). Integre a mesma equação (**E**), usando agora "coordenadas canónicas" (relativas a $\boldsymbol{\xi}$.)

- • **Exercício 2.3.4** ... Considere a equação:

$$(\mathbf{E})... \qquad u'' - \frac{(u')^2}{u} + u^2 = 0$$

– (i). Mostre que $\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial}{\partial x}$ e $\boldsymbol{\eta} = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$ geram uma álgebra solúvel de simetrias pontuais de (**E**).

– (ii). Integre (**E**) usando o método dos "invariantes diferenciais".

– (iv). Integre a mesma equação (**E**), usando agora "coordenadas canónicas" apropriadas ((r, s) tais que $\phi_*\partial_s = \boldsymbol{\xi}$).

Resolução ...

(i). Os prolongamentos de $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ a J^2 são dados por:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \partial_x \qquad \boldsymbol{\eta}^{(2)} = x\partial_x - 2u\partial_u - 3p\partial_p - 4q\partial_q$$

Com $F(x, u, p, q) = q - \frac{p^2}{u} + u^2$, vem que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{(2)} F &= \partial_x F = 0 \\ \boldsymbol{\eta}^{(2)} F &= (x\partial_x - 2u\partial_u - 3p\partial_p - 4q\partial_q)\left(q - \frac{p^2}{u} + u^2\right) \\ &= -4F \end{aligned}$$

e portanto $\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial}{\partial x}$ e $\boldsymbol{\eta} = x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$ são simetrias pontuais de (F). Como:

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u}\right] = \partial_x = \boldsymbol{\xi}$$

vemos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, gerada por $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ é solúvel. De facto, $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}\boldsymbol{\xi}$ e $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] = \{\mathbf{0}\}$. Além disso $\mathbb{R}\boldsymbol{\xi}$ é um ideal em $\mathfrak{g}$.

(ii). É evidente que $f(x,u) = u$, $g(x,u,p) = p$ são invariantes de ordem 0 e 1, respectivamente, funcionalmente independentes, do campo $\boldsymbol{\xi}$. O método de Lie permite então calcular um invarinate de ordem 2, através de:

$$h(x,u,p,q) = \frac{D_x g}{D_x f} = \frac{g_x + p\, g_u + q\, g_p}{f_x + p\, f_u} = \frac{q}{p}$$

Pela teoria geral, pondo:

$$\begin{cases} f(x,u) & = \; u \; \equiv \; \alpha \\ g(x,u,u') & = \; p \; \equiv \; \beta \\ \frac{D_x g}{D_x f}(x,u,u',u'') & = \; \frac{q}{p} \; \equiv \; \gamma \end{cases}$$

vem que:

$$u = \alpha, \qquad p = \beta, \qquad q = p\gamma = \beta\gamma$$

e a representação invariante de $(\mathbf{E})$ é:

$$0 = G(\alpha,\beta,\gamma) = F\left(x,\alpha,\beta,\beta\gamma\right) = \beta\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha} + \alpha^2$$

e como $\gamma = \frac{d\beta}{d\alpha}$, obtemos a ODE de primeira ordem:

$$\beta\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha} + \alpha^2 = 0$$

(iii). As coordenadas (r,s) para as quais $\phi_*\partial_s = \boldsymbol{\xi} = \partial_x$ são dadas por:

$$\phi(r,s) = (x(r,s) = s, u(r,s) = r)$$

cujo prolongamento é:

$$\phi^{(2)}(r,s,w,z) = \left(s, r, \frac{1}{w}, -\frac{z}{w}\right)$$

A equação $(\mathbf{E})$ nas novas coordenadas é:

$$0 = F\left(s, r, \frac{1}{w}, -\frac{z}{w}\right) = -\frac{z}{w} - \frac{1}{w^2 r} + r^2$$

e como $z = w'$, onde $' = \frac{d}{dr}$:

$$\frac{w'}{w} + \frac{1}{w^2 r} - r^2 = 0$$

- • **<u>Exercício</u> 2.3.5** ... Considere uma ODE de segunda ordem:

$$((\mathbf{E})... \qquad\qquad F(u,u',u'') = F(u,p,q) = 0$$

onde F não depende de x.

Mostre que $\boldsymbol{\xi} = \partial_x$ é simetria de $(\mathbf{E})$, e proceda à redução de ordem através dessa simetria.

- • **<u>Exercício</u> 2.3.6** ... Considere a ODE de segunda ordem:

$$((\mathbf{E})... \qquad\qquad u'' = \frac{u'}{u^2} - \frac{1}{xu}$$

onde F não depende de x.

Mostre que $\boldsymbol{\xi} = x^2\partial_x + xy\partial_u$ e $\boldsymbol{\eta} = x\partial_x + \frac{u}{2}\partial_u$ geram uma álgebra de Lie solúvel de simetrias da equação $((\mathbf{E})$ e integre-a usando essa álgebra.

Resolução ... A equação $F = 0$, isto é a hipersuperfície $\Sigma = \{F = 0\} \subset J^2 = \mathbb{R}^4_{xupq}$ projecta-se numa superfície $\pi(\Sigma) \subset \mathbb{R}^3_{upq}$, dada pela mesma fórmula: $\pi(\Sigma) = \{F = 0\}$.

Quanto à distribuição característica $\mathbf{\Pi}_c \cap T_c\Sigma = \mathcal{C}_{SS}|_c$, ela projecta-se numa distribuição de 2-planos em $\mathbb{R}^3_{upq}$. Como $\mathbf{\Pi}_c = \ker \boldsymbol{\omega}^1|_c \cap \ker \boldsymbol{\omega}^2|_c$, onde $\boldsymbol{\omega}^1 = du - pdx$ e $\boldsymbol{\omega}^2 = dp - qdx$, vem que (usando o método de Gauss):

$$\begin{bmatrix} p & -1 & 0 & 0 \\ q & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p/q & 0 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{\Pi}_c$ é gerado pelos vectores linearmente independentes:

$$\partial_q \qquad \text{e} \qquad \partial_x + p\partial_u + q\partial_p$$

Portanto a projecção $\pi_*\mathbf{\Pi}$ é gerada por ∂_q e $p\partial_u + q\partial_p$, ou equivalentemente, é dada pelo núcleo da 1-forma $\boldsymbol{\omega}$, em $\mathbb{R}^3_{upq}$:

$$\boldsymbol{\omega} = dp - \frac{q}{p}\, du$$

Como resultado da projecção obtemos um espaço tridimensional $\mathbb{R}^3_{upq}$, munido de uma 1-forma $\boldsymbol{\omega}$, e uma superfície $\pi(SS)$. Em suma obtemos uma ODE de primeira ordem, desde que poçamos identificar $\boldsymbol{\omega}$ com uma forma de contacto. Para isso, definamos novas coordenadas através:

$$X = u, \quad U = p, \quad P = \frac{q}{p} \qquad \Rightarrow \qquad u = X, \quad p = U, \quad q = pP = UP$$

Nestas coordenadas a equação projectada tem a forma:

$$G(X, U, P) = F(u, p, q) = F(X, U, UP)$$

a forma de contacto é $\boldsymbol{\omega} = dU - PdX$, e obtemos a ODE de primeira ordem:

$$G\left(X, U, \frac{dU}{dX}\right) = 0$$

- • **Exercício 2.3.7** ... Considerar o problema de Cauchy:

$$(\mathbf{PC})... \qquad \begin{cases} u_x^2 u_y - 1 & = & 0 \\ u(x,0) & = & x \end{cases}$$

  – (i). Calcular o cone de Monge no ponto $P_o = (x_o, y_o, u_o) = (1, 1, 1)$.

  – (ii). Resolver o problema de Cauchy (PC).

  Solução: $u = x + y$.

Resolução ... (i). $K(P_o)$ é constituído pelos pontos de coordenadas (dx, dy, du), no espaço tangente $T_{P_o}\mathbb{R}^3$, que satisfazem:

$$\begin{cases} du & = & p\,dx + q\,dy, \\ \frac{dx}{F_p} & = & \frac{dy}{F_q} \end{cases} \qquad \text{onde } p \text{ e } q \text{ devem satisfazer } F(x_o, y_o, u_o, p, q) = 0$$

onde as derivadas parciais F_p e F_q, devem ser avaliadas em $(1,1,1,p,q)$. Neste caso, $F = p^2q - 1$, donde $F_p = 2pq$, $F_q = p^2$ e:

$$K(P_o) : \qquad \begin{cases} du &= p\,dx + q\,dy, \qquad \text{onde } p \text{ e } q \text{ devem satisfazer } p^2q - 1 = 0 \\ \frac{dx}{2pq} &= \frac{dy}{p^2} \end{cases}$$

(ii). A curva "inicial" $\boldsymbol{\gamma}$ é dada paramètricamente por:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (x(s) = s, y(s) = 0, u(s) = s)$$

As equações que permitem completar $\boldsymbol{\gamma}$ numa faixa de elementos característicos, i.e., que permitem calcular $p = p(s)$ e $q = q(s)$, são (pondo $' = d/ds$):

$$\begin{cases} u'(s) - x'(s)\,p - y'(s)\,q &= 0 \\ F(x(s), y(s), u(s);\, p, q) &= 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 1 - p &= 0 \\ p^2q - 1 &= 0 \end{cases}$$

donde se deduz:

$$p = p(s) \equiv 1, \qquad q = q(s) \equiv 1$$

e portanto a faixa inicial de elementos característicos é:

$$\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(s) = (x = s, y = 0, u = s, p = 1, q = 1)$$

A condição (1.6.19), é válida $\forall s$, já que:

$$x'(s)\,F_q(\cdot) - y'(s)\,F_p(\cdot) \;=\; p^2 \;=\; 1 \;\neq 0, \qquad\qquad \forall s$$

As equações características (1.6.10), são (pondo agora $' = d/d\tau$):

$$\begin{cases} x' &= F_p \\ y' &= F_q \\ u' &= p\,F_p + q\,F_q \\ p' &= -F_x - p\,F_u \\ q' &= -F_y - q\,F_u \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x' &= 2pq \\ y' &= p^2 \\ u' &= 3qp^2 \\ p' &= 0 \\ q' &= 0 \end{cases}$$

A curva inicial $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$, corresponde a $\tau = 0$. Como p e q são constantes ao longo das características, temos que:

$$p(s,\tau) = p(s,0) = 1, \qquad\qquad q(s,\tau) = q(s,0) = 1 \tag{2.3.1}$$

Resolvendo agora as equações características, para x, y e u, usando (1.6.21) e (2.3.1), obtemos:

$$x = x(s,\tau) = 2\tau + s, \qquad y = y(s,\tau) = \tau, \qquad u = u(s,\tau) = 3\tau + s$$

Invertendo as duas primeiras equações, obtemos $\tau = y$, $s = x - 2y$, e inserindo na terceira, obtemos finalmente a solução:

$$u = x + y$$

- • **Exercício 2.3.8** ... Resolver o problema de Cauchy:

$$(\mathbf{PC})... \qquad \begin{cases} u_t + u_x^2 &= t \\ u(x,0) &= 0 \end{cases}$$

Solução: $u = \frac{t^2}{2}$.

- • **Exercício 2.3.9** ... Resolver o problema de Cauchy:

$$(\mathbf{PC})... \qquad \begin{cases} u_t + u_x^2 + u &= 0 \\ u(x,0) &= x \end{cases}$$

Solução: $u = (x-1)e^{-t} + e^{-2t}$.

- • **Exercício 2.3.10** ... Resolver o problema de Cauchy:

$$(\mathbf{PC})... \qquad \begin{cases} u_t + u^2\, u_x &= 0 \\ u(x,0) &= x \end{cases}$$

Calcule o tempo crítico t_c.

Solução: $u = -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2t}\sqrt{1+4xt}$ e $t_c = 0$.

- • **Exercício 2.3.11** ... Discutir a geometria de contacto da ODE de primeira ordem:

$$(u')^2 + 2xu' - u = 0 \qquad ....(O)$$

Resolução ... Neste caso SS é o gráfico da função $u = u(x,p) = 2xp + p^2$ e podemos pois parametrizar (globalmente) SS usando as coordenadas (x,p):

$$\phi : (x,p) \longmapsto (x, 2xp + p^2, p)$$

Nestas coordenadas, a forma de contacto $\boldsymbol{\omega}_{SS=\phi^*(\boldsymbol{\omega})}$ é dada por:

$$\boldsymbol{\omega}_{SS=\phi^*(du-p\,dx)=d(2xp+p^2)-p\,dx=2p\,dx+2x\,dp+2p\,dp-p\,dx=p\,dx+(2x+2p)\,dp}$$

Um vector característico $\mathbf{Z}_F = \alpha\partial_x + \beta\partial_p \in T_{\phi(x,p)}SS$, terá de satisfazer a condição:

$$0 = \boldsymbol{\omega}_{SS(\mathbf{Z}_F)=(p\,dx+(2x+2p)\,dp)(\mathbf{Z}_F)=p\alpha+(2x+2p)\beta}$$

Por exemplo, podemos escolher:

$$\mathbf{Z}_F = (2x+2p)\partial_x - p\partial_p$$

cujas curvas integrais são obtidas por integração de:

$$\begin{cases} x' &= 2x + 2p \\ p' &= -p \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x &= 2/3e^{-\tau} + Be^{2\tau} \\ p &= Ae^{-\tau} \end{cases}$$

- • **Exercício 2.3.12** ... Considere a ODE de primeira ordem:

$$(u')^4 + xu' - u = 0 \qquad ....(O)$$

  - (i). Discutir a geometria de contacto de (O).
  - (ii). Discutir a ODE, aplicando a transformação de Legendre.

- • **Exercício 2.3.13** ... Calcular os invariantes diferenciais de ordem 2 do grupo (local) a um parâmetro de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2_{xu}$:

$$\mathbf{\Phi}_\tau(x,u) = \left(\frac{x}{1-\tau\,x}, \frac{u}{1-\tau\,x}\right)$$

<u>**Resolução**</u> ... O gerador infinitesimal é:

$$\boldsymbol{\xi}(x,u) = \frac{\partial}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0} \left(\frac{x}{1-\tau\, x}, \frac{u}{1-\tau\, x}\right) = x^2\partial_x + xu\partial_u$$

e o seu prolongamento a J^2 é:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = x^2\partial_x + xu\partial_u + (u-xp)\partial_p - 3qx\partial_q$$

Os invariantes de ordem 0, são as soluções $F = F(x,u)$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi}F = x^2\,\frac{\partial F}{\partial x} + xu\,\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{du}{xu}$$

e a solução geral é:

$$F = F\left(\frac{x}{u}\right)$$

Os invariantes de ordem 1, são as soluções $F = F(x,u,p)$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}F = x^2\,\frac{\partial F}{\partial x} + xu\,\frac{\partial F}{\partial u} + (u-xp)\,\frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{du}{xu} = \frac{dp}{u-xp}$$

Um integral primeiro é $f = x/u \equiv C$. Para encontrar um segundo integral funcionalmente independente, substituímos $x = Cu$ nas duas últimas fracções:

$$\frac{du}{Cu^2} = \frac{dp}{u-Cup} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{Cu} = \frac{dp}{1-Cp}$$

e integrando vem que $g(x,u,p) = u\left(1-\frac{x}{u}p\right) = u - xp \equiv D$ é um segundo integral. A solução geral é pois:

$$F = F\left(\frac{x}{u}, u-xp\right)$$

Finalmente, os invariantes de ordem 2, são as soluções $F = F(x,u,p,q)$ da PDE:

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)}F = x^2\,\frac{\partial F}{\partial x} + xu\,\frac{\partial F}{\partial u} + (u-xp)\,\frac{\partial F}{\partial p} - 3qx\,\frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

cujas características são dadas por:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{du}{xu} = \frac{dp}{u-xp} = \frac{dq}{-3qx}$$

Usando a primeira e última fracções, obtemos um terceiro integral:

$$h(x,u,p,q) = x^3 q \equiv E$$

e portanto o invariante diferencial de ordem 2 mais geral é do tipo:

$$F = F\left(\frac{x}{u}, u-xp, x^3 q\right)$$

- • **Exercício 2.3.14** ... Calcular os invariantes diferenciais de ordem 2 do grupo (local) a um parâmetro de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2_{xu}$:

$$\mathbf{\Phi}_\tau(x,u) = \left(e^\tau x, e^{-3\tau}u\right)$$

- • **Exercício 2.3.15** ... Calcular pelo método de Lie-Jacobi a transformação de contacto de equação directriz:

$$H(x,u;X,U) = (x-X)^2 - 2a\,(u-U) = 0$$

Verificar o resultado obtido.

Solução: $(x,u,p) \mapsto \left(X = x - ap, U = u - \frac{1}{2}ap^2, P = p\right)$

- • **Exercício 2.3.16** ... Calcular pelo método de Lie-Jacobi a transformação de contacto de equação directriz:

$$H(x,u;X,U) = \frac{(x-X)^2}{a^2} + \frac{(u-U)^2}{b^2} - 1 = 0$$

Verificar o resultado obtido.

Solução: $(x,u,p) \mapsto \left(X = x \pm \frac{a^2p}{\sqrt{a^2p^2+b^2}}, U = u \mp \frac{u-xp}{\sqrt{a^2p^2+b^2}}, P = p\right)$

- • **Exercício 2.3.17** ... Calcular pelo método de Lie-Jacobi a transformação de contacto de equação directriz:

$$H(x,u;X,U) = \frac{X}{x} + \frac{U}{u} - 1 = 0$$

Verificar o resultado obtido.

Solução: $(x,u,p) \mapsto \left(X = -\frac{x^2p}{u-xp}, U = \frac{u^2}{u-xp}, P = -\frac{u}{x}\right)$

- • **Exercício 2.3.18** ... Mostrar que:

$$\Phi : (x,u,p) \mapsto \left(X = \frac{px-u}{p}, U = u - xp, P = -\frac{xp^2}{u}\right)$$

é uma transformação local de contacto em J^1. Calcular uma equação directriz $H(x,u;X,U) = 0$ para Φ.

Solução: $H(x,u;X,U) = \frac{x}{X} + \frac{u}{U} - 1 = 0.$

- • **Exercício 2.3.19** ...
  - (i). Mostrar que a transformação:

$$\Phi : (x,u,p) \longmapsto \left(X = x + \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}}, U = u - \frac{r}{\sqrt{1+p^2}}, P = p\right)$$

é uma transformação local de contacto em J^1.

– (ii). Utilizar a transformação Φ para integrar a equação de Clairaut:

$$u - xp - r\sqrt{1+p^2} = 0$$

onde $p = u'$ e $r > 0$ é uma constante.

- • **Exercício 2.3.20** ... Discutir a geometria de contacto da ODE de primeira ordem:

$$2xu\,(1+{u'}^2) - (xu'+u)^2 = 0 \qquad ....(O)$$

- • **Exercício 2.3.21** ... Discutir a geometria de contacto da ODE de primeira ordem:

$$x{u'}^2 - 2uu' + x + 2u = 0 \qquad ....(O)$$

Capítulo 3

Geometria de contacto das Equações Diferenciais Parciais (PDE's) de Primeira Ordem

3.1 Geometria da equação $F(\mathbf{x}, u, u_{\mathbf{x}}) = 0$.

Consideremos uma PDE de primeira ordem:

$$\boxed{F(\mathbf{x}, u, u_{\mathbf{x}}) = 0} \tag{3.1.1}$$

onde $\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $u_{\mathbf{x}} = (\nabla u)^T = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x^n}\right) = (u_{x^1}, u_{x^2}, \cdots, u_{x^n})$.

Para interpretar geomètricamente esta equação, consideramos o espaço $J^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ dos elementos de contacto regulares do **espaço de configuração** $\mathbb{R}^{n+1}_{x^1 \cdots x^n u}$. Um **elemento de contacto** desse espaço é, por definição, um par $c = (m, \mathcal{H}_m)$, constituído por um ponto $m = (\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e por um hiperplano $\mathcal{H}_m \in T_m\mathbb{R}^{n+1}$. O ponto m diz-se o **suporte** de $c = (m, \mathcal{H}_m)$. O elemento de contacto $c = (m, \mathcal{H}_m)$ diz-se regular quando o hiperplano $\mathcal{H}_m$ é não vertical, i.e., quando não contem $\left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_m$ (ver figura 3.1).

Figure 3.1: Elemento de contacto $c = (m, \mathcal{H}_m)$ em $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}_{x^i u}$.

Como $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_m, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_m, \left.\frac{\partial}{\partial u}\right|_m \right\}$ constituem uma base para o espaço tangente $T_m\mathbb{R}^{n+1}$, onde $m = (\mathbf{x}, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$, e como $\left\{ \left.dx^1\right|_m, \cdots, \left.dx^n\right|_m, \left.du\right|_m \right\}$ é a respectiva base dual, o hiperplano $\mathcal{H}_m$ (sendo não vertical) tem por equação:

$$\begin{aligned} \left.du\right|_m &= p_1 \left.dx^1\right|_m + \cdots + p_n \left.dx^n\right|_m \\ &= \mathbf{p} \cdot \left.d\mathbf{x}\right|_m \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

onde $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. O hiperplano $\mathcal{H}_m$ é pois perpendicular ao vector $(\mathbf{p}, -1) = (p_1, \cdots, p_n, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Isto leva-nos a considerar o espaço $J^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ dos elementos de contacto regulares de $\mathbb{R}^{n+1}_{x^i u}$, que não é mais do que $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n+1}_{x^i u p_i}$. A equação (3.1.1) define portanto uma hipersuperfície neste espaço, dada por:

$$\Sigma = \{(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0\} \tag{3.1.3}$$

(Estamos a supôr que 0 é valor regular de F, i.e., que $dF|_\Sigma \neq 0$).

Consideremos agora a projecção canónica $\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, dada por:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{R}^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & c = (m, \mathcal{H}_m) = (\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) & \longmapsto & m = (\mathbf{x}, u) \end{array} \tag{3.1.4}$$

que a cada elemento de contacto $c = (m, \mathcal{H}_m)$ associa o respectivo suporte m. Existe uma distribuição de $2n$-planos $\mathbf{\Pi} : c \mapsto \mathbf{\Pi}_c \subset T_c\mathbb{R}^{2n+1}$, canònicamente definida em $\mathbb{R}^{2n+1}$, da seguinte forma - um vector tangente $\boldsymbol{\xi} \in T_c\mathbb{R}^{2n+1}$, onde $c = (m, \mathcal{H}_m)$, pertence ao $2n$-plano $\mathbf{\Pi}_c$ se e só se $\pi_*(\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{H}_m$ (ver figura 2.2), isto é:

$$\mathbf{\Pi}_c = \pi_*^{-1}(\mathcal{H}_m) \subset T_c\mathbb{R}^{2n+1}, \qquad c = (m, \ell_m) \tag{3.1.5}$$

Como o n-plano $\mathcal{H}_m$ é dado pela equação (3.1.2), deduzimos que um vector $\boldsymbol{\xi} \in T_c\mathbb{R}^{2n+1}$ está em $\mathbf{\Pi}_c$ sse $(du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x})(\pi_*\boldsymbol{\xi}) = 0$, isto é, sse $\pi^*(du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}) = (du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x})(\boldsymbol{\xi}) = 0$, e portanto $\mathbf{\Pi}$ fica definida pela 1-forma:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x} = du - \textstyle\sum_{i=1}^n p_i dx^i} \tag{3.1.6}$$

em $\mathbb{R}^{2n+1}$, a que chamamos **forma de contacto** em $\mathbb{R}^{2n+1}$. À distribuição de $2n$-planos $\mathbf{\Pi} = \ker \boldsymbol{\omega}$, chamamos a **distribuição de contacto** em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Figure 3.2: Distribuição de contacto em em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

O espaço $J^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ pode também ser definido como o espaço dos 1-jactos de funções $u = f(\mathbf{x})$, que identificamos com o espaço $\mathbb{R}^{2n+1}$, munido das coordenadas $(\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$. Duas funções diferenciáveis $u = f(\mathbf{x})$ e $u = g(\mathbf{x})$ definem o mesmo 1-jacto num ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se e só se $f(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)$ e $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Portanto um 1-jacto de função $u = f(\mathbf{x})$, num ponto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, fica definido por $n+1$ dados - as coordenadas do ponto $\mathbf{x}_0$, o valor u_0 de $u = f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{x}_0$ e, finalmente, os valores das derivadas parciais de primeira ordem $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$, $i = 1, \cdots, n$.

Dada uma função diferenciável $u = f(\mathbf{x})$, podemos definir o seu 1-gráfico como sendo a variedade de dimensão n, imersa em $J^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2n+1}_{x^i u p_i}$ e parametrizada por:

$$j^1(f)(x^1, \cdots, x^n) = \left(x^1, \cdots, x^n, f(x^1, \cdots, x^n), \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \cdots, x^n)\right) \tag{3.1.7}$$

Note que:

$$\mathfrak{L}_f \stackrel{\text{def}}{=} j^1(f)(\mathbb{R}^n)$$

é uma **variedade de Legendre** em $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, isto é, uma variedade integral, de dimensão máxima n, da distribuição de contacto $\mathbf{\Pi}$. De facto:

$$\begin{aligned} j^1(f)^*(\boldsymbol{\omega}) &= j^1(f)^* \left(du - \sum_{i=1}^n p_i dx^i \right) \\ &= df - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Além disso, esta variedade satisfaz a **condição de independência** seguinte:

$$dx^1 \wedge \cdots dx^n \Big|_{\mathfrak{L}_f} \neq 0 \tag{3.1.8}$$

Recìprocamente, toda a variedade integral da distribuição de contacto $\mathbf{\Pi} = \ker \boldsymbol{\omega}$, que satisfaz a condição de independência anterior, é o 1-gráfico de uma função $u = f(\mathbf{x})$.

A distribuição de contacto $\mathbf{\Pi} = \ker \boldsymbol{\omega}$, admite outras variedades de Legendre. Por exemplo:

- as fibras da projecção (3.1.4): $\pi : (m, \mathcal{H}_m) \mapsto m$.
- seja $S \subset \mathbb{R}^{n+1}_{x^i u}$, uma subvariedade de dimensão k (onde $1 \leq k \leq n$), no espaço de configuração $\mathbb{R}^{n+1}_{x^i u}$, e consideremos a variedade:

$$\mathfrak{L}_S \stackrel{\text{def}}{=} \{(m, \mathcal{H}_m) \in J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \, m \in S \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_m \supset T_m S\}$$

  $\mathfrak{L}_S$ é uma variedade de Legendre em $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

As variedades de Legendre são variedades integrais da distribuição de contacto $\mathbf{\Pi} = \ker \boldsymbol{\omega}$, de dimensão máxima, igual a n. $\mathbf{\Pi} = \ker \boldsymbol{\omega}$ não admite variedades integrais de dimensão superior a n
[1]*sãoototalmenteisotrópicosrelativamenteàformasimplética*$\boldsymbol{\Omega}$=d$\boldsymbol{\omega}$*.Logoadimensãodecadaumdelesé*$\leq$
n..

Após estes preliminares, regressemos à interpretação geométrica da equação (3.1.1). Recorde que a essa equação associamos a superfície

$$\Sigma = \Sigma_F = \{(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : \, F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0 \, \}$$

em $J^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, onde $\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} = u_{\mathbf{x}} = (\nabla u)^T = \left(\frac{\partial u}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x^n} \right)$.

Uma **solução (generalizada)** da equação (3.1.1), $F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0$, é uma variedade de Legendre contida em $\Sigma = \{F = 0\}$.

Portanto, do ponto de vista geométrico, o problema da integração da PDE (3.1.1), consiste em determinar as respectivas soluções generalizadas, isto é, em determinar as variedades de Legendre da distribuição de contacto, que estão contidas em $\Sigma = \{F = 0\}$. Vamos ver que este problema reduz-se ao da integração de um sistema de ODE's, chamado o **sistema característico** associado à PDE (3.1.1).

[1]De facto, se $\varphi : \mathfrak{L} \to J^1$ é uma variedade integral de $\boldsymbol{\omega}$, então $\varphi^* \boldsymbol{\omega} = 0$ e portanto $\varphi^*(d\boldsymbol{\omega}) = d(\varphi^* \boldsymbol{\omega}) = 0$, o que significa que os espaços tangentes de
L

Consideremos então a 2-forma $d\boldsymbol{\omega}$ em $J^1 = J^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2n+1}_{x^i u p_i}$:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\omega} &= d\left(du - \sum_{i=1}^{n} p_i dx^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Em cada ponto $c = (x^i, u, p_i) \in J^1$, o hiperplano de contacto $\boldsymbol{\Pi}_c$, é o subespaço de dimensão $2n$ em $T_c J^1 = T_c\mathbb{R}^{2n+1}$, definido por:

$$du - \sum_{i=1}^{n} p_i dx^i = 0$$

e portanto perpendicular ao vector $\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial u} \in T_c J^1$. Uma base para $\boldsymbol{\Pi}_c$ é constituída pelos $2n$ vectores seguintes:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial p_i} \right\}_{i=1,\cdots,n}$$

linearmente independentes em $T_c J^1$. Nesta base, a matriz da 2-forma exterior $(d\boldsymbol{\omega})_c|_{\boldsymbol{\Pi}_c}$, é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix}$$

o que significa que $(d\boldsymbol{\omega})_c|_{\boldsymbol{\Pi}_c}$ é não degenerada, e portanto é uma forma simplética em $\boldsymbol{\Pi}_c$.

Em cada ponto $c \in \Sigma$ temos dois hiperplanos em $T_c\mathbb{R}^{2n+1}$ - o hiperplano de contacto $\boldsymbol{\Pi}_c = \ker \boldsymbol{\omega}|_c$ e o hiperplano tangente $T_c\Sigma$. Um ponto $c \in \Sigma$ diz-se **regular** quando estes dois hiperplanos são transversais. Num ponto regular $c \in \Sigma$, a intersecção destes dois hiperplanos:

$$\mathcal{P}_c \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Pi}_c \cap T_c\Sigma \tag{3.1.10}$$

é um subespaço de dimensão $2n + 2n - (2n+1) = 2n - 1$, em $T_c J^1$, a que chamamos o **plano característico** no ponto c.

Portanto no conjunto dos pontos regulares $c \in \Sigma$, temos a distribuição, $\mathcal{P} : c \mapsto \mathcal{P}_c$, dos $(2n-1)$-planos característicos, num aberto de Σ (que tem dimensão $2n$).

Mas, como vimos antes, a forma:

$$\boldsymbol{\Omega}_c \overset{\text{def}}{=} (d\boldsymbol{\omega})_c|_{\boldsymbol{\Pi}_c} \tag{3.1.11}$$

em $\boldsymbol{\Pi}_c$, é não degenerada (é simplética), e portanto o "perpendicular" de $\mathcal{P}_c$, relativamente a essa forma simplética, é um subespaço de dimensão $2n - (2n-1) = 1$, em $T_c\Sigma$, que portanto define uma recta previligeada em $T_c\Sigma$, a que chamamos a **direcção característica** em c:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c &\overset{\text{def}}{=} (\mathcal{P}_c)^{\perp} \\ &= \{\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Pi}_c : \boldsymbol{\Omega}_c(\boldsymbol{\xi}, \mathcal{P}_c) = 0\} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Suponhamos que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \beta \frac{\partial}{\partial u} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial p_i} \\ &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \beta \frac{\partial}{\partial u} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \in T_c J^1 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

é um vector tangente no ponto $c = (x^i, u, p_i) = (\mathbf{x}, u, \mathbf{p})$.

Esse vector será tangente a $\Sigma = \{F(\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) = 0\}$, num ponto $c = (\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \Sigma$, sse $dF_c(\boldsymbol{\xi}) = 0$, isto é:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot F_{\mathbf{x}} + \beta F_u + \boldsymbol{\gamma} \cdot F_{\mathbf{p}} = 0$$

e pertencerá a $\mathbf{\Pi}_c = \ker \boldsymbol{\omega}_c$, sse $\boldsymbol{\omega}_c(\boldsymbol{\xi}) = 0$, isto é:

$$\begin{aligned} 0 &= (du - \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x}) \left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \beta \frac{\partial}{\partial u} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &= \beta - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

Concluindo:

- num ponto regular $c = (\mathbf{x}, u, \mathbf{p}) \in \Sigma$, o vector $\boldsymbol{\xi}$ estará no plano característico $\mathcal{P}_c$, sse:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \cdot F_{\mathbf{x}} + \beta F_u + \boldsymbol{\gamma} \cdot F_{\mathbf{p}} &= 0 \\ \beta - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} &= 0 \end{cases} \tag{3.1.14}$$

Um vector característico:

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{x}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + u' \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{p}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \tag{3.1.15}$$

que gera a recta característica $\mathcal{C}_c$, será pois determinado pela condição de que a 2-forma $\mathbf{\Omega}_c = d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{p}$ se deve anular no par $(\mathbf{v}_c, \boldsymbol{\xi})$, qualquer que seja o vector $\boldsymbol{\xi}$ que verifique as condições (3.1.14), que reunidas se reduzem a:

$$(F_{\mathbf{x}} + F_u\, \mathbf{p}) \cdot \boldsymbol{\alpha} + F_{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0 \tag{3.1.16}$$

Calculando vem:

$$\begin{aligned} 0 &= (d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{p})(\mathbf{v}_c, \boldsymbol{\xi}_c) \\ &= (d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{p}) \left(\mathbf{x}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + u' \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{p}' \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \beta \frac{\partial}{\partial u} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \\ &= \mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Portanto, os coeficientes em $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ das equações (3.1.16) e (3.1.17), devem ser proporcionais, donde se conclui que:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= F_{\mathbf{p}} \\ u' &= \mathbf{p} \cdot F_{\mathbf{p}} \\ \mathbf{p}' &= -F_{\mathbf{x}} - F_u\, \mathbf{p} \end{cases} \tag{3.1.18}$$

a segunda equação deve-se ao facto de que $\mathbf{v}_c \in \mathbf{\Pi}_c$ e portanto $u' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}'$.

As equações (3.1.18) dizem-se as **equações das características**, associadas à PDE (3.1.1). Por exemplo, quando $n = 2$, e pondo $\mathbf{x} = (x, y)$ e $\mathbf{p} = (p, q)$, têm o aspecto seguinte:

$$\boxed{\begin{cases} x' &= F_p \\ y' &= F_q \\ u' &= p\, F_p + q\, F_q \\ p' &= -F_x - p\, F_u \\ q' &= -F_y - q\, F_u \end{cases}} \tag{3.1.19}$$

que já encontramaos no primeiro capítulo (ver (1.6.10)).

Escritas em forma homogénea, as equações (3.1.18) são:

$$\boxed{\frac{dx^i}{F_{p_i}} = \frac{du}{\sum_i p_i F_{p_i}} = \frac{dp_i}{-F_{x^i} - F_u p_i}} \tag{3.1.20}$$

• **Exemplo 3.1.1** **Equação de Hamilton-Jacobi** ... Esta equação é a seguinte:

$$\boxed{S_t + H(t, \mathbf{x}, S_{\mathbf{x}}) = 0} \tag{3.1.21}$$

para uma função $S(t, \mathbf{x})$ de $n+1$ variáveis $t, \mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n)$. Em (3.1.21), e $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ é uma função de classe C^∞ em (ou num aberto de) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pondo:

$$F(t, \mathbf{x}, u, q, \mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} q + H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$$

vemos que a equação (3.1.21) é do tipo (3.1.1):

$$F(t, \mathbf{x}, u, u_t, u_{\mathbf{x}}) = 0$$

com $u = S$, mas só que agora o número de variáveis independentes é $n+1$.

As equações (3.1.18), para as características:

$$\tau \longmapsto (t(\tau), \mathbf{x}(\tau), u(\tau), q(\tau), \mathbf{p}(\tau))$$

são:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} t' & = & F_q & = & 1 \\ \mathbf{x}' & = & F_{\mathbf{p}} & = & H_{\mathbf{p}} \\ u' & = & qF_q + \mathbf{p} \cdot F_{\mathbf{p}} & = & q + \mathbf{p} \cdot H_{\mathbf{p}} \\ q' & = & -F_t - qF_u & = & -H_t \\ \mathbf{p}' & = & -F_{\mathbf{x}} - F_u\,\mathbf{p} & = & -H_{\mathbf{x}} \end{array} \right. \tag{3.1.22}$$

Como $t' = 1$, vem que $t = \tau +$ constante. Podemos pois identificar as variáveis t e τ e interpretar a derivada $'$ como $\frac{d}{dt}$. O sistema de equações características (3.1.22), fica pois com o aspecto seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{x}' & = & H_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{p}' & = & -H_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ q' & = & -H_t(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ u' & = & q + \mathbf{p} \cdot H_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \end{array} \right. \tag{3.1.23}$$

As duas primeiras equações formam um **sistema Hamiltoniano**:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{x}' & = & H_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{p}' & = & -H_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \end{array} \right. \tag{3.1.24}$$

que permite calcular $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{p}(t)$. Substituindo na terceira equação obtemos $q(t)$ a partir de:

$$q'(t) = -H_t(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \tag{3.1.25}$$

e finalmente $u(t)$ calcula-se a partir de:

$$u' = q(t) + \mathbf{p}(t) \cdot H_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \tag{3.1.26}$$

No entanto o sistema (3.1.23) pode ser simplificado, atendendo a que o sistema Hamiltoniano (3.1.24) implica que:

$$\mathbf{x}' \cdot H_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) + \mathbf{p}' \cdot H_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv 0$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) &= H_t + \underbrace{H_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' + H_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}'}_{=0} \\ &= H_t(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \end{aligned}$$

Portanto (3.1.25) tem a forma:

$$\frac{d}{dt}q(t) = -\frac{d}{dt}H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$$

donde:

$$q(t) + H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \equiv E \quad (= \text{constante})$$

e (3.1.26) dá então:

$$u' = E - H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) + \mathbf{p} \cdot H_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \tag{3.1.27}$$

Isto permite substituir o sistema (3.1.23), pelo sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{x}' & = & H_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{p}' & = & -H_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ H_t(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) & = & E \quad (= \text{constante}) \\ u' & = & E - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot H_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \end{array} \right. \tag{3.1.28}$$

Escolhendo apropriadamente o valor inicial da variável q, podemos até supôr que $E = 0$, o que simplifica ainda mais o sistema.

3.2 Transformações de contacto no espaço

Diremos que um elemento de contacto $c = (m, \mathcal{H}_m)$, no espaço de configuração $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3_{xyu}$, pertence a uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, quando o seu suporte m pertence a S, e o seu plano $\mathcal{H}_m$ é tangente a S em m. O elemento de contacto $c = (m, \mathcal{H}_m)$, pertencerá a uma curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$, se o seu suporte m pertence a $\mathcal{C}$, e o seu plano $\mathcal{H}_m$ é tangente a $\mathcal{C}$ em m. Finalmente, um elemento de contacto pertence a um ponto $m \in \mathbb{R}^3$, se este é o seu suporte.

Suponhamos que uma superfície, mergulhada em $\mathbb{R}^3_{xyu}$, é representada paramètricamente por:

$$\boldsymbol{\phi} : (\alpha, \beta) \longmapsto (x = x(\alpha, \beta),\ y = y(\alpha, \beta),\ u = u(\alpha, \beta)) \tag{3.2.1}$$

onde $(\alpha, \beta) \in U \subseteq \mathbb{R}^2_{\alpha\beta}$. Então as coordenadas $(p(\alpha, \beta), q(\alpha, \beta))$ do plano tangente a S, no ponto $\boldsymbol{\phi}(\alpha, \beta)$, verificam as equações:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_\alpha - p(\alpha, \beta)\, x_\alpha - q(\alpha, \beta)\, y_\alpha & = & 0 \\ u_\beta - p(\alpha, \beta)\, x_\beta - q(\alpha, \beta)\, y_\beta & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.2.2}$$

uma vez que esse plano é gerado pelos dois vectores $\boldsymbol{\phi}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, u_\alpha)$ e $\boldsymbol{\phi}_\beta = (x_\beta, y_\beta, u_\beta)$, e é também o plano perpendicular a $(p(\alpha, \beta), q(\alpha, \beta), -1)$. Estas equações são equivalentes à equação única:

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (\boldsymbol{\Phi})^*(\boldsymbol{\omega}) \\ & = & (\boldsymbol{\Phi})^*(du - p\, dx - q\, dy) \\ & = & du(\alpha, \beta) - p(\alpha, \beta)\, dx(\alpha, \beta) - q(\alpha, \beta)\, dy(\alpha, \beta) \\ & = & (u_\alpha - p\, x_\alpha - q\, y_\alpha)\, d\alpha + (u_\beta - p\, x_\beta - q\, y_\beta)\, d\beta \end{array} \tag{3.2.3}$$

onde:

$$\boldsymbol{\Phi}(\alpha, \beta) = (x = x(\alpha, \beta),\ y = y(\alpha, \beta),\ u = u(\alpha, \beta),\ p = p(\alpha, \beta),\ q = q(\alpha, \beta)) \tag{3.2.4}$$

que significam que $(U, \mathbf{\Phi})$ é uma variedade integral da distribuição de contacto.

Mais geralmente, uma **faixa de contacto** de dimensão 2, ou simplesmente uma 2**-faixa de contacto**, no espaço de configuração $\mathbb{R}^3_{xyu}$, é, por definição, uma superfície imersa em $J^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, definida num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2_{\alpha\beta}$, de um certo espaço dos parâmetros α, β:

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & U \subseteq \mathbb{R}^2_{\alpha\beta} & \longmapsto & J^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}) = \mathbb{R}^5_{xyupq} \\ & (\alpha,\beta) & \longmapsto & \mathcal{F}(\alpha,\beta) = \left\{ \begin{array}{l} x = x(\alpha,\beta) \\ y = y(\alpha,\beta) \\ u = u(\alpha,\beta) \\ p = p(\alpha,\beta) \\ q = q(\alpha,\beta) \end{array} \right. \end{array} \tag{3.2.5}$$

e que satisfaz a condição:

$$\boxed{\mathcal{F}^*\boldsymbol{\omega} = 0} \tag{3.2.6}$$

isto é:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} u_\alpha - p\,x_\alpha - q\,y_\alpha & = & 0 \\ u_\beta - p\,x_\beta - q\,y_\beta & = & 0 \end{array} \right.} \tag{3.2.7}$$

Portanto, $\mathcal{F}$ é uma **variedade de Legendre** da distribuição de contacto, isto é, uma variedade integral de dimensão máxima (igual a 2, neste caso). Ao subconjunto no espaço de configuração, parametrizado por (α, β):

$$\mathcal{S} = (\pi \circ \mathcal{F}) : (\alpha,\beta) \longmapsto (x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta), u(\alpha,\beta)) \tag{3.2.8}$$

chama-se o **suporte da** 2**-faixa de contacto** $\mathcal{F}$.

Vejamos como são as 2-faixas de contacto, isto é, as soluções das equações (3.2.7) (ou equivalentemente de (3.2.6)), que são da forma (3.2.5).

Para isso, consideremos a matriz Jacobiana de $\mathcal{S}$:

$$\mathrm{Jac}\,\mathcal{S}(\alpha,\beta) = \left[\begin{array}{cc} \mathcal{S}_\alpha & \mathcal{S}_\beta \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} x_\alpha & x_\beta \\ y_\alpha & y_\beta \\ u_\alpha & u_\beta \end{array}\right] \tag{3.2.9}$$

e analisemos os três casos seguintes:

- <u>$\mathrm{Jac}\,\mathcal{S}(\alpha,\beta)$ tem característica máxima, igual a 2, para todo o $(\alpha,\beta) \in U$</u>. Então pelo menos um dos menores de ordem 2 será $\neq 0$. Suponhamos por exemplo que:

  $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)} = \left| \begin{array}{cc} x_\alpha & x_\beta \\ y_\alpha & y_\beta \end{array} \right| \neq 0$$

  Neste caso, podemos resolver as duas primeiras equações em (3.2.5), $x = x(\alpha,\beta)$ e $y = y(\alpha,\beta)$, em ordem a α e β, como funções de x e y, substituir o resultado em $u = u(\alpha,\beta)$, e concluir que o ponto (x,y,u) descreve uma superfície. Quanto a $p(\alpha,\beta)$ e $q(\alpha,\beta)$, eles ficam definidos pelas equações (3.2.7), o que significa que eles são exactamente os coeficientes angulares do plano tangente à referida superfície.

  Diremos neste caso, que a 2**- faixa de contacto é de tipo** II - o seu suporte é uma superfície imersa no espaço de configuração $\mathbb{R}^3_{xyu}$, e a 2-faixa é constituída pelos pontos dessa superfície juntamente com todos os seus planos tangentes (ver a figura 3.3).

- Jac $\mathcal{S}(\alpha,\beta)$ tem característica igual a 1, para todo o $(\alpha,\beta)\in U$. Suponhamos por exemplo que $x_\alpha\neq 0$. O ponto (x,y,u) descreve então uma curva em $\mathbb{R}^3_{xyu}$, que pode ser parametrizada por x:
$$x\longmapsto (y=f(x),u=g(x))$$
As equações (3.2.7), dão:
$$\left\{\begin{array}{rcl}(g'-p-q\,f')\,x_\alpha & = & 0\\ (g'-p-q\,f')\,x_\beta & = & 0\end{array}\right.$$
e uma vez que $x'_\alpha\neq 0$, deduzimos que $g'-p-q\,f'=0$, isto é $(p,q,-1)\cdot(1,f',g')=0$, o que significa que o plano do elemento deve ser tangente à curva.

  Diremos neste caso, que a 2**- faixa de contacto é de tipo** I - o seu suporte é uma curva imersa no espaço de configuração $\mathbb{R}^3_{xyu}$, e a 2-faixa é constituída pelos pontos dessa curva juntamente com todos os planos tangentes à curva (ver a figura 3.3).

- Jac $\mathcal{S}(\alpha,\beta)$ tem característica igual a 0, para todo o $(\alpha,\beta)\in U$. O ponto (x,y,u) estará fixo, e as equações (3.2.2) não permitem determinar p e q, que serão por isso duas funções arbitrárias de α e β.

  Diremos neste caso, que a 2**- faixa de contacto é de tipo** 0 - o seu suporte é um ponto fixo no espaço de configuração $\mathbb{R}^3_{xyu}$, e a 2-faixa é constituída por esse ponto juntamente com todos os planos que o contêm (ver a figura 3.3).

Figure 3.3: 2- faixas de contacto no espaço.

A introdução do conceito de 2-faixa de contacto, como generalização do conceito de superfície e respectivos planos tangentes, juntamente com o de transformação de contacto, permitiu a Sophus Lie uma profunda unidade no tratamento das equações diferenciais (ordinárias e parciais), para além, evidentemente, do interesse puramente geométrico de tais transformações, que permitiram estabelecer laços profundos e inesperados, de uma elegância e clareza notáveis, entre as propriedades geométricas das linhas e das superfícies.

Um difeomorfismo (local) $\Phi: J^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})\to J^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ diz-se uma **transformação (local) de contacto**, se Φ preserva a distribuição de contacto $\mathbf{\Pi}$, isto é:
$$d\Phi_c(\mathbf{\Pi}_c)=\mathbf{\Pi}_{\Phi(c)} \tag{3.2.10}$$
ou de forma equivalente:
$$\boxed{\Phi^*(\boldsymbol{\omega})=\lambda\,\boldsymbol{\omega}} \tag{3.2.11}$$
para alguma função $\lambda\in C^\infty(J^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}))$, que nunca se anula. Por outras palavras, Φ é uma simetria (finita) da distribuição de contacto.

Em **coordenadas canónicas** (x, y, u, p, q) para $J^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^5_{xyupq}$, e continuando a notar por Φ a expressão de Φ, nas coordenadas (x, u, p), de tal forma que:

$$\Phi : (x, y, u, p, q) \longmapsto \begin{cases} X &= X(x, y, u, p, q) \\ Y &= Y(x, y, u, p, q) \\ U &= U(x, y, u, p, q) \\ P &= P(x, y, u, p, q) \\ Q &= Q(x, y, u, p, q) \end{cases} \tag{3.2.12}$$

(isto é, $X = \Phi^* x$, $Y = \Phi^* y$, $U = \Phi^* u$, $P = \Phi^* p$ e $Q = \Phi^* q$), esta última condição (3.2.11), significa que:

$$\boxed{\Phi^*(du - p\,dx - q\,dy) \;=\; dU - P\,dX - Q\,dY \;=\; \lambda\,(du - p\,dx - q\,dy)} \tag{3.2.13}$$

É evidente que uma transformação de contacto transforma 2-faixas de contacto em 2-faixas de contacto, uma vez que:

$$(\Phi \circ \mathcal{F})^* \boldsymbol{\omega} = \mathcal{F}^* \Phi^* \boldsymbol{\omega} = \mathcal{F}^* \boldsymbol{\omega} = 0$$

No entanto, Φ não preserva necessàriamente o tipo da fixa. Mais concretamente, Φ transforma duas 2-faixas de contacto $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, que têm um elemento comum c, em duas 2-faixas de contacto $\Phi \circ \mathcal{F}_1$ e $\Phi \circ \mathcal{F}_2$, que têm o elemento comum $\Phi(c)$.

Vamos agora descrever um método, que se deve a Lie e Jacobi, para construir transformações de contacto através de certas equações, ditas **equações directrizes**, no espaço de configuração.

Consideremos então uma transformação de contacto Φ, dada por (3.2.12), que satisfaz a condição (3.2.13).

Se por um momento, consideramos o ponto $m = (x, y, u)$ fixo, então a aplicação:

$$\mathcal{F}_m : (\alpha, \beta) \longmapsto (\underbrace{x, y, u}_{m}; p = \alpha, q = \beta)$$

representa uma 2-faixa de contacto de tipo 0, cujo suporte é o referido ponto m. Φ transforma esta 2-faixa numa outra 2-faixa de contacto:

$$\Phi \circ \mathcal{F}_m : (\alpha, \beta) \longmapsto (X(m; \alpha, \beta), Y(m; \alpha, \beta), U(m; \alpha, \beta), P(m; \alpha, \beta), Q(m; \alpha, \beta))$$

que genèricamente será de um dos três tipos atrás descritos, isto é, o seu suporte $\pi(\Phi(\mathcal{F}_m))(\mathbb{R}^2_{\alpha\beta})$ pode ser um ponto, uma curva ou uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3_{xyu}$.

Consideremos então a matriz:

$$J(\underbrace{x, y, u}_{m}; \alpha, \beta) \;=\; \begin{bmatrix} X_\alpha & X_\beta \\ Y_\alpha & Y_\beta \\ U_\alpha & U_\beta \end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

Vamos analisar os três casos seguintes:

- A matriz $J(m; \alpha, \beta)$ tem característica 0, para todo o $(\underbrace{x, y, u}_{m}, p = \alpha, q = \beta)$. Neste caso, as três primeiras equações em (3.2.12), não dependem de α nem β, e fornecem as componentes do ponto suporte de $\Phi \circ \mathcal{F}_m$, que é portanto uma 2-faixa de contacto de tipo 0, para todo o ponto m:

$$(X(\underbrace{x, y, u}_{m}), Y(\underbrace{x, y, u}_{m}), U(\underbrace{x, y, u}_{m}))$$

  o que significa que elas definem uma **transformação pontual**, que envia faixas de tipo 0 em faixas de tipo 0.

- A matriz $J(m;\alpha,\beta)$ tem característica máxima 2, para todo o $(m; p=\alpha, q=\beta)$. Neste caso:

$$\phi_m \stackrel{\text{def}}{=} \pi \circ \Phi \circ \mathcal{F}_m : (\alpha,\beta) \longmapsto (X(m;\alpha,\beta), Y(m;\alpha,\beta), U(m;\alpha,\beta))$$

é uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3_{xyu}$:

$$S_m \stackrel{\text{def}}{=} \phi_m\left(\mathbb{R}^2_{\alpha\beta}\right)$$

parametrizada por α, β, e $\Phi \circ \mathcal{F}_m$ é uma 2-faixa de contacto de tipo II, para todo o ponto m.

Localmente a superfície S_a pode ser definida como uma superfície de nível de alguma função escalar:

$$S_m = \{(X,Y,U) \in \mathbb{R}^3 : \quad F(\underbrace{x,y,u}_{m}; X,Y,U) = 0\}$$

Mais concretamente - pelo menos um dos três Jacobianos:

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(\alpha,\beta)}, \quad \frac{\partial(X,U)}{\partial(\alpha,\beta)}, \quad \frac{\partial(Y,U)}{\partial(\alpha,\beta)} \tag{3.2.15}$$

é $\neq 0$. Suponhamos por exemplo que é o primeiro. Podemos então resolver as duas primeiras equações (3.2.12), em ordem a α e β, substituir o resultado na terceira, para obter uma relação do tipo:

$$F(x,y,u;X,Y,U) = 0 \tag{3.2.16}$$

a que chamamos uma **equação directriz** da transformação Φ. Esta equação representa o lugar geométrico dos pontos $M = (X,Y,U)$ que são o suporte da 2-faixa de tipo II, imagem por Φ da 2-faixa de tipo 0, cujo suporte é o ponto $m = (x,y,u)$. Fazendo agora variar o ponto $m = (x,y,u)$, obtemos uma família a 3 parâmetros de superfícies em $\mathbb{R}^3$, gerada por (3.2.16).

O nosso objectivo é agora deduzir relações entre F e as funções X, Y, U, P, Q, que definem a transformação de contacto Φ, e que eventualmente permitam reconstruir esta a partir de F.

A **ideia geométrica** é a seguinte - consideremos um elemento de contacto $c = (m,\pi)$, em $\mathbb{R}^3_{xup}$, constituído por um ponto $m = (x,u,p)$ e por um plano $\pi \subset T_m\mathbb{R}^3$, e seja s uma superfície em $\mathbb{R}^3_{xup}$, tangente a π em m, isto é, $\pi = T_m s$.

Quando o ponto m varia na superfície s, obtemos uma família a 2 parâmetros de superfícies $\{S_m\}_{m\in s}$ em $\mathbb{R}^3$, gerada por (3.2.16). A 2-faixa de contacto $\mathcal{F}_m$ e a superfície s têm um elemento de contacto comum - o elemento $c = (m, \pi = T_m s)$.

Consideremos agora a superfície $S \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(s)$, em J^1. Como Φ é transformação de contacto, S e S_m têm um elemento de contacto em comum - o elemento $(M,\Pi) = \Phi(c) = \Phi(m,\pi)$, onde M é o ponto de contacto de S com S_m, e Π é o respectivo plano tangente comum, em M.

Mas isto significa que S é a envolvente da família a 2 parâmetros de superfícies $\{S_m\}_{m\in s}$. Desta forma, fica definida geomètricamente Φ, através da correspondência:

$$(m,\pi) \longmapsto (M,\Pi)$$

Para definir **analìticamente** Φ, a partir de F, suponhamos que s é dada por $u = u(x,y)$. Então cada S_m é definida por:

$$F(x,y,u(x,y);X,Y,U) = 0 \tag{3.2.17}$$

O ponto característico $M \in S_m$, onde S_m toca a envolvente S, é obtido juntando à equação (3.2.17), as equações que se obtêm derivando esta em relação a x e y, respectivamente:

$$\left\{\begin{array}{lcl} F(x,y,u(x,y);X,Y,U) & = & 0 \\ F_x(\cdot)+p\,F_u(\cdot) & = & 0 \\ F_y(\cdot)+q\,F_u(\cdot) & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.2.18}$$

onde $p = u_x$, $q = u_y$ e $(\cdot) = (x,y,u(x,y);X,Y,U)$. Resolvendo este sistema em ordem a X,Y,U, obtemos expressões para as componentes X,Y,U de Φ, como funções de x,y,u,p,q. Quanto às restantes duas componentes P e Q, elas são as coordenadas do plano Π, tangente a S, em M, isto é, $P = \frac{\partial U}{\partial X}$, e $Q = \frac{\partial U}{\partial Y}$, e são obtidas a partir das derivadas de (3.2.17) em relação a X e Y, respectivamente:

$$\left\{\begin{array}{lcl} F_X + P\,F_U & = & 0 \\ F_Y + Q\,F_U & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.2.19}$$

- A matriz $M(m;p,q)$ tem característica 1, para todo o $(m;p,q)$.

Neste caso, Φ transforma a 2-faixa de contacto $\mathcal{F}_m$, de suporte pontual $m = (x,y,u)$, numa 2-faixa de contacto de tipo I, $\Phi \circ \mathcal{F}_m$, cujo suporte $\pi \circ \Phi \circ \mathcal{F}_m(\mathbb{R}^2_{\alpha\beta})$ é uma curva Γ_m em $\mathbb{R}^3$, dada por:

$$M = (X,Y,U) \in \Gamma_m \qquad \Leftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lcl} F(x,y,u;X,Y,U) & = & 0 \\ G(x,y,u;X,Y,U) & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.2.20}$$

Consideremos novamente um elemento de contacto $c = (m,\pi)$, em $\mathbb{R}^3_{xup}$, constituído por um ponto $m = (x,u,p)$ e por um plano $\pi \subset T_m\mathbb{R}^3$, e seja s uma superfície em $\mathbb{R}^3_{xup}$, tangente a π em m, isto é, $\pi = T_m s$.

Quando o ponto m varia na superfície s, obtemos uma família a 2 parâmetros de curvas $\{\Gamma_m\}_{m\in s}$ em $\mathbb{R}^3$, isto é, obtemos uma **congruência de curvas** em $\mathbb{R}^3$. A 2-faixa de contacto $\mathcal{F}_m$ e a superfície s têm um elemento de contacto comum - o elemento $c = (m, \pi = T_m s)$.

Consideremos mais uma vez a superfície $S \overset{\text{def}}{=} \Phi(s)$, em J^1. Como Φ é transformação de contacto, S e Γ_m têm um elemento de contacto em comum - o elemento $(M,\Pi) = \Phi(c) = \Phi(m,\pi)$. Por outras palavras, S é a **superfície focal** da congruência $\{\Gamma_m\}_{m\in s}$.

Vejamos como determinar o elemento $(M,\Pi) = \Phi(m,\pi)$. Em primeiro lugar, o ponto M, sendo um ponto focal da congruência $\{\Gamma_m\}_{m\in s}$, será determinado pelas equações (3.2.20), juntamente com:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = 0$$

isto é, supondo que s é descrita por $u = u(x,y)$, juntamente com:

$$\left|\begin{array}{cc} F_x + p\,F_u & F_y + q\,F_u \\ G_x + p\,G_u & G_y + q\,G_u \end{array}\right|$$

ou:

$$\frac{F_x + p\,F_u}{G_x + p\,G_u} = \frac{F_y + q\,F_u}{G_y + q\,G_u} \tag{3.2.21}$$

Resta determinar o plano Π, através das suas componentes P e Q.

- **Exemplo 3.2.1 Transformação de Legendre** ... é a transformação por polares recíprocas relativamente à quádrica (parabolóide):

$$x^2 + y^2 - 2u = 0$$

A equação directriz $F = 0$, é a equação de conjugação entre os pontos $a = (x, y, u)$ e $A = (X, Y, U)$:

$$F(x, y, u, X, Y, U) = xX + yY - (u + U) = 0$$

O sistema (3.2.18) é:

$$\begin{cases} xX + yY - (u+U) &= 0 \\ X - p &= 0 \\ Y - q &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X &= p \\ Y &= q \\ U &= xp + yq - u \end{cases}$$

Quanto ao sistema (3.2.19), ele é:

$$\begin{cases} x - P &= 0 \\ y - Q &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P &= x \\ Q &= y \end{cases}$$

e a transformação de Legendre é portanto:

$$\boxed{\mathcal{L} : (x, y, u, p, q) \longmapsto (X = p, Y = q, U = xp + yq - u, P = x, Q = y)} \tag{3.2.22}$$

Bibliography

[1] V. Arnold, *"Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles ordinaires."* Éditions MIR de Moscou.

[2] I.S. Krasil'shchik, A.M. Vinogradov, *"Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics."* Translations of Mathematical Monographs, Volume 182, AMS.

[3] M. Giaquinta, S. Hildebrant, *"Calculus of Variations II."* Springer Verlag.

[4] J. N: Tavares, *"Curso de Geometria Diferencial."* Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências do Porto.

[5] J. N: Tavares, *"Curso de Cálculo Avançado."* Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências do Porto.