

# Teste. Geometrias não Euclidianas/Tópicos de Geometria

Licenciatura em Matemática

31 de Março de 2008

Duração... 2h00m (sem tolerância)

O teste é constituído por 4 folhas. Deve ser resolvido nessas folhas, podendo utilizar o seu verso. Exige-se boa apresentação da prova e justificação clara dos cálculos efectuados.

Cotação:

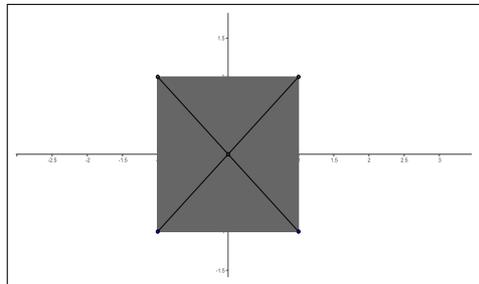
1	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)	4(a)	4(b)
1.5	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5

NOME ... \_\_\_\_\_

TOTAL ... \_\_\_\_\_

CURSO ... \_\_\_\_\_

**Exercício 1** ... Considere o quadrado de vértices  $A = (-1, -1)$ ,  $B = (1, -1)$ ,  $C = (1, 1)$  e  $D = (-1, 1)$ :



Seja  $t = \text{Inv}(O; 1)$  a inversão de centro  $O = (0, 0)$  e razão  $r = 1$ . Calcule explicitamente a imagem do quadrado, juntamente com as suas diagonais, sob  $t$ . Faça um esboço dessa imagem.

---

Resolução ...

NOME...

---

**Exercício 2 ... a.)** Os círculos  $C_1$  e  $C_2$ , pertencentes a uma família de Apollonius, têm os segmentos  $[-10, 2]$  e  $[4, 8]$ , situados no eixo real, como diâmetros.

Calcular os "círculos" limite dessa família. Calcular ainda o círculo dessa família que contém o ponto  $A = (1, 2)$ .

**b.)** Verificar se os pontos  $-1 - i, i, 1 + 3i$  e  $2 + 5i$  pertencem ou não a um círculo generalizado. Em caso afirmativo, calcular a respectiva equação e verificar se esse círculo é uma recta (usar transformações de Möbius e o teorema fundamental da geometria inversiva).

---

Resolução ...

NOME...

---

**Exercício 3** ... Dados 4 números distintos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ , em  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , define-se a sua *razão anarmônica*, e nota-se por  $(\alpha\beta; \gamma\delta)$ , como a imagem de  $\alpha$  sob a única transformação de Möbius que transforma o terno ordenado  $\beta, \gamma, \delta$  em  $1, 0, \infty$ , respectivamente.

- a.) Calcular uma fórmula explícita para  $(\alpha\beta; \gamma\delta)$ .
- b.) Mostrar que toda a transformações de Möbius  $M$  preserva a razão anarmônica.

---

Resolução ...

NOME...

---

**Exercício 4** ... **a.)** Mostrar que o produto (ou composição) de duas inversões com o mesmo centro é uma homotetia com esse mesmo centro. Calcular a respectiva razão de homotetia (faça os cálculos com notações complexas).

**b.)** Mostrar que duas inversões com centros distintos comutam se e só se os respectivos círculos de inversão são ortogonais.

---

Resolução ...