GEOMETRIA CINEMÁTICA
Aplicações

João Nuno Tavares

Índice:

1 Espaços Afins. Referenciais Afins. Grupo Afim.

1.1 Espaços Afins. Referenciais Afins

Seja G um grupo, X um conjunto e $Bij(X)$ o grupo das bijecções de X em si próprio. Uma **acção esquerda de** G **em** X, é, por definição um homomorfismo de grupos:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & G & \longrightarrow & Bij(X) \\ & g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

Diz-se então que G **actua à esquerda** de X. Como Φ é um homomorfismo de grupos, concluímos que:

- $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$.
- $\Phi_e = \mathrm{Id}_X$.
- $\Phi_{g^{-1}} = \Phi_g^{-1}$.

$\forall g, h \in G$. A acção Φ diz-se **transitiva** se dados dois quaisquer elementos $x, y \in X$, existe $g \in G$, tal que $\Phi_g(x) = y$. Se além disso, g é único a acção diz-se **simplesmente transitiva**.

- **Espaços afins ...** Apliquemos a definição anterior à situação em que $X = \mathcal{A}$ é um conjunto sobre o qual está definida uma **acção simplesmente transitiva** do grupo aditivo de um espaço vectorial $\overrightarrow{\mathbf{V}}$. Neste caso diz-se que $\mathcal{A}$ é um **espaço afim, modelado no espaço vectorial** $\overrightarrow{\mathbf{V}}$. Usando a notação aditiva para o grupo aditivo de $\overrightarrow{\mathbf{V}}$, temos portanto um homomorfismo de grupos $\Phi = T$:

$$\boxed{\begin{array}{rccc} T: & \overrightarrow{\mathbf{V}} & \longrightarrow & Bij(\mathcal{A}) \\ & \overrightarrow{\mathbf{v}} & \longmapsto & T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} \end{array}} \tag{1.1}$$

A bijecção $T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ diz-se a **translacção de vector** $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{V}}$. Os elementos de $\mathcal{A}$ chamam-se **pontos**, e a imagem de um ponto $a \in \mathcal{A}$, pela translacção $T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}$, é o ponto de $\mathcal{A}$ que se nota por $a + \overrightarrow{\mathbf{v}}$:

$$\boxed{T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}(a) \stackrel{\text{def}}{=} a + \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathcal{A}, \qquad\qquad a \in \mathcal{A},\ \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{V}}} \tag{1.2}$$

Como T é um homomorfismo de grupos, e o grupo aditivo de $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ é abeliano, concluímos que:

- $T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}+\overrightarrow{\mathbf{w}}} = T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}} \circ T_{\overrightarrow{\mathbf{w}}} = T_{\overrightarrow{\mathbf{w}}} \circ T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}$.
- $T_{\overrightarrow{\mathbf{0}}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$.
- $T_{-\overrightarrow{\mathbf{v}}} = (T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}})^{-1}$.

Por outro lado, como a acção do grupo aditivo de $\overrightarrow{\mathbf{V}}$, em $\mathcal{A}$, é simplesmente transitiva, dados dois pontos quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$, existe uma e uma só translacção que envia a em b. Esta translacção nota-se por $T_{\overrightarrow{ab}}$, onde $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{\mathbf{V}}$ é o único vector de $\overrightarrow{\mathbf{V}}$ a que corresponde a referida translacção, isto é:

$$T_{\overrightarrow{ab}}(a) = b$$

ou ainda:

$$\boxed{a + \overrightarrow{ab} = b} \tag{1.3}$$

Por isso, o vector $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{\mathbf{V}}$ se simboliza às vezes por $b - a$, (ver a figura 1):

$$\boxed{b - a \;\; \stackrel{\text{def}}{=} \;\; \overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{\mathbf{V}}} \tag{1.4}$$

Figure 1:

• **Relação de Chasles ...** Consideremos agora três pontos arbitrários $a, b, c \in \mathcal{A}$. Temos então sucessivamente que (justificar):

$$\begin{aligned}
T_{\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}}(a) &= \left(T_{\overrightarrow{bc}} \circ T_{\overrightarrow{ab}}\right)(a) \\
&= T_{\overrightarrow{bc}}(a + \overrightarrow{ab}) \\
&= T_{\overrightarrow{bc}}(b) \\
&= b + \overrightarrow{bc} \\
&= c \\
&= T_{\overrightarrow{ac}}(a)
\end{aligned}$$

o que implica a chamada **relação de Chasles** seguinte, em $\overrightarrow{\mathbf{V}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}, \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{A}} \tag{1.5}$$

ou, com a notação (1.4):

$$\boxed{(b - a) + (c - b) = c - a, \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{A}} \tag{1.6}$$

• **Vectorialização em o ...** A escolha de um ponto $o \in \mathcal{A}$, determina uma bijecção:

$$\begin{array}{rccc} \phi_o : & \overrightarrow{\mathbf{V}} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & \overrightarrow{\mathbf{v}} & \longmapsto & o + \overrightarrow{\mathbf{v}} \end{array} \tag{1.7}$$

Diz-se então que $o \in \mathcal{A}$ é a "origem" do espaço afim $\mathcal{A}$, e que $\mathcal{A}$ fica vectorializado em o, isto é, $\mathcal{A}$ fica munido da única estrutura vectorial para a qual a bijecção ϕ_o é um isomorfismo de espaços vectoriais. Por definição, a dimensão de $\mathcal{A}$ é a dimensão de $\overrightarrow{\mathbf{V}}$.

• **Referenciais afins ...** Suponhamos que $\mathcal{A}$ é um espaço afim, modelado no espaço vectorial (real ou complexo) $\overrightarrow{\mathbf{V}}$, de dimensão finita n. Um **referencial afim** para $\mathcal{A}$ é um conjunto constituído por um ponto $o \in \mathcal{A}$, chamado a **origem** do referencial, e por uma base (ordenada) $\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$ para $\overrightarrow{\mathbf{V}}$. Esse referencial será notado por:

$$\mathcal{R} = \{o; \overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$$

• **Coordenadas afins ...** Dado um ponto $a \in \mathcal{A}$, o vector $\overrightarrow{oa}$ está em $\overrightarrow{\mathbf{V}}$, e podemos considerar as respectivas coordenadas relativas à base $\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_i\}$ para $\overrightarrow{\mathbf{V}}$:

$$\overrightarrow{oa} = \sum_i a^i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i$$

Pômos então:

$$\boxed{a = o + \textstyle\sum_{i=1}^n a^i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i} \tag{1.8}$$

e diz-se que (a^i) são as **coordenadas afins do ponto $a \in \mathcal{A}$, no referencial afim** $\mathcal{R} = \{o; \overrightarrow{\mathbf{e}}_i\}$.

Um referencial $\mathcal{R} = \{o; \overrightarrow{\mathbf{e}}_i\}$, define pois um **sistema de coordenadas afins para** $\mathcal{A}$, isto é, define uma bijecção:

$$\begin{array}{rccc} \psi_{\mathcal{R}} : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & a & \longmapsto & (a^i) \end{array} \qquad \text{onde} \qquad a = o + \sum_{i=1}^n a^i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i \tag{1.9}$$

(no caso complexo, em vez de $\mathbb{R}^n$ será $\mathbb{C}^n$). É claro que a bijecção recíproca é:

$$\begin{array}{rccc} \psi_{\mathcal{R}}^{-1} : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & (a^i) & \longmapsto & a = o + \sum_{i=1}^n a^i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i \end{array} \tag{1.10}$$

• **Aplicações afins ...** Suponhamos agora que temos dois espaços afins - $\mathcal{A}$, modelado no espaço vectorial $\overrightarrow{\mathbf{V}}$, e $\mathcal{B}$ modelado no espaço vectorial $\overrightarrow{\mathbf{W}}$. Uma aplicação $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ diz-se uma **aplicação afim**, se existe uma aplicação linear $\mathbf{L} : \overrightarrow{\mathbf{V}} \to \overrightarrow{\mathbf{W}}$, tal que o diagrama seguinte é comutativo, $\forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{V}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "T_{\overrightarrow{\mathbf{v}}}"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "T_{\mathbf{L}(\overrightarrow{\mathbf{v}})}"'] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "f"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

ou ainda:

$$\boxed{f(a+\vec{\mathbf{v}}) = f(a) + \mathbf{L}(\vec{\mathbf{v}}), \qquad \forall \vec{\mathbf{v}} \in \vec{\mathbf{V}}, \ \ \forall a \in \mathcal{A}} \tag{1.11}$$

É fácil ver que a aplicação linear $\mathbf{L}$ é única (e apenas depende de f), e por isso, diz-se a **parte linear** de f.

Uma aplicação afim bijectiva $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, diz-se um isomorfismo afim. O conjunto de todos os isomorfismos afins de $\mathcal{A}$ formam um grupo que se diz o **grupo afim de** $\mathcal{A}$.

• **Mudança de coordenadas afins ...** Suponhamos que em $\mathcal{A}$ temos dois referenciais afins $r = \{o; \vec{\mathbf{e}}_i\}$ e $\mathcal{R} = \{O; \vec{\mathbf{E}}_i\}$. Se $a \in \mathcal{A}$ é um ponto arbitrário, suponhamos que:

- $\vec{oa} = \sum_i x^i \vec{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow a = o + \sum_i x^i \vec{\mathbf{e}}_i$, isto é, (x^i) são as coordenadas afins de a, relativas ao referencial r.
- $\overrightarrow{Oa} = \sum_j X^j \vec{\mathbf{E}}_j \Leftrightarrow a = O + \sum_i X^i \vec{\mathbf{E}}_i$, isto é, (X^i) são as coordenadas afins de a, relativas ao referencial $\mathcal{R}$.

e suponhamos ainda que:

- $\overrightarrow{oO} = \sum_i a^i \vec{\mathbf{e}}_i \Leftrightarrow O = o + \sum_i a^i \vec{\mathbf{e}}_i$, isto é, (a^i) são as coordenadas afins de O, relativas ao referencial r.
- $\vec{\mathbf{E}}_j = \sum_i M^i_j \vec{\mathbf{e}}_i$, isto é $M = (M^i_j)$ é a matriz de passagem da base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$, para a "nova" base $\{\vec{\mathbf{E}}_i\}$.

Temos então sucessivamente que:

$$\begin{aligned}
\sum_i x^i \vec{\mathbf{e}}_i &= \vec{oa} \\
&= \overrightarrow{oO} + \overrightarrow{Oa}, \qquad \text{pela relação de Chasles} \\
&= \sum_i a^i \vec{\mathbf{e}}_i + \sum_j X^j \vec{\mathbf{E}}_j \\
&= \sum_i a^i \vec{\mathbf{e}}_i + \sum_j X^j \sum_i M^i_j \vec{\mathbf{e}}_i \\
&= \sum_i \left(a^i + \sum_j M^i_j X^j \right) \vec{\mathbf{e}}_i
\end{aligned}$$

donde se deduz que:

$$\boxed{x^i = a^i + \textstyle\sum_j M^i_j X^j} \tag{1.12}$$

o que significa que a passagem das coordenadas (X^j) para as coordenadas (x^i), de um mesmo ponto $a \in \mathcal{A}$, relativamente aos referenciais afins $\mathcal{R}$ e r, respectivamente, se faz através de um isomorfismo afim de $\mathbb{R}^n$.

Note que a matriz $M = (M^i_j)$ é a matriz de passagem da base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$, para a "nova" base $\{\vec{\mathbf{E}}_i\}$, enquanto que a fórmula (1.12) permite a passagem das "novas" coordenadas (X^i), para as "velhas" coordenadas (x^i).

Uma vez fixo um referencial afim $r = \{o; \vec{\mathbf{e}}_i\}$, para $\mathcal{A}$, todos os outros referenciais se obtêm a partir deste por acção do grupo $GA(n)$ - o grupo afim de $\mathbb{R}^n$. Recordemos para já o que é esse grupo.

1.2 O Grupo Afim $GA(n)$.

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^n$ com a sua estrutura afim canónica, isto é, $\mathbb{R}^n$ actua sobre si próprio através da soma usual de vectores. Pontos (= vectores) de $\mathbb{R}^n$ serão representados por $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$. Um **isomorfismo afim** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que é da forma:

$$g : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{A}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1.13}$$

onde $\mathbf{a} = g(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R})$ é uma aplicação linear inversível, chamada a **parte linear** associada a g. As bijecções afins de $\mathbb{R}^n$ constituem um grupo $GA(n)$, chamado **grupo afim** de $\mathbb{R}^n$, que pode ser identificado com o subgrupo de $GL(n+1, \mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}, \mathbf{A}) \qquad \text{com} \quad \mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}), \, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \tag{1.14}$$

Note que o produto em $GA(n)$ é dado por:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{A})(\mathbf{b}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{b} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{B} \end{bmatrix} = (\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{B})$$

e que:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{A})^{-1} = (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{A}^{-1})$$

Uma bijecção afim $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fica completamente determinada pelo ponto $\mathbf{a} = g(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$ no qual ela transforma a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, e pelos vectores $\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{E}_1), \cdots, \mathbf{e}_n = \mathbf{A}(\mathbf{E}_n)$ nos quais a aplicação linear homogénea $\mathbf{A}$, associada a g, transforma os vectores $\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_n$ da base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para representar isto, usamos a notação matricial seguinte:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \cdots & \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \cdot A$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} \cdot A$$

Um **referencial afim** em $\mathbb{R}^n$ é uma sequência da forma:

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{a}\,; \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\} \in \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n\,\text{factores}} \tag{1.15}$$

onde $\mathbf{a}$ é um ponto de $\mathbb{R}^n$, chamado a origem do referencial $\mathcal{R}$, e $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Representamos o referencial (1.15) por:

$$\mathcal{R} = \{(\mathbf{a}; \mathbf{e}_i\}$$

O conjunto de todos os referenciais afins em $\mathbb{R}^n$ está em correspondência bijectiva com o grupo afim $GA(n)$, e é um aberto de $\mathbb{R}^{(n+1)n}$, que notamos por $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{rccc} \iota: & GA(n) & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) \\ & g = (\mathbf{a}, \mathbf{A}) & \longleftrightarrow & \mathcal{R}_g = \{\mathbf{a}\,; \mathbf{e} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}) \end{array} \tag{1.16}$$

Como já dissemos, dado um qualquer espaço afim $\mathcal{A}$, e uma vez fixo um referencial afim $r = \{o; \overrightarrow{\mathbf{e}}_i\}$, para $\mathcal{A}$, todos os outros referenciais se obtêm a partir deste, por acção do grupo $GA(n)$ - o grupo afim de $\mathbb{R}^n$.

De facto, dado o referencial $r = \{o; \overrightarrow{\mathbf{e}}_i\}$ e um isomorfismo afim $g = (\mathbf{a} = (a^i), \mathbf{A} = (A^i_j)) \in GA(n)$, associamos um novo referencial afim $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} r \cdot g = \{O; \overrightarrow{\mathbf{E}}_i\}$, para $\mathcal{A}$, pondo:

$$\begin{aligned} O &= o + \sum_i a^i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i \\ \overrightarrow{\mathbf{E}}_j &= \sum_i A^i_j \overrightarrow{\mathbf{e}}_i \end{aligned} \tag{1.17}$$

Recìprocamente, é fácil ver que, dado um qualquer referencial $\mathcal{R} = \{O; \overrightarrow{\mathbf{E}}_i\}$, para $\mathcal{A}$, existe um e um só isomorfismo afim $g = (\mathbf{a} = (a^i), \mathbf{A} = (A^i_j)) \in GA(n)$, tal que $\mathcal{R} = r \cdot g$.

Desta forma, podemos concluir que, uma vez fixo um referencial afim $r = \{o; \overrightarrow{\mathbf{e}}_i\}$, para $\mathcal{A}$, o conjunto de todos os referenciais afins de $\mathcal{A}$ está em correspondência bijectiva com o grupo $GA(n)$, e portanto, com $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$, atendendo a (1.16).

1.3 Espaços afins Euclideanos. O Grupo Euclideano especial $SE(n)$.

Um espaço afim Euclideano (orientado), é um espaço afim $\mathcal{E}$, modelado num espaço vectorial Euclideano (orientado) $\overrightarrow{\mathbf{E}}$. Neste caso, pode definir-se em $\mathcal{E}$ uma distância, através de:

$$d(a, b) = \|\overrightarrow{ab}\|, \qquad a, b \in \mathcal{E} \tag{1.18}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclideana em $\overrightarrow{\mathbf{E}}$.

Um referencial afim $r = \{o; \overrightarrow{\mathbf{e}}_i\}$, para $\mathcal{E}$, diz-se ortonormado (positivo), se a base $\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_i\}$ é uma base ortonormada (positiva) para $\overrightarrow{\mathbf{E}}$.

Uma bijecção afim $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se um **"movimento rígido"** de $\mathbb{R}^n$, se é da forma:

$$g : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{R}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1.19}$$

onde a aplicação linear homogénea $\mathbf{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada a g, é uma aplicação ortogonal que preserva a orientação usual de $\mathbb{R}^n$, i.e., $\mathbf{R} \in SO(n, \mathbb{R})$ (ou ainda $\mathbf{R}\mathbf{R}^t = \mathrm{Id}$ e $\det \mathbf{R} = 1$).

Os movimentos rígidos de $\mathbb{R}^n$ constituem um grupo $SE(n)$, chamado o **grupo Euclideano especial** de $\mathbb{R}^n$, que pode ser identificado com o subgrupo de $SL(n+1, \mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} (a, \mathbf{R}) \qquad \text{com} \quad \mathbf{R} \in SO(n),\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \tag{1.20}$$

Com antes, o grupo $SE(n)$ está em correspondência bijectiva com o conjunto $\mathcal{RO}^+(\mathbb{R}^n)$, de todos os referenciais afins ortonormados positivos em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rccc} \iota: & SE(n) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{RO}^+(\mathbb{R}^n) \\ & g = (\mathbf{a}, \mathbf{R}) & \longleftrightarrow & \mathcal{R}_g = (\mathbf{a}\,; \mathbf{e} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{R}) \end{array} \tag{1.21}$$

e, da mesma forma, uma vez fixo um referencial afim ortonormado positivo $r = \{o; \vec{\mathbf{e}}_i\}$, para $\mathcal{A}$, o conjunto de todos os referenciais afins ortonormados positivos de $\mathcal{A}$, está em correspondência bijectiva com o grupo $SE(n)$, e portanto, com $\mathcal{RO}^+(\mathbb{R}^n)$, atendendo a (1.21).

2 Cinemática dos espaços móveis

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, contendo 0 no seu interior, e $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{F}$, duas cópias de um mesmo espaço afim Euclideano orientado $\mathcal{E}$, a que chamamos o **espaço móvel** e o **espaço fixo**, respectivamente.

- ▷ **Definição 2.1** ... Um **movimento a um parâmetro t, de $\mathfrak{M}$ relativamente a $\mathfrak{F}$**, é uma aplicação de classe C^∞:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & I \times \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathfrak{F} \\ & (t, P) & \longmapsto & \Phi(t, P) \end{array} \tag{2.1}$$

tal que:

- $\Phi(0, \cdot) = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.
- para cada $t \in I$, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} g_t: & \mathfrak{M} & \longrightarrow & \mathfrak{F} \\ & P & \longmapsto & g_t(P) = \Phi(t, P) \end{array} \tag{2.2}$$

é uma isometria afim positiva de $\mathcal{E}$, isto é, g_t preserva a orientação e a distância definidas em $\mathcal{E}$:

$$d(g_t(P), g_t(Q)) = d(P, Q), \quad \forall t \in I,\ \forall P, Q \in \mathfrak{M}$$

Um tal movimento notar-se-á por $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F};\Phi)$, ou por $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F};g_t)$.

• **Movimento como uma curva em $SE(\mathcal{E})$ ...** Por outras palavras, um movimento a um parâmetro t, de $\mathfrak{M}$ relativamente a $\mathfrak{F}$, é uma curva de classe C^∞, no grupo $SE(\mathcal{E})$ - o grupo das isometrias afins positivas de $\mathcal{E}$ - e que no instante $t=0$ passa na identidade desse grupo $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$:

$$g: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow SE(\mathcal{E}), \qquad t \mapsto g_t, \quad g_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \tag{2.3}$$

Portanto, para cada instante $t \in I$, g_t é da forma:

$$g_t : P + \overrightarrow{\mathbf{V}} \longmapsto g_t(P) + \mathbf{R}_t(\overrightarrow{\mathbf{V}}), \qquad P \in \mathfrak{M},\ \overrightarrow{\mathbf{V}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$$

onde $\mathbf{R}_t$ é uma isometria linear positiva de $\overrightarrow{\mathbf{E}}$.

• **Movimento como um referencial móvel (a um parâmetro) em $\mathfrak{F}$ ...** Fixemos, de uma vez por todas, um referencial ortonormado positivo $\mathcal{R} = \{O\,;\overrightarrow{\mathbf{E}}_1,\cdots,\overrightarrow{\mathbf{E}}_n\}$, para $\mathfrak{M}$. Como $g_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, esse referencial $\mathcal{R}$, quando visto em $\mathfrak{F}$, será notado por $r_0 = \{o\,;\overrightarrow{\mathbf{e}}_1,\cdots,\overrightarrow{\mathbf{e}}_n\}$, com $O=o$ e $\overrightarrow{\mathbf{E}}_i = \overrightarrow{\mathbf{e}}_i$ (isto é, $g_0(\mathcal{R}) = r_0$).

Como já vimos, a fixação desse referencial, permite identificar o espaço afim Euclideano $\mathcal{E}$, com o espaço $\mathbb{R}^n$ (com a sua orientação e estrutura afim Euclideana usuais), isto é, cada ponto $p \in \mathcal{E}$ será representado pelo vector $\mathbf{x} = (x^i)$ das suas coordenadas, relativas ao referencial r_0:

$$p \in \mathcal{E} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = (x^i), \qquad \text{onde } \ p = o + \sum_i x^i \overrightarrow{\mathbf{e}}_i$$

e por isso, o grupo $SE(\mathcal{E})$ ficará identificado com $SE(n)$, ou ainda com o conjunto $\mathcal{RO}^+(\mathbb{R}^n)$, dos referenciais afins ortonormados positivos de $\mathbb{R}^n$, atendendo a (1.21).

Em suma, a fixação de um referencial $\mathcal{R}$ em $\mathfrak{M}$, e portanto de um referencial r_0, em $\mathfrak{F}$, permite descrever um movimento a um parâmetro t, de $\mathfrak{M}$ relativamente a $\mathfrak{F}$, como uma curva de classe C^∞, em $\mathcal{RO}^+(\mathfrak{F})$, que no instante $t=0$, passa em r_0, ou, por outras palavras, como um **referencial móvel** (afim ortonormado positivo), a um parâmetro, em $\mathfrak{F}$:

$$t \longmapsto r_t = g_t(\mathcal{R}) \in \mathcal{RO}^+(\mathfrak{F}) \tag{2.4}$$

onde:

$$r_t = \{a_t = g_t(O); \overrightarrow{\mathbf{e}}_1(t) = \mathbf{R}_t(\overrightarrow{\mathbf{E}}_1),\cdots,\overrightarrow{\mathbf{e}}_n(t) = \mathbf{R}_t(\overrightarrow{\mathbf{E}}_n)\} \tag{2.5}$$

Nota... Note que estamos a usar letras minúsculas $a, p, \mathbf{e}, ...$, para os pontos (ou vectores) do espaço fixo $\mathfrak{F}$, e letras maiúsculas $\mathbf{E}, P, Q, ...$, para os pontos (ou vectores) do espaço móvel $\mathfrak{M}$. Haverá no entanto excepções: aplicações lineares e campos de vectores, por exemplo, serão por vezes representados por letras maiúsculas $A, R, \mathbf{X}, ...$, e o contexto indicará claramente a que espaço pertencem, se a $\mathfrak{M}$, se a $\mathfrak{F}$, etc...!

Figure 2: Movimento $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F};\Phi)$.

Cada "**partícula**" ou **"molécula"** $P\in\mathfrak{M}$, descreve um movimento em $\mathfrak{F}$ dado por:

$$\begin{array}{rccc} p: & I & \longrightarrow & \mathfrak{F} \\ & t & \longmapsto & p(t)=g_t(P) \end{array} \tag{2.6}$$

a que chamamos o **movimento (absoluto) da partícula** $P\in\mathfrak{M}$**, no espaço fixo** $\mathfrak{F}$.

2.1 Campo de velocidades

• **Campo de velocidades em $\mathfrak{F}$ ...** Dado um movimento $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F};g_t)$, podemos definir um campo de vectores (dependente do tempo) $\vec{\mathbf{v}}_t$ em $\mathfrak{F}$, da seguinte forma - fixemos um instante $t\in I$, e um ponto arbitrário $p\in\mathfrak{F}$. Seja:

$$\boxed{P_t=g_t^{-1}(p)\in\mathfrak{M}} \tag{2.7}$$

o chamado t**-coincidente de** p **em** $\mathfrak{M}$, isto é, a partícula de $\mathfrak{M}$, que, no instante t, ocupa a posição $p\in\mathfrak{F}$, no espaço fixo.

Definimos então o campo de vectores $\vec{\mathbf{v}}_t$, em $\mathfrak{F}$, através de:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(p)\ \stackrel{\text{def}}{=}\ \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=t} g_\tau(P_t)} \tag{2.8}$$

Portanto $\vec{\mathbf{v}}_t(p)$ é a velocidade, no instante t, do movimento (absoluto) da partícula $P_t\in\mathfrak{M}$, cuja posição no instante t é o ponto $p\in\mathfrak{F}$.

Fixemos um ponto $O\in\mathfrak{M}$. Então g_t terá a seguinte expressão:

$$\boxed{g_t(P)=a_t+\mathbf{R}_t(\overrightarrow{OP}), \qquad\qquad P\in\mathfrak{M}} \tag{2.9}$$

onde pusemos $a_t=g_t(O)$, e $\mathbf{R}_t\in SO(\vec{\mathbf{E}})$. Em particular, para o t-coincidente $P_t=g_t^{-1}$, de p em $\mathfrak{M}$, temos que:

$$p=g_t(P_t)=a_t+\mathbf{R}_t(\overrightarrow{OP_t}) \qquad\Rightarrow\qquad \overrightarrow{OP_t}=\mathbf{R}_t^{-1}\,(p-a_t)$$

e portanto:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{v}}_t(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=t} g_\tau(P_t) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=t} \left[a_\tau + \mathbf{R}_\tau(\overrightarrow{OP_t})\right] \\
&= \dot{a}_t + \dot{\mathbf{R}}_t(\overrightarrow{OP_t}) \\
&= \dot{a}_t + \dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\left[p - a_t\right]
\end{aligned}$$

A este campo $\vec{\mathbf{v}}_t$ em $\mathfrak{F}$:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_t : p \mapsto \vec{\mathbf{v}}_t(p) = \dot{a}_t + \dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}[p - a_t]} \tag{2.10}$$

chamamos **campo de velocidades do movimento, no instante** t.

• **Propriedades do campo de velocidades ...** Uma propriedade importante deste campo $\vec{\mathbf{v}}_t$, é que é um **campo equiprojectivo**, (ou um **torsor**, quando $n = 3$), isto é, se considerarmos dois pontos $p, q \in \mathfrak{F}$, então $\vec{\mathbf{v}}_t(p)$ e $\vec{\mathbf{v}}_t(q)$, têm a mesma projecção sobre a recta que une p a q:

$$\vec{\mathbf{v}}_t(p) \cdot \overrightarrow{pq} = \vec{\mathbf{v}}_t(q) \cdot \overrightarrow{pq}$$

ou:

$$\boxed{(\vec{\mathbf{v}}_t(q) - \vec{\mathbf{v}}_t(p)) \cdot \overrightarrow{pq} = 0, \qquad \forall p, q \in \mathfrak{F}} \tag{2.11}$$

Com efeito:

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathbf{v}}_t(q) - \vec{\mathbf{v}}_t(p)) \cdot \overrightarrow{pq} &= \Big(\dot{a}_t + \dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}[q - a_t] - \dot{a}_t - \dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}[p - a_t]\Big) \cdot \overrightarrow{pq} \\
&= \Big(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}[q - p]\Big) \cdot \overrightarrow{pq} \\
&= \Big(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}[\overrightarrow{pq}]\Big) \cdot \overrightarrow{pq} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

uma vez que o operador $\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}$ é anti-simétrico. De facto, $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \text{Id} \Rightarrow \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, e portanto:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \text{Id} \Rightarrow \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = 0 \Rightarrow \left[\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\right]^T = -\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$$

• **Caso $n = 3$. Vector instantâneo de rotação ...** Quando $n = 3$, e como o operador $\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}$ é anti-simétrico, sabemos que existe um único vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}_t \in \vec{\mathbf{E}}$ tal que:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(p) = \dot{a}_t + \vec{\boldsymbol{\omega}}_t \times [p - a_t]} \tag{2.13}$$

$\vec{\boldsymbol{\omega}}_t \in \vec{\mathbf{E}}$ diz-se o **vector instantâneo de rotação** do movimento, no instante t, e no espaço fixo.

Se a matriz do operador $\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}$, relativamente a uma base ortonormada positiva $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_1\}$, para $\vec{\mathbf{E}}$, é:

$$\begin{bmatrix} 0 & -e(t) & d(t) \\ e(t) & 0 & -c(t) \\ -d(t) & c(t) & 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

então é fácil ver que, nessa base, $\vec{\boldsymbol{\omega}}_t$ é dado por:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\omega}}_t = c(t)\,\vec{\mathbf{e}}_1 + d(t)\,\vec{\mathbf{e}}_2 + e(t)\,\vec{\mathbf{e}}_3} \tag{2.15}$$

(o vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}_t$ é a chamada **resultante do torsor** $\vec{\mathbf{v}}_t$).

Se $\vec{\mathbf{v}}_t = \mathbf{0}$ diz-se que temos uma **imobilização instantânea** no instante t. Se $\vec{\boldsymbol{\omega}}_t = \mathbf{0}$ (mas $\vec{\mathbf{v}}_t \neq \mathbf{0}$), diz-se que temos uma **translacção instantânea** no instante t (neste caso todos as "partículas" têm a mesma velocidade, igual a $\dot{a}_t = \dot{g}_t(0)$, no instante t). Finalmente, se existir um ponto $p_o \in \mathfrak{F}$ tal que:

$$\vec{\mathbf{v}}_t(p_o) = \mathbf{0}$$

diz-se que temos uma **rotação instantânea**, e que p_o é um **centro instantâneo de rotação (c.i.r.)**, no instante t. Se $P_o = g_t^{-1}(p_o) \in \mathfrak{M}$, é a partícula de $\mathfrak{M}$, cuja posição no instante t é o ponto $p_o \in \mathfrak{F}$, então $\dot{g}_t(P_o) = 0$.

2.2 Introdução de um referencial móvel

Até aqui, os conceitos e as fórmulas que introduzimos, não fizeram intervir a escolha de um qualquer referencial.

Suponhamos agora que o movimento $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F}; g_t)$, é visto como um referencial móvel em $\mathfrak{F}$. Mais precisamente, fixemos um referencial $\mathcal{R}$ em $\mathfrak{M}$, e portanto um referencial r_0, em $\mathfrak{F}$, o que permite, como já vimos, descrever um movimento a um parâmetro t, de $\mathfrak{M}$ relativamente a $\mathfrak{F}$, como uma curva de classe C^∞, em $\mathcal{RO}^+(\mathfrak{F})$, que no instante $t = 0$, passa em r_0, ou, por outras palavras, como um **referencial móvel** (afim ortonormado positivo), a um parâmetro, em $\mathfrak{F}$:

$$t \longmapsto r_t = \{a_t = g_t(O); \vec{\mathbf{e}}_1(t) = \mathbf{R}_t(\vec{\mathbf{E}}_1), \cdots, \vec{\mathbf{e}}_n(t) = \mathbf{R}_t(\vec{\mathbf{E}}_n)\} \tag{2.16}$$

Fixemos de novo um instante $t \in I$ e um ponto $p \in \mathfrak{F}$. Seja $P_t = g_t^{-1}(p) \in \mathfrak{M}$ o t-coincidente de p. Então, se:

$$\overrightarrow{OP_t} = \sum_i X_t^i\,\vec{\mathbf{E}}_i$$

virá que:

$$\begin{aligned} g_\tau(P_t) &= a_\tau + \mathbf{R}_\tau(\overrightarrow{OP_t}) \\ &= a_\tau + \mathbf{R}_\tau\left(\sum_i X_t^i\,\vec{\mathbf{E}}_i\right) \\ &= a_\tau + \sum_i X_t^i\,\mathbf{R}_\tau\left(\vec{\mathbf{E}}_i\right) \\ &= a_\tau + \sum_i X_t^i\,\vec{\mathbf{e}}_i(\tau) \end{aligned} \tag{2.17}$$

e portanto:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{v}}_t(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=t} g_\tau(P_t) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=t} \left[a_\tau + \sum_i X_t^i \,\overrightarrow{\mathbf{e}}_i(\tau)\right] \\
&= \dot a_t + \sum_i X_t^i \,\dot{\overrightarrow{\mathbf{e}}}_i(t)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Pondo agora:

$$\boxed{\dot a_t = \textstyle\sum_j \xi^j(t)\overrightarrow{\mathbf{e}}_j(t)} \tag{2.19}$$

e ainda:

$$\boxed{\tfrac{d}{dt}\overrightarrow{\mathbf{e}}_i(t) = \dot{\overrightarrow{\mathbf{e}}}_i(t) = \textstyle\sum_j \Omega_i^j(t)\overrightarrow{\mathbf{e}}_j(t)} \tag{2.20}$$

podemos escrever o campo de velocidades (2.18), expresso na base móvel, e no instante t, na forma:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X_t^i) = \textstyle\sum_j \left[\xi^j(t) + \sum_i \Omega_i^j(t)X_t^i\right] \overrightarrow{\mathbf{e}}_j(t)} \tag{2.21}$$

onde X_t^i são as componentes do t-coincidente de p, no referencial $\mathcal{R}$, ou, de forma equivalente, as componentes de p, relativamente ao referencial móvel r_t.

2.3 Cinemática espacial ($n = 3$)

Em cinemática espacial ($n = 3$), é habitual usar as notações seguintes:

- $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\} = r_o = \{o; \widehat{\boldsymbol{\imath}}, \widehat{\boldsymbol{\jmath}}, \widehat{\boldsymbol{k}}\}$.
- $r_t = g_t(\mathcal{R}) = \{g_t(O) = a_t;\ \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{I}), \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{J}), \widehat{\boldsymbol{k}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{K})\}$.
- $\frac{da}{dt} = \dot a_t = \xi(t)\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) + \eta(t)\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + \zeta(t)\,\widehat{\boldsymbol{k}}(t)$.
- $\frac{d\widehat{\boldsymbol{\imath}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = -\frac{d\widehat{\boldsymbol{\jmath}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) = -\mathfrak{r}(t)$.
- $\frac{d\widehat{\boldsymbol{\imath}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{k}}(t) = -\frac{d\widehat{\boldsymbol{k}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \mathfrak{q}(t)$.
- $\frac{d\widehat{\boldsymbol{\jmath}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{k}}(t) = -\frac{d\widehat{\boldsymbol{k}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = -\mathfrak{p}(t)$.

ou em forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t)\\ \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t)\\ \widehat{\boldsymbol{k}}(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\mathfrak{r}(t) & \mathfrak{q}(t)\\ \mathfrak{r}(t) & 0 & -\mathfrak{p}(t)\\ -\mathfrak{q}(t) & \mathfrak{p}(t) & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t}\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t)\\ \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t)\\ \widehat{\boldsymbol{k}}(t)\end{bmatrix} \tag{2.22}$$

a matriz 3×3 acima, é a matriz do operador $\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t$, relativamente à base móvel $\{\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t), \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t), \widehat{\boldsymbol{k}}(t)\}$, para $\overrightarrow{\mathbf{E}}$. Pondo:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}(t) = \mathfrak{p}(t)\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) + \mathfrak{q}(t)\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + \mathfrak{r}(t)\,\widehat{\boldsymbol{k}}(t) \tag{2.23}$$

para a expressão do vector de rotação instantânea, expresso também na base móvel, virá então, para o campo de velocidades, expresso na base móvel, e no instante t:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X_t, Y_t, Z_t) &= \xi(t)\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) + \eta(t)\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + \zeta(t)\,\widehat{\boldsymbol{k}}(t) + \\ &+ \Big(\mathfrak{p}(t)\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) + \mathfrak{q}(t)\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + \mathfrak{r}(t)\,\widehat{\boldsymbol{k}}(t)\Big) \times \Big(X_t\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) + Y_t\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + Z_t\,\widehat{\boldsymbol{k}}(t)\Big) \end{aligned}$$

isto é:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X_t, Y_t, Z_t) = \begin{bmatrix} \xi(t) + \mathfrak{q}(t)\,Z_t - \mathfrak{r}(t)\,Y_t \\ \eta(t) + \mathfrak{r}(t)\,X_t - \mathfrak{p}(t)\,Z_t \\ \zeta(t) + \mathfrak{p}(t)\,Y_t - \mathfrak{q}(t)\,X_t \end{bmatrix}_{r_t}} \tag{2.24}$$

onde pusemos:

$$\overrightarrow{OP_t} = X_t\,\mathbf{I} + Y_t\,\mathbf{J} + Z_t\,\mathbf{K}$$

isto é, X_t, Y_t, Z_t são as componentes do t-coincidente de p, no referencial $\mathcal{R}$, ou, de forma equivalente, as componentes de p, relativamente ao referencial móvel r_t, uma vez que $p = a_t + X_t\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) + Y_t\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + Z_t\,\widehat{\boldsymbol{k}}(t)$.

2.4 Exemplos

▷ **Exemplo 2.1 Movimento de translacção** ... O movimento $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F}; g_t)$ diz-se de translacção, quando o operador de rotação $\mathbf{R}_t$ (a parte linear de g_t), não depende de t:

$$\mathbf{R}_t \equiv \mathbf{R}$$

Neste caso, como $\dot{\mathbf{R}}_t = \mathbf{0}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_t(p) = \dot{a}_t$$

e, em termos de referenciais móveis, vem que:

$$r_t = g_t(\mathcal{R}) = \{a_t;\ \overrightarrow{\mathbf{e}}_i(t) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{E}_i)\}$$

Quando $n = 3$, é claro que $\boldsymbol{\omega}_t \equiv \mathbf{0}$.

▷ **Exemplo 2.2 Movimento de rotação** ... Vamos supôr que $n = 3$. O movimento $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F}; g_t)$ diz-se de rotação, quando existem dois pontos fixos distintos (e portanto, uma recta de pontos fixos).

Um ponto $p \in \mathfrak{F}$ diz-se um **ponto fixo** do movimento, se existe uma "partícula" $P \in \mathfrak{M}$, tal que:

$$g_t(P) \equiv p, \quad \forall t$$

É claro que num ponto fixo, o campo de velocidades se anula.

Suponhamos então que $p, q \in \mathfrak{F}$ são dois pontos fixos distintos, e que P, Q são as duas partículas de $\mathfrak{M}$, tais que $g_t(P) \equiv p$ e $g_t(Q) \equiv q$, $\forall t$. Podemos então escolher o nosso referencial $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\} = r_0 = \{o; \widehat{\boldsymbol{\imath}}, \widehat{\boldsymbol{\jmath}}, \widehat{\boldsymbol{k}}\}$, de tal forma que $O = o = p$ e $\mathbf{K} = \widehat{\boldsymbol{k}} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\overrightarrow{pq}}{\|\overrightarrow{pq}\|}$.

Em termos de referenciais móveis, vem que a_t é sempre constante e igual a p, e $\widehat{\boldsymbol{k}}(t)$ é também sempre constante e igual a $\widehat{\boldsymbol{k}}$:

$$r_t = g_t(\mathcal{R}) = \{a_t = g_t(P) \equiv p;\ \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{I}),\ \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{J}),\ \widehat{\boldsymbol{k}}(t) \equiv \widehat{\boldsymbol{k}}\}$$

Portanto $da/dt = 0$, e $d\widehat{\boldsymbol{k}}/dt = 0$. Por outro lado:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \mathfrak{p}(t) & = & \frac{d\widehat{\boldsymbol{k}}}{dt}(t) \cdot \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) & = & 0 \\ \mathfrak{q}(t) & = & -\frac{d\widehat{\boldsymbol{k}}}{dt}(t) \cdot \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) & = & 0 \\ \mathfrak{r}(t) & = & \frac{d\widehat{\boldsymbol{\jmath}}}{dt}(t) \cdot \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) & & \end{array} \right. \tag{2.25}$$

e portanto o vector $\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_t$ é:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_t = \Omega(t)\, \widehat{\boldsymbol{k}}$$

onde pusemos, como é habitual $\Omega(t) = \mathfrak{r}(t) = \frac{d\widehat{\boldsymbol{\jmath}}}{dt}(t) \cdot \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t)$, para a chamada **velocidade angular** no instante t.

O campo de velocidades, expresso na base móvel, é:

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X, Y, Z) = \left[\begin{array}{c} -\Omega(t)\, Y \\ \Omega(t)\, X \\ 0 \end{array} \right]_{r_t} \tag{2.26}$$

que é evidentemente um campo de rotação de ângulo $\Omega(t)$, em torno do eixo gerado por $\widehat{\boldsymbol{k}}$.

▷ **Exemplo 2.3 Movimento helicoidal uniforme** ... Vamos supôr novamente que $n = 3$. Em termos de referenciais móveis, e uma vez escolhido o referencial inicial $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\} = r_0 = \{o; \widehat{\boldsymbol{\imath}}, \widehat{\boldsymbol{\jmath}}, \widehat{\boldsymbol{k}}\}$, o movimento diz-se helicoidal uniforme, quando $\widehat{\boldsymbol{k}}(t)$ é sempre constante e igual a $\widehat{\boldsymbol{k}}$, $a_t = g_t(O) = vt\, \widehat{\boldsymbol{k}}$ e ainda:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) & = & \cos(\omega t)\, \widehat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(\omega t)\, \widehat{\boldsymbol{\jmath}} \\ \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) & = & -\sin(\omega t)\, \widehat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\omega t)\, \widehat{\boldsymbol{\jmath}} \end{array}$$

onde v, ω são constantes numéricas não nulas. O movimento é pois a composta de translacção de vector $vt\, \widehat{\boldsymbol{k}}$, com uma rotação de ângulo ωt, em torno do eixo gerado por $\widehat{\boldsymbol{k}}$. Portanto:

$$r_t = g_t(\mathcal{R}) = \{a_t = vt\, \widehat{\boldsymbol{k}} \equiv p;\ \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \cos(\omega t)\, \widehat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(\omega t)\, \widehat{\boldsymbol{\jmath}},\ \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = -sin(\omega t)\, \widehat{\boldsymbol{\imath}} + \cos(\omega t)\, \widehat{\boldsymbol{\jmath}},\ \widehat{\boldsymbol{k}}(t) \equiv \widehat{\boldsymbol{k}}\}$$

Portanto $da/dt = v\,\widehat{\boldsymbol{k}}$, e $d\widehat{\boldsymbol{k}}/dt = 0$, e, por outro lado:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}(t) &= \frac{d\widehat{\boldsymbol{k}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = 0\\
\mathfrak{q}(t) &= -\frac{d\widehat{\boldsymbol{k}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) = 0\\
\mathfrak{r}(t) &= \frac{d\widehat{\boldsymbol{\jmath}}}{dt}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t)\\
&= \big(-\omega\,\cos(\omega t)\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} - \omega\,\sin(\omega t)\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}\big)\cdot\big(\cos(\omega t)\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + \sin(\omega t)\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}\big)\\
&= -\omega
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

e portanto o campo de velocidades, expresso na base móvel, é:

$$
\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X,Y,Z) = \begin{bmatrix} \omega\,Y \\ -\omega\,X \\ v \end{bmatrix}_{r_t}
$$

▷ <u>**Exemplo**</u> **2.4** <u>**Triedro de Frenet de uma curva orientada em $\mathbb{R}^3$**</u> ... Consideremos uma parametrização natural $a : s \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto a(s) \in \mathbb{R}^3$, de uma curva regular em $\mathbb{R}^3$, de classe C^m $(m \geq 3)$, de tal forma que $\|a'(s)\| \equiv 1$. O vector $a'(s)$, diz-se o **vector unitário tangente** em s, à curva (orientada) representada por a, e nota-se por $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = a'(s)$. Notemos que, por mudança de orientação, o vector tangente muda o seu sentido. Como $\|a'(s)\|^2 = a'(s)\cdot a'(s) \equiv 1 \ \ \forall s$, obtemos por derivação, que:

$$
a''(s)\cdot a'(s) = a''(s)\cdot\mathbf{t}(s) = 0 \quad \forall s \tag{2.28}
$$

o que significa que o vector aceleração $a''(s) = \mathbf{t}'(s)$, é sempre perpendicular ao vector tangente $\mathbf{t} = a'$. Definimos então a **curvatura de** a **em** s, notada por $k(s)$, como sendo o número (≥ 0):

$$
k(s) \equiv \|a''(s)\| = \|\mathbf{t}'(s)\| \tag{2.29}
$$

Quando $k(s) \neq 0$, chama-se **raio de curvatura** de a em s, ao número

$$
\rho(s) \equiv \frac{1}{k(s)} \tag{2.30}
$$

Geomètricamente, a curvatura $k(s)$ fornece uma medida de quão ràpidamente a curva a, se afasta da sua linha tangente em s, numa vizinhança de s.

Assim por exemplo, se $a(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v}$ (onde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ são vectores fixos em $\mathbb{R}^3$, com $\|\mathbf{v}\| = 1$) é uma recta em $\mathbb{R}^3$, então $k \equiv 0$. Recìprocamente, se $k(s) = \|a''(s)\| \equiv 0$, então por integração deduzimos que $a(s) = \mathbf{p} + s\mathbf{v}$, e portanto f é uma linha recta.

Notemos que a'' e a curvatura permanecem invariantes, se mudarmos a orientação da curva a. Nos pontos em que $k(s) \neq 0$, podemos definir um vector unitário $\mathbf{n}(s)$, na direcção do vector aceleração $a''(s)$, através de:

$$
\mathbf{n}(s) \equiv \frac{a''(s)}{k(s)} \tag{2.31}
$$

e que é, como já vimos, perpendicular ao vector tangente $\mathbf{t}(s) = a'(s)$. O vector $\mathbf{n}(s)$ diz-se por isso, o **vector normal unitário**, em s, e o plano que passa em $a(s)$ e é determinado por $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$, diz-se o **plano osculador**, em s. Este plano consiste portanto dos pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, tais que $\mathbf{x} - a(s)$ é perpendicular a $\mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, isto é:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \qquad [\mathbf{x} - a(s), a'(s), a''(s)] = 0 \tag{2.32}$$

Nos pontos em que $k(s) = 0$ (que se dizem **pontos de inflexão**), o vector normal e o plano osculador não estão definidos.

Para prosseguir a análise local de a, vamos supôr que $k(s) \neq 0$, $\forall s$. O vector unitário $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, é perpendicular ao plano osculador, e chama-se o **vector binormal**, em s. Calculemos $\mathbf{b}'(s)$. Para isso, observemos que, por um lado $\mathbf{b}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{b}(s)$ (uma vez que $\|\mathbf{b}(s)\|^2 = \mathbf{b}(s) \cdot \mathbf{b}(s) \equiv 1$), e por outro lado (atendendo a que $\mathbf{t}'(s) = a''(s) = k(s)\mathbf{n}(s)$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}'(s) &= \mathbf{t}'(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\
&= k(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s) \\
&= \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}'(s)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

o que implica que $\mathbf{b}'(s)$ é perpendicular também ao vector tangente unitário $\mathbf{t}(s)$. Isto significa que $\mathbf{b}'(s)$ deve ser um múltiplo escalar de $\mathbf{n}(s)$, i.e., $\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s)$, para alguma função $\tau(s)$.

Quando $a : s \in S \mapsto a(s) \in \mathbb{R}^3$ é uma parametrização natural de uma curva regular em $\mathbb{R}^3$, de classe C^m ($m \geq 3$), tal que $a''(s) \neq 0$, $\forall s$, chama-se **torção** de a em s, e nota-se por $\tau(s)$, ao número definido por:

$$\mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s) \tag{2.34}$$

Geomètricamente, $|\tau(s)| = \|\mathbf{b}'(s)\|$ fornece uma medida de quão ràpidamente a curva a, se afasta do seu plano osculador em s, numa vizinhança de s. Por exemplo, se $\tau \equiv 0$ (e $k \neq 0$), então $\mathbf{b}(s) \equiv \mathbf{b}_o =$ constante, e portanto:

$$\frac{d}{ds}(a(s) \cdot \mathbf{b}_o) = a'(s) \cdot \mathbf{b}_o = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{b}_o = 0$$

isto é, $a(s) \cdot \mathbf{b}_o =$ constante, o que significa que $a(s)$ está contida num plano perpendicular a $\mathbf{b}_o$, e portanto a é uma curva plana (contida no seu plano osculador). A recíproca é também válida.

Notemos que, por mudança de orientação, o vector binormal $\mathbf{b}$ muda de sinal, uma vez que $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Deduzimos por isso que $\mathbf{b}'$, e portanto a torção τ, permanecem invariantes sob mudança de orientação de a.

Vamos resumir o que fizemos até agora:

- (i)... A cada valor do parâmetro natural s, associamos um referencial móvel constituído por três vectores unitários, ortogonais entre si:

$$\begin{cases}
\mathbf{t}(s) = a'(s) & \text{vector unitário tangente} \\
\mathbf{n}(s) = \frac{a''(s)}{k(s)} & \text{vector unitário normal} \\
\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) & \text{binormal}
\end{cases} \tag{2.35}$$

O referencial móvel em $\mathbb{R}^3$:

$$r(s) = \{a(s);\, \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\} = \left\{ a(s); \begin{bmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{\boldsymbol{k}} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x' & x''/k & (y'z''-z'y'')/k \\ y' & y''/k & (z'x''-x'z'')/k \\ z' & z''/k & (x'y''-y'x'')/k \end{bmatrix}}_{R(s)} \right\} \tag{2.36}$$

diz-se o **referencial ou o triedro de Frenet de** a em s.

- (ii)... Em seguida, exprimimos as derivadas $\mathbf{t}'(s)$ e $\mathbf{b}'(s)$, de $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$, na base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= k(s)\,\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \tau(s)\,\mathbf{n}(s) \end{aligned}$$

obtendo deste modo, certas entidades geométricas (a curvatura $k(s)$, e a torção $\tau(s)$), que dão informação sobre o comportamento de a, numa vizinhança de s.

- (iii)... Calculemos finalmente a derivada $\mathbf{n}'(s)$, exprimindo-a na base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s),$-$\mathbf{b}(s)\}$. Como $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(s) &= \mathbf{b}'(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}'(s) \\ &= \tau(s)\,\mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s) \times k(s)\,\mathbf{n}(s) \\ &= -\tau(s)\,\mathbf{b}(s) - k(s)\,\mathbf{t}(s) \end{aligned} \tag{2.37}$$

e obtemos de novo a curvatura e a torção.

As equações acima obtidas:

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = & & k(s)\,\mathbf{n}(s) & \\ \mathbf{n}'(s) = & -k(s)\,\mathbf{t}(s) & & -\tau(s)\,\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) = & & \tau(s)\,\mathbf{n}(s) & \end{cases} \tag{2.38}$$

ou em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

dizem-se as **equações de Frenet** da curva a. Por (2.36), vem que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{R}_s \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_s^{-1}$$

onde $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{\boldsymbol{k}} \end{bmatrix}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$, e derivando em ordem s obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{n}' & \mathbf{b}' \end{bmatrix} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{R}_s' \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_s^{-1}\mathbf{R}_s' \end{aligned} \tag{2.40}$$

isto é:

$$\mathbf{R}_s^{-1}\mathbf{R}_s' = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \qquad \in \mathfrak{so}(3) \tag{2.41}$$

o que significa que o vector instantâneo de rotação do triedro de Frenet, no instante s, é:

$$\mathbf{\Omega}_s = k(s)\,\mathbf{t}(s) - \tau\,\mathbf{b}(s) \tag{2.42}$$

Finalmente, o plano que passa em $a(s)$ e é determinado pelo par $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s)\}$, diz-se o **plano rectificante** em s, e o plano que passa em $a(s)$ e é determinado pelo par $\{\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, diz-se o **plano normal** em s. A seguinte proposição, mostra que a curvatura e a torção descrevem completamente o comportamento local da curva, a menos de um movimento rígido em $\mathbb{R}^3$:

- **Teorema fundamental da teoria local das curvas em** $\mathbb{R}^3$ ... Dadas funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in \mathbf{I}$, existe uma curva parametrizada regular $a : \mathbf{I} \to \mathbb{R}^3$, tal que s é o parâmetro comprimento de arco, $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ a torção de a.

  Além disso, qualquer outra curva $\overline{a}$, que satisfaz as mesmas condições, difere de a por um movimento rígido em $\mathbb{R}^3$, isto é, existe uma transformação ortogonal $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (com determinante positivo), e um vector $c \in \mathbb{R}^3$, tais que $\overline{a} = c + R \circ a$.

2.5 Cinemática plana ($n = 2$)

Em cinemática plana ($n = 2$), é habitual usar as notações seguintes:

- $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{I}, \mathbf{J}\}; \qquad r_o = \{o; \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}\}$.
- $r_t = g_t(\mathcal{R}) = \{g_t(O) = a_t; \hat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{I}), \hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{J})\}$.
- $\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}$.

de tal forma que:

- $\hat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \cos\theta(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$.
- $\hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = -\sin\theta(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

isto é, $\theta(t)$ é o ângulo $\angle(\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\imath}}(t))$. Além disso:

- $\frac{da}{dt} = \dot{a}_t = \xi(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}(t) + \eta(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}(t)$.
- $\frac{d\hat{\boldsymbol{\imath}}}{dt}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = -\frac{d\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{dt}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \dot{\theta}(t) = \omega(t)$.

ou em forma matricial:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) \\ \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\omega(t) \\ \omega(t) & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) \\ \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t) \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

a matriz 2×2 acima, é a matriz do operador $\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t$, relativamente à base móvel $\{\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t), \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t)\}$, para $\overrightarrow{\mathbf{E}}$. Usando a fórmula (2.21), deduzimos que o campo de velocidades, expresso na base móvel, e no instante t, é:

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X_t, Y_t) \;=\; \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}_{r_t} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega(t) \\ \omega(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix}_{r_t}$$

isto é:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X_t, Y_t) = \begin{bmatrix} \xi(t) \,-\, \omega(t)\, Y_t \\ \eta(t) \,+\, \omega(t)\, X_t \end{bmatrix}_{r_t}} \tag{2.44}$$

onde pusemos:

$$\overrightarrow{OP_t} = X_t\,\mathbf{I} + Y_t\,\mathbf{J}$$

isto é, X_t, Y_t são as componentes do t-coincidente de p, no referencial $\mathcal{R}$, ou, de forma equivalente, são as componentes de p, relativamente ao referencial móvel r_t, uma vez que $p = a_t + X_t\,\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) + Y_t\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t)$.

2.6 Movimento Pontual Relativo

Suponhamos agora que temos um ponto $\mathcal{P}{=}\mathcal{P}(t)$ de $\mathcal{E}$ que se move. Este movimento pontual pode ser descrito relativamente ao espaço móvel $\mathfrak{M}$ (**movimento relativo**), e também relativamente ao espaço fixo $\mathfrak{F}$ (**movimento absoluto**). O problema consiste em relacionar as características do movimento absoluto, com as do movimento relativo, e ainda do movimento de $\mathfrak{M}$ relativamente a $\mathfrak{F}$. Simbòlicamente:

$$\frac{\mathcal{P}}{\mathfrak{F}} = \frac{\mathcal{P}}{\mathfrak{M}}\,\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}}$$

Seja $P = P(t)$ o movimento pontual $\mathcal{P}{=}\mathcal{P}(t)$, descrito relativamente ao espaço móvel $\mathfrak{M}$, e $g_t : \mathfrak{M} \to \mathfrak{F}$ o movimento de $\mathfrak{M}$ relativamente a $\mathfrak{F}$. O movimento pontual $\mathcal{P}{=}\mathcal{P}(t)$, descrito relativamente ao espaço fixo $\mathfrak{F}$, é então dado por:

$$\boxed{p(t) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; g_t(P(t)) = a_t + \mathbf{R}_t(\overrightarrow{OP(t)}) \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{OP(t)} = \mathbf{R}_t^{-1}[p(t) - a_t]} \tag{2.45}$$

uma vez fixo um ponto $O \in \mathfrak{M}$, e onde pusemos $a_t = g_t(O)$, como antes.

Derivando agora, em ordem a t, a primeira das equações (2.45), e substituindo a segunda, obtemos para a chamada **velocidade absoluta de** $\mathcal{P}$, no instante t:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{v}}_{abs}(\mathcal{P};t) \;&\stackrel{\text{def}}{=}\; \dot{p}(t) \\ &= \; \dot{a}_t + \underbrace{\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}[p(t) - a_t]}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}_{trp}(\mathcal{P};t)} + \underbrace{\mathbf{R}_t(\dot{P}(t))}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}_{rel}(\mathcal{P};t)} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Quando $n = 3$, isto é, em cinemática espacial, tem-se que:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_{abs}(\mathcal{P};t) = \underbrace{\dot{a}_t + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_t \times [p(t) - a_t]}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}_{trp(\mathcal{P};t)}} + \underbrace{\mathbf{R}_t(\dot{P}(t))}_{\overrightarrow{\mathbf{v}}_{rel(\mathcal{P};t)}} \tag{2.47}$$

Estas são as chamadas **fórmulas de composição de velocidades**. Nessas fórmulas pusemos:

- $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{abs}(\mathcal{P};t) = \dot{p}(t) =$ **velocidade absoluta de** $\mathcal{P}$, ou mais exactamente do movimento de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{F}$.
- $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{trp}(\mathcal{P};t) = \dot{a}_t + \dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}[p(t) - a_t] =$ **velocidade de transporte**, isto é, é a velocidade em $\mathfrak{F}$, do t-coincidente de $p(t) \in \mathfrak{M}$ (considerado como uma partícula rìgidamente fixa em $\mathfrak{M}$). Esta é a velocidade que foi estudada na secção anterior, sobre o campo de velocidades.
- $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{rel}(\mathcal{P};t) = \mathbf{R}_t(\dot{P}(t)) =$ velocidade relativa de $\mathcal{P}$ (vista do ponto de vista do observador fixo...).

Aplicando o operador $\mathbf{R}_t^{-1}$ (que é a parte linear de g_t^{-1}), a ambos os membros de (2.46) e (2.47), respectivamente, obtemos as expressões seguintes para a fórmula de composição de velocidades (mas agora descrita do ponto de vista do observador móvel):

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{abs}(\mathcal{P};t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_t^{-1}\left[\overrightarrow{\mathbf{v}}_{abs}(\mathcal{P};t)\right] = \underbrace{\mathbf{R}_t^{-1}\dot{a}_t + \mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t(\overrightarrow{OP(t)})}_{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{trp(\mathcal{P};t)}} + \underbrace{\dot{P}(t)}_{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{rel(\mathcal{P};t)}}} \tag{2.48}$$

e no caso da cinemática espacial ($n = 3$):

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{abs}(\mathcal{P};t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_t^{-1}\left[\overrightarrow{\mathbf{v}}_{abs}(\mathcal{P};t)\right] = \underbrace{\mathbf{R}_t^{-1}\dot{a}_t + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_t \times \overrightarrow{OP(t)}}_{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{trp(\mathcal{P};t)}} + \underbrace{\dot{P}(t)}_{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{rel(\mathcal{P};t)}}} \tag{2.49}$$

onde:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_t^{-1}\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_t} \tag{2.50}$$

é o **vector instantâneo de rotação** do movimento, no instante t, e no espaço móvel.

Na dedução desta última fórmula (para o caso $n = 3$), usamos o seguinte facto - dado um vector $\overrightarrow{\mathbf{U}}$ qualquer em $\overrightarrow{\mathbf{E}}$, tem-se que:

$$\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{\mathbf{U}} = \mathbf{R}_t(\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \times \overrightarrow{\mathbf{U}}) \tag{2.51}$$

Com efeito, se $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \mathbf{R}_t\overrightarrow{\mathbf{U}}$, então:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{\mathbf{U}} &= \dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\overrightarrow{\mathbf{u}} \\
&= \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{\mathbf{u}} \\
&= \mathbf{R}_t\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{R}_t\overrightarrow{\mathbf{U}} \\
&= \mathbf{R}_t(\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \times \overrightarrow{\mathbf{U}})
\end{aligned}$$

uma vez que $\mathbf{R}_t \in SO(3)$ preserva o produto interno e a orientação, e, portanto, preserva também o produto vectorial.

• **Composição de velocidades no referencial móvel ...** Suponhamos agora que o movimento $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F}; g_t)$, é visto como um referencial móvel em $\mathfrak{F}$. Mais precisamente, fixemos um referencial $\mathcal{R}$ em $\mathfrak{M}$, e portanto um referencial r_0, em $\mathfrak{F}$, o que permite, como já vimos, descrever um movimento a um parâmetro t, de $\mathfrak{M}$ relativamente a $\mathfrak{F}$, como uma curva de classe C^∞, em $\mathcal{RO}^+(\mathfrak{F})$, que no instante $t = 0$, passa em r_0, ou, por outras palavras, como um **referencial móvel** (afim ortonormado positivo), a um parâmetro, em $\mathfrak{F}$:

$$t \longmapsto r_t = \{a_t = g_t(O); \overrightarrow{\mathbf{e}}_1(t) = \mathbf{R}_t(\overrightarrow{\mathbf{E}}_1), \cdots, \overrightarrow{\mathbf{e}}_n(t) = \mathbf{R}_t(\overrightarrow{\mathbf{E}}_n)\} \tag{2.52}$$

Suponhamos que as coordenadas do ponto $\mathcal{P}=\mathcal{P}(t)$ são:

• $(x^i(t))$, relativamente ao referencial fixo r_0, isto é:

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = o + \sum_i x^i(t)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i}$$

• $(X^i(t))$, relativamente ao referencial móvel r_t, isto é:

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = a_t + \sum_i X^i(t)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i(t)}$$

Note que $(X^i(t))$ são também as coordenadas de $P(t)$, relativamente ao referencial $\mathcal{R}$, em $\mathfrak{M}$:

$$\boxed{P(t) = O + \sum_i X^i(t)\overrightarrow{\mathbf{E}}_i}$$

e que $(x^i(t))$ são também as coordenadas de $p(t)$, relativamente ao referencial r_0, em $\mathfrak{F}$:

$$\boxed{p(t) = o + \sum_i x^i(t)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i}$$

De facto:

$$\begin{aligned} p(t) &= g_t(P(t)) \\ &= g_t(O) + \mathbf{R}_t(\overrightarrow{OP(t)}) \\ &= a_t + \mathbf{R}_t\left(\sum_i X^i(t)\overrightarrow{\mathbf{E}}_i\right) \\ &= a_t + \sum_i X^i(t)\mathbf{R}_t\left(\overrightarrow{\mathbf{E}}_i\right) \\ &= a_t + \sum_i X^i(t)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i(t) \end{aligned}$$

A projecção relativamente ao referencial fixo r_0, das fórmulas atrás obtidas, não tem interesse prático. O importante é a sua projecção relativamente ao referencial móvel r_t. Projectemos então as fórmulas (2.77) e (2.49), no referencial r_t.

Suponhamos que o movimento pontual $\mathcal{P}=\mathcal{P}(t)$, é descrito, relativamente ao referencial móvel r_t, por:

$$p(t) = a_t + \sum_i X^i(t)\overrightarrow{\mathbf{e}}_i(t)$$

e designemos por $(V^i(\mathcal{P};t))$, as componentes da velocidade absoluta de $\mathcal{P}$, relativamente ao referencial móvel r_t, isto é:

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{abs}(\mathcal{P};t) = \sum_i V^i(\mathcal{P};t)\,\overrightarrow{\mathbf{e}}_i(t) \tag{2.53}$$

Note que $(V^i(\mathcal{P};t))$ são também as componentes de $\overrightarrow{\mathbf{V}}_{abs}(\mathcal{P};t)$, relativamente ao referencial móvel $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_{abs}(\mathcal{P};t) = \sum_i V^i(\mathcal{P};t)\,\overrightarrow{\mathbf{E}}_i$$

Obtemos então que:

$$\begin{aligned}
\sum_i V^i(\mathcal{P};t)\,\overrightarrow{\mathbf{E}}_i &= \overrightarrow{\mathbf{V}}_{abs}(\mathcal{P};t)\\
&= \mathbf{R}_t^{-1}\dot{a}_t + \mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t(\overrightarrow{OP(t)}) + \dot{P}(t), \qquad \text{por } (2.77)\\
&= \sum_i \xi^i(t)\,\overrightarrow{\mathbf{E}}_i + \mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t(\sum_j X^j(t)\overrightarrow{\mathbf{E}}_j) + \sum_i \dot{X}^i(t)\,\overrightarrow{\mathbf{E}}_i\\
&= \sum_i \xi^i(t)\,\overrightarrow{\mathbf{E}}_i + \sum_j X^j(t)\,\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t(\overrightarrow{\mathbf{E}}_j) + \sum_i \dot{X}^i(t)\,\overrightarrow{\mathbf{E}}_i\\
&= \sum_i \left[\xi^i(t) + \sum_j \Omega^i_j(t)\,X^j(t) + \dot{X}^i(t)\right]\overrightarrow{\mathbf{E}}_i
\end{aligned}$$

onde $[\Omega^i_j(t)]$ é a matriz do operador anti-simétrico $\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t$, na base $\overrightarrow{\mathbf{E}}_i$. Portanto:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}}_{abs}(\mathcal{P};t) = [V^i(\mathcal{P};t)]_{r_t} = \left[\xi^i(t) + \textstyle\sum_j \Omega^i_j(t)\,X^j(t) + \dot{X}^i(t)\right]_{r_t}} \tag{2.54}$$

é a **fórmula da composição de velocidades, expressa na base móvel**.

2.7 Movimento relativo de um espaço móvel relativamente a um outro

Consideremos agora 3 espaços $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ que se movem uns relativamente aos outros. Como antes, os 3 espaços $\mathfrak{M}_k$ são considerados como 3 cópias de um mesmo espaço afim Euclideano orientado $\mathcal{E}$. Suponhamos que os movimentos $\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_2$ são dados, respectivamente, por:

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1 & : & g_t^{12} : \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_1\\
\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_2 & : & g_t^{23} : \mathfrak{M}_3 \longrightarrow \mathfrak{M}_2
\end{array} \tag{2.55}$$

Podemos então definir o **movimento resultante** $\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_1$, através da composição:

$$\mathfrak{M}_3 \xrightarrow{g_t^{23}} \mathfrak{M}_2 \xrightarrow{g_t^{12}} \mathfrak{M}_1$$

isto é:

$$\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_1 \qquad : \qquad g_t^{13} = g_t^{12} \circ g_t^{23} : \mathfrak{M}_3 \longrightarrow \mathfrak{M}_1 \tag{2.56}$$

O problema agora consiste em determinar o campo de velocidades do **movimento resultante** $\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_1$, conhecendo os campos de velocidades dos movimentos relativos $\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_2$ e $\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1$. Simbòlicamente pômos:

$$\frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{M}_1} = \frac{\mathfrak{M}_3}{\mathfrak{M}_2}\frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1} \tag{2.57}$$

Note que os campos de velocidades, do movimento resultante $\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_1$ e do movimento relativo $\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1$, são ambos campos de vectores em $\mathfrak{M}_1$, enquanto que o campo de velocidades do movimento relativo $\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_2$, é um campo de vectores em $\mathfrak{M}_2$. Por isso, devemos ter algumas precauções ao escrever o resultado final.

Para cada instante t, designemos por:

- $(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^3)_t$ o campo de velocidades do movimento resultante $(\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_1; g_t^{13} = g_t^{12} \circ g_t^{23})$.
- $(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^2)_t$ o campo de velocidades do movimento relativo $(\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1; g_t^{12})$.
- $(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2^3)_t$ o campo de velocidades em $\mathfrak{M}_1$, definido da seguinte forma - primeiro calculamos o campo de velocidades $(\overrightarrow{\mathbf{w}}_2^3)_t$, do movimento $(\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_2; g_t^{23})$, que é um campo em $\mathfrak{M}_2$. Para cada ponto $P_1 \in \mathfrak{M}_1$, pômos então:

$$(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2^3)_t(P_1) = (\overrightarrow{\mathbf{w}}_2^3)_t((P_2)_t), \qquad \text{onde} \quad (P_2)_t = (g_t^{12})^{-1}(P_1) \tag{2.58}$$

Como na secção anterior, suponhamos que temos um ponto $\mathcal{P}=\mathcal{P}(t)$ de $\mathcal{E}$ que se move, e sejam $P_k(t)$ as descrições desse movimento, relativamente a cada um dos espaços móveis $\mathfrak{M}_k$, $k = 1, 2, 3$, respectivamente. Por outras palavras, $P_k(t)$ é o t-coincidente de $\mathcal{P}=\mathcal{P}(t)$, em cada espaço $\mathfrak{M}_k$.

Suponhamos por simplicidade que $P_3(t) \equiv P_3$, está sempre fixo em $\mathfrak{M}_3$. Fixemos pontos O_3, em $\mathfrak{M}_3$, e O_2, em $\mathfrak{M}_2$. Temos então que, <u>para cada instante t</u>:

$$\begin{aligned} P_2(t) &= g_t^{23}(P_3) \\ &= \underbrace{g_t^{23}(O_3)}_{a_2(t)} + \mathbf{R}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3}) \\ &\Rightarrow \\ \mathbf{R}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3}) &= \overrightarrow{a_2(t)P_2(t)} \end{aligned} \tag{2.59}$$

e:

$$\begin{aligned} P_1(t) &= g_t^{12}(P_2(t)) \\ &= \underbrace{g_t^{12}(O_2)}_{a_1(t)} + \mathbf{R}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2P_2(t)}\right) \\ &= a_1(t) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2a_2(t)} + \overrightarrow{a_2(t)P_2(t)}\right), \qquad \text{pela relação de Chasles} \\ &= a_1(t) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2a_2(t)}\right) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\overrightarrow{a_2(t)P_2(t)}\right) \\ &= a_1(t) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2a_2(t)}\right) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\mathbf{R}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right), \qquad \text{por (2.59)} \end{aligned} \tag{2.60}$$

Derivando (2.60), em ordem a t, vem então que:

$$\begin{aligned}
\dot{P}_1(t) &= \dot{a}_1(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2a_2(t)}\right) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\dot{a}_2(t)\right) + \dot{\mathbf{R}}_t^{12}\left(\mathbf{R}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\dot{\mathbf{R}}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right) \\
&= \dot{a}_1(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2a_2(t)} + \mathbf{R}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\dot{a}_2(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right) \\
&= \dot{a}_1(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2a_2(t)} + \mathbf{R}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\dot{a}_2(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right) \\
&= \dot{a}_1(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2P_2(t)}\right) + \mathbf{R}_t^{12}\left(\dot{a}_2(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right), \qquad \text{novamente por (2.59)}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\dot{P}_1(t) = \underbrace{\dot{a}_1(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{12}\left(\overrightarrow{O_2P_2(t)}\right)}_{(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^2)_t(P_1)} + \underbrace{\mathbf{R}_t^{12}\underbrace{\left(\dot{a}_2(t) + \dot{\mathbf{R}}_t^{23}(\overrightarrow{O_3P_3})\right)}_{(\overrightarrow{\mathbf{w}}_2^3)_t(P_2)}}_{(\overrightarrow{\mathbf{v}}_2^3)_t(P_1)} \tag{2.61}$$

Como por definição $(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^3)_t(P_1) = \dot{P}_1(t)$, obtemos finalmente a seguinte **fórmula de composição de velocidades**:

$$\boxed{(\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^3)_t = (\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^2)_t + (\overrightarrow{\mathbf{v}}_2^3)_t} \tag{2.62}$$

Esta situação pode ser generalizada para a composiçãode um número qualquer de movimentos. Assim se:

$$\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}_n/\mathfrak{M}_{n-1} & \text{é dado por} & g_t^{n-1,n} : \mathfrak{M}_n \longrightarrow \mathfrak{M}_{n-1} \\
 & \vdots & \\
\mathfrak{M}_3/\mathfrak{M}_2 & \text{é dado por} & g_t^{23} : \mathfrak{M}_3 \longrightarrow \mathfrak{M}_2 \\
\mathfrak{M}_2/\mathfrak{M}_1 & \text{é dado por} & g_t^{12} : \mathfrak{M}_2 \longrightarrow \mathfrak{M}_1
\end{array} \tag{2.63}$$

e, com convenções análogas às que antes foram feitas para o caso $n = 2$, podemos deduzir por indução, a **fórmula geral de composição de velocidades**:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1^n(t) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_1^2(t) + \overrightarrow{\mathbf{v}}_2^3(t) + \cdots + \overrightarrow{\mathbf{v}}_{n-1}^n(t)} \tag{2.64}$$

onde $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{k-1}^k(t)$ representa, em cada instante t, a posição em $\mathfrak{M}_1$ do campo de velocidades do movimento $(\mathfrak{M}_k/\mathfrak{M}_{k-1}, g_t^{k-1,k})$.

Daqui resulta ainda que:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_1^n(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_1^2(t) + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_2^3(t) + \cdots + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_{n-1}^n(t)} \tag{2.65}$$

onde $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^k(t)$ representa, em cada instante t, a posição em $\mathfrak{M}_1$ do vector de rotação instantânea do movimento $(\mathfrak{M}_k/\mathfrak{M}_{k-1}, g_t^{k-1,k})$.

Esta relação permite um cálculo cómodo do vector de rotação instantânea de um movimento, decompondo-o numa composição de movimentos mais simples. Na prática, os movimentos são, em geral, definidos dando um referencial móvel r_k, para cada $k = 2, \cdots, n$, no "espaço fixo" $\mathfrak{M}_1$, rìgidamente ligado ao "espaço móvel" $\mathfrak{M}_k$. Portanto, para determinar $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}^{k}(t)$, basta conhecer as componentes, no referencial $r_{k-1}(t)$, do vector de rotação instantânea do movimento de r_k relativamente a r_{k-1}. Vejamos um exemplo de cálculo efectivo.

▷ **Exemplo 2.5** ... Seja $\mathcal{R}_1 = \{o; \widehat{\boldsymbol{\imath}}, \widehat{\boldsymbol{\jmath}}, \widehat{\boldsymbol{k}}\}$ um referencial fixo em $\mathfrak{M}_1$. Definimos mais 3 espaços $\mathfrak{M}_i$, como sendo os espaços associados aos 3 referenciais móveis seguintes:

$$\mathcal{R}_2 = \{o; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\imath}} & \widehat{\boldsymbol{\jmath}} & \widehat{\boldsymbol{k}} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_t^{12}}$$

$$\mathcal{R}_3 = \{a; \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1\} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ 0 & \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}}_{R_t^{23}}$$

$$\mathcal{R}_4 = \{b; \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) & 0 \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_t^{34}}$$

Pretende-se exprimir o vector rotação instantânea de $\mathcal{R}_4$, em cada um dos 4 referenciais, e posteriormente calcular o eixo instantâneo Δ_t, nos referenciais $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_4$, respectivamente.

2.8 Campo de acelerações

Dado um movimento $g_t : \mathfrak{M} \to \mathfrak{F}$, podemos também definir um campo de vectores (dependente do tempo) $\overrightarrow{\mathbf{a}}_t$ em $\mathfrak{F}$, a que chamamos o **campo de acelerações** do movimento, no instante t, da seguinte forma - o valor de $\overrightarrow{\mathbf{a}}_t$, em $p \in \mathfrak{F}$, é a aceleração, no instante t, da trajectória do t-coincidente com p, i.e., da partícula $P_t = g_t^{-1}(p) \in \mathfrak{M}$, que, no instante t, ocupa a posição $p \in \mathfrak{F}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{a}}_t(p) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Big|_{\tau=t} g_\tau(P_t)} \tag{2.66}$$

Se:

$$p(t) = a_t + \mathbf{R}_t(\overrightarrow{OP_t})$$

então:

$$\begin{aligned} \ddot{p} &= \ddot{a}_t + \ddot{\mathbf{R}}_t(\overrightarrow{OP_t}) \\ &= \ddot{a}_t + \ddot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}(p - a_t) \\ &= \ddot{a}_t + \left[\left(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\right)^{\cdot} + \left(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\right)^2\right](p - a_t) \end{aligned} \tag{2.67}$$

Isto é:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{a}}_t(p) = \ddot{a}_t + \left[\left(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\right)^{\cdot} + \left(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\right)^2\right](p - a_t)} \tag{2.68}$$

uma vez que:

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\right)^{\cdot} &= \ddot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1} + \dot{\mathbf{R}}_t(\mathbf{R}_t^{-1})^{\cdot} \\
&= \ddot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1} - \dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1} \\
&\Rightarrow \\
\ddot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1} &= \left(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\right)^{\cdot} + \left(\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}\right)^2
\end{aligned}$$

Em cinemática espacial, quando $n = 3$, como $\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1} = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_t \times \cdot$, vem que:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{a}}_t(p) = \ddot{a}_t + \dot{\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}}_t \times (p - a_t) + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times [\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_t \times (p - a_t)]} \tag{2.69}$$

Vejamos agora as fórmulas no referencial móvel. O campo de velocidades $\overrightarrow{\mathbf{v}}_t(p) = \dot{a}_t + \dot{\mathbf{R}}_t{\mathbf{R}_t}^{-1}[p - a_t]$, tem a expressão seguinte:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P) &\overset{\text{def}}{=} {\mathbf{R}_t}^{-1}\overrightarrow{\mathbf{v}}_t(p), \qquad \text{onde } p = g_t(P) \\
&= {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{a} + {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t{\mathbf{R}_t}^{-1}[p - a_t] \\
&= {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{a} + {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\,\overrightarrow{OP}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

e em cinemática espacial, quando $n = 3$:

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P) = {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{a} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_t \times \overrightarrow{OP} \tag{2.71}$$

Quanto ao campo de acelerações $\overrightarrow{\mathbf{a}}_t$, dado por (2.68), temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(P) &\overset{\text{def}}{=} {\mathbf{R}_t}^{-1}[\overrightarrow{\mathbf{a}}_t(p)], \qquad \text{onde } p = g_t(P) \\
&= {\mathbf{R}_t}^{-1}\ddot{a} + {\mathbf{R}_t}^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_t
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Derivando agora (2.70), em ordem a t, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t &= {\mathbf{R}_t}^{-1}\ddot{a} + ({\mathbf{R}_t}^{-1})^{\cdot}\dot{a} + ({\mathbf{R}_t}^{-1})^{\cdot}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{OP} + {\mathbf{R}_t}^{-1}\ddot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{OP} \\
&= \overrightarrow{\mathbf{A}}_t + ({\mathbf{R}_t}^{-1})^{\cdot}\dot{a} + ({\mathbf{R}_t}^{-1})^{\cdot}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{OP}
\end{aligned}$$

donde se deduz que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(P) &= \dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t - ({\mathbf{R}_t}^{-1})^{\cdot}\dot{a} + ({\mathbf{R}_t}^{-1})^{\cdot}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{OP} \\
&= \dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t + \left({\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t{\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{a} + {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t{\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{OP}\right) \\
&= \dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t + {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\left({\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{a} + {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{OP}\right) \\
&= \dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t(P) + {\mathbf{R}_t}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P)
\end{aligned} \tag{2.73}$$

que é a chamada **fórmula de Bour**. Quando $n = 3$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(P) = \dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t(P) + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_t \times \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P)} \tag{2.74}$$

onde $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t$ é dada por (2.71), isto é, $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P) = \mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{a} + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_t \times \overrightarrow{OP}$.

Vejamos os cálculos em cinemática plana, quando $n = 2$. Pondo $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t = \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \end{bmatrix}$, $\mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{a} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$, e $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, em $\mathfrak{M}$, munido do referencial usual $\{O; \mathbf{I}, \mathbf{J}\}$, então, como:

$$\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

onde $\omega = \dot{\theta}$, virá:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{V}}_t &= \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{a} + \mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{OP} \\ &= \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

isto é:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X,Y) = \begin{cases} V_X = \xi - \omega Y \\ V_Y = \eta + \omega X \end{cases}} \tag{2.75}$$

e para o campo de acelerações, pondo $\overrightarrow{\mathbf{A}}_t = \begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \end{bmatrix}$, vem que, pela fórmula de Bour (2.73):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{A}}_t &= \begin{bmatrix} A_X \\ A_Y \end{bmatrix} \\ &= \dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t + \mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{\mathbf{V}}_t \\ &= \begin{bmatrix} \xi - \omega X \\ \eta + \omega Y \end{bmatrix}^{\cdot} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi - \omega X \\ \eta + \omega Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

isto é:

$$\begin{cases} A_X = (\xi - \omega X)^{\cdot} - \omega(\eta + \omega Y) \\ A_Y = (\eta + \omega Y)^{\cdot} + \omega(\xi - \omega X) \end{cases}$$

ou ainda:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(X,Y) = \begin{cases} A_X = \dot{\xi} - \omega\eta - \dot{\omega}Y - \omega^2 X \\ A_Y = \dot{\eta} + \omega\xi + \dot{\omega}X - \omega^2 Y \end{cases}} \tag{2.76}$$

2.9 Aceleração do movimento pontual relativo

Retomemos a situação da secção 2.6 - um ponto $\mathcal{P}=\mathcal{P}(t)$ de $\mathcal{E}$ que se move. Este movimento pontual pode ser descrito relativamente ao espaço móvel $\mathfrak{M}$ (**movimento relativo**), e também relativamente ao espaço fixo $\mathfrak{F}$ (**movimento absoluto**). Seja $P = P(t)$ o movimento pontual $\mathcal{P}=\mathcal{P}(t)$, descrito relativamente ao espaço móvel $\mathfrak{M}$, e $p(t) = g_t(P(t)) = a_t + \mathbf{R}_t(\overrightarrow{OP(t)})$, o mesmo movimento descrito relativamente ao espaço fixo $\mathfrak{F}$.

Na secção 2.6, vimos já que a velocidade absoluta de $\mathcal{P}$, no instante t, expressa no referencial móvel, é dada por:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{V}}_{abs}(\mathcal{P};t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_t^{-1}\dot{p}(t) \\
&= \mathbf{R}_t^{-1}\dot{a}_t + \mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t(\overrightarrow{OP(t)}) + \dot{P}(t)
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

fórmula que foi obtida derivando em ordem a t, $p(t) = g_t(P(t)) = a_t + \mathbf{R}_t(\overrightarrow{OP(t)})$, e transportanto o resultado para $\mathfrak{M}$, via $\mathbf{R}_t^{-1}$. Derivando uma segunda vez esta última fórmula, obtemos para a aceleração absoluta de $\mathcal{P}$, expressa também no referencial móvel:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{A}}_{abs}(\mathcal{P};t) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R}_t^{-1}\ddot{p}(t) \\
&= \dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t(P(t)) + \mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P(t)) + 2\,\mathbf{R}_t^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\dot{P}(t) + \ddot{P}(t)
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

onde usamos os cálculos efectuados na secção anterior, nomeadamente a fórmula de Bour (2.73). Em particular temos que:

- <u>Quando $n = 3$</u>:

$$
\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}}_{abs}(\mathcal{P};t) = \dot{\overrightarrow{\mathbf{V}}}_t(P(t)) + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_t \times \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P(t)) + 2\,\overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_t \times \dot{P}(t) + \ddot{P}(t)}
\tag{2.79}
$$

  onde $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t$ é dada por (2.71), isto é, $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P(t)) = \mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{a}_t + \overrightarrow{\mathbf{\Omega}}_t \times \overrightarrow{OP(t)}$.

- <u>Quando $n = 2$</u>:

$$
\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}}_{abs}(\mathcal{P};t) = \left\{\begin{array}{lcl} A_X(\mathcal{P};t) &=& \dot{\xi} - \omega\eta - \dot{\omega}Y - \omega^2 X - 2\omega\,\dot{Y} + \ddot{X} \\ A_Y(\mathcal{P};t) &=& \dot{\eta} + \omega\xi + \dot{\omega}X - \omega^2 Y + 2\omega\,\dot{X} + \ddot{Y} \end{array}\right.}
\tag{2.80}
$$

  onde usamos (2.76).

3 Cinemática Plana.

3.1 Centro Instantâneo de Rotação.

<u>Quando $n = 2$</u>, então:

$$
\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}
$$

e calculando $\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1} \in \mathfrak{so}(2)$, vem que, pondo $\omega = \dot{\theta}$:

$$\dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\omega = \dot{\theta} \neq 0$, existe, para cada instante fixo t, um único centro instantâneo de rotação (**c.i.r.**), que notamos por $\mathfrak{i}_t \in \mathfrak{F}$. Esse **c.i.r.**, no instante t, é determinado pela condição de que $(\overrightarrow{\mathbf{v}}_t)_{\mathfrak{i}_t} = \mathbf{0}$. Se $\mathfrak{i}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$ e $a_t = \begin{bmatrix} x_{ot} \\ y_{ot} \end{bmatrix}$, relativamente ao referencial fixo $\{o; \widehat{\boldsymbol{\imath}}, \widehat{\boldsymbol{\jmath}}\}$ para $\mathfrak{F}$, então vem que:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \overrightarrow{\mathbf{v}}_t(\mathfrak{i}_t) \\ &= \dot{\mathbf{R}}_t\mathbf{R}_t^{-1}[\mathfrak{i}_t - a_t] + \dot{a}_t \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t - x_{ot} \\ y_t - y_{ot} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\dot{x}_o)_t \\ (\dot{y}_o)_t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\omega\,(y_t - y_{ot}) + (\dot{x}_o)_t \\ \omega\,(x_t - x_{ot}) + (\dot{y}_o)_t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde se deduz que:

$$\boxed{\mathfrak{i}_t = \begin{bmatrix} x_t = x_{ot} - \frac{(\dot{y}_o)_t}{\omega} \\ y_t = y_{ot} + \frac{(\dot{x}_o)_t}{\omega} \end{bmatrix} \in \mathfrak{F}} \tag{3.2}$$

Por definição, o campo de velocidades anula-se no **c.i.r.** $\mathfrak{i}_t$. Seja $\mathfrak{I}_t = g_t^{-1}(\mathfrak{i}_t)$. Como $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(\mathfrak{I}_t) = \mathbf{0}$, então, se $\mathfrak{I}_t = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, em $\mathfrak{M}$, vem atendendo a (2.70), que:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(\mathfrak{I}_t) \\ &= \mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{a} + \mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{\mathbf{R}}_t\,\overrightarrow{OP} \\ &= \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde se deduz que as componentes do **c.i.r.**, em $\mathfrak{M}$, são:

$$\boxed{\mathfrak{I}_t = \begin{bmatrix} -\eta/\omega \\ \xi/\omega \end{bmatrix} \in \mathfrak{M}} \tag{3.4}$$

Se adoptarmos $\mathfrak{I}_t$ como a nova origem para o espaço móvel $\mathfrak{M}$, e portanto se as coordenadas de um ponto $P \in \mathfrak{M}$ são dadas por $P = \mathfrak{I}_t + X\widehat{\boldsymbol{\imath}} + Y\widehat{\boldsymbol{\jmath}}$, então a expressão do campo de velocidades $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t$ é agora:

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X, Y) = \begin{bmatrix} -\omega\,Y \\ \omega\,X \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

que é o gerador infinitesimal de uma rotação de ângulo ω, em torno de $\mathfrak{I}_t$.

3.2 Base e Rolante

Suponhamos mais uma vez que $n = 2$, i.e., que o movimento é plano, e que $\dot{\theta} \neq 0$, $\forall t$, de tal forma que, para cada instante t, é possível definir o **c.i.r.** $\mathfrak{i}_t$ correspondente. À curva $\mathfrak{b}$, no espaço fixo $\mathfrak{F}$, parametrizada por:

$$\begin{array}{rccl} \beta: & I \subseteq \mathbb{R} & \longmapsto & \mathfrak{F} \\ & t & \longmapsto & \beta(t) = \mathfrak{i}_t \end{array} \tag{3.6}$$

chamamos a **base do movimento**. Relativamente ao referencial fixo $\{o; \hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$, para $\mathfrak{F}$, a base é a curva parametrizada:

$$\beta : t \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_{ot} - \frac{(\dot{y}_o)_t}{\omega} \\ y(t) = y_{ot} + \frac{(\dot{x}_o)_t}{\omega} \end{array} \right. \tag{3.7}$$

onde pusemos $a_t = \left[\begin{array}{c} x_{ot} \\ y_{ot} \end{array} \right]$, e $\omega = \dot{\theta}$, como antes.

Consideremos ainda a trajectória relativa do **c.i.r.**, no espaço móvel, isto é, a curva $\mathfrak{R}$, em $\mathfrak{M}$, parametrizada por:

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{I}: & I \subseteq \mathbb{R} & \longmapsto & \mathfrak{M} \\ & t & \longmapsto & \mathfrak{I}(t) = g_t^{-1}(\mathfrak{i}_t) \end{array} \tag{3.8}$$

ou, relativamente ao referencial $\{O; \mathbf{I}, \mathbf{J}\}$, para $\mathfrak{M}$, por:

$$\mathfrak{I} : t \mapsto \left\{ \begin{array}{c} X(t) = -\eta/\omega \\ Y(t) = \xi/\omega \end{array} \right. \tag{3.9}$$

onde, como antes, $\mathbf{R}_t{}^{-1}\dot{a} = \left[\begin{array}{c} \xi \\ \eta \end{array} \right]$. Para cada instante t, a imagem:

$$\mathfrak{r}_t \stackrel{\text{def}}{=} g_t(\mathfrak{R})$$

define uma curva no espaço fixo $\mathfrak{F}$, a que chamamos a **rolante do movimento**, no instante t, e que pode ser parametrizada por:

$$\begin{array}{rccl} \rho_t: & I \subseteq \mathbb{R} & \longmapsto & \mathfrak{F} \\ & \tau & \longmapsto & \rho_t(\tau) = g_t(\mathfrak{I}(\tau)) = g_t \circ g_\tau^{-1}(\mathfrak{i}_\tau) \end{array} \tag{3.10}$$

ou ainda:

$$\rho_t : \tau \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x(\tau) = x_{ot} - \frac{\eta(\tau)}{\omega(\tau)} \cos\theta(t) - \frac{\xi(\tau)}{\omega(\tau)} \sin\theta(t) \\ y(\tau) = y_{ot} - \frac{\eta(\tau)}{\omega(\tau)} \sin\theta(t) + \frac{\xi(\tau)}{\omega(\tau)} \cos\theta(t) \end{array} \right. \tag{3.11}$$

Em cada instante t, a base $\mathfrak{b}$ e a rolante $\mathfrak{r}_t$, têm em comum o **c.i.r.** $\mathfrak{i}_t$. Vamos ver que esses arcos são, em geral, tangentes no ponto $\mathfrak{i}_t$. Por outras palavras, a família de rolantes $\{\mathfrak{r}_t\}$, é uma família a um parâmetro t de curvas planas, cuja envolvente é a base $\mathfrak{b}$.

Com efeito, derivando em ordem a τ, a igualdade $\rho_t(\tau) = g_t \circ g_\tau^{-1}(\mathfrak{i}_\tau)$, usando a regra da cadeia, e atendendo a que a diferencial de g_t é aplicação linear homogénea $\mathbf{R}_t$, associada a g_t, $d(g_t) = \mathbf{R}_t$, obtemos para $\tau = t$, que:

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=t} \rho_t(\tau) = \mathbf{R}_t(\dot{\mathfrak{I}}(t))$$

que não é mais do que a velocidade relativa $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{rel}(t)$, do movimento pontual $t \mapsto \mathfrak{i}_t$. Por outro lado, o vector $\frac{d}{dt}\mathfrak{i}_t$ é a velocidade absoluta $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{abs}(t)$, desse mesmo movimento. Mas pela relação fundamental:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_{abs}(t) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_{rel}(t) + \overrightarrow{\mathbf{v}}_{trp}(t)$$

e como, por definição $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{trp}(t) = 0$, obtemos:

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=t} \rho_t(\tau) = \mathbf{R}_t(\dot{\mathfrak{I}}(t)) = \frac{d}{dt}\mathfrak{i}_t \tag{3.12}$$

o que significa que, se $\frac{d}{dt}\mathfrak{i}_t \neq 0$, a rolante e a base são tangentes em $\mathfrak{i}_t$.

Como $\mathbf{R}_t$ é uma isometria, deduzimos ainda de (3.12), que:

$$\left\| \frac{d}{dt}\mathfrak{i}_t \right\| = \|\dot{\mathfrak{I}}(t)\| \tag{3.13}$$

Orientemos as curvas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{B}$, no sentido dos tt crescentes, e fixemos um instante inicial t_o, para a contagem dos comprimentos de arco. A relação (3.13), mostra que o comprimento de arco σ, de $\mathfrak{i}_t$, sobre a base $\mathfrak{b}$, contado a partir de $\mathfrak{i}_{t_o}$, é igual ao comprimento de arco σ, de $\mathfrak{I}_t$, sobre $\mathfrak{B}$, contado a partir de $\mathfrak{I}(t_o)$. Finalmente, como a rolante $\mathfrak{r}_t$ se deduz de $\mathfrak{B}$, aplicando a isometria g_t, podemos concluir que σ é ainda o comprimento de arco de $\mathfrak{i}_t = g_t(\mathfrak{I}(t))$, sobre a rolante $\mathfrak{r}_t$, contado a partir do ponto:

$$g_t(\mathfrak{I}(t_o)) = \rho_t(t_o) = \widehat{\mathfrak{i}}_{t_o}$$

Portanto, em cada instante t, temos a igualdade:

$$\overline{\mathfrak{i}_{t_o}, \mathfrak{i}_t} = \overline{\widehat{\mathfrak{i}}_{t_o}, \mathfrak{i}_t}$$

o que significa que a rolante $\mathfrak{r}_t$, rola sem deslizar sobre a base $\mathfrak{b}$.

3.3 Escolha especial do referencial móvel

Retomemos o caso $\underline{\ n=2}$, e recordemos as fórmulas mais relevantes, relativamente ao referencial móvel - para o campo de velocidades:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X,Y) = \begin{cases} V_X = \xi - \omega Y \\ V_Y = \eta + \omega X \end{cases}} \tag{3.14}$$

para o campo de acelerações:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(X,Y) \;=\; \left\{ \begin{array}{l} A_X = \dot{\xi} - \omega\eta - \dot{\omega}Y - \omega^2 X \\ A_Y = \dot{\eta} + \omega\xi + \dot{\omega}X - \omega^2 Y \end{array} \right.} \tag{3.15}$$

e para o **c.i.r.**:

$$\boxed{\mathfrak{I}_t \;=\; \left\{ \begin{array}{rcl} X_o & = & -\eta/\omega \\ Y_o & = & \xi/\omega \end{array} \right.} \tag{3.16}$$

• <u>**Escolha especial do referencial móvel**</u> ... Para simplificar o estudo destas fórmulas <u>no instante t</u>, vamos escolher o **c.i.r.** $\mathfrak{I}_t$ para nova origem do referencial móvel, e ainda o vector $\widehat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{I})$, na direcção da tangente comum à base $\mathfrak{b}$, e à rolante $\mathfrak{r}_t$, no ponto $\mathfrak{I}_t = O$, no sentido do movimento do **c**.**i**.**r**. (ver a figura 3).

Figure 3: Escolha especial de eixos, no instante t.

Portanto nas fórmulas anteriores faremos, <u>no instante t</u>, que estará fixo durante toda a discussão (ver (3.16)):

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} X_o & = & -\eta/\omega & = & 0 \\ Y_o & = & \xi/\omega & = & 0 \end{array} \right.$$

isto é:

$$\xi = \eta = 0$$

Por outro lado:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} \dot{X}_o & = & -\frac{\dot{\eta}\omega - \eta\omega}{\omega^2} & = & -\frac{\dot{\eta}}{\omega} \\ \dot{Y}_o & = & \frac{\dot{\xi}\omega - \xi\omega}{\omega^2} & = & \frac{\dot{\xi}}{\omega}, \end{array} \right. \qquad \text{porque } \xi = \eta = 0$$

são as componentes da velocidade relativa do **c.i.r.** $\dot{\mathfrak{I}}_t$, <u>no instante t</u>. Mas, por hipótese, esta velocidade tem o sentido do eixo dos XX, e por isso deverá ter por componentes $(V, 0)$, o que significa que devemos ter também:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dot{\eta}/\omega & = & V \\ \dot{\xi}/\omega & = & 0 \end{array} \right.$$

Resumindo tudo isto, obtemos então para as fórmulas (3.15), a expressão simplificada seguinte:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(X,Y) \;=\; \left\{ \begin{array}{rcl} A_X & = & -\omega^2\, X - \dot{\omega}\, Y \\ A_Y & = & -\omega\, V - \omega^2\, Y + \dot{\omega}\, X \end{array} \right.} \tag{3.17}$$

para as componentes do campo de acelerações $\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(P)$, no instante t, num ponto P, de coordenadas (X, Y), relativamente ao referencial atrás referido: $P = \mathfrak{I}_t + X\,\mathbf{I} + Y\,\mathbf{J}$.

Em particular, para a partícula $\mathfrak{I}_t = (0, 0)$, a respectiva aceleração tem as seguintes componentes:

$$\begin{cases} A_X &= 0 \\ A_Y &= -V\omega \end{cases} \tag{3.18}$$

como se deduz de (3.17), pondo $X = 0 = Y$. Portanto esta aceleração é em geral $\neq 0$, uma vez que $V\omega \neq 0$, em geral.

3.4 Centro das acelerações

Vejamos se existe um ponto $\mathfrak{A}_t \in \mathfrak{M}$, no qual o campo de acelerações no instante t, se anula. Se (X, Y) são as coordenadas desse ponto, relativamente à escolha de referenciais, no instante t, que foi feita anteriormente, então por (3.17), deveremos ter:

$$\begin{cases} 0 &= -\omega^2\,X - \dot{\omega}\,Y \\ 0 &= -V\omega - \omega^2\,Y + \dot{\omega}\,X \end{cases}$$

Estas equações representam duas rectas perpendiculares, cuja intersecção fornece o ponto procurado $\mathfrak{A}_t \in \mathfrak{M}$, a que chamamos o **centro instantâneo de acelerações**, no instante t. Portanto as coordenadas $(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$, do **c.i.a.** $\mathfrak{A}_t$, no referencial já referido, satisfazem as equações:

$$\begin{cases} \omega^2\,\widetilde{X} + \dot{\omega}\,\widetilde{Y} &= 0 \\ \dot{\omega}\,\widetilde{X} - \omega^2\,\widetilde{Y} &= V\omega \end{cases} \tag{3.19}$$

Quanto à distribuiçãode acelerações, num certo instante t, tudo se passa como se o plano móvel $\mathfrak{M}$ estivesse animado de um movimento de rotação em torno do **c.i.a.** $\mathfrak{A}_t \in \mathfrak{M}$. Embora esta característica seja idêntica à da distribuiçãode velocidades, num certo instante t, há uma diferença essencial - enquanto que o **c.i.r.** $\mathfrak{I}_t$ é geométrico, o **c.i.a.** $\mathfrak{A}_t$, <u>não o é</u>, isto é, <u>depende</u> da lei do tempo segundo a qual o movimento se realiza, mais especìficamente de $\dot{\omega}$. Por exemplo, se $\dot{\omega} = 0$, então o **c.i.a.** correspondente terá por coordenadas:

$$\begin{cases} \widetilde{X} &= 0 \\ \widetilde{Y} &= -V/\omega \overset{\text{def}}{=} -K \end{cases} \tag{3.20}$$

Este ponto:

$$\boxed{\mathfrak{G}_t = (0, -K) = \mathfrak{I}_t - K\,\mathbf{J}} \tag{3.21}$$

diz-se o **centro geométrico de acelerações** (**c.g.a.**), no instante t.

3.5 Interpretação geométrica do parâmetro $K = V/\omega$.

Consideremos o movimento absoluto do **c.i.r.** $t \mapsto \mathfrak{i}_t$, que descreve a base do movimento, como sabemos. As componentes da aceleração absoluta deste movimento pontual são dadas, relativamente ao referencial móvel, pelas fórmulas (2.80):

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}_{abs}(\mathfrak{i}; t) = \begin{cases} A_X(\mathfrak{i}; t) = \dot{\xi} - \omega\eta - \dot{\omega}Y - \omega^2 X - 2\omega\,\dot{Y} + \ddot{X} \\ A_Y(\mathfrak{i}; t) = \dot{\eta} + \omega\xi + \dot{\omega}X - \omega^2 Y + 2\omega\,\dot{X} + \ddot{Y} \end{cases}$$

Mas relativamente ao referencial móvel especial, que foi escolhido na secção 3, estas fórmulas simplificam-se, uma vez que $X = Y = 0$, $\dot{X} = V$, $\dot{Y} = 0$ (e ainda $\xi = \eta = 0$, porque $O = \mathfrak{i}_t$, e $\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta} = V$). Portanto as componentes da aceleração absoluta do **c.i.r.** são dadas por:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}_{abs}(\mathfrak{i};t) = \begin{cases} A_X(\mathfrak{i};t) &= \ddot{X} \\ A_Y(\mathfrak{i};t) &= -\omega V + 2\,\omega\,V + \ddot{Y} \\ &= \omega\,V + \ddot{Y} \end{cases} \tag{3.22}$$

A primeira equação mostra que a aceleração tangencial absoluta e a aceleração tangencial relativa do **c.i.r.** são iguais, facto que aliás não é novidade, já que as velocidades absoluta e relativa do **c.i.r.** são ambas iguais a V e, portanto, dV/dt será o valor comum das duas acelerações tangenciais.

Sejam $C_{\mathfrak{b}}$ e $C_{\mathfrak{r}}$, os centros de curvatura da base e da rolante, respectivamente, no instante t, e $R_{\mathfrak{b}}$, $R_{\mathfrak{r}}$ as medidas algébricas dos segmentos $\overline{OC_{\mathfrak{b}}}$ e $\overline{OC_{\mathfrak{r}}}$, medidos sobre o eixo dos YY, que é a normal comum a $\mathfrak{b}$ e a $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_t$. A projecção da aceleração absoluta sobre o eixo dos YY, é igual a:

$$A_Y(\mathfrak{i};t) = \frac{V^2}{R_{\mathfrak{b}}}$$

enquanto que a projecção da aceleração relativa sobre o eixo dos YY, é igual a:

$$\ddot{Y} = \frac{V^2}{R_{\mathfrak{r}}}$$

Substituindo estes valores na segunda equação em (3.22), obtemos então:

$$\frac{V^2}{R_{\mathfrak{b}}} = \omega\,V + \frac{V^2}{R_{\mathfrak{r}}}$$

isto é:

$$\boxed{\frac{1}{K} = \frac{\omega}{V} = \frac{1}{R_{\mathfrak{b}}} - \frac{1}{R_{\mathfrak{r}}}} \tag{3.23}$$

3.6 Centro de curvatura das trajectórias

Consideremos um ponto $P \in \mathfrak{M}$, rìgidamente fixo a $\mathfrak{M}$, de coordenadas (X, Y), e vamos determinar o raio de curvatura da sua trajectória absoluta $p(t) = g_t(P)$, em $\mathfrak{F}$. Os cálculos continuam a ser feitos, como sempre, no referencial móvel que foi escolhido anteriormente - a origem coincide com o **c.i.r.** $\mathfrak{I}_t$ e o vector $\widehat{\imath}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{I})$, aponta na direcção da tangente comum à base $\mathfrak{b}$, e à rolante $\mathfrak{r}_t$, no ponto $\mathfrak{I}_t = O$ (ver a figura 3).

Consideremos a recta orientada (ou eixo) $\Delta = \overline{OP}$. Seja ϕ o ângulo orientado que ela faz com a parte positiva do eixo dos XX, e $r = |OP|$. É claro que o centro de curvatura $C = C_P$, da trajectória de P, está sobre o eixo Δ, uma vez que este eixo é normal a essa trajectória (recorde que $O = \mathfrak{I}_t$). Para determinar a posição de C, resta pois determinar a medida ρ (com sinal), do segmento $\overline{OC}$ (ρ será positivo ou negativo conforme $\overrightarrow{OC}$ tenha ou não o mesmo sentido de $\overrightarrow{OP}$).

Designemos por $v = v_P(t) = \|\dot{p}(t)\| = \|\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(P)\|$, a velocidade (absoluta) de P. Como é sabido, a aceleração normal $\|\overrightarrow{\mathbf{A}}_\perp(P)\|$, que é a projecção de $\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(P)$ sobre o eixo Δ, é dada por:

$$\frac{v^2}{\rho - r}$$

uma vez que $\rho - r$ é o número que mede o raio de curvatura $|PC|$, sobre o eixo Δ.

Mas, por outro lado, a projecção da aceleração sobre Δ, é igual a:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}}_t(P) \cdot (\cos\phi, \sin\phi) = A_X \, \cos\phi + A_Y \, \sin\phi$$

e portanto, atendendo às fórmulas (3.17), correspondentes à escolha especial do referencial móvel, deveremos ter:

$$\frac{v^2}{\rho - r} = \Big(-\omega^2 X - \dot{\omega}\, Y\Big) \, \cos\phi + \Big(-V\omega - \omega^2 Y + \dot{\omega}\, X\Big) \, \sin\phi$$

Mas como $X = r\cos\phi$, $Y = r\sin\phi$ e $v^2 = \omega^2 r^2$, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 r^2}{\rho - r} &= \Big(-\omega^2 r\cos\phi - \dot{\omega}\, r\sin\phi\Big) \, \cos\phi + \Big(-V\omega - \omega^2 r\sin\phi + \dot{\omega}\, r\cos\phi\Big) \, \sin\phi \\ &= -\omega^2 r - V\omega \, \sin\phi \end{aligned} \tag{3.24}$$

Pondo, como antes, $K = \frac{V}{\omega}$, obtemos finalmente a chamada **fórmula de Euler-Savary**:

$$\boxed{\tfrac{1}{\rho} - \tfrac{1}{r} = \tfrac{1}{K\sin\phi}} \tag{3.25}$$

que permite calcular ρ, como se pretendia.

Figure 4: Centro de curvatura da trajectória absoluta $p(t) = g_t(P)$.

3.7 Centro de curvatura das envolventes

A fórmula de Euler-Savary, obtida anteriormente, pode ser generalizada da seguinte forma - consideremos uma curva $\mathcal{C}$, rìgidamente fixa a $\mathfrak{M}$, e seja $c_t = g_t(\mathcal{C})$ a sua posição em $\mathfrak{F}$, no instante t. Quando t varia, obtemos uma família $\{c_t\}$, a um parâmetro t, de curvas no plano fixo, que em geral admite uma envolvente $\mathfrak{e}$. O problema consiste em determinar o centro de curvatura dessa envolvente $\mathfrak{e}$ (supostamente definida), no ponto $\mathcal{P}=\mathcal{P}(t)$ de contacto da curva c_t com a envolvente $\mathfrak{e}$. Na secção anterior discutimos o caso em que a curva $\mathcal{C}$ se reduz a um ponto P.

O ponto $\mathcal{P}$ varia em geral sobre a curva $\mathcal{C} \subset \mathfrak{M}$, que é portanto a sua trajectória relativa, enquanto que $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{F}$, é a respectiva trajectória absoluta. As curvas c_t e $\mathfrak{e}$ são tangentes no ponto $\mathcal{P}$, e por isso, as velocidades absoluta e relativa de $\mathcal{P}$ têm como suporte uma mesma recta - a recta tangente comum a c_t e $\mathfrak{e}$, em $\mathcal{P}$. A velocidade de transporte de $\mathcal{P}$, que é a diferença entre essas duas velocidades, tem também como suporte essa mesma recta. Mas esta velocidade de transporte é perpendicular à recta $\overline{\mathfrak{i}_t\mathcal{P}}$, donde se conclui que no ponto de contacto da curva c_t com a envolvente $\mathfrak{e}$, a recta normal a c_t passa pelo **c.i.r.**

Recìprocamente, seja $\mathcal{P}$ o pé de uma perpendicular a c_t, baixada a partir do **c.i.r.** $\mathfrak{i}_t$. Quando t varia, o ponto $\mathcal{P}$ move-se sobre a curva $\mathcal{C}$, de tal forma que as suas velocidades relativa e de transporte pertencem ambas à recta tangente a $\mathcal{C}$, em $\mathcal{P}$. Por isso, a sua velocidade absoluta pertence a essa mesma recta, o que significa que ela é tangente à trajectória absoluta $\mathfrak{e}$ de $\mathcal{P}$, e portanto, esta trajectória $\mathfrak{e}$ é uma curva fixa em $\mathfrak{F}$, à qual c_t é sempre tangente, isto é, $\mathfrak{e}$ é um ramo da envolvente das curvas $\{c_t\}$.

Regressemos ao problema de determinar o centro de curvatura da envolvente $\mathfrak{e}$ (supostamente definida), no ponto $\mathcal{P}$. Seja $P_t = g_t^{-1}(p_t)$ o t-coincidente de p_t em $\mathfrak{M}$. Como na secção anterior, consideremos o eixo Δ, na direcção do vector $\overrightarrow{OP_t}$, onde $O = \mathfrak{I}_t$, que faz um ângulo orientado ϕ com a parte positiva do eixo dos XX. Seja $r = |OP_t|$, $R = |OM|$, onde M é o centro de curvatura de $\mathcal{C}$ (que se conhece), e $\rho = |OC|$, onde C é o centro de curvatura de $\mathfrak{e}$, que se pretende determinar. R e ρ devem afectar-se de um sinal $+$ ou $-$, de acordo com as convenções já antes referidas.

Designemos por (X, Y) as coordenadas do ponto de contacto $P = P_t$, no referencial móvel habitual. $\dot{X}, \dot{Y}$ são as componentes da velocidade relativa de P. Como esta velocidade é perpendicular a $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{\mathfrak{I}_t P}$, podemos pôr:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X} & = & -\lambda\,(Y - Y_o) \\ \dot{Y} & = & \lambda\,(X - X_o) \end{array} \right.$$

para uma certa função $\lambda = \lambda(t)$, onde X_o, Y_o são as coordenadas do **c.i.r.** $\mathfrak{I}_t$ (iguais a 0, no referencial móvel especial que escolhemos antes). Portanto, derivando em ordem a t, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{X} & = & -\lambda\left(\dot{Y} - \dot{Y}_o\right) - \dot{\lambda}\,(Y - Y_o) \\ \ddot{Y} & = & \lambda\left(\dot{X} - \dot{X}_o\right) + \dot{\lambda}\,(X - X_o) \end{array} \right.$$

Substituindo os valores de $\dot{X}$ e $\dot{Y}$, vem que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ddot{X} & = & -\lambda^2\,(X - X_o) + \lambda\,\dot{Y}_o - \dot{\lambda}\,(Y - Y_o) \\ \ddot{Y} & = & \lambda^2\,(Y - Y_o) - \lambda\,\dot{X}_o + \dot{\lambda}\,(X - X_o) \end{array} \right.$$

Introduzindo agora as hipóteses simplificadoras, de acordo com a escolha do referencial especial:

$$X_o = 0 = Y_o, \qquad \dot{X}_o = V, \qquad \dot{Y}_o = 0$$

vem que:

$$\begin{cases} \dot{X} & = & -\lambda\, Y \\ \dot{Y} & = & \lambda\, X \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} \ddot{X} & = & -\lambda^2\, X - \dot{\lambda}\, Y \\ \ddot{Y} & = & -\lambda^2\, Y + \dot{\lambda}\, X - \lambda\, V \end{cases} \tag{3.26}$$

A aceleração normal do ponto P, sobre a curva $\mathcal{C}$, tem o valor:

$$\frac{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2}{R - r} = \frac{\lambda^2\, r^2}{R - r}$$

mas, por outro lado, tem também o valor:

$$\begin{aligned} (\ddot{X}, \ddot{Y}) \cdot (\cos\phi, \sin\phi) & = \ddot{X}\, \cos\phi + \ddot{Y}\, \sin\phi \\ & = -\lambda^2\, (X\, \cos\phi + Y\, \sin\phi) - \dot{\lambda}\, (Y\, \cos\phi - X\, \sin\phi) - \lambda\, V\, \sin\phi \end{aligned}$$

Mas $X = r\, \cos\phi$ e $Y = r\, \sin\phi$, donde se deduz que:

$$\frac{\lambda^2\, r^2}{R - r} = -\lambda^2\, r - \lambda\, V\, \sin\phi$$

e finalmente:

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{V\, \sin\phi} \tag{3.27}$$

Nesta fórmula conhece-se r, R, V, ϕ. Ela dá-nos então o valor de λ, e portanto o a velocidade relativa de $\mathcal{P}$.

Calculemos agora a aceleração absoluta de $\mathcal{P}$. Ela é dada pelas fórmulas gerais (2.80), com as simplificações habituais dadas pela escolha do referencial móvel especial:

$$\begin{cases} A_X & = & -\dot{\omega}\, Y - \omega^2\, X - 2\omega\, \dot{Y} + \ddot{X} \\ A_Y & = & -\omega\, V + \dot{\omega}\, X - \omega^2\, Y + 2\omega\, \dot{X} + \ddot{Y} \end{cases}$$

Vamos substituir $\dot{X} = -\lambda\, Y$, $\dot{Y} = -\lambda\, X$ e ainda $\ddot{X}$ e $\ddot{Y}$ pelos seus valores dados por (3.26):

$$\begin{cases} A_X & = & -\dot{\omega}\, Y - \omega^2\, X - 2\omega\, \lambda\, X - \lambda^2\, X - \dot{\lambda}\, Y \\ & = & -(\omega + \lambda)^2\, X - (\dot{\omega} + \dot{\lambda})\, Y \\ A_Y & = & -\omega\, V + \dot{\omega}\, X - \omega^2\, Y - 2\omega\, \lambda\, Y - \lambda^2\, Y + \dot{\lambda}\, X - \lambda\, V \\ & = & -(\omega + \lambda)\, V - (\omega + \lambda)^2\, Y + (\dot{\omega} + \dot{\lambda})\, X \end{cases}$$

A velocidade absoluta é dada por:

$$\begin{cases} V_X & = & -\omega\, Y + \dot{X} & = & -(\omega + \lambda)\, Y \\ V_Y & = & \dot{\omega}\, X + \dot{Y} & = & (\omega + \lambda)\, X \end{cases}$$

A projecção da aceleração absoluta sobre o eixo Δ, é igual à aceleração normal com sinal:

$$\frac{V_X^2 + V_Y^2}{\rho - r} = \frac{(\omega+\lambda)^2\, r^2}{\rho - r}$$

onde $\rho - r$ representa a medida algébrica, sobre o eixo Δ, do raio de curvatura de $\mathfrak{e}$. Por outro lado, essa mesma aceleração é igual a:

$$A_X\, \cos\phi + A_Y\, \sin\phi = -(\omega+\lambda)^2\, r - (\omega+\lambda)\, V\, \sin\phi$$

já que $X = r\cos\phi$ e $Y = r\sin\phi$. Vem então que:

$$\frac{(\omega+\lambda)^2\, r^2}{\rho - r} = -(\omega+\lambda)^2\, r - (\omega+\lambda)\, V\, \sin\phi$$

ou ainda:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{\omega+\lambda}{V\, \sin\phi} \tag{3.28}$$

Subtraindo as duas fórmulas (3.27) e (3.28), obtemos finalmente:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \frac{1}{K\, \sin\phi}} \tag{3.29}$$

que é a **fórmula de Savary geral**, que nos dá o centro de curvatura da envolvente $\mathfrak{e}$ da família $\{c_t = g_t(\mathcal{C})$.

3.8 Construção de Savary

Consideremos um novo referencial ortonormado positivo, centrado em $O = \mathfrak{i}_t$, e em que o primeiro eixo é o eixo orientado $\Delta = \overline{OP}$ (ver a figura 5). Designemos ainda por X e Y as coordenadas relativas a este novo referencial, e sejam:

$$\frac{X}{r} + \frac{Y}{a} = 1 \tag{3.30}$$

e:

$$\frac{X}{\rho} + \frac{Y}{b} = 1 \tag{3.31}$$

as equações das recta $\overline{PC_\mathfrak{r}}$ e $\overline{CC_\mathfrak{b}}$, respectivamente, relativas a esse novo referencial. Como anteriormente, C designa o centro de curvatura da trajectória absoluta de P, $C_\mathfrak{b}$ o centro de curvatura da e $C_\mathfrak{r}$ o centro de curvatura da rolante $\mathfrak{r}_t$, no instante t.

Vamos mostrar que $a = b$, isto é, que as rectas referidas se intersectam num mesmo ponto $Q \in \Delta'$ (ver a figura 5).

Como as coordenadas de $C_\mathfrak{r}$ e $C_\mathfrak{b}$, no novo referencial, são $(R_\mathfrak{r}\, \sin\phi, R_\mathfrak{r}\, \cos\phi)$, e $(R_\mathfrak{b}\, \sin\phi, R_\mathfrak{b}\, \cos\phi)$, respectivamente, exprimindo o facto de que estes pontos pertencem respectivamente às rectas $\overline{PC_\mathfrak{r}}$ e $\overline{CC_\mathfrak{b}}$, vem que:

$$\begin{cases} \frac{\sin\phi}{r} + \frac{\cos\phi}{a} = \frac{1}{R_\mathfrak{r}} \\ \frac{\sin\phi}{\rho} + \frac{\cos\phi}{b} = \frac{1}{R_\mathfrak{b}} \end{cases}$$

Figure 5: Construção de Savary I.

donde se deduz, subtraindo membro a membro, que:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{K} &= \tfrac{1}{R_{\mathfrak{b}}} - \tfrac{1}{R_{\mathfrak{r}}}, && \text{por (3.23)}\\
&= \left(\tfrac{1}{\rho} - \tfrac{1}{r}\right) \sin\phi + \left(\tfrac{1}{b} - \tfrac{1}{a}\right) \cos\phi \\
&= \tfrac{1}{K \sin\phi} \sin\phi + \left(\tfrac{1}{b} - \tfrac{1}{a}\right) \cos\phi, && \text{pela fórmula de Euler-Savary (3.25)}\\
&= \tfrac{1}{K} + \left(\tfrac{1}{b} - \tfrac{1}{a}\right) \cos\phi
\end{aligned}$$

isto é $a = b$, e de facto as rectas $\overline{PC_{\mathfrak{r}}}$ e $\overline{CC_{\mathfrak{b}}}$ intersectam-se num mesmo ponto $Q \in \Delta'$.

Daqui se deduz a seguinte:

- **Construção de Savary, para o centro de curvatura** $C = C_P$, da trajectória absoluta de um ponto P, rìgidamente ligado a $\mathfrak{M}$ (ver a figura 5):
  - Traçam-se as rectas $\Delta = \overline{PO} = \overline{P\mathfrak{I}_t}$, e Δ', perpendicular a Δ, passando por O.
  - Traça-se $\ell = \overline{PC_{\mathfrak{r}}}$, e procura-se a intersecção Q, desta recta com Δ'.
  - C está na intersecção de Δ com a recta que une Q a $C_{\mathfrak{b}}$.

A construção anterior faz intervir os dois centros de curvatura $C_{\mathfrak{r}}$ e $C_{\mathfrak{b}}$. No entanto a fórmula de Savary contem apenas a função:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{R_{\mathfrak{b}}} - \frac{1}{R_{\mathfrak{r}}}$$

Portanto, se <u>no instante t</u>, modificarmos as duas curvas $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_t$, de tal forma que $\frac{1}{K}$ permaneça inalterado, os centros de curvatura das trajectórias não se alteram, pelo menos no instante t referido.

Vamos aplicar esta observação para deduzir mais duas construções de Savary para o centro de curvatura $C = C_P$, da trajectória absoluta de um ponto $P \in \mathfrak{M}$. Para isso consideremos o ponto $\mathfrak{G} = (0, K)$ sobre o eixo dos YY.

- **A** ... Neste primeiro caso, supômos que a rolante $\mathfrak{r}$ coincide com o eixo dos XX, e que a base $\mathfrak{b}$ é o círculo centrado em $\mathfrak{G}$ e de raio $|K|$. Então $1/R_{\mathfrak{r}} = 0$, isto é, $C_{\mathfrak{r}}$ está no infinito, na direcção do eixo dos YY, e $C_{\mathfrak{b}}$ está em $\mathfrak{G}$. Portanto continua a verificar-se a relação $\frac{1}{K} = \frac{1}{R_{\mathfrak{b}}} - \frac{1}{R_{\mathfrak{r}}}$, e podemos aplicar a construção anterior:

- **Construção de Savary II, para o centro de curvatura** $C = C_P$, da trajectória absoluta de um ponto P, rìgidamente ligado a $\mathfrak{M}$ (ver a figura 6):
  - Traçam-se as rectas $\Delta = \overline{PO} = \overline{P\mathfrak{I}_t}$, e Δ', perpendicular a Δ, passando por O.
  - Traça-se $\ell = \overline{PC_\mathfrak{r}}$, que é a recta que passa em P e é paralela ao eixo dos YY, e procura-se a intersecção Q, desta recta com Δ'.
  - C está na intersecção de Δ com a recta que une Q a $C_\mathfrak{b} = \mathfrak{G}$.

Figure 6: Construção de Savary II.

- **B** ... No segundo caso, supômos agora que é a base $\mathfrak{b}$ que coincide com o eixo dos XX, e que a rolante $\mathfrak{r}$ é o círculo centrado em $\mathfrak{G}' = -\mathfrak{G}$ (o simétrico de $\mathfrak{G}$) e de raio $|K|$. Então $1/R_\mathfrak{b} = 0$, isto é, $C_\mathfrak{b}$ está no infinito, na direcção do eixo dos YY, e $C_\mathfrak{r}$ está em $\mathfrak{G}'$. Portanto continua a verificar-se a relação $\frac{1}{K} = \frac{1}{R_\mathfrak{b}} - \frac{1}{R_\mathfrak{r}}$, e podemos aplicar a construção anterior:

- **Construção de Savary III, para o centro de curvatura** $C = C_P$, da trajectória absoluta de um ponto P, rìgidamente ligado a $\mathfrak{M}$ (ver a figura 7):
  - Traçam-se as rectas $\Delta = \overline{PO} = \overline{P\mathfrak{I}_t}$, e Δ', perpendicular a Δ, passando por O.
  - Traça-se $\ell = \overline{PC_\mathfrak{r}} = \overline{P\mathfrak{G}'}$, e procura-se a intersecção Q, desta recta com Δ'.
  - C está na intersecção de Δ com a recta que une Q a $C_\mathfrak{b}$, isto é, com a recta que passa em Q e é paralela ao eixo dos YY.

3.9 Círculo de inflexões

Procuremos os pontos $P \in \mathfrak{M}$ para os quais $C = C_P$ está no infinito - um tal ponto P é pois um ponto de inflexão sobre a sua trajectória absoluta.

A Construção de Savary III, mostra que C estará no infinito quando a recta que passa em Q e é paralela ao eixo dos YY, estiver ela própria no infinito. Para isso, $\overline{\mathfrak{G}'Q}$ deverá

Figure 7: Construção de Savary III.

ser paralela a Δ', ou perpendicular a Δ. Vemos portanto que ângulo $\angle(PO\mathfrak{G}')$ deve ser recto, e o lugar dos pontos P, quando Δ roda em torno da origem O, é pois um círculo cujo diâmetro é $O\mathfrak{G}'$. Este círculo chama-se o **círculo de inflexões** - é o lugar dos pontos $P \in \mathfrak{M}$ que, no instante considerado, são pontos de inflexão sobre as suas trajectórias.

4 Aplicações e Exemplos

▷ **Exemplo 4.1 Movimentos Relativos** ... Suponhamos que temos dois movimentos instantâneos (ou deslocamentos):

$$\mathfrak{M} \ \begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array} \ \mathfrak{F}$$

que identificamos com referenciais afins $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ de $\mathfrak{F}$. Então:

$$r_{21} \stackrel{\text{def}}{=} g_2 \circ g_1^{-1} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F} \tag{4.1}$$

diz-se o **deslocamento relativo de $\mathcal{R}_2$ relativamente a $\mathcal{R}_1$**, descrito no referencial fixo $\mathfrak{F}$. Se:

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}$$

então:

$$\begin{aligned} r_{21} &= g_2 \circ g_1^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{R}_1^{-1} a_1 & \mathbf{R}_1^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_2 - \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1} a_1 & \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.2}$$

isto é:

$$\boxed{r_{21}(p) = \left(a_2 - \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1} a_1\right) + \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1}(p), \qquad p \in \mathfrak{F}} \tag{4.3}$$

ou de forma equivalente:

$$\boxed{r_{21}(p) = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1}(p - a_1) + a_2, \qquad p \in \mathfrak{F}} \tag{4.4}$$

(note que $\mathbf{R}_1^{-1}(p) \in \mathfrak{M}$). Note ainda que $r_{12} = g_1^{-1} \circ g_2 = (g_2^{-1} \circ g_1)^{-1} = r_{21}^{-1}$.

Consideremos novamente dois movimentos instantâneos (ou deslocamentos):

$$\mathfrak{M} \;\begin{array}{c} \xrightarrow{g_1} \\ \xrightarrow{g_2} \end{array}\; \mathfrak{F}$$

Então $\mathfrak{F}_1 = g_1^{-1}(\mathfrak{F})$ e $\mathfrak{F}_2 = g_2^{-1}(\mathfrak{F})$ representam duas posições do espaço fixo descritas em termos do referencial móvel $\mathfrak{M}$. Portanto:

$$\mathbf{R}_{21} \stackrel{\text{def}}{=} g_2^{-1} \circ g_1 : \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M} \tag{4.5}$$

diz-se o **deslocamento inverso relativo de $\mathfrak{F}_2$ relativamente a $\mathfrak{F}_1$**, descrito no referencial móvel $\mathfrak{M}$. Se:

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_2 & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}$$

então:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{21} &= g_2^{-1} \circ g_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{R}_2^{-1} a_2 & \mathbf{R}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{R}_2^{-1} a_1 - \mathbf{R}_2^{-1} a_2 & \mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

isto é:

$$\boxed{\mathbf{R}_{21}(P) = -\mathbf{R}_2^{-1}(a_2 - a_1) + \mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{R}_1(P), \qquad P \in \mathfrak{M}} \tag{4.7}$$

Suponhamos que $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & \mathbf{R} \end{bmatrix} \in SE(n)$, de tal forma que:

$$g(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a + Rv \end{bmatrix} = a + \mathbf{R}v, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

g terá um ponto fixo, i.e., um ponto $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $g(v) = v$, sse:

$$a + \mathbf{R}v = v$$

donde se deduz que:

$$v = -[\mathbf{R} - \mathrm{Id}]^{-1}(a) \tag{4.8}$$

o que acontece desde que 1 não seja valor próprio de $\mathbf{R}$. Quando $n = 2$, isto acontece sempre, desde que $\mathbf{R} \neq \mathrm{Id}$, isto é, desde que g não seja uma translacção. O ponto fixo $v = -[\mathbf{R} - \mathrm{Id}]^{-1}(a)$ diz-se então o **centro de rotação** do deslocamento g, uma vez que g é então uma rotação plana de centro v:

$$\begin{aligned} g(p) - v &= g(p) - g(v) \\ &= a + \mathbf{R}p - a - \mathbf{R}v \\ &= \mathbf{R}(p - v) \end{aligned} \tag{4.9}$$

O centro de rotação v será notado por $\mathfrak{i}$ ou $\mathfrak{I}$, conforme a descrição se faça relativamente a $\mathfrak{F}$ ou $\mathfrak{M}$, respectivamente.

Por exemplo, quando r_{21} é o deslocamento relativo de $\mathcal{R}_2$ relativamente a $\mathcal{R}_1$, descrito no referencial fixo $\mathfrak{F}$, dado por (4.1), ou (4.2), então o respectivo centro de rotação é dado por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}_{21} &= -[\mathbf{R} - \mathrm{Id}]^{-1}(a) \\ &= -\left[\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1} - \mathrm{Id}\right]^{-1}\left(a_2 - \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}a_1\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

enquanto que, se $\mathbf{R}_{21}$ é o deslocamento inverso relativo de $\mathfrak{F}_2$ relativamente a $\mathfrak{F}_1$, descrito no referencial móvel $\mathfrak{M}$, dado por (4.6), então o respectivo centro de rotação é dado por:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{21} &= -[\mathbf{R} - \mathrm{Id}]^{-1}(a) \\ &= -\left[\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{R}_1 - \mathrm{Id}\right]^{-1}\left(\mathbf{R}_2^{-1}a_1 - \mathbf{R}_2^{-1}a_2\right) \end{aligned} \tag{4.11}$$

▷ **Exemplo 4.2** ... Consideremos um círculo $\mathcal{C}$, de centro o e raio R, no plano fixo $\mathfrak{F}$, munido do referencial usual $\{o; \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}\}$, e um outro círculo c, de raio r, que rola sem deslizar, tangencialmente e exteriormente a $\mathcal{C}$. Estudar o movimento.

Figure 8: Epiciclóide.

Escolhemos o referencial móvel no instante t, $r_t = \{a_t; \hat{\boldsymbol{\imath}}(t), \hat{\boldsymbol{\jmath}}(t)\}$, rìgidamente ligado ao círculo c, de tal forma que a sua origem coincida, em cada instante com o centro de c. No instante inicial $t = 0$, $\hat{\boldsymbol{\imath}}(0) = \hat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\hat{\boldsymbol{\jmath}}(0) = \hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Da figura 8, obtemos que:

$$Rt = r\phi(t) \qquad \Rightarrow \qquad \phi(t) = \frac{Rt}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \theta(t) = \frac{(R+r)t}{r} \stackrel{\text{def}}{=} kt, \quad \text{com} \quad k = \frac{R+r}{r}$$

O operador de rotação é portanto:

$$R_t = \begin{bmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{bmatrix}$$

e, por outro lado:

$$a_t = [(R+r)\cos t]\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + [(R+r)\sin t]\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Calculando $R_t^{-1}\dot{a}_t$, vem que:

$$
\begin{aligned}
R_t^{-1}\dot{a}_t &= \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \\
&= \begin{bmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & \cos kt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(R+r)\sin t \\ (R+r)\cos t \end{bmatrix} \\
&= (R+r) \begin{bmatrix} -\sin t\cos kt + \cos t \sin kt \\ \sin t \sin kt + \cos t \cos kt \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (R+r)\sin(kt-t) \\ (R+r)\cos(kt-t) \end{bmatrix} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

e portanto, atendendo a que $\omega = \dot{\theta} \equiv k$, o campo de velocidades $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t$ é dado por :

$$
\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X,Y) = \begin{cases} V_X = \xi - \omega Y = [(R+r)\sin(kt-t)] - kY \\ V_Y = \eta + \omega X = [(R+r)\cos(kt-t)] + kX \end{cases}
$$

o **c.i.r.** é dado por:

$$
\mathfrak{I}_t = \begin{cases} -\eta/\omega = -\frac{R+r}{k}\cos(kt-t) = -r\ \cos(kt-t) \\ \xi/\omega = \frac{R+r}{k}\sin(kt-t) = r\ \sin(kt-t) \end{cases}, \qquad \text{no referencial móvel}
$$

e por:

$$
\mathfrak{i}_t = \begin{cases} x_t = x_{ot} - \frac{(\dot{y}_o)_t}{\omega} = (R+r)\cos t - r\cos t = R\cos t \\ y_t = y_{ot} + \frac{(\dot{x}_o)_t}{\omega} = (R+r)\sin t - r\sin t = R\sin t \end{cases}, \qquad \text{no referencial fixo}
$$

Relativamente ao referencial fixo, a base é a curva parametrizada:

$$
\beta : t \longmapsto \beta(t) = \mathfrak{i}_t = \begin{cases} R\cos t \\ R\sin t \end{cases}
$$

que é o círculo $\mathcal{C}$, de centro o e raio R, no plano fixo $\mathfrak{F}$.

A trajectória relativa do **c.i.r.**, no espaço móvel, isto é, a curva $\mathfrak{R}$, em $\mathfrak{M}$, é a curva que, relativamente ao referencial móvel, é parametrizada por:

$$
\mathfrak{I} : t \longmapsto \mathfrak{I}_t = \begin{cases} -r\ \cos(kt-t) \\ r\ \sin(kt-t) \end{cases}
$$

e, em cada instante t, a imagem:

$$
\mathfrak{r}_t \stackrel{\text{def}}{=} g_t(\mathfrak{R})
$$

define a rolante do movimento, no instante t,, que é a curva no espaço fixo, parametrizada por:

$$
\rho_t : \tau \mapsto \begin{cases} x(\tau) = x_{ot} - \frac{\eta(\tau)}{\omega(\tau)}\cos\theta(t) - \frac{\xi(\tau)}{\omega(\tau)}\sin\theta(t) \\ y(\tau) = y_{ot} - \frac{\eta(\tau)}{\omega(\tau)}\sin\theta(t) + \frac{\xi(\tau)}{\omega(\tau)}\cos\theta(t) \end{cases}
$$

isto é:

$$
\rho_t : \tau \longmapsto \begin{cases} x(\tau) = (R+r)\cos t - r\cos(k\tau-\tau)\cos kt - r\sin(k\tau-\tau)\sin kt \\ \qquad = (R+r)\cos t - r\cos[k(\tau-t)-\tau] \\ y(\tau) = (R+r)\sin t - r\cos(k\tau-\tau)\sin kt + r\sin(k\tau-\tau)\cos kt \\ \qquad = (R+r)\sin t - r\sin[k(\tau-t)-\tau] \end{cases}
$$

que é o círculo centrado em a_t e de raio r.

▷ **Exemplo 4.3** ... Consideremos um círculo c, de raio r, que rola sem deslizar, tangencialmente a uma recta fixa. Estudar o movimento.

Figure 9: Ciclóide.

O referencial fixo $\{o; \widehat{\boldsymbol{\imath}}, \widehat{\boldsymbol{\jmath}}\}$, é escolhido de tal forma que o eixo dos yy, coincide com a recta referida, e o referencial móvel no instante t, $r_t = \{a_t; \widehat{\boldsymbol{\imath}}(t), \widehat{\boldsymbol{\jmath}}(t)\}$, rìgidamente ligado ao círculo c, de tal forma que a sua origem coincide, em cada instante com o centro de c. No instante inicial $t = 0$, $\widehat{\boldsymbol{\imath}}(0) = \widehat{\boldsymbol{\imath}}$ e $\widehat{\boldsymbol{\jmath}}(0) = \widehat{\boldsymbol{\jmath}}$.

Da figura 8, obtemos que:

$$\theta(t) = \frac{t}{r} \qquad\qquad \Rightarrow \quad \omega \equiv \frac{1}{r}$$

O operador de rotação é portanto:

$$R_t = \begin{bmatrix} \cos t/r & -\sin t/r \\ \sin t/r & \cos t/r \end{bmatrix}$$

e, por outro lado:

$$a_t = r\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + t\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Calculando $R_t^{-1}\dot{a}_t$, vem que:

$$\begin{aligned} R_t^{-1}\dot{a}_t &= \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t/r & \sin t/r \\ -\sin t/r & \cos t/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin t/r \\ \cos t/r \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.13}$$

e portanto, atendendo a que $\omega = \dot{\theta} \equiv 1/r$, o campo de velocidades $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t$ é dado por :

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X,Y) = \begin{cases} V_X = \xi - \omega Y = -Y/r + \sin t/r \\ V_Y = \eta + \omega X = X/r + \cos t/r \end{cases}$$

o **c.i.r.** é dado por:

$$\mathfrak{I}_t = \begin{cases} -\eta/\omega = -r\,\cos t/r \\ \xi/\omega = r\,\sin t/r \end{cases}, \qquad\qquad \text{no referencial móvel}$$

e por:

$$\mathfrak{i}_t = \left\{ \begin{array}{lclcl} x_t & = & x_{ot} - \frac{(\dot{y}_o)_t}{\omega} & = & 0 \\ y_t & = & y_{ot} + \frac{(\dot{x}_o)_t}{\omega} & = & t \end{array} \right. , \qquad \text{no referencial fixo}$$

Relativamente ao referencial fixo, a base é a curva parametrizada:

$$\beta : t \longmapsto \beta(t) = \mathfrak{i}_t = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ t \end{array} \right.$$

que é a recta dada (o eixo dos yy, de acordo com a nossa escolha de referencial fixo).

A trajectória relativa do **c.i.r.**, no espaço móvel, isto é, a curva $\mathfrak{R}$, em $\mathfrak{M}$, é a curva que, relativamente ao referencial móvel, é parametrizada por:

$$\mathfrak{I} : t \longmapsto \mathfrak{I}_t = \left\{ \begin{array}{c} -r\,\cos t/r \\ r\,\sin t/r \end{array} \right.$$

e, em cada instante t, a imagem:

$$\mathfrak{r}_t \stackrel{\text{def}}{=} g_t(\mathfrak{R})$$

define a rolante do movimento, no instante t,, que é a curva no espaço fixo, parametrizada por:

$$\rho_t : \tau \mapsto \left\{ \begin{array}{lcl} x(\tau) & = & x_{ot} - \frac{\eta(\tau)}{\omega(\tau)} \cos\theta(t) - \frac{\xi(\tau)}{\omega(\tau)} \sin\theta(t) \\ y(\tau) & = & y_{ot} - \frac{\eta(\tau)}{\omega(\tau)} \sin\theta(t) + \frac{\xi(\tau)}{\omega(\tau)} \cos\theta(t) \end{array} \right.$$

isto é:

$$\rho_t : \tau \longmapsto \left\{ \begin{array}{lcl} x(\tau) & = & r - r\cos\tau/r\cos t/r - r\sin\tau/r\sin t/r \\ & = & r - r\cos\frac{t-\tau}{r} \\ y(\tau) & = & t - r\cos\tau/r\sin t/r + r\sin\tau/r\cos t/r \\ & = & t - r\sin\frac{t-\tau}{r} \end{array} \right.$$

que é o círculo de raio r, centrado em $a_t = r\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + t\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}$.

▷ **<u>Exemplo</u> 4.4** ... Estudar o movimento $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}}$, no qual duas partículas $P_1, P_2 \in \mathfrak{M}$ têm trajectórias em $\mathfrak{F}$, contidas respectivamente em duas rectas ℓ_1 e ℓ_2, que se intersectam na origem o, de $\mathfrak{F}$.

Figure 10: .

Fixo um instante t, designemos por $p_1(t)$ e $p_2(t)$, as posições ocupadas, em $\mathfrak{F}$, pelas duas partículas P_1 e P_2. As perpendiculares a ℓ_1 em $p_1(t)$, e a ℓ_2 em $p_2(t)$, passam ambas pelo **c.i.r.** $\mathfrak{i}_t$, o que determina esse ponto (ver a figura 10). A distância:

$$\|p_1(t) - p_2(t)\| \equiv \|P_1 - P_2\| \stackrel{\text{def}}{=} 2a$$

mantem-se constante durante o movimento. Designando ainda por α, o ângulo agudo entre as duas rectas ℓ_1 e ℓ_2, o raio do círculo que passa pelos três pontos $o, p_1(t), p_2(t)$, é dado por:

$$r(t) = \frac{a}{\alpha}$$

o que significa que $r(t) \equiv r$, se mantem também constante durante o movimento. Além disso:

$$\|\mathfrak{i}_t - o\| \equiv 2r$$

o que implica que o lugar geométrico , dos **c.i.r.** $\mathfrak{i}_t$, em $\mathfrak{F}$ - a base $\mathfrak{b}$ do movimento - é o círculo centrado na origem o, e de raio $2r$ (ver a figura 10).

Por outro lado, o círculo, que passa pelos três pontos $o, p_1(t), p_2(t)$, quando considerado no plano móvel $\mathfrak{M}$, passa pelas duas partículas P_1, P_2 desse plano, e tem raio constante e igual a r, isto é, esse círculo $\mathfrak{B}$, está invariàvelmente ligado a $\mathfrak{M}$. Como o ponto $\mathfrak{i}_t$ pertence sempre a esse círculo (considerado agora em $\mathfrak{F}$), concluímos que ele é a rolante $\mathfrak{r}_t$, no instante t.

Portanto no movimento $\mathfrak{M}/\mathfrak{F}$, o círculo $\mathfrak{B}$ rola sem deslizar sobre o círculo $\mathfrak{b}$, com contacto interior (a posição de $\mathfrak{B}$, em $\mathfrak{F}$, no instante t é $\mathfrak{r}_t$). A trajectória de P_1 (ou P_2), em $\mathfrak{F}$, é um segmento de recta, centrado em o e de comprimento $4r$.

Vejamos ainda as trajectórias de outros pontos Q de $\mathfrak{M}$. Temos dois casos a considerar:

- Q pertence a $\mathfrak{B}$. Se $q(t) \in \mathfrak{F}$ é a posição de Q, no instante t, sabemos que a velocidade absoluta $\dot{q}$, do movimento de Q em $\mathfrak{F}$, é tal que $\dot{q} \cdot (q - \mathfrak{i}_t) = 0$. Mas como $q(t) \in \mathfrak{r}_t$, isto implica que $\dot{q}$ está sempre numa recta que passa em o, e portanto a trajectória é um segmento dessa recta, centrado em o e de raio $4r$.

- Q não pertence a $\mathfrak{B}$. Consideremos os pontos $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{M}$, situados sobre a intersecção de $\mathfrak{B}$, com a recta que passa em Q e pelo centro de $\mathfrak{B}$ (ver a figura 10). Pelo caso anterior, as trajectórias de Q_1 e Q_2, em $\mathfrak{F}$, estão contidas em duas rectas perpendiculares, que passam em o. O comprimento $\|Q_2 - Q_1\|$ permanece constante durante o movimento, e portanto o movimento pode ser considerado como gerado por um segmento de comprimento fixo, cujas extremidades se dslocam sobre duas rectas perpendiculares fixas. Daí que a trajectória de Q seja uma elipse em $\mathfrak{F}$.

Façamos o estudo analítico, no caso em que $\alpha = \pi/2$, isto é, quando as duas rectas ℓ_1 e ℓ_2 se intersectam ortogonalmente.

O referencial fixo $\{o; \hat{\imath}, \hat{\jmath}\}$, é escolhido de tal forma que o eixo dos xx coincide com ℓ_1, o eixo dos yy com ℓ_2, e a origem o com a intersecção dessas duas rectas. O referencial móvel no instante t, $r_t = \{a_t; \hat{\imath}(t), \hat{\jmath}(t)\}$, estaá rìgidamente ligado ao segmento de comprimento $2a$, que une as duas partículas $P_1, P_2 \in \mathfrak{M}$, de tal forma que a sua origem coincide o ponto médio desse segmento (ver a figura 11). No instante inicial $t = 0$, $\hat{\imath}(0) = \hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}(0) = \hat{\jmath}$.

Pondo

$$\theta(t) = t \qquad \Rightarrow \quad \omega \equiv 1$$

Figure 11: .

o operador de rotação será:

$$R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

e, por outro lado:

$$a_t = -a\cos t\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + a\sin t\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Calculando $R_t^{-1}\dot{a}_t$, vem que:

$$\begin{aligned} R_t^{-1}\dot{a}_t &= \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}} \\ &= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\sin t \\ a\cos t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a\sin 2t \\ a\cos 2t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.14}$$

e portanto, atendendo a que $\omega = \dot{\theta} \equiv 1$, o campo de velocidades $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t$ é dado por :

$$\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(X,Y) = \begin{cases} V_X &= \xi - \omega Y &= -Y + a\sin 2t \\ V_Y &= \eta + \omega X &= X + a\cos 2t \end{cases}$$

o **c.i.r.** é dado por:

$$\mathfrak{I}_t = \begin{cases} -\eta/\omega &= -a\,\cos 2t \\ \xi/\omega &= a\,\sin 2t \end{cases}, \qquad \text{no referencial móvel}$$

e por:

$$\mathfrak{i}_t = \begin{cases} x_t &= x_{ot} - \frac{(\dot{y}_o)_t}{\omega} &= -a\cos t - a\cos t &= -2a\,\cos t \\ y_t &= y_{ot} + \frac{(\dot{x}_o)_t}{\omega} &= a\sin t + a\sin t &= 2a\,\sin t \end{cases}, \qquad \text{no referencial fixo}$$

Relativamente ao referencial fixo, a base é a curva parametrizada:

$$\beta:\; t \longmapsto \beta(t) = \mathfrak{i}_t = \begin{cases} -2a\,\cos t \\ 2a\,\sin t \end{cases}$$

que é um círculo no plano fixo, de raio $2a$, centrado na origem. A trajectória relativa do **c.i.r.**, no espaço móvel, isto é, a curva $\mathfrak{R}$, em $\mathfrak{M}$, é a curva que, relativamente ao referencial móvel, é parametrizada por:

$$\mathfrak{I} : t \longmapsto \mathfrak{I}_t = \begin{cases} -a\,\cos 2t \\ a\,\sin 2t \end{cases}$$

e, em cada instante t, a imagem:

$$\mathfrak{r}_t \overset{\text{def}}{=} g_t(\mathfrak{R})$$

define a rolante do movimento, no instante t,, que é a curva no espaço fixo, parametrizada por:

$$\rho_t : \tau \mapsto \begin{cases} x(\tau) &= x_{ot} - \frac{\eta(\tau)}{\omega(\tau)} \cos\theta(t) - \frac{\xi(\tau)}{\omega(\tau)} \sin\theta(t) \\ y(\tau) &= y_{ot} - \frac{\eta(\tau)}{\omega(\tau)} \sin\theta(t) + \frac{\xi(\tau)}{\omega(\tau)} \cos\theta(t) \end{cases}$$

isto é:

$$\rho_t : \tau \longmapsto \begin{cases} x(\tau) &= -a\cos t - a\cos 2\tau \cos t - a \sin 2\tau \sin t \\ &= -a\cos t - a\cos(2\tau - t) \\ y(\tau) &= a\,\sin t - a\,\cos 2\tau \sin t + a \sin 2\tau \cos t \\ &= a\,\sin t + a\,\sin(2\tau - t) \end{cases}$$

que é o círculo de raio a, centrado em a_t.

Fazer uma ilustração animada deste exercício no programa Cinderella.

▷ **Exemplo 4.5** Contra-paralelogramo articulado ...

Ver o livro de G. Julia: *"Cours de Géométrie Infinitésimale"*, fascicule IV, 2a edition, Gauthier-Villars, 1955, página 11.

Figure 12: Contra-paralelogramo articulado.

Fazer uma ilustração animada deste exercício no programa Cinderella.

▷ **Exemplo 4.6** Estudar o movimento $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}}$, no qual uma recta $L \in \mathfrak{M}$, no seu movimento em $\mathfrak{F}$, envolve um círculo dado em $\mathfrak{F}$, e um ponto $P \in L$ descreve uma tangente fixa a esse círculo.

Ver o livro de G. Julia: *"Cours de Géométrie Infinitésimale"*, fascicule IV, 2a edition, Gauthier-Villars, 1955, página 13.

Fazer uma ilustração animada deste exercício no programa Cinderella.

Figure 13: Julia2.

▷ **Exemplo 4.7** ... Consideremos no plano fixo $\mathfrak{F}$, um círculo c de raio r, e um ponto fixo a, nesse círculo. Fixemos uma recta L no plano móvel $\mathfrak{M}$ e um ponto P nessa recta. Estudar o movimento $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}}$, durante o qual a recta L passa sempre por a, e o ponto $P \in L$ está sempre sobre o círculo c (ver a figura 14). Fazer uma ilustração animada deste exercício no programa Cinderella.

Figure 14:

PROBLEMAS...

- Resolver os problemas 7, 8, 10, 11, 12 e 14 do livro de G. Julia: *"Exercices de Géométrie Infinitésimale"*, fascicule II, chapitre 2, Gauthier-Villars, 1952. Fazer ilustrações animadas, adequadas a cada um dos referidos problemas, no programa Cinderella.

- Seleccionar problemas do livro de H. Béghin et G. Julia: *"Exercices de Mécanique"*, Tome I, fascicule I, chapitre 3 e 4, Gauthier-Villars, 1930. Fazer ilustrações animadas, adequadas a cada um dos referidos problemas, no programa Cinderella.

5 Vectores deslizantes. Momentos. Torsores

Em toda esta secção $\mathcal{E}$ representa um espaço afim Euclideano orientado de dimensão 3, modelado num espaço vectorial (Euclideano orientado de dimensão 3) $\overrightarrow{\mathbf{E}}$.

5.1 Vectores aplicados

Um **vector aplicado em** $a \in \mathcal{E}$, é uma par:

$$(a, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{\mathbf{v}}_a$$

onde $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$. Os pontos a e $b = a + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ dizem-se, respectivamente, a **origem** ou o **ponto de aplicação** e a **extremidade** do vector aplicado $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a$. O conjunto dos vectores aplicados em $a \in \mathcal{E}$, é:

$$\overrightarrow{\mathbf{E}}_a \stackrel{\text{def}}{=} \{a\} \times \overrightarrow{\mathbf{E}}$$

Cada um dos espaços $\overrightarrow{\mathbf{E}}_a$, será munido da única estrutura vectorial Euclideana e orientada, para a qual a aplicação de **equipolência**:

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{\mathbf{E}}_a & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathbf{E}} \\ \overrightarrow{\mathbf{v}}_a = (a, \overrightarrow{\mathbf{v}}) & \longmapsto & \overrightarrow{\mathbf{v}} \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vectoriais Euclideanos orientados.

Portanto os vectores aplicados $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a = (a, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_a$ e $\overrightarrow{\mathbf{w}}_b = (b, \overrightarrow{\mathbf{w}}) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_b$, respectivamente em $a \in \mathcal{E}$ e $b \in \mathcal{E}$, dizem-se **equipolentes**, sse $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{w}}$.

Quando $a \neq b$, à recta que passa em a e $b = a + \overrightarrow{\mathbf{v}}$, chama-se o **suporte** do vector aplicado $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a$, e nota-se por Δ_{ab}.

5.2 Momento de um vector aplicado, num ponto

Por definição, o **momento do vector aplicado** $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_a$**, num ponto** $p \in \mathcal{E}$, é vector aplicado em p, dado por:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_a; p) \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{pa} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}} \tag{5.1}$$

e o campo de vectores em $\mathcal{E}$, definido por:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_a) \, : \, p \longmapsto \overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_a; p)} \tag{5.2}$$

diz-se o **campo de momentos do vector aplicado** $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a$ (vera figura 15). Note que $\mathbf{M}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_a; p)$ é perpendicular ao plano que contem o ponto p e a recta suporte de $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a$.

Suponhamos que temos dois vectores aplicados equipolentes $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a \sim \overrightarrow{\mathbf{v}}_b$, e calculemos a diferença entre os respectivos momentos num ponto $p \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_b; p) - \overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_a; p) &= \overrightarrow{pb} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} - \overrightarrow{pa} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} \\ &= (\overrightarrow{pb} - \overrightarrow{pa}) \times \overrightarrow{\mathbf{v}} \\ &= \overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Figure 15: Campo de momentos do vector aplicado.

Se $\overrightarrow{ab}$ e $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ são distintos, então (5.3) só pode ser zero quando $\overrightarrow{ab}$ e $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ são colineares, isto é, quando $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a$ e $\overrightarrow{\mathbf{v}}_b$ têm como suporte uma mesma recta - a recta que une a e b. Isto motiva a definição de vector deslizante que introduzimos de seguida.

5.3 Vectores deslizantes

No conjunto $\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathbf{E}}$ de todos os vectores aplicados, introduzimos a seguinte relação de equivalência: $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a \cong \overrightarrow{\mathbf{w}}_b$, se e só se $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ (isto é, os vectores são equipolentes), e $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a$ e $\overrightarrow{\mathbf{v}}_b$ têm como suporte uma mesma recta - a recta Δ_{ab} que une a e b. Um classe de equivalência da relação $\cong$ diz-se um **vector deslizante**.

Alternativamente, um vector deslizante fica definido dando uma recta afim Δ em $\mathcal{E}$ (**o suporte**), e um vector <u>não nulo</u> $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$ (**o vector director**). Um tal vector deslizante será notado por:

$$(\Delta, \overrightarrow{\mathbf{v}})$$

e é pois constituído por todos os vectores aplicados $\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_a : a \in \Delta\}$. Um vector aplicado $\overrightarrow{\mathbf{v}}_a = (a, \overrightarrow{\mathbf{v}}) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_a$ não nulo, com extremidade $b = a + \overrightarrow{\mathbf{v}}$, define um único vector deslizante $(\Delta_{ab}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$, onde Δ_{ab} representa a recta que une a e b.

A discussão do penúltimo parágrafo permite concluir que:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_b; p) = \overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_a; p) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathbf{v}}_a \cong \overrightarrow{\mathbf{v}}_b$$

isto é, o momento de um vector aplicado, num ponto p, mantem-se inalterado quando esse vector "desliza" sobre o seu suporte, o que permite definir o momento de um vector deslizante, num ponto p, através de:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}}((\Delta, \overrightarrow{\mathbf{v}}); p) \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{v}}_a; p)} \tag{5.4}$$

onde a é um ponto qualquer de Δ

5.4 Momento do vector aplicado, relativamente a um eixo

Seja $\vec{\mathbf{v}}_a$ um vector aplicado em a, e D uma recta afim. Consideremos dois pontos $p, q \in D$ e calculemos a diferença entre os momentos de $\vec{\mathbf{v}}_a$, nos pontos q e p, respectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; q) - \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; p) &= \vec{qa} \times \vec{\mathbf{v}} - \vec{pa} \times \vec{\mathbf{v}} \\ &= (\vec{qa} - \vec{pa}) \times \vec{\mathbf{v}} \\ &= \vec{pq} \times \vec{\mathbf{v}} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Em particular, deduzimos que o momento $\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; p)$ se mantem inalterado, quando o ponto p se desloca ao longo de uma recta paralela a $\vec{\mathbf{v}}$.

Projectemos agora os momentos $\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; p)$ e $\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; q)$ sobre uma recta orientada qualquer (eixo) $\vec{D} = (D, \vec{\mathbf{u}})$, onde $\vec{\mathbf{u}}$ é um vector director unitário da recta D. Calculemos o produto interno de ambos os membros de (5.5) com $\vec{\mathbf{u}}$:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; q) - \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; p) = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{pq} \times \mathbf{v}) = 0$$

(igual a 0 porque $\vec{\mathbf{u}}$ é colinear com $\vec{pq}$). Portanto:

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; q) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; p)} \tag{5.6}$$

donde se deduz a seguinte **propriedade de equiprojectividade** - *"seja $\vec{\mathbf{v}}_a$ um vector aplicado em a, $\vec{D}$ um eixo, e p, q dois pontos quaisquer em D. Então os momentos de $\vec{\mathbf{v}}_a$, nos pontos q e p, respectivamente, têm projecções ortogonais sobre $\vec{D} = (D, \vec{\mathbf{u}})$ equipolentes"* (ver a figura **??**).

Podemos então definir o **momento do vector aplicado $\vec{\mathbf{v}}_a$, relativamente ao eixo** $\vec{D}$, como sendo o vector deslizante representado pela projecção ortogonal sobre $\vec{D}$, do momento de $\vec{\mathbf{v}}_a$, num ponto qualquer $p \in D$, isto é, pelo vector deslizante:

$$\boxed{\mathbf{M}(\vec{\mathbf{v}}_a : \vec{D}) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \Big(D, [\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{v}}_a; p)]\vec{\mathbf{u}}\Big)} \tag{5.7}$$

Figure 16: Momento de um vector aplicado relativamente a um eixo.

5.5 Momento de dois eixos

Sejam $\overrightarrow{D} = (D, \overrightarrow{\mathbf{u}})$ e $\overrightarrow{D}' = (D', \overrightarrow{\mathbf{u}}')$ dois eixos. Podemos definir o respectivo momento através de:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}') &\stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(\overrightarrow{\mathbf{u}}'_{a'}; a) \\ &= \overrightarrow{\mathbf{u}}.\left(\overrightarrow{aa'} \times \overrightarrow{\mathbf{u}}'\right) \\ &= \overrightarrow{\mathbf{u}}' \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{aa'}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathbf{u}}' \cdot \left(\overrightarrow{a'a} \times \overrightarrow{\mathbf{u}}'\right) \\ &= \mathbf{M}(\overrightarrow{D}', \overrightarrow{D}) \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde $a \in D$ e $a' \in D'$ são dois pontos arbitrários.

Se fixamos um referencial ortonormado $\{o; \widehat{\boldsymbol{\imath}}, \widehat{\boldsymbol{\jmath}}, \widehat{\boldsymbol{k}}\}$ para $\mathcal{E}$, e se:

$$\begin{cases} a &= o + x\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\widehat{\boldsymbol{k}} \\ a' &= o + x'\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + y'\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}} + z'\,\widehat{\boldsymbol{k}} \\ \overrightarrow{\mathbf{u}} &= o + X\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + Y\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}} + Z\,\widehat{\boldsymbol{k}} \\ \overrightarrow{\mathbf{u}}' &= o + X'\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + Y'\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}} + Z'\,\widehat{\boldsymbol{k}} \end{cases}$$

então:

$$\boxed{\mathbf{M}(\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D}') = LX' + L'X + MY' + M'Y + N'Z + NZ'} \tag{5.9}$$

onde: (X, Y, Z, L, M, N) e (X', Y', Z', L', M', N') são as coordenadas de Plücker das rectas orientadas $\overrightarrow{D}$ e $\overrightarrow{D}'$, respectivamente (ver a secção 6.2).

Figure 17: Momento de dois eixos.

5.6 Sistemas de vectores deslizantes

Um sistema de vectores deslizantes é um conjunto finito:

$$\mathcal{S} = \{(D_i, \overrightarrow{\mathbf{v}}_i) : i = 1, \cdots, n\}$$

de vectores deslizantes. Para um tal sistema definimos:

- **a soma geométrica de** $\mathcal{S}$ - é o vector (livre) de $\overrightarrow{\mathbf{E}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \textstyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{v}}_i} \tag{5.10}$$

- **o momento resultante de** $\mathcal{S}$**, num ponto** $p \in \mathcal{E}$ - é o vector aplicado em p:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}}(\mathcal{S};p) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \textstyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{M}}((D_i,\overrightarrow{\mathbf{v}}_i);p) \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{pa_i} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}_i} \tag{5.11}$$

  onde $a_i \in D_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, são pontos arbitrários. Os vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{M}}(\mathcal{S};p) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_p$, dizem-se os **elementos de redução** do sistema $\mathcal{S}$ no ponto $p \in \mathcal{E}$.

- **o campo de momentos de** $\mathcal{S}$ - é o campo de vectores definido em $\mathcal{E}$ por:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}} : \, p \in \mathcal{E} \;\longmapsto\; \overrightarrow{\mathbf{M}}(\mathcal{S};p)} \tag{5.12}$$

Consideremos agora dois pontos $o, p \in \mathcal{E}$ e vejamos qual a relação entre o campo de momentos $\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}$, nesses dois pontos. Temos que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(p) - \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(o) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\overrightarrow{\mathbf{M}}((D_i,\overrightarrow{\mathbf{v}}_i);p) - \overrightarrow{\mathbf{M}}((D_i,\overrightarrow{\mathbf{v}}_i);o)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\overrightarrow{pa_i} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}_i - \overrightarrow{oa_i} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[(\overrightarrow{pa_i} - \overrightarrow{oa_i}) \times \overrightarrow{\mathbf{v}}_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\overrightarrow{po} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}_i\right] \\
&= \overrightarrow{po} \times \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathbf{v}}_i \\
&= \overrightarrow{po} \times \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}
\end{aligned}$$

donde resulta que:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(p) \;=\; \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(o) + \overrightarrow{po} \times \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$$

ou:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(p) \;=\; \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(o) + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{op}} \tag{5.13}$$

o que significa que o campo de momentos $\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}$, do sistema $\mathcal{S}$, fica determinado em todo o ponto $p \in \mathcal{E}$ desde que o conheçamos num único ponto $o \in \mathcal{E}$.

5.7 Sistemas equivalentes de vectores deslizantes. Torsores.

Dois sistemas $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$, de vectores deslizantes, dizem-se equivalentes quando eles têm os mesmos elementos de redução num certo ponto $o \in \mathcal{E}$:

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}' \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathbf{M}}(\mathcal{S};o) = \overrightarrow{\mathbf{M}}(\mathcal{S}';o)$$

Resulta então de (5.13) que eles têm o mesmo campo de momentos:

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(p) = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}'}(p), \qquad \forall p \in \mathcal{E}$$

É claro que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto dos sistemas de vectores deslizantes. Uma classe de equivalência desta relação chama-se um **torsor**.

Todo o sistema $\mathcal{S}$ de vectores deslizantes, representando um torsor $\mathfrak{T}$, admite num ponto qualquer $o \in \mathcal{E}$, um par de vectores fundamentais - os elementos de redução de $\mathcal{S}$ em o, $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{M}}(\mathcal{S}; o) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_o$. Por definição, este par não depende do representante $\mathcal{S}$ para o torsor $\mathfrak{T}$ - é pois uma característica de $\mathfrak{T}$, a que chamamos os **elementos de redução do torsor $\mathfrak{T}$, em** o. O vector $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ diz-se por vezes o **vector** ou a **resultante geral** do torsor, e $\overrightarrow{\mathbf{M}}(o) = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathfrak{T}}(o) = \overrightarrow{\mathbf{M}}(\mathcal{S}; o)$ o **momento** do torsor em o. Pômos então:

$$\boxed{\mathfrak{T} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}(o))} \tag{5.14}$$

Recìprocamente, a todo o par $(\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{G}}) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}^2$, corresponde um único torsor cujos elementos de redução em o, são $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{G}} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathfrak{T}}(o)$ (veremos isto em breve). Portanto existe uma bijecção (que depende do ponto o):

$$\{\text{Torsores}\} \qquad \longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathbf{E}}^2$$

o que permite transferir a estrutura de espaço vectorial para o conjunto dos torsores. Assim definimos:

- **torsor nulo** - é o torsor que corresponde ao par $(\overrightarrow{\mathbf{0}}, \overrightarrow{\mathbf{0}}) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}^2$.
- **adição de torsores** - se $\mathfrak{T} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}(o))$ e $\mathfrak{T}' = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}', \overrightarrow{\mathbf{M}}'(o))$, põe-se:

$$\mathfrak{T} + \mathfrak{T}' \stackrel{\text{def}}{=} (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}', \overrightarrow{\mathbf{M}}(o) + \overrightarrow{\mathbf{M}}'(o))$$

- **multiplicação por escalares** - se $\mathfrak{T} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}(o))$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ põe-se:

$$\lambda \mathfrak{T} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \lambda \overrightarrow{\mathbf{M}}(o))$$

5.8 Campos equiprojectivos

Seja $\mathfrak{T} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}(o))$ um torsor com elementos de redução $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{M}}(o) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_o$, num ponto $o \in \mathcal{E}$. Por (5.13), o momento resultante num qualquer outro ponto $p \in \mathcal{E}$, é dado por:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(p) = \overrightarrow{\mathbf{M}}(o) + \overrightarrow{po} \times \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \tag{5.15}$$

ficando assim definido o **campo de momentos** $\overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathfrak{T}} : p \mapsto \overrightarrow{\mathbf{M}}(p)$ do torsor $\mathfrak{T}$.

Consideremos agora dois pontos quaisquer $p, q \in \mathcal{E}$. Temos então que:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(q) = \overrightarrow{\mathbf{M}}(p) + \overrightarrow{qp} \times \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$$

e calculando o produto interno por $\overrightarrow{pq}$ de ambos os membros, obtemos:

$$\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(q) = \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(p)$$

o que significa que $\overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\mathfrak{T}}$ é um **campo equiprojectivo**, isto é, dados dois pontos quaisquer distintos $p, q \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\mathbf{M}}(p)$ e $\overrightarrow{\mathbf{M}}(q)$, têm a mesma projecção sobre a recta que une p a q:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(p) \cdot \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{\mathbf{M}}(q) \cdot \overrightarrow{pq}$$

ou ainda

$$\boxed{\overrightarrow{pq} \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{M}}(p) - \overrightarrow{\mathbf{M}}(q)\right) \cdot = 0, \qquad \forall p, q \in \mathcal{E}} \tag{5.16}$$

Vamos agora mostrar que, recìprocamente, *"dado um campo de vectores* <u>*equiprojectivo*</u> $\mathbf{V} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathbf{E}}$*, em* $\mathcal{E}$*, então* $\mathbf{V}$ *é o campo de momentos de um torsor"*.

Fixemos um ponto $o \in \mathcal{E}$, e definamos a aplicação $L : \overrightarrow{\mathbf{E}} \to \overrightarrow{\mathbf{E}}$, através de:

$$L(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathbf{V}(o + \overrightarrow{\mathbf{v}}) - \mathbf{V}(o), \qquad \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}} \tag{5.17}$$

Como $\mathbf{V}$ é equiprojectivo, temos que:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot L(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = 0, \qquad \forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$$

e, por outro lado:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{\mathbf{w}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot [L(\overrightarrow{\mathbf{w}}) - L(\overrightarrow{\mathbf{v}})] &= (\overrightarrow{\mathbf{w}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot [\mathbf{V}(o + \overrightarrow{\mathbf{w}}) - \mathbf{V}(o) - \mathbf{V}(o + \overrightarrow{\mathbf{v}}) + \mathbf{V}(o)] \\
&= (\overrightarrow{\mathbf{w}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot [\mathbf{V}(o + \overrightarrow{\mathbf{w}}) - \mathbf{V}(o + \overrightarrow{\mathbf{v}})] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Mas o primeiro membro é também igual a:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{\mathbf{w}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot [L(\overrightarrow{\mathbf{w}}) - L(\overrightarrow{\mathbf{v}})] &= \overrightarrow{\mathbf{w}} \cdot L(\overrightarrow{\mathbf{w}}) - \overrightarrow{\mathbf{w}} \cdot L(\overrightarrow{\mathbf{v}}) - \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot L(\overrightarrow{\mathbf{w}}) + \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot L(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \\
&= -\overrightarrow{\mathbf{w}} \cdot L(\overrightarrow{\mathbf{v}}) - \overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot L(\overrightarrow{\mathbf{w}})
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{v}} \cdot L(\overrightarrow{\mathbf{w}}) = -L(\overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{w}}, \qquad \forall \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}} \tag{5.18}$$

o que significa que L é um <u>endomorfismo anti-simétrico de $\overrightarrow{\mathbf{E}}$</u>. É fácil mostrar que L é também linear, e fica então provado que *"um campo de vectores* <u>*equiprojectivo*</u> $\mathbf{V} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathbf{E}}$, *em* $\mathcal{E}$*, é afim:*

$$\boxed{\mathbf{V}(o + \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathbf{V}(o) + L(\overrightarrow{\mathbf{v}}), \qquad \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}} \tag{5.19}$$

onde o endomorfismo associado $L : \overrightarrow{\mathbf{E}} \to \overrightarrow{\mathbf{E}}$ *é um endomorfismo anti-simétrico de* $\overrightarrow{\mathbf{E}}$*".*

Fixemos agora uma base ortonormada positiva $\{\widehat{\boldsymbol{\imath}}, \widehat{\boldsymbol{\jmath}}, \widehat{\boldsymbol{k}}\}$ para $\overrightarrow{\mathbf{E}}$. Temos então que:

$$\widehat{\boldsymbol{\imath}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{\imath}}) = \widehat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{\jmath}}) = \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{k}}) = 0$$

Definamos ainda:

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{\boldsymbol{k}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{\jmath}}) & = & -\widehat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{k}}) & = & \mathfrak{p} \\ \widehat{\boldsymbol{\imath}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{k}}) & = & -\widehat{\boldsymbol{k}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{\imath}}) & = & \mathfrak{q} \\ \widehat{\boldsymbol{\jmath}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{\imath}}) & = & -\widehat{\boldsymbol{\imath}} \cdot L(\widehat{\boldsymbol{\jmath}}) & = & \mathfrak{r} \end{array}$$

de tal forma que a matriz de L, na base referida, é a matriz anti-simétrica:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathfrak{r} & \mathfrak{q} \\ r & 0 & -\mathfrak{p} \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

Pondo:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \mathfrak{p}\,\widehat{\boldsymbol{\imath}} + \mathfrak{q}\,\widehat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathfrak{r}\,\widehat{\boldsymbol{k}}} \tag{5.20}$$

temos então que:

$$\begin{array}{rcl} L(\widehat{\boldsymbol{\imath}}) & = & \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \widehat{\boldsymbol{\imath}} \\ L(\widehat{\boldsymbol{\jmath}}) & = & \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \widehat{\boldsymbol{\jmath}} \\ L(\widehat{\boldsymbol{k}}) & = & \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \widehat{\boldsymbol{k}} \end{array} \tag{5.21}$$

e portanto:

$$L(\overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \qquad \forall \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$$

Finalmente, por (5.19), temos que:

$$\mathbf{V}(o + \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \mathbf{V}(o) + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}$$

ou, de forma equivalente, pondo $p = o + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ (e portanto $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{op}$):

$$\boxed{\mathbf{V}(p) = \mathbf{V}(o) + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{op}, \qquad p \in \mathcal{E}} \tag{5.22}$$

o que mostra que dado um campo de vectores equiprojectivo $\mathbf{V} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathbf{E}}$, em $\mathcal{E}$, então $\mathbf{V}$ é o campo de momentos do torsor $\mathfrak{T} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{V}(o))$, de soma geométrica $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ e de momento resultante $\mathbf{V}(o)$, no ponto o.

5.9 Dimensão do espaço dos campos equiprojectivos em $\mathcal{E}$

Fixemos um ponto qualquer $o \in \mathcal{E}$ e designemos por $\mathcal{A}(\overrightarrow{\mathbf{E}})$ o espaço vectorial dos endomorfismos anti-simétricos de $\overrightarrow{\mathbf{E}}$, que tem dimensão 3 (porque $\dim \overrightarrow{\mathbf{E}} = 3$). Definamos uma aplicação:

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathbf{E}} \times \mathcal{A}(\overrightarrow{\mathbf{e}}) & \longrightarrow & \{\text{Campos equiprojectivos em } \mathcal{E}\} \\ (\overrightarrow{\mathbf{v}}, L) & \longmapsto & \mathbf{V}_o : p \mapsto \mathbf{V}_o(p) = \overrightarrow{\mathbf{v}} + L(\overrightarrow{op}) \end{array} \tag{5.23}$$

É fácil ver que esta aplicação é um isomorfismo de espaços vectoriais, e portanto o espaço dos campos equiprojectivos em $\mathcal{E}$, é um espaço vectorial de dimensão 6.

5.10 Eixo central de um torsor

Seja $\mathfrak{T} = (\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{M}}(o))$ um torsor não constante, com vector $\vec{\boldsymbol{\omega}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Vamos mostrar que o conjunto dos pontos p onde o momento resultante $\vec{\mathbf{M}}(p)$ é colinear com a resultante geral $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, é uma recta afim paralela a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, a que chamamos o **eixo central de** $\mathfrak{T}$, e que notamos por $\Delta = \Delta_{\mathfrak{T}}$.

Antes de resolver este problema, vamos resolver o seguinte problema de **divisão vectorial** - dados $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \vec{\mathbf{E}}$, não nulos, calcular $\vec{\mathbf{x}}$ tal que:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$$

É claro que esta equação tem solução apenas quando $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$. Por outro lado, a solução não é única. De facto:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{x}}_o &= \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{x}} &= \vec{\mathbf{b}} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_o) = \vec{\mathbf{0}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_o + \lambda\, \vec{\mathbf{a}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para calcular uma solução particular $\vec{\mathbf{x}}_o$, desenvolvemos $\vec{\mathbf{x}}_o$ na base ortogonal $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\}$:

$$\vec{\mathbf{x}}_o = \alpha\, \vec{\mathbf{a}} + \beta\, \vec{\mathbf{b}} + \gamma\, (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$$

Virá então (com $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{b}} &= \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{x}}_o \\ &= \vec{\mathbf{a}} \times [\alpha\, \vec{\mathbf{a}} + \beta\, \vec{\mathbf{b}} + \gamma\, (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})] \\ &= \beta\, (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) + \gamma\, \vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})] \\ &= \beta\, (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) - \gamma\, a^2\, \vec{\mathbf{b}} + \gamma (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\, \vec{\mathbf{a}} \\ &= \beta\, (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) - \gamma\, a^2\, \vec{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

onde pusemos $a = \|\vec{\mathbf{a}}\|$. Portanto α pode ser qualquer, e, pondo $\alpha = 0 = \beta$ e $\gamma = -\frac{1}{a^2}$, obtemos a solução particular $\vec{\mathbf{x}}_o = -\frac{1}{a^2}(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$ e a solução geral é:

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}} = \tfrac{1}{a^2}(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) + \lambda\, \vec{\mathbf{a}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}} \tag{5.24}$$

(o sinal $-$ foi absorvido por λ).

Regressemos agora ao problema inicial de calcular o eixo central de $\mathfrak{T}$.

Com efeito, fixemos um qualquer ponto $o \in \mathcal{E}$. Os pontos p que procuramos são os que satisfazem a condição $\vec{\mathbf{M}}(p) = h\, \vec{\boldsymbol{\omega}}$, isto é:

$$\vec{\mathbf{M}}(o) + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{op} = h\, \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

ou:

$$\underbrace{\vec{\boldsymbol{\omega}}}_{\vec{\mathbf{a}}} \times \underbrace{\vec{op}}_{\vec{\mathbf{x}}} = \underbrace{h\, \vec{\boldsymbol{\omega}} - \vec{\mathbf{M}}(o)}_{\vec{\mathbf{b}}} \tag{5.25}$$

Adaptando a discussão anterior, sabemos que existe solução $\vec{\mathbf{x}}$, sse $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$, isto é:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot [h\,\vec{\boldsymbol{\omega}} - \vec{\mathbf{M}}(o)] = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad h\,\omega^2 - \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o) = 0$$

o que define o **passo** h **do torsor** $\mathfrak{T}$, através de:

$$\boxed{h = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o)}{\omega^2}} \tag{5.26}$$

Em particular, todos os pontos p do eixo central $\Delta = \Delta_{\mathfrak{T}}$, têm o mesmo momento:

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}(p) \equiv h\vec{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o)}{\omega^2}\,\vec{\boldsymbol{\omega}}, \qquad \forall p \in \Delta} \tag{5.27}$$

Por (5.24), a solução geral de (5.25), é dada por:

$$\begin{aligned}
\vec{op} &= \vec{\mathbf{x}} \\
&= \frac{1}{a^2}(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) + \lambda\,\vec{\mathbf{a}}, \qquad \text{com } \vec{\mathbf{a}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \text{ e } \vec{\mathbf{b}} = h\,\vec{\boldsymbol{\omega}} - \vec{\mathbf{M}}(o) \\
&= \frac{1}{\omega^2}[\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (h\,\vec{\boldsymbol{\omega}} - \vec{\mathbf{M}}(o))] + \lambda\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \\
&= \frac{1}{\omega^2}(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{M}}(o)) + \lambda\,\vec{\boldsymbol{\omega}}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

e a equação do eixo central de $\mathfrak{T}$, é portanto:

$$\boxed{\vec{op} = \frac{\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{M}}(o)}{\omega^2} + \lambda\,\vec{\boldsymbol{\omega}}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}} \tag{5.29}$$

que é a equação de uma recta afim em $\mathcal{E}$, paralela a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

Figure 18: Eixo central do torsor.

5.11 Equações do eixo central num referencial ortonormado

Fixemos um referencial ortonormado positivo $\{o; \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$, e seja:

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\omega}} & = \mathfrak{p}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathfrak{q}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathfrak{r}\,\hat{\boldsymbol{k}} \\ \vec{\mathbf{M}}(o) & = \xi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \eta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \zeta\,\hat{\boldsymbol{k}} \end{cases} \tag{5.30}$$

O momento num qualquer ponto $p \in \mathcal{E}$, tal que:

$$\vec{op} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}(p) &= \vec{\mathbf{M}}(o) + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{op} \\ &= \xi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \eta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \zeta\,\hat{\boldsymbol{k}} + (\mathfrak{p}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathfrak{q}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathfrak{r}\,\hat{\boldsymbol{k}}) \times (x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= (\xi + \mathfrak{q}z - \mathfrak{r}y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\eta + \mathfrak{r}x - \mathfrak{p}z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (\zeta + \mathfrak{p}y - \mathfrak{q}x)\,\hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{5.31}$$

e as equações homogéneas do eixo central (quando $\vec{\boldsymbol{\omega}} \neq \vec{\mathbf{0}}$), são:

$$\boxed{\tfrac{\xi + \mathfrak{q}z - \mathfrak{r}y}{\mathfrak{p}} = \tfrac{\eta + \mathfrak{r}x - \mathfrak{p}z}{\mathfrak{q}} = \tfrac{\zeta + \mathfrak{p}y - \mathfrak{q}x}{\mathfrak{r}}} \tag{5.32}$$

que exprimem a colinearidade de $\vec{\mathbf{M}}(p)$ com $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

5.12 Comomento de dois torsores. Invariante escalar ou auto-momento de um torsor

Sejam $\mathfrak{T}_1 = (\vec{\boldsymbol{\omega}}_1, \vec{\mathbf{M}}_1(o))$ e $\mathfrak{T}_2 = (\vec{\boldsymbol{\omega}}_2, \vec{\mathbf{M}}_2(o))$ dois torsores. É fácil mostrar que a função escalar:

$$f(p) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\boldsymbol{\omega}}_1 \cdot \vec{\mathbf{M}}_2(p) + \vec{\boldsymbol{\omega}}_2 \cdot \vec{\mathbf{M}}_1(p)$$

é constante. A esta constante chamamos o **comomento dos torsores** $\mathfrak{T}_1$ **e** $\mathfrak{T}_2$, que notamos por:

$$\boxed{\mathfrak{c}\,(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\boldsymbol{\omega}}_1 \cdot \vec{\mathbf{M}}_2(o) + \vec{\boldsymbol{\omega}}_2 \cdot \vec{\mathbf{M}}_1(o)} \tag{5.33}$$

ficando assim definida uma forma bilinear simétrica no espaço vectorial $\mathcal{T}$, de todos os torsores (que, recordemos, é isomorfo a $\vec{\mathbf{E}}^2$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}: \quad \mathcal{T} \times \mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) &\longmapsto \mathfrak{c}\,(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) \end{aligned} \tag{5.34}$$

A forma quadrática associada a esta forma bilinear, é o chamado **auto-momento** ou **invariante escalar**:

$$\boxed{I(\mathfrak{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}\mathfrak{c}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) = \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o)} \tag{5.35}$$

do torsor $\mathfrak{T} = (\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{M}}(o))$.

Vejamos as expressões de $\mathfrak{c}$ e I, num referencial ortonormado positivo $\{o; \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$, para $\mathcal{E}$. Se:

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\omega}}_i & = \mathfrak{p}_i\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathfrak{q}_i\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathfrak{r}_i\, \hat{\boldsymbol{k}} \\ \vec{\mathbf{M}}(o) & = \xi_i\, \hat{\boldsymbol{\imath}} + \eta_i\, \hat{\boldsymbol{\jmath}} + \zeta_i\, \hat{\boldsymbol{k}} \end{cases}, \qquad i = 1, 2$$

são so elementos de redução de $\mathfrak{T}_1$ e $\mathfrak{T}_2$, respectivamente, então:

$$\boxed{\mathfrak{c}(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = \mathfrak{p}_1\xi_2 + \mathfrak{q}_1\eta_2 + \mathfrak{r}_1\zeta_2 + \mathfrak{p}_2\xi_1 + \mathfrak{q}_2\eta_1 + \mathfrak{r}_2\zeta_1} \tag{5.36}$$

e:

$$\boxed{I(\mathfrak{T}) = \mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta} \tag{5.37}$$

É possível mostrar, diagonalizando I numa base ortonormada apropriada, que a forma quadrática I é não degenerada e tem assinatura igual a $(3, 3)$.

Existem pois elementos isotrópicos, i.e., torsores $\mathfrak{T}$ para os quais $I(\mathfrak{T}) = 0$ - são os **torsores especiais** que vamos analizar de seguida.

5.13 Classificação dos torsores

Vamos dar uma classificação dos torsores, relativa ao valor do respectivo auto-momento I, e ao mesmo tempo indicar um representante (sistema de vectores deslizantes) que seja o mais simples possível, para cada uma dessas classes de torsores.

Seja então $\mathfrak{T} = (\vec{\boldsymbol{\omega}}, \vec{\mathbf{M}}(o))$ um torsor. Analisemos os casos seguintes, conforme o respectivo auto-momento $I = \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o)$ seja ou não nulo:

- **A**... $\boxed{I = \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o) = 0}$ ... **Torsores especiais ou isotrópicos** - neste caso temos ainda as seguintes possibilidades, conforme a resultante geral $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ seja ou não nula:
  - **A1**... $\underline{\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{M}}(o)}$ ... **Torsor nulo** - representado pelo sistema $\mathcal{S} = \{(D, \vec{\mathbf{0}})\}$.
  - **A2**... $\underline{\vec{\boldsymbol{\omega}} = \vec{\mathbf{0}} \text{ mas } \vec{\mathbf{M}}(o) \neq \vec{\mathbf{0}}}$ ... **Par** - neste caso o campo de momentos de $\mathfrak{T}$ é constante:

    $$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}(p) &= \vec{\mathbf{M}}(o) + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{op} \\ &\equiv \vec{\mathbf{M}}(o), \qquad \forall p \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

    No plano π, que passa em o, e que é perpendicular a $\vec{\mathbf{M}}(o)$, escolhamos um vector[1] deslizante $(D, \vec{\mathbf{v}})$, tal que:

    $$\vec{\mathbf{M}}((D, \vec{\mathbf{v}}); o) = \vec{\mathbf{M}}(o)$$

    O par $\mathfrak{T} = (\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{M}}(o))$ é então representado pelo sistema $\mathcal{S} = \{(D, \vec{\mathbf{v}}), (D', -\vec{\mathbf{v}})\}$, onde D' é a recta no plano π, que passa em o, e que é paralela a D (ver a figura 19).

[1] isto é sempre possível. Com efeito....

Figure 19: Par.

– **A3**... $\underline{\ \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}\ }$ ... **<u>Deslizador</u>** - neste caso o torsor admite um eixo central Δ, como vimos antes. Além disso, por (5.27), e como o passo $h = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(o)/\omega^2 = 0$, tem-se que:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(p) = h\,\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(o)}{\omega^2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \equiv \overrightarrow{\mathbf{0}}, \qquad \forall p \in \Delta$$

isto é, o momento de $\mathfrak{T}$ é nulo em todo o ponto do seu eixo central Δ. Portanto, se $o \in \Delta$, temos que:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(p) = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{op}, \qquad \forall p \in \mathcal{E}$$

O deslizador $\mathfrak{T}$ (onde $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, mas $I(\mathfrak{T}) = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(o) = 0$), pode ser representado por:

$$\mathcal{S} = \{(\Delta; \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}})\}$$

Figure 20: Deslizador.

- **B**... $\boxed{I = \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(o) \neq 0}$ ... No ponto o, decompômos $\overrightarrow{\mathbf{M}}(o) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_0$, em dois vectores aplicados em o:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}}(o) = \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\parallel}(o) + \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\perp}(o) \tag{5.38}$$

com $\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\parallel}(o)$ colinear com $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$, e $\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\perp}(o)$ perpendicular a $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ (ver a figura 21).

Figure 21: .

Por definição de adição de torsores, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}(o)) \\ &= \underbrace{(\overrightarrow{\mathbf{0}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\|}(o))}_{\text{um par } \mathfrak{T}_{\|}} + \underbrace{(\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\perp}(o))}_{\text{um deslizador } \mathfrak{T}_{\perp}} \end{aligned} \tag{5.39}$$

onde $\mathbf{M}_{\|} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, uma vez que $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ não é perpendicular a $\mathbf{M}(o)$. O deslizador $\mathfrak{T}_{\perp} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\perp}(o))$ é representado por um único vector deslizante, cujo suporte é o eixo central Δ. Desta forma o torsor $\mathfrak{T}$ decompõe-se na soma de um par $\mathfrak{T}_{\|} = (\overrightarrow{\mathbf{0}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\|}(o))$, de momento constante igual a $\overrightarrow{\mathbf{M}}_{\|}(o) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, com um deslizador $\mathfrak{T}_{\perp} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}_{\perp}(o))$.

Vamos agora provar que: it “todo o torsor pode ser decomposto, de uma infinidade de maneiras possíveis, como soma de dois deslizadores”. Antes do mais um lema:

Lema... *Seja $\mathfrak{T} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}(o))$ um torsor de resultante geral $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, e $\mathfrak{D}_1$ um deslizador de eixo central D não paralelo a $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$, tal que:*

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{T}, \mathfrak{D}_1) \neq 0$$

Existe então um deslizador único $\mathfrak{D}_2$ e um número real λ único, tais que:

$$\mathfrak{T} = \lambda \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 \tag{5.40}$$

– **Dem.** ... Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja:

$$\mathfrak{T}_\lambda = \mathfrak{T} - \lambda \mathfrak{D}_1$$

de tal forma que $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}$. Representando por $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_1$ a resultante geral de $\mathfrak{D}_1$, a resultante geral de$\mathfrak{T}_\lambda$ é $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} - \lambda \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_1$, que é não nula já que $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}_1$ são não colineares. Portanto, $\mathfrak{T}_\lambda$ será um deslizador sse o seu invariante escalar fôr nulo, isto é:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{c}\,(\mathfrak{T}_\lambda, \mathfrak{T}_\lambda) \\ &= \mathfrak{c}\,(\mathfrak{T} - \lambda \mathfrak{D}_1, \mathfrak{T} - \lambda \mathfrak{D}_1) \\ &= \mathfrak{c}\,(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) - 2\lambda\, \mathfrak{c}\,(\mathfrak{T}, \mathfrak{D}_1) + \lambda^2 \underbrace{\mathfrak{c}\,(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1)}_{=0} \\ &= \mathfrak{c}\,(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) - 2\lambda\, \mathfrak{c}\,(\mathfrak{T}, \mathfrak{D}_1) \end{aligned}$$

donde se deduz que $\mathfrak{T}_\lambda$ será um deslizador sse:

$$\lambda = \frac{\mathfrak{c}\,(\mathfrak{T},\mathfrak{T})}{2\lambda\,\mathfrak{c}\,(\mathfrak{T},\mathfrak{D}_1)}$$

e para este valor de λ, o deslizador $\mathfrak{D}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{T}-\lambda\mathfrak{D}_1$ verifica as condições enunciadas, $\blacksquare$.

Seja $\mathfrak{T} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}(o))$ um torsor de resultante geral $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, e D uma recta afim. Consideremos um deslizador $\mathfrak{D}_1$ não nulo, de eixo cental D, e apliquemos o lema anterior. Concluímos então que: *"$\mathfrak{T}$ decompõe-se numa soma de dois deslizadores, em que um deles tem por eixo central D, sse D não é nem paralela a $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$, nem uma recta de momento nulo de $\mathfrak{T}$. Esta decomposição é então única"*.

6 Complexo de rectas de momento nulo de um torsor $\mathfrak{T}$

6.1 Complexo de rectas nulas $\mathcal{N}_\mathfrak{T}$

Seja $\mathfrak{T} = (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}, \overrightarrow{\mathbf{M}}(o))$ um torsor cujos elementos de redução, num ponto o, são $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \in \overrightarrow{\mathbf{E}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{M}}(o) \in \overrightarrow{\mathbf{E}}_o$.

Seja D uma recta afim em $\mathcal{E}$. Se o campo de momentos $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\mathfrak{T}$, é perpendicular a D, num certo ponto $p \in D$, então $\overrightarrow{\mathbf{M}}$ será também perpendicular a D, num qualquer outro ponto $q \in D$. Com efeito, pela propriedade de equiprojectividade de $\overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mathbf{M}}_\mathfrak{T}$, temos que:

$$0 = \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(p) = \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(q)$$

Uma tal recta D diz-se uma **recta de momento nulo do torsor** $\mathfrak{T}$, ou simplesmente uma **recta nula de** $\mathfrak{T}$, e o conjunto de todas essas rectas diz-se o **complexo de rectas nulas do torsor** $\mathfrak{T}$, e nota-se por:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_\mathfrak{T}$$

O conjunto das rectas nulas de $\mathfrak{T}$, que passam por um mesmo ponto $p \in \mathcal{E}$, formam um plano π_p, que contem p, e correlativamente, o conjunto de todas as rectas nulas que estão num mesmo plano π, passam todas por um mesmo ponto $p_\pi \in \pi$. Desta forma fica definida uma correlação involutiva:

Pontos de $\mathcal{E}$	$\longleftrightarrow$	**Planos afins de $\mathcal{E}$**
p	$\longrightarrow$	π_p
p_π	$\longleftarrow$	π

- O plano π_p diz-se o **plano focal** ou o **plano polar** do ponto p.
- O ponto p_π diz-se o **fóco** ou o **pólo** do plano π.

Note que $p \in \pi_p$ e que $p_\pi \in \pi$, isto é, um ponto p pertence sempre ao seu plano polar e, correlativamente, o pólo de um plano pertence sempre a esse plano[2]. Note ainda que, por definição, todas as rectas do plano π que passam no seu pólo p_π, pertencem ao complexo $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$ (ou, de forma equivalente, toda a recta que passa num ponto p e que está contida no plano polar π_p, pertence ao complexo).

Se designarmos por π_∞ o plano do infinito, então o respectivo pólo $p_\infty = p_{\pi_\infty}$ (que é um ponto no infinito), define uma direcção bem determinada no espaço, a que chamamos a **direcção axial** do complexo $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$. A um plano cujo pólo esteja no infinito, chamaremos um **plano diametral**.

O complexo linear $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$ define pois um conjunto de pares:

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{T}} = \{(p, \pi_p), \quad p \in \mathcal{E}\}$$

(ou de forma equivalente $\{(p_\pi, \pi)\}$), constituídos por um ponto $p \in \mathcal{E}$ e pelo respectivo plano polar π_p, a que chamamos o **sistema focal** associado ao complexo $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$.

6.2 Equação do complexo $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$

Vamos caracterizar uma recta nula de $\mathfrak{T}$, em função dos elementos de redução $\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{M}}(o)$ de $\mathfrak{T}$, num ponto o, fixo de forma arbitrária. Seja $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ um vector director unitário de D, e $p \in D$ uma ponto arbitrário de D. Então $D \in \mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$ sse:

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(p) \\
&= \overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot (\overrightarrow{\mathbf{M}}(o) + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{op}) \\
&= \overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(o) + \overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{op}) \\
&= \overrightarrow{\mathbf{u}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{M}}(o) + \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\overrightarrow{op} \times \overrightarrow{\mathbf{u}})
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Fixemos um referencial ortonormado positivo $\{o; \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$, e seja:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{\omega}} = \mathfrak{p}\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathfrak{q}\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \mathfrak{r}\,\hat{\boldsymbol{k}} \\ \overrightarrow{\mathbf{M}}(o) = \xi\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + \eta\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \zeta\,\hat{\boldsymbol{k}} \end{cases} \tag{6.2}$$

Suponhamos ainda que:

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = X\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + Y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + Z\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

e consideremos as projecções do momento do vector deslizante $(D, \overrightarrow{\mathbf{u}})$, relativamente ao ponto o, em cada um dos eixos do referencial anterior:

$$\begin{aligned}
L &= (\overrightarrow{op} \times \overrightarrow{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\imath}} = yZ - zY \\
M &= (\overrightarrow{op} \times \overrightarrow{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\jmath}} = zX - xZ \\
N &= (\overrightarrow{op} \times \overrightarrow{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\boldsymbol{k}} = xY - yX
\end{aligned} \tag{6.3}$$

onde:

$$p = o + x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\hat{\boldsymbol{k}}$$

[2] a correlação é simplética (ver [])...

é um ponto arbitrário de D. Os números (X, Y, Z, L, M, N) chamam-se **coordenadas de Plücker** da recta D. Satisfazem a relação fundamental:

$$\boxed{\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} LX + MY + NZ = 0} \tag{6.4}$$

uma vez que $\vec{\mathbf{u}} = (X, Y, Z)$ é perpendicular a $\mathbf{M}((D, \vec{\mathbf{u}}); o) = \vec{op} \times \vec{\mathbf{u}} = (L, M, N)$.

A equação (6.1) fica então na forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o) + \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\vec{op} \times \vec{\mathbf{u}}) \\ &= (X, Y, Z) \cdot (\xi, \eta, \zeta) + (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \cdot (L, M, N) \\ &= \xi X + \eta Y + \zeta Z + \mathfrak{p}L + \mathfrak{q}M + \mathfrak{r}N \end{aligned} \tag{6.5}$$

isto é:

$$\boxed{\xi X + \eta Y + \zeta Z + \mathfrak{p}L + \mathfrak{q}M + \mathfrak{r}N = 0} \tag{6.6}$$

que é uma equação linear nas coordenadas de Plücker (X, Y, Z, L, M, N) da recta D - a chamada **equação do complexo** $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$. Esta equação pode ainda ser escrita na forma:

$$\boxed{\xi\, X + \eta\, Y + \zeta\, Z + \mathfrak{p}\,(yZ - zY) + \mathfrak{q}\,(zX - xZ) + \mathfrak{r}\,(xY - yX) = 0} \tag{6.7}$$

6.3 Equação do plano polar

Vejamos qual a equação do plano polar π_{p_o}, do ponto p_o cujas coordenadas, no referencial $\{o; \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$, são (x_o, y_o, z_o). Na equação (6.7), o ponto $(x = x_o, y = y_o, z = z_o)$ estará fixo e portanto X, Y, Z devem satisfazer:

$$\xi\, X + \eta\, Y + \zeta\, Z + \mathfrak{p}\,(y_o Z - z_o Y) + \mathfrak{q}\,(z_o X - x_o Z) + \mathfrak{r}\,(x_o Y - y_o X) = 0$$

Se designarmos por (x, y, z) as coordenadas correntes de um ponto do plano polar π_{p_o}, a sua equação, obtem-se substituindo X, Y, Z, respectivamente por $x - x_o$, $y - y_o$ e $z - z_o$. Calculando, obtemos a equação seguinte:

$$\pi_{p_o} : \quad \boxed{(\xi + \mathfrak{q}z_o - \mathfrak{r}y_o)\,(x - x_o) + (\eta + \mathfrak{r}x_o - \mathfrak{p}z_o)\,(y - y_o) + (\zeta + \mathfrak{p}y_o - \mathfrak{q}x_o)\,(z - z_o) = 0} \tag{6.8}$$

6.4 Rectas conjugadas

Vamos de seguida estabelecer algumas propriedades dos complexos lineares:

P 1 ... *Seja q um ponto situado num plano ϖ. Então o plano polar π_q, de q, passa pelo pólo p_ϖ do plano ϖ:*

$$\boxed{q \in \varpi \qquad \longrightarrow \qquad \pi_q \ni p_\varpi} \tag{6.9}$$

- Dem... O ponto q pertence simultâneamente aos planos ϖ, por hipótese, e ao seu plano polar π_q. Logo pertence à recta de intersecção desses dois planos, que é portanto uma recta do complexo (por passar em q e estar no plano polar π_q). Mas como esta recta está no plano ϖ, ela passa pelo pólo p_ϖ, desse plano. O plano π_q, contendo essa recta, passa portanto em p_ϖ (ver a figura 22).

■.

Figure 22: $q \in \varpi \quad \longrightarrow \quad \pi_q \ni p_\varpi$.

Se o plano ϖ é o plano do infinito π_∞, então π_q é um plano diametral, e deduzimos da proposição anterior que *"todo o plano diametral é paralelo à direcção axial do complexo"*.

Recìprocamente, suponhamos que ϖ é um plano paralelo à direcção axial do complexo $\mathcal{N}$, isto é, ϖ contem o pólo $q = p_\infty = p_{\pi_\infty}$, do plano no infinito π_∞. Aplicando a proposição anterior, deduzimos que o pólo p_ϖ, de ϖ, pertence ao plano polar $\pi_q = \pi_\infty$, isto é, ϖ tem o seu pólo no infinito e é portanto um plano diametral. Concluindo - "*todo o plano paralelo à direcção axial é diametral*".

P 2 ... *Seja D uma recta que não pertence ao complexo $\mathcal{N}$. Os planos de $\mathcal{E}$ que passam por D, têm os seus pólos situados sobre uma mesma recta D':*

$$\boxed{D \notin \mathcal{N}, \quad D \subset \{\pi\} \quad \longrightarrow \quad \{p_\pi\} \in D'} \tag{6.10}$$

- Dem... Sejam π e π' dois planos quaisquer que contêm D, $p = p_\pi$ e $p' = p_{\pi'}$ os respectivos pólos, e D' a recta que os une. Seja ϖ um plano qualquer, que contem D'. Então o seu pólo $q = p_\varpi$ é necessàriamente o ponto de intersecção de ϖ com D. Com efeito as rectas $\overline{qp}$ e $\overline{qp'}$, são rectas do complexo $\mathcal{N}$, contidas em ϖ, e a sua intersecção é o pólo de ϖ. Daqui resulta que *"toda a recta que intersecta D e D' pertence ao complexo"*, e, além disso, qualquer plano que comtenha D, tem o seu pólo na sua intersecção com D'.

■.

Duas rectas que estejam nas condições da proposição anterior, dizem-se **conjugadas**. Qualquer delas é o lugar geométrico dos pólos dos planos que contêm a outra. Há por isso entre elas reciprocidade.

6.5 Complexo de normais às trajectórias dos pontos de um espaço móvel, num dado instante t.

Dado um movimento $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F}; g_t)$, podemos definir um campo de vectores (dependente do tempo) $\vec{\mathbf{v}}_t$ em $\mathfrak{F}$, da seguinte forma - fixemos um instante $t \in I$, e um ponto arbitrário $p \in \mathfrak{F}$. Seja:

$$\boxed{P_t = g_t^{-1}(p) \in \mathfrak{M}} \tag{6.11}$$

o chamado t**-coincidente de** p **em** $\mathfrak{M}$, isto é, a partícula de $\mathfrak{M}$, que, no instante t, ocupa a posição $p \in \mathfrak{F}$, no espaço fixo. Definimos então o campo de vectores $\vec{\mathbf{v}}_t$, em $\mathfrak{F}$, através de:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(p) \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=t} g_\tau(P_t)} \tag{6.12}$$

Portanto $\vec{\mathbf{v}}_t(p)$ é a velocidade, no instante t, do movimento (absoluto) da partícula $P_t \in \mathfrak{M}$, cuja posição no instante t é o ponto $p \in \mathfrak{F}$.

Uma propriedade importante deste campo $\vec{\mathbf{v}}_t$, é que é um **campo equiprojectivo**, e portanto um **torsor**.

Seja:

$$r_t = g_t(\mathcal{R}) = \{g_t(O) = a_t;\, \hat{\boldsymbol{\imath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{I}), \hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{J}), \hat{\boldsymbol{k}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{K})\}$$

um referencial móvel para $\mathcal{E}$. Então, se:

$$\vec{\boldsymbol{\Omega}}(t) = \mathfrak{p}(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}(t) + \mathfrak{q}(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + \mathfrak{r}(t)\,\hat{\boldsymbol{k}}(t) \tag{6.13}$$

é a expressão do vector de rotação instantânea, expresso na base móvel, virá então, para o campo de velocidades, expresso na base móvel, e no instante t:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{V}}_t(x,y,z) &= \xi(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}(t) + \eta(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + \zeta(t)\,\hat{\boldsymbol{k}}(t) + \\ &\quad + \Big(\mathfrak{p}(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}}(t) + \mathfrak{q}(t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + \mathfrak{r}(t)\,\hat{\boldsymbol{k}}(t)\Big) \times \Big(x\,\hat{\boldsymbol{\imath}}(t) + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + z\,\hat{\boldsymbol{k}}(t)\Big)\end{aligned}$$

isto é:

$$\boxed{\vec{\mathbf{V}}_t(x,y,z) = \begin{bmatrix} V_x &=& \xi(t) &+& \mathfrak{q}(t)\,z &-& \mathfrak{r}(t)\,y \\ V_y &=& \eta(t) &+& \mathfrak{r}(t)\,x &-& \mathfrak{p}(t)\,z \\ V_z &=& \zeta(t) &+& \mathfrak{p}(t)\,y &-& \mathfrak{q}(t)\,x \end{bmatrix}_{r_t}} \tag{6.14}$$

onde pusemos:

$$\overrightarrow{a_t p} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}}(t) + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}(t) + z\,\hat{\boldsymbol{k}}(t)$$

isto é, x, y, z são as componentes de um ponto $p \in \mathcal{E}$, relativamente ao referencial móvel $r_t = \{o = a_t;\, \hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \hat{\boldsymbol{k}}\}$ (omitimos t, por simplicidade).

Portanto as componentes do torsor $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}_t$, no instante t, são a sua resultante geral, que é o vector de rotação instantânea $\vec{\boldsymbol{\Omega}} = \vec{\boldsymbol{\Omega}}_t$, e o momento em o, $\vec{\mathbf{V}}_t(0,0,0) = \mathbf{R}^{-1}(\dot{a}_t) = (\xi, \eta, \zeta)_{r_t}$, que é a velocidade da origem do referencial móvel $o = a_t$, expressa nesse mesmo referencial.

O complexo $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\vec{\mathbf{V}}}$, é constituído por todas as rectas de $\mathcal{E}$ que são perpendiculares à velocidade de um dos seus pontos (e portanto, a qualquer dos seus pontos).

Dois casos são possíveis:

- $\vec{\mathbf{\Omega}}_t \neq \vec{\mathbf{0}}$ - a rotação instantânea não é nula (no instante t) ... o movimento não é uma translacção instantânea, e o sistema $(\vec{\mathbf{\Omega}}_t, \vec{\mathbf{V}}_t(o))$ admite um eixo central $\Delta = \Delta_t$, que é o eixo instantâneo do movimento.

  Escolhamos a origem do referencial $o \in \Delta$, e sejam $(\vec{\mathbf{\Omega}}_t, \vec{\mathbf{V}}_t(o) = h\,\vec{\mathbf{\Omega}}_t)$ os elementos de redução de $\vec{\mathbf{V}}_t$, ao eixo central.

  Diremos que Δ é o **eixo do complexo** e que h é o seu **passo**.

  Se $\vec{\mathbf{V}}_t(o) = \vec{\mathbf{0}}$ ou se $h = 0$, temos o que se chama um **complexo especial** - o movimento é uma rotação instantânea, e as rectas do complexo são as que intersectam o eixo Δ do complexo. O plano polar de um ponto p é o plano que contem p e o eixo Δ do complexo.

- $\vec{\mathbf{\Omega}}_t = \vec{\mathbf{0}}$ - a rotação instantânea é nula (no instante t) ... Como $\vec{\mathbf{V}}_t(p) = \vec{\mathbf{V}}_t(0) + \vec{\mathbf{\Omega}} \times \overrightarrow{op}$, vemos que $\vec{\mathbf{V}}_t(p) \equiv \vec{\mathbf{V}}_t(o)$, $\forall p \in \mathcal{E}$, e o movimento é uma translacção instantânea. As rectas do complexo $\mathcal{N}$ são todas as que são perpendiculares ao vector constante $\vec{\mathbf{V}}_t(o)$. Temos um **complexo especial** - todas as rectas do complexo intersectam a recta do infinito do plano perpendicular a $\vec{\mathbf{V}}_t(o)$, que pode ser considerada como o eixo do complexo.

6.6 Equação reduzida do complexo

Escolhamos o referencial móvel r_t, no instante t, de tal forma que o eixo dos zz coincida com o eixo instantâno Δ, do movimento. Temos então que:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{\Omega}} &= \omega\,\widehat{\boldsymbol{k}}, & &\text{isto é } \mathfrak{p} = 0 = \mathfrak{q} \text{ e } \mathfrak{r} = \omega \\ \vec{\mathbf{V}}_t(o) &= h\omega\,\widehat{\boldsymbol{k}}, & &\text{isto é } \xi = 0 = \eta \text{ e } \zeta = h\omega \end{aligned} \tag{6.15}$$

e portanto, por (6.14):

$$V_x = -\omega\, y, \qquad V_y = \omega\, x, \qquad V_z = h\,\omega \tag{6.16}$$

e a equação do complexo será (ver (6.6)):

$$\boxed{h\omega\, Z + \omega\, N \;=\; 0} \tag{6.17}$$

ou (ver (6.7)):

$$\boxed{h\omega\, Z + \omega\,(xY - yX) \;=\; 0} \tag{6.18}$$

O eixo do complexo é o eixo dos zz. O caso geral é quando $\omega \neq 0$ e $h \neq 0$, isto é, quando o movimento não se reduz a uma translacção ou a uma rotação pura. Se o complexo fôr especial, temos os dois caos seguintes:

- $\omega \neq 0$, mas $h = 0$. A equação reduzida do complexo será $N = 0$.

- $\omega = 0$, mas $h \neq 0$. A equação reduzida do complexo será $Z = 0$, escolhendo o eixo dos zz praralelo **o**vector constante $\vec{\mathbf{V}}_t(o)$.

A equação(6.8), do plano polar do ponto $p_o = (x_o, y_o, z_o)_{r_t}$, fica com o aspecto seguinte:

$$-\omega\, y_o\,(x - x_o) \;+\; \omega\, x_o\,(y - y_o) \;+\; h\omega\,(z - z_o) \;=\; 0$$

isto é:

$$\pi_{p_o}: \qquad \boxed{-y_o\, x + x_o\, y + h\,(z - z_o) \;=\; 0} \tag{6.19}$$

que é perpendicular a $(-y_o, x_o, h)$.

Seja π um plano qualquer, e p_1, p_2 dois pontos quaisquer nesse plano. Os planos polares π_1 e π_2 de p_1 e p_2, respectivamente, intersectam o plano pi segundo duas rectas D_1 e D_2, que pertencem ao complexo $\mathcal{N}$, e que se intersectam num certo ponto $p \in \pi$. A velocidade de p, no instante t, sendo perpendicular a D_1 e a D_2, é portanto perpendicular a π. Este ponto p é o pólo de π.

Se q é um ponto arbitrário do plano π, a recta $\overline{pq}$ pertence ao complexo $\mathcal{N}$,