

Teste. Geometrias não Euclidianas/Tópicos de Geometria

Licenciatura em Matemática

31 de Março de 2008

Duração... 2h00m (sem tolerância)

O teste é constituído por 4 folhas. Deve ser resolvido nessas folhas, podendo utilizar o seu verso. Exige-se boa apresentação da prova e justificação clara dos cálculos efectuados.

Cotação:

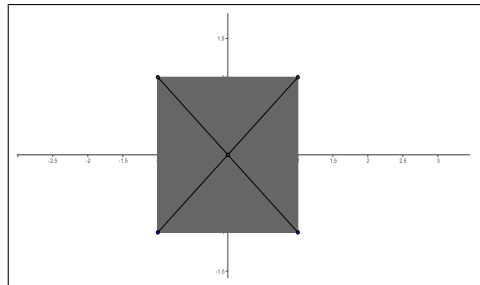
1	2(a)	2(b)	3(a)	3(b)	4(a)	4(b)
1.5	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5

NOME ... _____

TOTAL ... _____

CURSO ... _____

Exercício 1 ... Considere o quadrado de vértices $A = (-1, -1)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 1)$ e $D = (-1, 1)$:



Seja $t = \text{Inv}(O; 1)$ a inversão de centro $O = (0, 0)$ e razão $r = 1$. Calcule explicitamente a imagem do quadrado, juntamente com as suas diagonais, sob t . Faça um esboço dessa imagem.

Resolução ...

NOME...

Exercício 2 ... a.) Os círculos C_1 e C_2 , pertencentes a uma família de Apollonius, têm os segmentos $[-10, 2]$ e $[4, 8]$, situados no eixo real, como diâmetros.

Calcular os "círculos" limite dessa família. Calcular ainda o círculo dessa família que contem o ponto $A = (1, 2)$.

b.) Verificar se os pontos $-1 - i, i, 1 + 3i$ e $2 + 5i$ pertencem ou não a um círculo generalizado. Em caso afirmativo, calcular a respectiva equação e verificar se esse círculo é uma recta (usar transformações de Möbius e o teorema fundamental da geometria inversiva).

Resolução ...

NOME...

Exercício 3 ... Dados 4 números distintos α, β, γ e δ , em $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, define-se a sua *razão anarmônica*, e nota-se por $(\alpha\beta; \gamma\delta)$, como a imagem de α sob a única transformação de Möbius que transforma o terno ordenado β, γ, δ em $1, 0, \infty$, respectivamente.

- a.) Calcular uma fórmula explícita para $(\alpha\beta; \gamma\delta)$.
- b.) Mostrar que toda a transformações de Möbius M preserva a razão anarmônica.

Resolução ...

NOME...

Exercício 4 ... **a.)** Mostrar que o produto (ou composição) de duas inversões com o mesmo centro é uma homotetia com esse mesmo centro. Calcular a respectiva razão de homotetia (faça os cálculos com notações complexas).

b.) Mostrar que duas inversões com centros distintos comutam se e só se os respectivos círculos de inversão são ortogonais.

Resolução ...