FCUP
Dep. Matemática Pura

CURSO de CÁLCULO AVANÇADO

RESUMO das aulas teóricas

4.^{o} **ano das licenciaturas em Matemática Pura e Aplicada**

João Nuno Tavares

Dept. Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Univ. Porto, 4050 Porto, Portugal[1]

[1] E-mail adress: jntavar@fc.up.pt

Introdução

Estas notas devem ser encaradas como um mero "guião" para as aulas, e portanto não são um substituto da bibliografia indicada e muito menos das aulas. Pretendem porém ser um incentivo ou um guia para a consulta da bibliografia indicada.

Incluem com detalhe os principais conceitos e resultados do curso, e ainda os enunciados dos exercícios propostos para as aulas práticas. Espera-se que sejam um auxiliar valioso para o curso, que em particular permita uma maior liberdade na explicação teórica dos assuntos, substituindo uma exposição com grande detalhe formal por uma que realce os aspectos geométricos e intuitivos desses mesmos conceitos e respectivas inter-relações, e que por outro lado sejam um estímulo à atenção e participação activa dos alunos. Finalmente pretende-se com este texto garantir uma maior uniformidade nas notações usadas e nos enunciados de definições e teoremas (aliás um dos problemas desta disciplina é exactamente o peso excessivo das notações, pelo que se impõe uma escolha criteriosa e um uso uniforme de uma "boa" notação!).

O programa está estruturado assumindo alguns preliminares dos quais destaco:

- um conhecimento detalhado de cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$, nomeadamente, a noção de diferencial, regra da cadeia, os teoremas da função inversa e da função implícita, mudança de variáveis em integrais múltiplos e os teoremas clássicos (de Green, Gauss e Stokes) da análise vectorial (teoria do campo).
- o teorema da existência, unicidade e dependência diferenciável das condições iniciais, para soluções de equações diferenciais ordinárias.
- rudimentos de álgebra multilinear, nomeadamente, as noções de produto tensorial e produto exterior de espaços vectoriais.
- alguma prática com geometria de subvariedades em $\mathbb{R}^n$.
- noções básicas de topologia.
- terminologia básica de (teoria de) categorias.
- a tradicional "maturidade matemática" que se espera dos alunos do último ano da licenciatura em Matemática Pura ou Aplicada.

É no entanto previsível que alguns dos tópicos acima referidos exijam exposições prévias, o que evidentemente será feito sempre que necessário.

O programa agora proposto é essencialmente uma introdução ao cálculo e à geometria das variedades e fibrados diferenciáveis. Os objectivos são evidentemente os de conseguir que os alunos adquiram familiaridade com os conceitos básicos de geometria de variedades, e ainda um treino eficaz de cálculo efectivo, que lhes permita prosseguir estudos mais avançados, quer em áreas de geometria (teoria geral de conexões, geometria Riemanniana, classes características, geometria complexa, teoremas de índice, etc...), quer em áreas de aplicações (mecânica Hamiltoniana, relatividade geral, cosmologia, teoria geométrica do controlo, análise e geometria estocástica, sistemas dinâmicos em variedades, cálculo variacional, etc...), quer finalmente em áreas de confluência (geometria simplética, teorias de gauge, supergeometria, invariantes de Donaldson, de Seiberg-Witten, etc...).

Desde o início é feita uma séria tentativa de apresentar os diversos conceitos no seu enquadramento mais fundamental. De facto é minha convicção de que a "simplificação" em geometria se traduz muitas vezes numa omissão dos seus aspectos intuitivos (visuais) e "físicos". Não se deve esquecer que uma das suas principais motivações é exactamente o da "geometrização" de teorias físicas, o que tem raízes históricas profundas, como é sobejamente conhecido. Cito apenas os seguintes exemplos paradigmáticos - as interacções entre: (i). geometria (semi-) Riemanniana e a teoria da relatividade geral, (ii). teorias de gauge e geometria das variedades de baixa dimensão, e mais recentemente, (iii). supersimetria e supergeometria, ou ainda (iv). quantização e geometria não comutativa.

Seria aliás estimulante e interessante despertar o interesse e curiosidade dos alunos por algum destes temas!

Apresento de seguida a programação prevista para as aulas:

Secções I.1-I.2	Variedades, exemplos, asp. topológicos	1+1/2 semanas	6 horas
Secções I.3-I.5	Fibrados. TM, T^*M. Secções.	2 semanas	8 horas
Secções I.6-I.8	Subvariedades. Campos. Distribuições	2 semanas	8 horas
Secções II.1-II.2	Grupos e álgebras de Lie	2 semanas	8 horas
Secções II-3	Acções. Esp. Homogéneos	1+1/2 semana	6 horas
Capítulo III	Formas. Cálculo de Cartan	2 semanas	8 horas
Capítulo III (cont.)	Integração. Aplicações	2 semanas	8 horas
	Totais	13 semanas	52 horas

ÍNDICE:

BIBLIOGRAFIA...

I. **Geral**...

• [BD]... T. Bröcker, T. Dieck , *"Representations of Compact Lie Groups"*, GTM 98, Springer-Verlag, 1987.

• [Br]... G. E. Bredon , *"Topology and Geometry"*, GTM 139, Springer-Verlag, 1993.

• [DFN]... B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov, *"Modern Geometry - Methods and Applications"*, Parts I e II. GTM 93 e 104, Springer-Verlag, 1990.

• [Har]... F. R. Harvey, *"Spinors and Calibrations"*, Academic Press, Inc., 1990.

• [Hir]... M. W. Hirsch, *"Differential Topology"*, GTM 33, Springer-Verlag, 1976.

• [KN]... S. Kobayashi, K. Nomizu, *"Foundations of Differential Geometry"*, vol. I e II. Interscience Publishers, J. Wiley, 1963.

• [KMS]... I. Kolár, P.W. Michor, J. Slovák, *"Natural Operations in Differential Geometry"*, Springer-Verlag, 1993.

• [O'N]... B. O'Neill, *"Semi-Riemannian Geometry, with applications to Relativity"*, Academic Press, Inc., 1983.

• [Po]... W.A. Poor, "*Differential Geometric Structures*", McGraw-Hill Book Company, 1981.

• [PQ]... P. M. Quan, "*Introduction à la géometrie des variétés différentiables*", Dunod, Paris, 1969.

• [Sp]... M. Spivak, *"A Comprehensive Introduction to Differential Geometry"*, vol. I,II, III, IV e V, Publish or Perish, Inc. 1979.

• [St]... S. Sternberg, *"Lectures on Differential Geometry"*, Chelsea Publishing Company, N.Y., 1983.

• [Tav]... J.N. Tavares, *"Curso de Geometria Diferencial"*, FCUP, 1997.

• [Wa]... F. W. Warner, *"Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups"*, Scott, Foresman and Company, 1971.

• [We]... R. O. Wells, *"Differential Analysis on Complex Manifolds"*, GTM 65, Springer-Verlag, 1980.

II. **Aplicações**...

• [AM]... R. Abraham, J. E: Marsden, *"Foundations of Mechanics"*, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

- [DFN]... B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov, *"Modern Geometry - Methods and Applications"*, Parts I e II. GTM 93 e 104, Springer-Verlag, 1990.

- [Fr]... T. Frankel, *"The Geometry of Physics: an introduction"*, Cambridge University Press, 1997.

- [MR]... J. E. Marsden, T. S. Ratiu, *"Introduction to Mechanics and Symmtry"*, TAM 17, Springer-Verlag, 1994.

- [Nab]... G. L. Naber, *"Topology, Geometry, and Gauge Fields"*, TAM 25 Springer-Verlag, 1997.

- [Nak]... M. Nakahara, *"Geometry, Topology and Physics"*, Adam Hilger, 1990.

- [NS]... C. Nash, S. Sen, *"Topology and Geometry for and Physicists"*, Academic Press, Inc. 1983.

- [O'N]... B. O'Neill, *"Semi-Riemannian Geometry, with applications to Relativity"*, Academic Press, Inc., 1983.

- [WW]... R. S. Ward, R. O. Wells, *"Twistor Geometry and Field Theory"*, Cambridge University Press, 1990.

- [West]... von Westenholz, *"Differential Forms in Mathematical Physics"*. North-Holland Publishing Company (1978).

Capítulo 1

Variedades. Fibrados

1.1 Variedades diferenciáveis. Definição e exemplos

1.1.1 Variedades. Estruturas Diferenciáveis. Exemplos

♣ <u>**Definição**</u> **1.1** ... *Uma* **"variedade"** *(real) M de dimensão n, é um espaço Haussdorff com uma base numerável* ([1])*, que é localmente homeomorfo ao espaço $\mathbb{R}^n$, i.e., cada ponto $p \in M$ admite uma vizinhança aberta $U \subseteq M$ homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$, através de um homeomorfismo $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$, sobre um aberto U' de $\mathbb{R}^n$.*

Um par (U, φ) nas condições da definição anterior diz-se uma **"carta local"** de M. Representemos por $r^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ as funções coordenadas usuais em $\mathbb{R}^n$, de tal forma que $r^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$. Se φ é dada por n funções reais:

$$\varphi(.) = (x^1(.), \cdots, x^n(.)) \qquad \text{onde} \quad x^i \overset{\text{def}}{=} r^i \circ \varphi,\ i = 1, \cdots, n \tag{1.1.1}$$

a essas funções $x^i(.)$ chamam-se **"coordenadas locais"** em $U \subseteq M$: se $p \in U$ os números $(x^1(p), \cdots, x^n(p))$ são portanto as coordenadas locais de p, relativamente à carta local (U, φ), que por vezes se nota por $(U; x^1, \cdots, x^n))$. É também usual chamar a $\varphi^{-1} : U' \subseteq \mathbb{R}^n \to U \subseteq M$, uma parametrização (local) do aberto U de M, usando as coordenadas (locais) $x^1, \cdots, x^n$.

♣ <u>**Definição**</u> **1.2** ... *Uma* **"estrutura diferenciável"** *(real) de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$ ou $k = \omega$) numa variedade M de dimensão n, é uma colecção maximal de cartas locais $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, C^k-compatíveis, isto é que satisfazem as condições seguintes:*

- $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$

[1] isto é, existe uma família $\mathcal{A}$ numerável de abertos de M tal que qualquer aberto de M é reunião de uma subfamília de $\mathcal{A}$.

- *Sempre que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *a função:*

$$\varphi_{\beta\alpha} \stackrel{def}{=} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é de classe C^k.

- *A colecção* $\mathcal{F}$ *é maximal relativamente à condição anterior, i.e., se* (U, φ) *é uma carta local tal que* $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *e* $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ *(quando definidas) são de classe* C^k, $\forall \alpha$, *então* $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.

Uma colecção $\mathcal{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, que satisfaz as duas primeiras condições da definição anterior chama-se um **"atlas"** em M. Quando $\mathcal{F}$ satisfaz também a terceira condição diz-se que o atlas $\mathcal{F}$ é maximal. Se $k = \infty$ (resp. $k = \omega$) a estrutura diferenciável diz-se de classe C^∞, (resp., analítica real).

Note que se $\mathcal{F}_o = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é um atlas de cartas locais que portanto satisfaz as duas primeiras condições da definição anterior, então existe uma única estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ que contem $\mathcal{F}_o$, nomeadamente a definida pelo atlas maximal:

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{(U, \varphi) : \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \ \ e \ \ \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \text{são de classe}\, C^k, \ \forall \varphi_\alpha \in \mathcal{F}_o\}$$

♣ **Definição 1.3** ... *Uma* **"Variedade Diferenciável"** *de classe* C^k *é um par* $(M, \mathcal{F})$ *onde* M *é uma variedade de dimensão* n*, munida de uma estrutura diferenciável (real) de classe* C^k*, definida por um atlas maximal* $\mathcal{F}$ *em* M.

No nosso curso vamos essencialmente restringir a nossa atenção a variedades de classe C^∞, pelo que de aqui em diante:

$$\boxed{\text{Diferenciabilidade refere-se sempre à classe } C^\infty}$$

Exemplos ...

(i). A **"Esfera"** $SS^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{v}\| = 1\}$ é uma variedade de dimensão n. A estrutura diferenciável pode ser definida pelo atlas maximal que contem as cartas (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2), com $U_1 = SS^n - \{N\}$, $U_2 = SS^n - \{S\}$, onde N, S são respectivamente os pólos norte e sul de SS^n, e φ_1, φ_2 as respectivas projecções estereográficas.

Mais concretamente, se $\mathbf{v} = (v^1, \cdots, v^{n+1}) \in SS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, pômos:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\mathbf{v}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{v^1}{1 - v^{n+1}}, \cdots, \frac{v^n}{1 - v^{n+1}}\right) \qquad \text{se} \quad \mathbf{v} \in U_1 = SS^n - \{N\} \\
\varphi_2(\mathbf{v}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{v^1}{1 + v^{n+1}}, \cdots, \frac{v^n}{1 + v^{n+1}}\right) \qquad \text{se} \quad \mathbf{v} \in U_2 = SS^n - \{S\}
\end{aligned}$$

(ii). Sejam $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$, n vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$. Definamos uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^n$ através de:

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \qquad \text{sse existem inteiros } m^1, m^2, \cdots, m^n \in \mathbb{Z}, \text{ tais que} \qquad \mathbf{v} - \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} m^i \mathbf{v}_i$$

Representemos por $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\sim$ a respectiva projecção. O espaço quociente $\mathbf{T}^n \overset{\text{def}}{=} \pi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n/\sim$ chama-se um **"Toro"**, e é uma variedade de dimensão n. A estrutura diferenciável pode ser definida pelo atlas maximal que contem as cartas definidas da seguinte forma: seja $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ que não contem qualquer par de pontos equivalentes. Pômos então $(U = \pi(\mathcal{O}), \varphi = (\pi|_{\mathcal{O}})^{-1})$, que é uma carta local.

(iii). O produto de duas variedades diferenciáveis $M \times N$ é uma variedade diferenciável. Com efeito, se $\mathcal{F}_M = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ e $\mathcal{F}_N = \{V_\beta, \varphi_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ são atlas definindo a estrutura diferenciável de M e N, respectivamente, então $\mathcal{F} = \{U_\alpha \times V_\beta, (\varphi_\alpha, \varphi_\beta)\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ é um atlas para $M \times N$.

(iv). O espaço de configuração de um pêndulo duplo é o toro $\mathbf{T}^2 = SS^1 \times SS^1$.

(v). O espaço de configuração de um corpo rígido que se move livremente (na ausência de forças externas) em $\mathbb{R}^3$ com um ponto sempre fixo, é $SO(3) \cong \mathbb{RP}(3)$, uma variedade compacta de dimensão 3.

1.1.2 Funções e aplicações diferenciáveis

Seja M uma variedade diferenciável. Consideremos uma função real definida em M (ou mais geralmente num aberto de M) $f : M \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}$ é uma carta local em M, com coordenadas locais associadas $x^i_\alpha = r^i \circ \varphi_\alpha$. Então a restrição de f a U_α, pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} f(.) &= (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ \varphi_\alpha(.) \\ &= (f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x^1_\alpha(.), \cdots, x^n_\alpha(.)) \end{aligned}$$

Portanto relativamente às coordenadas locais (x^i_α), em $U_\alpha \subseteq M$, a restrição de f a U_α admite a chamada **"representação local"**:

$$f_\alpha \overset{\text{def}}{=} f \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

que é uma função de n variáveis reais x^i_α:

$$f_\alpha(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha) \tag{1.1.2}$$

Diremos que f é de classe C^∞ sse $f_\alpha(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha)$ é uma função de classe C^∞ (como função das n variáveis x^i_α), $\forall (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}$.

Por abuso de notação, é usual identificar f com a sua representação local f_α, e no domínio de uma carta, pensar em f como uma função das coordenadas locais x^i_α. No entanto é importante notar que esta representação depende da escolha da carta local, dependência que na notação que temos vindo a utilizar, se encontra codificada no índice α.

Suponhamos agora que $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ é uma outra carta local, com coordenadas locais associadas $\varphi_\beta(.) = (x^1_\beta(.), \cdots, x^n_\beta(.))$. Por definição a aplicação:

$$\varphi_{\beta\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$$

é um difeomorfismo de classe C^∞, de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ sobre $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, que se representa por funções de classe C^∞:

$$x^i_\beta = \varphi^i_{\beta\alpha}(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha) \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.1.3}$$

ou em notação vectorial (que será usada frequentemente de aqui em diante):

$$\boxed{\mathbf{x}_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha) \qquad \mathbf{x}_\alpha \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n}$$

As funções $\varphi_{\beta\alpha}$ dizem-se as **"funções de mudança de coordenadas"**, das α-coordenadas para as β-coordenadas. Note que a matriz Jacobiana:

$$\boxed{\mathbf{J}_{\beta\alpha}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha) = \left[\frac{\partial \varphi^i_{\beta\alpha}}{\partial x^j_\alpha}(\mathbf{x}_\alpha)\right] \in G\ell(n, \mathbb{R})} \tag{1.1.4}$$

é uma matriz não singular $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Por outro lado, a restrição de f a $U_\alpha \cap U_\beta$ admite duas representações locais de classe C^∞: $f_\alpha(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha)$ e $f_\beta(x^1_\beta, \cdots, x^n_\beta)$, relacionadas por:

$$f_\alpha = f_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$$

A regra da cadeia permite concluir que o facto de f ser de classe C^∞ não depende da representação local escolhida (do índice α).

Representaremos por $C^\infty(M)$ (resp., $C^\infty(U)$) a álgebra das funções reais de classe C^∞, definidas em M (resp., num aberto $U \subset M$).

Mais geralmente, uma aplicação contínua:

$$\Phi : M \longrightarrow N$$

onde $(M, \mathcal{F}_M)$ e $(N, \mathcal{F}_N)$ são duas variedades diferenciáveis (de classe C^∞), diz-se diferenciável (de classe C^∞), se toda a representação local:

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

é uma função de classe C^∞, $\forall (U, \varphi) \in \mathcal{F}_M$, $\forall (V, \psi) \in \mathcal{F}_N$. Representaremos por $C^\infty(M, N)$ o conjunto das funções de classe C^∞, definidas em M e com valores em N.

1.1.3 Exemplo. Os Projectivos

O "**Projectivo real** $\mathbb{RP}(n)$" define-se por:

$$\boxed{\mathbb{RP}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\ell : \ \ell \text{ é subespaço de dimensão 1 em } \mathbb{R}^{n+1}\}} \tag{1.1.5}$$

ou de forma equivalente:

$$\mathbb{RP}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}/_{\sim} \tag{1.1.6}$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência em $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ seguinte: $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ se e só se $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Vamos provar que $\mathbb{RP}(n)$ é uma variedade diferenciável compacta de classe C^∞ e de dimensão n. Para isso comecemos por definir a aplicação natural:

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \\ \pi \downarrow \\ \mathbb{RP}(n) \end{array} \quad \text{através de:} \quad \pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}] \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{subespaço gerado pelo vector } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}\}$$

É claro que π é sobrejectiva. Em $\mathbb{RP}(n)$ definimos a topologia quociente induzida por π, i.e., um subconjunto $U \subset \mathbb{RP}(n)$ diz-se aberto sse $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$. Fica assim definida uma topologia Haussdorff em $\mathbb{RP}(n)$, tal que π é contínua, aberta e sobrejectiva, e para a qual $\mathbb{RP}(n)$ é compacto. De facto:

$$\pi|_{SS^n} : SS^n \longrightarrow \mathbb{RP}(n)$$

é contínua e sobrejectiva e portanto $\mathbb{RP}(n)$ é compacto.

Notas ...

- Para provar que π é aberta podemos usar o seguinte resultado topológico útil:

  ♣ **Proposição 1.1** ... *Seja X um espaço topológico e G um grupo topológico que opera contìnuamente em X. Então a projecção $\pi : X \to X/G$ é aberta.*

  Demonstração... Seja V um aberto em X. Por definição de topologia de identificação, $\pi(V)$ é aberto em X/G se e só se $\pi^{-1}(\pi(V))$ é aberto em X. Mas $\pi^{-1}(\pi(V)) = \cup_{g\in G}\, gV$ é aberto por ser a reunião dos conjuntos da forma $gV \stackrel{\text{def}}{=} \{gx : x \in V\}$. Cada um destes conjuntos, sendo homeomorfo a V, é aberto já que G opera contìnuamente em X.

  □.

  Resta aplicar esta proposição com $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ (ou $X = SS^n$) e $G = \mathbb{R} - \{0\}$, o grupo multiplicativo dos reais não nulos.

- **Para mostrar que $\mathbb{RP}(n)$ é Haussdorff podemos usar um outro resultado topológico útil:**

♣ **Proposição 1.2 ...** ***Seja X um espaço topológico, $\sim$ uma relação de equivalência em X, e $\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : x \sim y\}$. Então:***

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{R}\ \underline{\textit{fechado}}\ \textit{em}\ X \times X \\ \\ \pi : X \to X/_\sim\ \underline{\textit{aberta}} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad X/_\sim \quad \underline{\textit{Haussdorf}}$$

Demonstração... Sejam $\pi(x)$ e $\pi(y)$ dois pontos distintos em $X/_\sim$. Então x e y não são equivalentes, isto é, $(x,y) \notin \mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ é fechado, podemos encontrar vizinhanças abertas V_x e V_y de x e y, respectivamente, tais que $(V_x \times V_y) \cap \mathcal{R} = \emptyset$. Segue-se que $\pi(V_x) \cap \pi(V_y) = \emptyset$, já que caso contrário, existiria $z \in V_x$ e $w \in V_y$ tais que $\pi(z) = \pi(w)$, e portanto $(z,w) \in (V_x \times V_y) \cap \mathcal{R}$, o que é absurdo. Resta observar que como por hipótese π é aberta, $\pi(V_x)$ e $\pi(V_y)$ são abertos em $X/_\sim$.

$\square$.

Para aplicar este resultado à situação presente, consideremos a função:

$$\phi : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \sum_{i<j} (v^i w^j - v^j w^i)^2$$

onde $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, que é contínua e anula-se exactamente quando $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$, para algum $\lambda \neq 0$, isto é, quando $\mathbf{w} \sim \mathbf{v}$. Portanto:

$$\mathcal{R} = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in X \times X : \mathbf{v} \sim \mathbf{w}\} = \phi^{-1}(0)$$

é fechado em $X \times X$ e $\mathbb{RP}(n)$ é Haussdorff.

Se $\mathbf{v} = (v^i) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ (interpretado como vector-coluna), então $(v^0, \cdots, v^n)$ dizem-se as coordenadas homogéneas de $\pi(\mathbf{v})$ e escrevemos:

$$\pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}] = [v^0 : v^1 : \cdots : v^n]$$

Se $(v'^0, \cdots, v'^n)$ é um outro conjunto de coordenadas homogéneas para $[\mathbf{v}] = [v^0 : \cdots : v^n]$, então existe um $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $v'^i = \lambda v^i$, $\forall i$. Portanto $\pi(\mathbf{v}) = \pi(\lambda \mathbf{v})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Usando coordenadas homogéneas definamos agora uma estrutura diferenciável (de facto analítica) em $\mathbb{RP}(n)$. Para cada $\alpha = 0, 1, \cdots, n$ definamos o subconjunto $U_\alpha \subset \mathbb{RP}(n)$ através de:

$$U_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{[\mathbf{v}] \in \mathbb{RP}(n) : [\mathbf{v}] = [v^0 : \cdots : v^\alpha : \cdots : v^n] \ \ e \ \ v^\alpha \neq 0\}$$

É evidente que cada U_α é aberto em $\mathbb{RP}(n)$, e que $\mathbb{RP}(n) = \bigcup_{\alpha=0}^n U_\alpha$. Definamos agora cartas locais $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ onde $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ se define por:

$$\boxed{\varphi_\alpha([v^0 : \cdots : v^\alpha : \cdots : v^n]) = \left(\frac{v^0}{v^\alpha}, \cdots, \widehat{\frac{v^\alpha}{v^\alpha}}, \cdots, \frac{v^n}{v^\alpha}\right)} \tag{1.1.7}$$

onde $\widehat{\ }$ representa uma entrada que deve ser retirada. É fácil ver que cada φ_α é um homeomorfismo, e que as transições $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ são difeomorfismos analíticos. De facto, se $\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$, então:

$$\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{x^{\beta+1}}\left(x^1, \cdots, \widehat{x^{\beta+1}}, \cdots, x^\alpha, 1, x^{\alpha+1}, \cdots, x^n\right) & \text{se} \quad \beta < \alpha \\ \frac{1}{x^\beta}\left(x^1, \cdots, x^\alpha, 1, x^{\alpha+1}, \cdots, \widehat{x^\beta}, \cdots, x^n\right) & \text{se} \quad \beta > \alpha \end{cases}$$

A construção anterior pode ser repetida literalmente, substituindo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$, o que conduz aos chamados **"projectivos complexos"**:

$$\mathbb{CP}(n) \overset{\text{def}}{=} \{\ell : \ \ell \text{ é subespaço de dimensão complexa 1 em } \mathbb{C}^{n+1}\}$$

que são variedades diferenciáveis de dimensão real $2n$. De facto são mais do que isso - são variedades complexas de dimensão complexa n (as funções de mudança de coordenadas $\varphi_{\beta\alpha} : \varphi(U_\alpha) \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, são funções holomorfas ...).

♣ **Exercício 1.1 (i)**. *Detalhar a prova para* $\mathbb{CP}(1)$ *e mostrar que as aplicações de mudança de cartas são holomorfas.*

(ii). *Mostrar que* $\mathbb{CP}(1)$ *é difeomorfo a* SS^2.

(iii). *Mostrar que* $\mathbb{RP}(1)$ *é difeomorfo a* SS^1.

1.1.4 Exemplo. As Grassmannianas

A **"variedade de Grassmann dos subespaços de dimensão** k**"** $(1 \leq k < d)$ em $\mathbb{R}^d$, define-se por:

$$\boxed{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d) \overset{\text{def}}{=} \{S : \ S \text{ é subespaço de dimensão } k \text{ em } \mathbb{R}^d\}} \tag{1.1.8}$$

(em particular, $\mathrm{Gr}_1(\mathbb{R}^d) = \mathbb{RP}(d-1)$).

Vamos provar que $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ é uma variedade diferenciável compacta de classe C^∞ e de dimensão $n = k(d-k)$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{dk}$ das matrizes reais $(d \times k)$, e o seu subconjunto aberto $M_{d,k}(\mathbb{R})$ constituído pelas matrizes de característica máxima k. Cada matriz $M \in \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R})$ será notada por $M = [\mathbf{m}_1 \ \cdots \ \mathbf{m}_k]$ onde $\mathbf{m}_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ é a coluna i de M, interpretada como um vector-coluna em $\mathbb{R}^d$. Se $M \in M_{d,k}(\mathbb{R})$ as suas colunas $\mathbf{m}_i$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^d$ e por isso formam um "k-referencial" em $\mathbb{R}^d$. Por ser aberto em $\mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{dk}$, $M_{d,k}(\mathbb{R})$ é uma variedade de dimensão $n = kd$, a variedade dos k-referenciais em $\mathbb{R}^d$.

Definamos agora a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{ll} M_{d,k}(\mathbb{R}) & \\ \pi \downarrow & \text{através de: } \pi(M) = [M] \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{subespaço gerado pelas colunas } \mathbf{m}_i \text{ de } M\} \\ \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d) & \end{array}$$

Um subconjunto $U \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ diz-se aberto sse $\pi^{-1}(U)$ é aberto em $M_{d,k}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{dk}$. Fica assim definida uma topologia Haussdorff em $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$, tal que π é contínua, aberta e sobrejectiva, e para a qual $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ é compacto. De facto, o subconjunto $K \stackrel{\text{def}}{=} \{M \in M_{d,k}(\mathbb{R}) : \; M^t M = \mathbf{1}\} \subset \mathbb{R}^{dk}$ é compacto e $\pi(K) = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$.

Notemos que:

$$\pi(M) = [M] = [M \cdot G\ell(k, \mathbb{R})]$$

uma vez que o subespaço gerado pelas colunas $\mathbf{m}_i$ de M, é exactamente o mesmo que o gerado pelos vectores $\mathbf{m}_i \, g^i_j$, onde $(g^i_j) \in G\ell(k, \mathbb{R})$. Apenas mudamos a base para esse subespaço. Note ainda que isto generaliza a situação do exemplo anterior, onde para $k = 1$, $G\ell(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$ e $\pi(\mathbf{v}) = \pi(\mathbf{v}\lambda)$.

Vamos agora definir uma estrutura diferenciável (de facto analítica) em $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$. Para isso, fixemos um qualquer ponto $S_\alpha \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$ (um subespaço de dimensão k em $\mathbb{R}^d$), e consideremos um qualquer suplementar $S_\alpha^\perp$ de S_α em $\mathbb{R}^d$, isto é, tal que: $\mathbb{R}^d = S_\alpha \oplus S_\alpha^\perp$. Temos então duas projecções naturais: $\pi_\alpha : \mathbb{R}^d \to S_\alpha$ e $\pi_\alpha^\perp : \mathbb{R}^d \to S_\alpha^\perp$.

Definamos agora o aberto U_α de $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$, constituído por todos os subespaços de $\mathbb{R}^d$ que admitem $S_\alpha^\perp$ como suplementar :

$$U_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{S \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d) : \; \mathbb{R}^d = S \oplus S_\alpha^\perp\}$$

e a aplicação $\varphi_\alpha : U_\alpha \to Hom(S_\alpha, S_\alpha^\perp) \cong \mathbb{R}^{k(d-k)}$, através de:

$$\varphi_\alpha : S \mapsto \varphi_\alpha(S) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi_\alpha^\perp|_S) \circ (\pi_\alpha|_S)^{-1} \in \; Hom(S_\alpha, S_\alpha^\perp) \cong \mathbb{R}^{k(d-k)} \tag{1.1.9}$$

De maneira mais explícita, seja $\{\underbrace{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_k}_{\in S_\alpha}, \underbrace{\mathbf{e}_{k+1}, \cdots, \mathbf{e}_d}_{\in S_\alpha^\perp}\}$ uma base para $\mathbb{R}^d = S_\alpha \oplus S_\alpha^\perp$, e $\{\underbrace{\mathbf{m}_1, \cdots, \mathbf{m}_k}_{\in S}\}$ uma base para S, onde $\pi_\alpha(\mathbf{m}_i) = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \cdots, k$. Então podemos escrever cada $\mathbf{m}_i$ na forma única:

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{e}_i + \sum_{j=k+1}^{d} a^j_i(S) \, \mathbf{e}_j \qquad\qquad i = 1, \cdots, k$$

e a matriz $(d-k) \times k$, $[a^j_i(S)] \in \mathcal{M}_{(d-k),k}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{k(d-k)}$, é exactamente a matriz de φ_α nas bases acima referidas. Portanto, a aplicação φ_α é dada por $\varphi_\alpha(S) = (a^j_i(S)) \in \mathbb{R}^{k(d-k)}$, e a aplicação inversa é:

$$(a^j_i) \in \mathbb{R}^{k(d-k)} \mapsto \text{subespaço gerado por } \; \{\mathbf{e}_i + \sum_{j=k+1}^{d} a^j_i \, \mathbf{e}_j\}_{i=1,\cdots,k}$$

ambas evidentemente contínuas.

As cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ assim obtidas são C^∞-compatíveis, como é possível ver com algum trabalho.

Além disso, se para S_α escolhemos cada um dos $\begin{pmatrix} d \\ k \end{pmatrix}$ k-planos coordenados, obtemos um número finito de cartas que cobrem $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^d)$.

A construção anterior pode ser repetida literalmente, substituindo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$, o que conduz às chamadas **"Grassmannianas complexas"**:

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^d) \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \{S : \ S \text{ é subespaço de dimensão complexa } k \text{ em } \mathbb{C}^d\}$$

que são variedades diferenciáveis compactas de dimensão real $2k(d-k)$. De facto são mais do que isso - são variedades complexas de dimensão complexa $k(d-k)$.

♣ <u>**Exercício**</u> **1.2** ...

(i). *Completar os detalhes no exemplo anterior.*

(ii). *Mostrar que* $Gr_k(\mathbb{R}^d)$ *é difeomorfa a* $Gr_{d-k}(\mathbb{R}^d)$.

(iii). *Mostrar que, para* $n > d$, *existe um mergulho natural* $\iota : Gr_k(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$

Para terminar esta secção introduzimos ainda a seguinte:

♣ <u>**Definição**</u> **1.4** ... *Seja* $(M, \mathcal{F})$ *uma variedade de dimensão* n. *Um subconjunto* $S \subset M$ *diz-se uma* **"subvariedade de dimensão"** $k \leq n$, *em* M, *se cada ponto* $p \in S$ *pertence ao domínio de alguma carta* $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, *e se existe um aberto* $V \subset \mathbb{R}^n$, *tal que:*

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap S) &= V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}\}) \\ &= \{\mathbf{v} = (v^1, \cdots, v^n) \in V : \ v^{k+1} = \cdots = v^n = 0\} \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Uma tal carta (U, φ) *diz-se uma carta de subvariedade para* $S \subset M$.

É evidente que neste caso, $\mathcal{F}_S = \{(U \cap S, \varphi|_{U \cap S})\}$ é um atlas de classe C^∞ para S, quando (U, φ) varia sobre todas as cartas de subvariedade possíveis. Por isso S, munida da topologia induzida, é ela própria uma variedade de dimensão k.

Estão neste caso as subvariedades de $\mathbb{R}^n$, estudadas em cursos anteriores, e em particular alguns dos exemplos anteriores.

♣ **Exercício 1.3** ... *Seja $M = \mathbb{R}$ com a topologia usual. Considere a estrutura diferenciável $\mathcal{F}_1$ definida pelo atlas maximal que contem a aplicação $Id : M \to \mathbb{R}$, e uma outra estrutura diferenciável $\mathcal{F}_2$ definida pelo atlas maximal que contem a aplicação $\varphi : M \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^3$. Mostre $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$ mas que $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_1)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_2)$ são difeomorfas.*

♣ **Exercício 1.4** ... *Mostre que o conjunto $M \overset{def}{=} M^{(r)}_{d,k}(\mathbb{R})$ das matrizes $(d \times k)$ (com $1 \leq k \leq d$) que têm característica constante e igual a r (onde $1 \leq r \leq k$) é uma variedade diferenciável de dimensão $\dim M = r(d + k - r)$.*

♣ **Exercício 1.5** *... *(**"Variedades Flag"**)*

Seja $\{d_1, d_2, \cdots, d_r\}$ uma sucessão de inteiros positivos tais que $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_r \leq n$, e considere o conjunto:

$$\mathbf{F}_{d_1 d_2 \cdots d_r}(\mathbb{R}^n) \overset{def}{=} \{(S_1, S_2, \cdots, S_r) : S_j \text{ são subespaços de } \mathbb{R}^n \text{ de dimensão } d_j \text{ e tais que } S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_r\} \tag{1.1.11}$$

Mostre que $\mathbf{F}_{d_1, d_2, \cdots, d_r}(\mathbb{R}^n)$ é variedade diferenciável de dimensão $d = d_1(n - d_1) + (d_2 - d_1)(n - d_2) + (d_3 - d_2)(n - d_3) + \cdots + (d_r - d_{r-1}(n - d_r)$. A esta variedade chamamos "Variedade Flag" (bandeira) de tipo $(d_1, d_2, \cdots, d_r)$ em $\mathbb{R}^n$.

♣ **Exercício 1.6** ... Neste exercício propomos uma outra definição de variedade diferenciável, que se revela bastante útil sobretudo pelas generalizações que permite, e ainda pelos conceitos que envolve. Para já uma definição:

♣ **Definição** ***1.5*** ... *Seja X um espaço topológico, $\mathcal{T}$ a colecção dos abertos de X, e E um conjunto. Um **"feixe"** em X é uma aplicação $\mathcal{F}_X$ definida em $\mathcal{T}$, que associa a cada aberto $U \in \mathcal{T}$ um conjunto $\mathcal{F}_X(U)$ de aplicações $f : U \to E$ que satisfazem as seguintes condições:*

- *$\forall U, V \in \mathcal{T}$, com $U \subset V$, se $f \in \mathcal{F}_X(V)$ então $f|_U \in \mathcal{F}_X(U)$.*
- *Se $U = \cup_{i \in I} U_i$, com $U, U_i \in \mathcal{T}$, e se são dadas aplicações $f_i \in \mathcal{F}_X(U_i)$ tais que, para todo o par U_i, U_j, as restrições de f_i e f_j coincidem em cada intersecção $U_i \cap U_j$, então existe $f \in \mathcal{F}_X(U)$ tal que $f|U_i = f_i$*
- *Se $U = \cup_{i \in I} U_i$, com $U, U_i \in \mathcal{T}$, e se $f, g \in \mathcal{F}_X(U)$ são tais que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$, $\forall i \in I$, então $f = g$.*

Portanto um feixe é um processo de dar informação local de tal forma que dados locais podem ser "colados" de modo a construir dados globais do mesmo tipo, e ainda de tal forma que dados definidos em abertos "grandes" são univocamente determinados por dados locais.

*Um **"morfismo de feixes"**:*

$$(X, \mathcal{F}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{F}_Y)$$

é uma aplicação contínua $\phi : X \to Y$ tal que a composição $f \mapsto f \circ \phi$ transforma $\mathcal{F}_Y(U)$ em $\mathcal{F}_X(\phi^{-1}(U))$, para todo o aberto U de Y.

De momento o feixe que nos interessa considerar é o feixe (de álgebras) $C^\infty_{\mathbb{R}^n}$, que a cada aberto $U \in \mathbb{R}^n$ associa o conjunto (de facto a álgebra comutativa com unidade) $C^\infty(U)$ das funções de classe C^∞, $f : U \to \mathbb{R}$.

Consideremos então a segunda definição de variedade diferenciável:

♣ **Definição** ***1.6*** ... *Uma variedade diferenciável de dimensão n (e de classe C^∞), é um espaço Haussdorff M, de base numerável, munido de um feixe $\mathcal{F}_M$ (dito* **"feixe estrutural" de** *M), localmente isomorfo ao feixe $C^\infty_{\mathbb{R}^n}$ em $\mathbb{R}^n$. Isto é, para cada ponto de M existe um aberto $U \subset M$ tal que $(U, \mathcal{F}_U) \cong (V, C^\infty_V)$, para algum aberto $V \subset \mathbb{R}^n$.*

Mostre que esta definição é equivalente à definição 1.

♣ **Exercício 1.7** ... *Considere o conjunto M constituído por todas as rectas afins orientadas ℓ em $\mathbb{R}^{n+1}$:*

$$M \stackrel{def}{=} \Big\{\ell : \ell = \{p + \mathbb{R}v,\, p \in \mathbb{R}^{n+1},\, v \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}\}\Big\}$$

Mostre que M admite uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$.

1.2 Algumas propriedades topológicas das variedades

Nesta secção vamos indicar sumàriamente algumas propriedades topológicas das variedades, que são consequência da respectiva definição. Mais detalhes e demonstrações dos resultados a seguir indicados, podem ser vistos no curso de topologia ou em [Br], [Wa], por exemplo.

Em primeiro lugar note que a condição de M ser Haussdorff não é consequência do facto de M ser localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Um contraexemplo é o seguinte: $M = \mathbb{R} \cup \{p\}$, onde $p \notin \mathbb{R}$, com a topologia definida declarando $\mathbb{R}$ aberto e considerando como vizinhanças de p os conjuntos da forma $(U - \{0\}) \cup \{p\}$, onde U é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$.

No entanto, como M é localmente homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, M é localmente conexa e localmente compacta.

Como M tem uma base numerável de abertos, M é paracompacta o que implica a existência de partições da unidade:

♣ **Definição 1.7** ... *Uma* **"partição ÊC^∞ da unidade"** *numa variedade diferenciável M, é uma colecção $\mathcal{P} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de funções em $C^\infty(M)$ tais que:*

- $0 \leq f_a \leq 1, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$.
- *A colecção dos suportes das funções f_α:*

$$\mathcal{S} = \{supp\, f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$$

  *é localmente finita (*cada ponto $p \in M$ admite uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de membros de $\mathcal{S}$).

- $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha = 1$

A partição $\mathcal{P} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ diz-se **"subordinada"** *a uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de M, se cada suporte $supp\, f_\alpha$ está contido em algum membro de $\mathcal{C}$.*

Recorde que o suporte de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ se define por:

$$supp\, f \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}$$

Note ainda que a soma $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha$ está bem definida quando a colecção dos suportes $\mathcal{S} = \{supp\, f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ é localmente finita, já que em alguma vizinhança de cada ponto de M, todas as funções f_α são nulas com a possível excepção de um número finito delas.

Partições ÊC^∞ da unidade são um instrumento indispensável para definir globalmente objectos que têm à partida apenas uma definição local (ou para decompôr um objecto global numa "soma" de objectos locais). O resultado principal é o seguinte:

♣ **Teorema 1.1** ... *Seja M uma variedade diferenciável e $\mathcal{C}$ uma qualquer cobertura aberta de M. Então existe uma partição ÊC^∞ da unidade $\mathcal{P} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ subordinada à cobertura $\mathcal{C}$.*

O resultado seguinte será utilizado várias vezes:

♣ **Corolário 1.1** *(Existência de* **funções "bump"***)... Dada uma qualquer vizinhança U de um ponto $p \in M$, existe uma função $f \in C^\infty(M)$, dita função "bump" em p, tal que:*

- $0 \leq f \leq 1$ *em* M.
- $f = 1$ *em alguma vizinhança de* $p \in M$.
- $supp\, f \subset U$

1.3 Fibrados. Fibrados Vectoriais

1.3.1 Fibrados. Funções de transição

Começamos esta secção com uma definição Êgeral:

♣ <u>**Definição**</u> **1.8** ... *Um* **"fibrado"** *diferenciável consiste de três variedades diferenciáveis* E, M, F *e de uma aplicação diferenciável sobrejectiva* $\pi : E \to M$ *que satisfaz a seguinte condição: para cada* $x \in M$ *existe um aberto* $U \subset M$ *que contem* x *e um difeomorfismo* $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ *tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd} \tag{1.3.1}$$

O par (U, ϕ) diz-se uma **"trivialização local"** do fibrado. E diz-se o **"espaço total"**, M a **"base"**, F a **"fibra tipo"** e π a **"projecção do fibrado"**. $E_x \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(\{x\})$ diz-se a **"fibra"** por cima de $x \in M$.

O fibrado acima descrito será notado por $\xi = (E, M, F, \pi)$.

O exemplo mais óbvio é o do **"fibrado produto"** $\tau = (E = M \times F, M, F, \pi_1)$. Portanto a condição (1.3.1) exprime o facto de que um fibrado tem uma estrutura local de um produto.

Representemos por:

$$\phi_x \stackrel{\text{def}}{=} (\pi_2 \circ \phi)|_{E_x}$$

a restrição de $\pi_2 \circ \phi$ à fibra E_x por cima de um ponto $x \in U$, onde $\pi_2 : U \times F \to F$ é a projecção canónica. É possível provar (com a ajuda dos resultados da secção I.6), que cada fibra E_x é uma subvariedade de E, e que $\phi_x : E_x \to F$ é um difeomorfismo entre a fibra E_x e a fibra tipo F.

Suponhamos agora que (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) são duas trivializações locais do fibrado $\xi = (E, M, F, \pi)$, tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Então para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, temos duas maneiras, em geral distintas, de identificar a fibra E_x com a fibra tipo F: através de $\phi_{\alpha,x}$ e através de $\phi_{\beta,x}$. Esta diferença (ou "distorção") pode ser representada pela aplicação:

$$\boxed{g_{\beta\alpha}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\beta,x} \circ \phi_{\alpha,x}^{-1} : F \longrightarrow F} \tag{1.3.2}$$

que é um difeomorfismo de F. Desta forma fica definida uma aplicação:

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Diff(F) \tag{1.3.3}$$

a que chamámos **"função de transição"**, da α-trivialização para a β-trivialização (a ordem aqui é importante!).

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F & & \ni (x, \mathbf{v}) \\
 & \phi_\alpha \nearrow & & & \\
\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & & \downarrow \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} & & \downarrow \\
 & \phi_\beta \searrow & & & \\
 & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times F & & \ni (x, g_{\beta\alpha}(x)\mathbf{v})
\end{array}
$$

1.3.2 G-Fibrados

Os fibrados com interesse em geometria diferencial são obtidos restringindo a escolha das possíveis funções de transição.

Mais concretamente, consideremos um grupo de Lie ([2]) G, que actua à esquerda da fibra tipo F, i.e., existe uma aplicação diferenciável $G \times F \to F$, $(g, \mathbf{v}) \mapsto g \cdot \mathbf{v}$ tal que:

$$
\begin{aligned}
(gh) \cdot \mathbf{v} &= g \cdot (h \cdot \mathbf{v}) \\
e \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$\forall g, h \in G$, $\forall \mathbf{v} \in F$. Uma tal acção pode ser vista como um homomorfismo de grupos $\mu : G \to Diff(F)$ definido por:

$$
\mu : g \mapsto \big(\mu_g : \mathbf{v} \mapsto g \cdot \mathbf{v}\big) \qquad \forall g \in G, \forall \mathbf{v} \in F
$$

Vamos supôr ainda que a acção é efectiva ([3]), i.e., que o núcleo do homomorfismo μ é trivial. Isto permite identificar G como um subgrupo de $Diff(M)$. Nestas condições consideremos as seguintes definições.

♣ **Definição 1.9** ... *Duas trivializações locais (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) do fibrado $\xi = (E, M, F, \pi)$ dizem-se* **"G-C^∞-compatíveis"** *se $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ ou se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e a correspondente função de transição $g_{\beta\alpha}$ (ver (1.3.12)), é uma aplicação C^∞:*

$$
g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G
$$

♣ **Definição 1.10** ... *Seja G um grupo de Lie que actua efectivamente à esquerda da fibra tipo F (acção C^∞). Uma estrutura de* **"fibrado C^∞ com grupo de estrutura G"** *num fibrado diferenciável $\xi = (E, M, F, \pi)$, consiste de um* **"atlas de trivializações locais"** $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *que satisfazem as condições seguintes:*

- *Os abertos $U_\alpha \subset M$ cobrem M.*
- *As trivializações locais em Φ são mùtuamente G-C^∞-compatíveis.*
- *O atlas Φ é maximal.*

Neste caso chamaremos a $\xi = (E, M, \pi, F, G, \Phi)$ um fibrado C^∞ com grupo de estrutura G, ou um G-fibrado sobre M.

[2] a definição pode ser vista no capítulo 3, onde os Grupos de Lie serão estudados com detalhe.

[3] não há perda de generalidade nesta hipótese. Se $\ker \mu \neq \{e\}$, então podemos considerar $G/\ker \mu$ que é ainda um grupo de Lie...

É usual omitir a referência explícita a Φ.

Consideremos a família de funções de transição $g_{\beta\alpha}$ associada ao atlas de trivializações locais $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Recorde mais uma vez que $g_{\beta\alpha}(x)$ é uma aplicação da α-trivialização para a β-trivialização (a ordem é importante!).

É fácil ver que as funções de transição satisfazem as duas condições seguintes:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha}(x) &= \mathrm{Id}_F \qquad \forall x \in U_\alpha && (1.3.4)\\ g_{\gamma\beta}(x)\circ g_{\beta\alpha}(x) &= g_{\gamma\alpha}(x) \quad \forall x \in \ U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma && (1.3.5)\end{aligned}$$

Dizemos por isso que $\{g_{\beta\alpha}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ é o **"cociclo de funções de transição"**, associado ao atlas de trivializações locais $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Recìprocamente temos o seguinte:

♣ **Teorema 1.2** "Construção de G-fibrados por colagem"...

Seja M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie que actua efectivamente à esquerda de uma variedade F (acção C^∞). Suponhamos ainda que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ é uma cobertura aberta de M e que $\{g_{\beta\alpha}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ é um **cociclo** *de aplicações diferenciáveis:*

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$$

(que portanto satisfazem as condições (1.3.4) e (1.3.5)).

Então existe um único G-fibrado $\xi = (E, M, \pi, F, G, \Phi)$, cujo cociclo de funções de transição é $\{g_{\beta\alpha}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$.

- Demonstração... (esboço)

  Na reunião disjunta:

$$\widetilde{E} \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \{\alpha\}\times U_\alpha \times F$$

  definimos a relação de equivalência seguinte (colagem):

$$(\alpha, x, \mathbf{v}) \sim (\beta, y, \mathbf{w}) \qquad \text{sse} \qquad x = y \quad e \quad \mathbf{w} = g_{\beta\alpha}(x)\cdot\mathbf{v} \tag{1.3.6}$$

  As condições (1.3.4) e (1.3.5) permitem concluir que de facto esta é uma relação de equivalência. O espaço total do fibrado é então:

$$E \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \widetilde{E}/\sim \tag{1.3.7}$$

  com a topologia quociente. A classe de equivalência de $(\alpha, x, \mathbf{v}) \in \{\alpha\}\times U_\alpha\times V$, será notada por $[\alpha, x, \mathbf{v}]$. A projecção do fibrado é então:

$$\pi([\alpha, x, \mathbf{v}]) = x$$

  A estrutura de G-fibrado em (E, M, π) é dada pelo atlas maximal Φ que contem as trivializações locais $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_a) \to U_\alpha \times F$, definidas por:

$$\phi_\alpha : ([\alpha, x, \mathbf{v}]) \mapsto (x, \mathbf{v})$$

  Como:

$$\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}) = \phi_\beta([\alpha, x, \mathbf{v}]) = \phi_\beta([\beta, x, g_{\beta\alpha}(x)\cdot\mathbf{v}]) = (x, g_{\beta\alpha}(x)\cdot\mathbf{v})$$

  vemos que o cociclo de funções de transição é de facto $\{g_{\beta\alpha}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$.

□.

$\boxed{\textbf{Exemplo}}$ ...

A **"Tira de Möbius"** (infinita) é construída pelo processo acima descrito, tomando $M = SS^1$, $F = \mathbb{R}$ e $G = \mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ actuando em $F = \mathbb{R}$ por multiplicação. Cobrimos a circunferência SS^1 por dois abertos U_1, U_2, cada um difeomorfo a um intervalo aberto, e de tal forma que $U_1 \cap U_2$ seja a reunião de dois intervalos abertos disjuntos I e J. Como funções de transição tomamos:

$$\phi_{12}(x) = +1 \text{ se } x \in I, \qquad \text{e} \qquad \phi_{21}(x) = -1 \text{ se } x \in J$$

Há ainda um aspecto que importa discutir, que se relaciona com a existência de mais do que um cociclo de funções de transição, associado a uma mesma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M, e que dá origem ao mesmo G-fibrado, construído pelo processo anterior de colagem.

Mais precisamente, suponhamos que a estrutura de G-fibrado em $\xi = (E, M, \pi, F, G)$ é definida por dois atlas de trivializações locais $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ e $\widetilde{\Phi} = \{(U_\alpha, \widetilde{\phi}_\alpha)\}$, associados a uma mesma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M. Os cociclos correspondentes de funções de transição são respectivamente:

$$g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \qquad\qquad g_{\beta\alpha}(x) = \phi_{\beta,x} \circ \phi_{\alpha,x}^{-1} \in G \subset Diff(F)$$
$$\widetilde{g}_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \qquad\qquad \widetilde{g}_{\beta\alpha}(x) = \widetilde{\phi}_{\beta,x} \circ \widetilde{\phi}_{\alpha,x}^{-1} \in G \subset Diff(F)$$

Consideremos o diagrama:

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[r, "\widetilde{\phi}_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

Se os dois atlas Φ e $\widetilde{\Phi}$ definem a mesma estrutura de G-fibrado em $\xi = (E, M, \pi, F, G)$, então para cada α, as duas trivializações locais (U_α, ϕ_α) e $(U_\alpha, \widetilde{\phi}_\alpha)$ são G-compatíveis, no sentido em que existe uma aplicação diferenciável:

$$h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$$

tal que a função $\phi_\alpha \circ \widetilde{\phi}_\alpha^{-1} : U_\alpha \times F \to U_\alpha \times F$, é do tipo:

$$\phi_\alpha \circ \widetilde{\phi}_\alpha^{-1}(x, \mathbf{v}) = (x, h_\alpha(x) \cdot \mathbf{v}) \qquad \forall (x, \mathbf{v}) \in U_\alpha \times F$$

Neste caso, temos então que:

$$\begin{aligned}
(x, h_\beta(x)\widetilde{g}_{\beta\alpha}(x) \cdot \mathbf{v}) &= (\phi_\beta \circ \widetilde{\phi}_\beta^{-1})(x, \widetilde{g}_{\beta\alpha}(x) \cdot \mathbf{v}) \\
&= (\phi_\beta \circ \widetilde{\phi}_\beta^{-1} \circ \widetilde{\phi}_\beta \circ \widetilde{\phi}_\alpha^{-1})(x, \mathbf{v}) \\
&= (\phi_\beta \circ \widetilde{\phi}_\alpha^{-1})(x, \mathbf{v}) \\
&= (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ \widetilde{\phi}_\alpha^{-1})(x, \mathbf{v}) \\
&= (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(x, h_\alpha(x) \cdot \mathbf{v}) \\
&= (x, g_{\beta\alpha}(x) h_\alpha(x) \cdot \mathbf{v})
\end{aligned}$$

e portanto:

$$h_\beta(x)\widetilde{g}_{\beta\alpha}(x) = g_{\beta\alpha}(x)h_\alpha(x) \qquad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{1.3.8}$$

ou de forma equivalente:

$$\widetilde{g}_{\beta\alpha}(x) = h_\beta(x)^{-1}g_{\beta\alpha}(x)h_\alpha(x) \qquad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{1.3.9}$$

Diz-se então que os dois cociclos $g_{\beta\alpha}$ e $\widetilde{g}_{\beta\alpha}$ são **"cohomólogos"**. O facto de exigir que $h_\alpha(x)$ pertença ao grupo de estrutura G, significa que quando $g_{\beta\alpha}(x)$ varia em G, $h_\beta(x)^{-1}g_{\beta\alpha}(x)h_\alpha(x)$
$= \widetilde{g}_{\beta\alpha}(x)$ gera todos os elementos de G. Por isso, os fibrados construídos por colagem a partir de dois cociclos cohomólogos de funções de transição, diferem apenas na forma de atribuir coordenadas em cada fibra e são portanto isomorfos.

Na prática, os $g_{\beta\alpha}$ são as **"transformações de gauge"** necessárias para construir o fibrado a partir da colagem dos vários produtos $U_\alpha \times F$, enquanto que os h_α correspondem à **"liberdade de gauge"** de que dispômos em cada carta U_α...

♣ **Exercício 1.8** ... *Mais precisamente, mostrar que a aplicação $\Psi : E \to E$ definida por:*

$$\phi_\alpha(\Psi[\alpha, x, \mathbf{v}]) \stackrel{def}{=} (x, h_\alpha(x) \cdot \mathbf{v})$$

é um difeomorfismo que preserva as fibras de $E \xrightarrow{\pi} M$, isto é, $\pi \circ \Psi = \pi$.

♣ **Definição 1.11** ... *Uma* **"secção"** *de um G-fibrado $\xi = (E, M, \pi, F, G, \Phi)$, é uma aplicação diferenciável $\sigma : M \to E$, tal que $\pi \circ \sigma = \mathbf{1}_M$.*

Uma **"secção local"** *de um G-fibrado $\xi = (E, M, \pi, F, G, \Phi)$, é uma aplicação diferenciável $\sigma : U \to E$, definida num aberto $U \subset M$, tal que $\pi \circ \sigma = \mathbf{1}_U$.*

♣ **Exercício 1.9** ... *Seja $\xi = (E, M, \pi, F, G, \Phi)$ um G-fibrado, e $\{g_{\beta\alpha}\}_{\alpha,\beta\in\mathcal{A}}$ o cociclo de funções de transição associado a $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$.*

Suponha que, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, é dada uma aplicação:

$$\sigma_\alpha : U_\alpha \longrightarrow F$$

tal que:

$$\sigma_\beta(x) = g_{\beta\alpha}(x)\,\sigma_\alpha(x) \qquad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \tag{1.3.10}$$

Mostre que $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ determina canònicamente uma secção de ξ, e que toda a secção de ξ pode ser construída desta forma.

O conjunto das secções (resp., locais) diferenciáveis de $\xi = (E, M, \pi, F, G, \Phi)$, será notado por $\Gamma(E)$ (resp., $\Gamma_U(E)$).

1.3.3 Exemplo. A fibração de Hopf

A chamada **"fibração de Hopf"** (ou monopolo magnético de Dirac), é o fibrado com grupo de estrutura G, em que:

- o espaço total é a esfera de dimensão 3 em $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$:

$$E = SS^3 = \{(\mathbf{w} = (w^0, w^1) \in \mathbb{C}^2 : |w^0|^2 + |w^1|^2 = 1\}$$

- a base é a esfera SS^2 de dimensão 2. Convem considerar SS^2 como sendo obtida por colagem (ou identificação) de duas cópias de $\mathbb{C}$:

$$SS^2 = \mathbb{C}_0 \cup_{\varphi_{10}} \mathbb{C}_1$$

através da inversão $\varphi_{10} : \mathbb{C}_0^* = \mathbb{C}_0 - \{0\} \to \mathbb{C}_1^* = \mathbb{C}_1 - \{0\}$ dada por $\varphi_{10}(z) = \frac{1}{z}$. De facto, φ_{10} pode ser vista como a aplicação de mudança de coordenadas, associada a duas projecções estereográficas da esfera, a partir dos seus pólos norte e sul, respectivamente.

- o grupo de estrutura G, é o grupo $U(1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \cong SS^1$.

- a fibra tipo é SS^1, e o grupo de estrutura $U(1)$, actua na fibra tipo $F = SS^1$ por multiplicação à esquerda.

- a projecção de fibrado é a aplicação $\pi : SS^3 \to SS^2$, dada por:

$$\pi(w^0, w^1) = \begin{cases} w^1/w^0 \in \mathbb{C}_0 & \text{se} \quad w^0 \neq 0 \\ w^0/w^1 \in \mathbb{C}_1 & \text{se} \quad w^1 \neq 0 \end{cases}$$

Note que se w^0, w^1 são ambos não nulos, as duas definições coincidem em SS^2. Por outro lado, se $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in SS^3$, então $\pi(\mathbf{u}) = \pi(\mathbf{w})$ se e só se $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{u}$, para algum $\lambda \in U(1)$.

A estrutura de G-fibrado é agora definida pelo atlas maximal que contem as cartas trivializadoras $(\mathbb{C}_0, \phi_0)$ e $(\mathbb{C}_1, \phi_1)$ onde:

$$\begin{aligned} &\phi_0 : \pi^{-1}(\mathbb{C}_0) \to \mathbb{C}_0 \times SS^1 \quad \text{definida por} \quad \phi_0(w^0, w^1) = (\frac{w^1}{w^0}, \frac{w^0}{|w^0|}) \\ &\phi_1 : \pi^{-1}(\mathbb{C}_1) \to \mathbb{C}_1 \times SS^1 \quad \text{definida por} \quad \phi_1(w^0, w^1) = (\frac{w^0}{w^1}, \frac{w^1}{|w^1|}) \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Como a aplicação $\phi_1 \circ \phi_0^{-1} : \mathbb{C}_0^* \times SS^1 \to \mathbb{C}_1^* \times SS^1$ é dada por:

$$\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(z, \lambda) = (\frac{1}{z}, \frac{z}{|z|}\lambda)$$

vemos que ela é da forma $(z, \lambda) \mapsto (\varphi_{10}(z), g_{10}(z) \cdot \lambda)$, e portanto a função de transição entre estas duas trivializações é (módulo a identificação φ_{10}):

$$g_{10}(z) = \frac{z}{|z|} \in U(1)$$

Figure 1.1: Fibração de Hopf

.

o que mostra que temos um $U(1)$-fibrado sobre SS^2. Mais detalhes podem ser vistos em [Nab], por exemplo.

Existem dois tipos de G-fibrados, que têm para nós especial interesse:

- no primeiro tipo, a fibra F é um espaço vectorial V, de dimensão finita sobre um corpo $\mathbf{K}$ $(= \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H})$, e o grupo de estrutura é um subgrupo G de $G\ell(V)$, o grupo linear geral de V.

- no segundo caso, a fibra F é "igual" ao grupo de estrutura G !... Por exemplo a fibração de Hopf é deste tipo. Este caso será estudado numa secção posterior.

Analisemos para já com detalhe o primeiro caso.

1.3.4 Fibrados Vectoriais

Neste caso temos a seguinte:

♣ **Definição 1.12** ... *Uma estrutura de* **"fibrado vectorial"** *(diferenciável) num fibrado* $\xi = (E, M, V, \pi)$*, consiste de um* **"atlas de trivializações locais"** $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *que satisfazem as condições seguintes:*

- *Os abertos* $U_\alpha \subset M$ *cobrem* M*.*
- *As funções de transição* $g_{\beta\alpha}(x) \stackrel{def}{=} \phi_{\beta,x} \circ \phi_{\alpha,x}^{-1} : V \longrightarrow V$*, são aplicações diferenciáveis que tomam valores num subgrupo de Lie* G *de* $G\ell(V)$*:*

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G \subseteq G\ell(V) \qquad (1.3.12)$$

- *O atlas* Φ *é maximal.*

Neste caso chamaremos a $\xi = (E, M, \pi, G, V, \Phi)$ *um* G*-fibrado vectorial sobre* M*. Quando* $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ *o fibrado diz-se* **"real"***, quando* $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ *diz-se* **"complexo"** *e quando* $\mathbf{K} = \mathbb{H}$ *diz-se* **"quaterniónico"***. A* $\mathbf{K}$*-dimensão de* V *diz-se o* **"rank"** *do fibrado.*

O aspecto fundamental desta definição é que a estrutura linear da fibra tipo V, pode ser transferida para cada fibra E_x: se (U, ϕ) é uma trivialização local, munimos cada fibra E_x $(x \in U)$, da estrutura de $\mathbf{K}$-espaço vectorial, exigindo que:

$$\phi_x : E_x \xrightarrow{\cong} V$$

seja um $\mathbf{K}$-isomorfismo de espaços vectoriais. Esta definição é independente da identificação escolhida de E_x com V, uma vez que as funções de transição tomam valores no grupo $G\ell(V)$ dos automorfismos lineares de V.

Mais interessante ainda, se V tem uma estrutura adicional podemos transferir essa estrutura para cada E_x, mais uma vez de forma independente da identificação escolhida de E_x com V, desde que as funções de transição tomem valores no subgrupo G de $G\ell(V)$, que preserva essa estrutura. Assim por exemplo, suponhamos que V é um espaço vectorial real (resp., complexo) munido de um produto interno $\mathbf{g} : V \times V \to \mathbb{R}$ (resp., produto hermítico $\mathbf{g} : V \times V \to \mathbb{C}$). Então se supômos que as funções de transição tomam valores no grupo ortogonal $O_{\mathbf{g}}(V)$ (resp., grupo unitário $U_{\mathbf{g}}(V)$) dos automorfismos lineares de V, que preservam $\mathbf{g}$, podemos definir um produto interno (resp., produto hermítico) em cada E_x pondo:

$$\mathbf{g}_x([\alpha, x, \mathbf{v}], [\alpha, x, \mathbf{w}]) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

De facto esta definição é consistente, uma vez que se:

$$[\beta, x, \mathbf{v}'] \sim [\alpha, x, \mathbf{v}] \qquad e \qquad [\beta, x, \mathbf{w}'] \sim [\alpha, x, \mathbf{w}]$$

então:

$$\mathbf{v}' = g_{\beta\alpha}(x)\mathbf{v} \qquad e \qquad \mathbf{w}' = g_{\beta\alpha}(x)\mathbf{w}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{v}', \mathbf{w}') &= \mathbf{g}_x([\alpha, x, \mathbf{v}'], [\alpha, x, \mathbf{w}']) = \mathbf{g}_x([\alpha, x, g_{\beta\alpha}(x)\mathbf{v}], [\alpha, x, g_{\beta\alpha}(x)\mathbf{w}]) \\ &= \mathbf{g}(g_{\beta\alpha}(x)\mathbf{v}, g_{\beta\alpha}(x)\mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

já que $g_{\beta\alpha}(x)$ é uma transformação ortogonal (resp., unitária) de V.

♣ **Definição 1.13** ... *Um* **"morfismo"** *entre* $\mathbf{K}$*-fibrados vectoriais* (E_1, M, π_1) *e* (E_2, M, π_2)*, sobre* M*, é uma aplicação diferenciável* $\Phi : E_1 \to E_2$ *que comuta com as projecções (preserva fibras), e tal que a restrição a cada fibra é uma aplicação* $\mathbf{K}$*-linear:* $\Phi_p = \Phi|_{(E_1)_p} : (E_1)_p \to (E_2)_p$.

Φ *é um isomorfismo se* Φ *é um difeomorfismo cuja restrição a cada fibra é um* $\mathbf{K}$*-isomorfismo linear. Neste caso os fibrados dizem-se isomorfos.*

(E_1, M, π_1) *diz-se um* **"subfibrado"** *de* (E_2, M, π_2)*, se* E_1 *é uma subvariedade de* E_2 *e se* $(E_1)_p$ *é um subespaço de* $(E_2)_p$*,* $\forall p \in M$.

O $\mathbf{K}$*-fibrado vectorial trivial de rank* r*, sobre* M*, é o fibrado:*

$$\tau^r_{\mathbf{K}} \overset{def}{=} (M \times \mathbf{K}^r, M, \pi_1, \Phi)$$

onde Φ *é o atlas maximal contendo a identidade. Mais geralmente, um fibrado vectorial* $\xi = (E, M, \pi, \Phi)$ *diz-se trivial se fôr isomorfo a algum* $\tau^r_{\mathbf{K}}$*. Um tal isomorfismo diz-se uma trivialização de* ξ.

O conjunto $\Gamma(E)$ (resp., $\Gamma_U(E)$) das secções (resp., locais) diferenciáveis de um $\mathbf{K}$-fibrado vectorial (E, M, π), tem uma estrutura natural de módulo sobre o anel $C^\infty(M)$ (resp., $C^\infty(U)$).

♣ **Definição 1.14** ... *Seja* (E, M, π) *um* $\mathbf{K}$*-fibrado vectorial de rank* r*. Um* **"referencial local"** *para* E *sobre um aberto* $U \subseteq M$ *é um conjunto* $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1 \ \cdots \ \mathbf{e}_r]$ *de secções locais* $\mathbf{e}_a \in \Gamma_U(E)$ *tais que* $\{\mathbf{e}_a(x)\}_{a=1}^r$ *constituem uma base para a fibra* E_x*, para cada* $x \in U$.

Referenciais locais existem sempre: se (U, ϕ) é uma trivialização local, e se $\{e_a\}_{a=1}^r$ é uma $\mathbf{K}$-base para a fibra tipo $V \cong \mathbf{K}^r$, podemos definir as secções locais:

$$\mathbf{e}_a : U_a \to E \quad \text{através de} \quad \mathbf{e}_a(x) = \phi^{-1}(x, e_a) \qquad a = 1, \cdots, r$$

Qualquer secção local $\sigma \in \Gamma_U(E)$ exprime-se na forma:

$$\sigma(x) = \sum_a \sigma^a(x)\, \mathbf{e}_a(x) \qquad \sigma^a \in C^\infty(U) \quad \forall x \in U$$

o que mostra que o $C^\infty(M)$-módulo $\Gamma(E)$ é localmente livre.

1.4 Os Fibrados Tangente TM e Cotangente T^*M

1.4.1 Vectores tangentes. O espaço tangente T_xM. Diferenciais

♣ **Definição 1.15** ... *Seja* M *uma variedade diferenciável e* $x \in M$*. No conjunto:*

$$\bigcup_{U \ni x} C^\infty(U)$$

de todas as funções C^∞, $f : U \to \mathbb{R}$ definidas num aberto $U \subseteq M$ que contem x, definimos a relação de equivalência seguinte:

$f : U \to \mathbb{R}$ *é equivalente a* $g : V \to \mathbb{R}$ *sse f e g coincidem num aberto $W \subset U \cap V$*

Cada classe de equivalência é chamada **"germe"** *de função C^∞ em x, e o conjunto dos germes em x, nota-se por C_x^∞.*

Por abuso de notação o germe representado por $f : U \to \mathbb{R}$, será notado pela mesma letra f.

O conjunto C_x^∞, dos germes C^∞ em x tem uma estrutura de álgebra comutativa com unidade.

♣ **Definição 1.16** ... *Um* **"vector tangente"** *a M em x é uma derivação pontual X_x da álgebra C_x^∞, de germes C^∞ em x , i.e., $X_x : C_x^\infty \to \mathbb{R}$ satisfaz:*

- *X_x é $\mathbb{R}$-linear:* $X_x(af + bg) = aX_x(f) + bX_x(g)$
- *a "regra de Leibniz":* $X_x(fg) = X_x(f)\, g(x) + f(x)\, X_x(g)$

$\forall f, g \in C_x^\infty$; $\forall a, b \in \mathbb{R}$. *O conjunto de todos os vectores tangentes a M em x, munido da estrutura natural de espaço vectorial, diz-se o* **"Espaço Tangente a M em x"** *e nota-se por T_xM.*

Note que a "regra de Leibniz" implica que $X_x(1) = X_x(1) + X_x(1)$ (onde 1 representa o germe da função constante e igual a 1), i.e., $X_x(1) = 0$ e por linearidade $X_x(c) = 0$.

Suponhamos que $(U, \phi) = (U; x^1, \cdots, x^n) \in \mathcal{F}$ é uma carta local em M, com coordenadas locais associadas x^i. Se $f \in C^\infty(M)$, consideremos a representação local $f \circ \phi^{-1}$, que como já vimos, é uma função (de classe C^∞) de n variáveis reais x^i:

$$(f \circ \phi^{-1})(x^1, \cdots, x^n)$$

Definimos então a **"derivada parcial"** de f em ordem a x^i, em x, através de:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(x))} \tag{1.4.1}$$

Notemos que $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$ está bem definida no germe de f em x. Por outro lado é fácil provar que é uma derivação de C_x^∞. Portanto, para cada $i = 1, \cdots, n$:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x : C_x^\infty \to \mathbb{R} \qquad \text{definida por} \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x(f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)} \tag{1.4.2}$$

é um vector tangente em x. De facto estes n vectores, ditos **"vectores coordenados"**, constituem uma base para T_xM - a base associada às coordenadas locais x^i:

♣ **Teorema 1.3** ... *Se $(U,\phi) = (U; x^1, \cdots, x^n)$ é uma carta local em torno de x, então os vectores coordenados:*

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x \qquad i = 1, \cdots, n$$

definidos por (1.4.2), constituem uma base para T_xM. Qualquer outro vector $X_x \in T_xM$ exprime-se nesta base através da combinação linear seguinte:

$$\boxed{X_x = \sum_{i=1}^n X_x(x^i)\, \frac{\partial}{\partial x^i}|_x} \tag{1.4.3}$$

- Demonstração... Seja $X_x \in T_xM$. Como $X_x(c) = 0$ podemos supôr que $\phi(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ e ainda que (restringindo U, se necessário), $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é uma bola $\mathcal{B} = B(\mathbf{0}, \epsilon)$ centrada em $\mathbf{0}$.

- Qualquer função C^∞ $g : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita na forma:

  $$g(\mathbf{r}) = g(\mathbf{0}) + \sum_i g_i(\mathbf{r}) r^i \qquad \forall \mathbf{r} = (r^1, \cdots, r^n) \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$$

  onde $g_i \in C^\infty(\mathcal{B})$. De facto:

  $$g(\mathbf{r}) - g(\mathbf{0}) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(t\mathbf{r}) dt = \sum_i r^i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial r^i}(t\mathbf{r}) dt}_{g_i(\mathbf{r})}$$

- Aplicando este resultado a $g = f \circ \phi^{-1}$ concluímos que $\forall p = \phi^{-1}(\mathbf{r}) \in U$ se tem $f(p) = (f \circ \phi^{-1})(\mathbf{r}) = (f \circ \phi^{-1})(\mathbf{0}) + \sum_i r^i(\phi(p)) g_i(\phi(p)) = f(x) + \sum_i x^i(p) f_i(p)$, ou mais sucintamente:

  $$f = f(x) + \sum_i x^i f_i \qquad \text{em} \quad U, \quad \text{onde}\, f_i \in C^\infty(U)$$

- Portanto:

  $$X_x(f) = X_x(f(x) + \sum_i f_i x^i) = \sum_i \big(X_x(f_i) x^i(x) + f_i(x) X_x(x^i)\big) = \sum_i f_i(x) X_x(x^i)$$

  uma vez que suposemos que $x^i(x) = 0$. Mas por outro lado, por definição:

  $$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = f_i(x)$$

  o que permite deduzir (1.4.3).

- Resta provar que os vectores coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ são linearmente independente. De facto, se $\sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x = 0$, então aplicando ambos os membros a x^j dá:

  $$0 = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x(x^j) = \sum a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(x) = \sum a^i \delta_i^j = a^j$$

$\square$.

Por vezes é útil a seguinte **"descrição cinemática"** de vector tangente, que passamos a expôr: seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, que contem $0 \in \mathbb{R}$. Uma curva C^∞ em M, é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \to M$. Suponhamos que $\alpha(0) = x \in M$.

Nestas condições define-se o **"vector velocidade de** α **em** $t = 0$**"** como sendo o vector $\alpha'(0) \in T_xM$:

$$\boxed{\alpha'(0)(f) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{d}{dt}|_{t=0}\,(f \circ \alpha)(t)} \tag{1.4.4}$$

É fácil verificar que de facto $\alpha'(0) \in T_xM$, i.e., que (1.4.4) define uma derivação pontual em C^∞_x.

Recìprocamente, cada vector $X_x \in T_xM$ é vector velocidade de alguma curva C^∞, $\alpha : I \to M$ tal que $\alpha(0) = x \in M$. Com efeito, seja $(U, \phi) = (U; x^1, \cdots, x^n)$ uma carta local em torno de $x \in M$. Pondo $X_x = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, consideremos a curva $\alpha : I \to M$, definida em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$, que contem 0, através de:

$$\alpha(t) = \phi^{-1}(\phi(x) + t\mathbf{a}) \qquad \text{onde } \mathbf{a} = (a^1, \cdots, a^n)$$

Então, por definição:

$$\alpha'(0)(x^i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}|_{t=0}\,(x^i \circ \alpha)(t) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\,(x^i(x) + ta^i) = a^i$$

o que mostra que $X_x = \alpha'(0)$, como se pretendia.

♣ **Definição 1.17** ... *Seja $F : M \to N$ uma aplicação de classe C^∞ entre duas variedades diferenciáveis. A diferencial dF_x de F em $x \in M$ é a aplicação linear:*

$$dF_x : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$$

definida por:

$$dF_x(X_x)(g) \stackrel{def}{=} X_x(g \circ F) \qquad \forall g \in C^\infty_{F(x)} \quad \forall X_x \in T_xM \tag{1.4.5}$$

♣ **Exercício 1.10** ... *Verificar a consistência da definição anterior. Provar ainda que a diferencial dF_x de F em $x \in M$ pode ser definida alternativamente por:*

$$dF_x(X_x) \stackrel{def}{=} (F \circ \alpha)'(0) \tag{1.4.6}$$

onde $\alpha : I \to M$ é uma curva C^∞ em M tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = X_x \in T_xM$ (e portanto, $F \circ \alpha : I \to N$ é uma curva C^∞ em N tal que $\alpha(0) = F(x)$.) *Mostrar ainda que esta definição não depende da escolha da curva α, nas condições indicadas.*

1.4.2 O Fibrado Tangente TM. Aplicações tangentes

Consideremos agora o fibrado tangente TM. Este fibrado é um exemplo de fibrado vectorial sobre M que, como já vimos é, grosso modo, um conjunto de espaços vectoriais parametrizados pelos pontos de M, e que tem uma estrutura local de um produto. Vamos detalhar a construção de TM. Como conjunto:

$$TM \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x\in M} T_xM \qquad \text{(reunião disjunta)} \tag{1.4.7}$$

Um ponto de TM será notado por X_x se $X_x \in T_xM$. Existe uma projecção natural:

$$\begin{array}{cl} TM & \\ \pi\downarrow & \quad \text{definida por } \pi(X_x) = x \\ M & \end{array}$$

As cartas locais de TM constroiem-se da seguinte forma: a cada carta local de M, $(U,\varphi) = (U; x^1, \cdots, x^n) \in \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ é o atlas que define a estrutura diferenciável em M, associamos a carta local em TM seguinte:

$$(\pi^{-1}(U), \phi) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi^{-1}(U); x^1\circ\pi, \cdots, x^n\circ\pi, \dot{x}^1, \cdots, \dot{x}^n)$$

onde $\dot{x}^i$ são as funções reais definidas em $\pi^{-1}(U)$ através de $\dot{x}^i(X_x) = X_x(x^i)$. Mais concretamente, as coordenadas locais de cada ponto $X_x \in \pi^{-1}(U)$ são dadas pelas coordenadas locais $x^i(x)$ de $x = \pi(X_x)$ e pelas coordenadas de $X_x \in T_xM$ na base de vectores coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, i.e., $X_x = \sum \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$.

Vemos portanto que a aplicação $\phi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$:

$$\phi : X_x \in \pi^{-1}(U) \mapsto \big(x^1(x), \cdots, x^n(x), \dot{x}^1(X_x), \cdots, \dot{x}^n(X_x)\big) \in \mathbb{R}^{2n}$$

define uma bijecção de $\pi^{-1}(U)$ sobre o aberto $\varphi(U)\times\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. Definimos então uma topologia em TM que tem como base os conjuntos da forma $\{\phi^{-1}(\mathcal{O})\}_{(\phi,\mathcal{O})}$, onde $\mathcal{O}$ é um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ e ϕ é a aplicação associada a $(U,\varphi)\in\mathcal{F}$, como atrás se definiu. Desta forma TM fica munida da estrutura de variedade de dimensão $2n$.

Vejamos agora como são as aplicações de mudança de coordenadas locais. Suponhamos que os domínios de duas cartas locais $(\pi^{-1}(U_\alpha); x^i_\alpha, \dot{x}^i_\alpha)$ e $(\pi^{-1}(U_\beta); x^i_\beta, \dot{x}^i_\beta)$ se intersectam. Então a aplicação de mudança de coordenadas é a aplicação de classe C^∞, definida num aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ e com valores em $\mathbb{R}^{2n}$, que em notação vectorial tem a forma:

$$\boxed{(\mathbf{x}_\alpha, \dot{\mathbf{x}}_\alpha) \mapsto (\mathbf{x}_\beta, \dot{\mathbf{x}}_\beta) = (\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha), \mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha)\dot{\mathbf{x}}_\alpha)} \tag{1.4.8}$$

onde $\varphi_{\beta\alpha}$ é a função de mudança de coordenadas, das α-coordenadas para as β-coordenadas, e $\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}$ a respectiva matriz Jacobiana (ver (1.1.4)). De facto:

$$\dot{x}^j_\beta = X_x(x^j_\beta) = \dot{x}^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}|_x(x^j_\beta) = \dot{x}^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}|_x(\varphi^j_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha)) = \dot{x}^i_\alpha \frac{\partial \varphi^j_{\beta\alpha}}{\partial x^i_\alpha}(\mathbf{x}_\alpha) = [\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha)]^j_i\, \dot{x}^i_\alpha$$

Portanto o atlas $T\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\pi^{-1}(U), \phi) : (U, \varphi) \in \mathcal{F}\}$ define uma estrutura de variedade diferenciável em TM.

Note ainda que, como:

$$X_x = \dot{x}^j_\beta \frac{\partial}{\partial x^j_\beta}|_x = [\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha)]^j_i\, \dot{x}^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^j_\beta}|_x = \dot{x}^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}|_x$$

deduzimos que:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}|_x = [\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)]^j_i \frac{\partial}{\partial x^j_\beta}|_x} \tag{1.4.9}$$

isto é, os vectores transformam-se com variância oposta às coordenadas! Recorde ainda que (ver (1.1.4)):

$$\boxed{\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha) = \left[\frac{\partial \varphi^i_{\beta\alpha}}{\partial x^j_\alpha}(\mathbf{x}_\alpha)\right] \in G\ell(n, \mathbb{R})} \tag{1.4.10}$$

é a matriz Jacobiana da mudança de coordenadas.

Um atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ para M, induz uma estrutura de fibrado vectorial (real) diferenciável em TM, definida pelo atlas de trivializações locais:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ & \pi \searrow \quad \swarrow \pi_1 & \\ & U_\alpha \subset M & \end{array}$$

onde:

$$\phi_\alpha : X_x \mapsto (x, (d\varphi_\alpha)_x(X_x))$$

As correspondentes funções de transição são dadas por:

$$\boxed{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\ell(n, \mathbb{R}) \qquad g_{\beta\alpha}(x) = \mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)} \tag{1.4.11}$$

Fica desta forma estabelecida uma terceira **"definição física"** de vector tangente a M em x, como sendo uma classe de equivalência de triplos:

$$(\alpha, x, \mathbf{v}) \in \{\alpha\} \times U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

relativamente à relação de equivalência:

$$\boxed{(\alpha, x, \mathbf{v}) \sim (\beta, y, \mathbf{w}) \quad \text{sse} \quad x = y \quad e \quad \mathbf{w} = \mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)\, \mathbf{v}} \tag{1.4.12}$$

Suponhamos agora que M e N são duas variedades diferenciáveis, e que $f : M \to N$ é uma aplicação diferenciável. Podemos então definir um morfismo de fibrados $Tf : TM \to TN$, que torna comutativo o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

e cuja restrição a cada fibra é dada por:

$$(Tf)|_{T_xM} = T_xf \stackrel{\text{def}}{=} (df)_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$$

Tf diz-se a **"aplicação tangente a f"**. Verifica as propriedades seguintes:

$$\begin{aligned} T(\mathrm{Id}_M) &= \mathrm{Id}_{TM} \\ T(f \circ g) &= Tf \circ Tg \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

isto é, T é um functor covariante da categoria das variedades diferenciáveis, na categoria dos fibrados vectoriais diferenciáveis.

1.4.3 Campos de vectores. A álgebra de Lie $\mathfrak{x}(M)$

♣ **Definição 1.18** ... *Um* **"campo de vectores"** *(diferenciável de classe C^∞) em M é uma secção (diferenciável) do fibrado tangente:*

$$X : M \to TM$$

Representaremos por $\mathfrak{X}(M)$ (resp., $\mathfrak{X}(U)$) o conjunto dos campo de vectores de classe C^∞ em M (resp., no aberto $U \subset M$). Portanto um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ associa a cada ponto $x \in M$ um vector tangente $X_x \in T_xM$, de tal forma que se:

$$X(\mathbf{x}) = \sum_i X^i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in U \tag{1.4.14}$$

é a representação local de X em coordenadas locais, então as funções componentes X^i são de classe C^∞.

Um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ define uma derivação da álgebra $C^\infty(M)$, i.e., uma aplicação $\mathbb{R}$-linear:

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

definida por:

$$(Xf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} X_x(f) \tag{1.4.15}$$

que verifica:

$$X(fg) = fX(g) + gX(f) \tag{1.4.16}$$

e que é local, no sentido em que:

$$X|_U(f|_U) = (Xf)|_U \tag{1.4.17}$$

Recíprocamente, toda a derivação $\mathcal{D}$ em $C^\infty(M)$ que satisfaz (1.4.17), define um campo de vectores em $\mathfrak{X}(M)$. Com efeito, se $x \in M$ e $f \in C^\infty(M)$, o número $(\mathcal{D}f)(x)$ depende apenas do germe de f em x. Portanto existe um vector tangente $X_x \in T_xM$ tal que $X_x f = (\mathcal{D}f)(x)$, e a aplicação $x \mapsto X_x$ é um campo de vectores diferenciável.

O conjunto $\mathfrak{X}(M)$ dos campos de vectores de classe C^∞ em M, tem uma estrutura de módulo sobre o anel $C^\infty(M)$, definindo fX como sendo o campo $(fX)_x = f(x)X_x$. Por outro lado, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são vistos como derivações em $C^\infty(M)$, então:

$$[X, Y] \stackrel{\text{def}}{=} XY - YX \tag{1.4.18}$$

é ainda uma derivação de $C^\infty(M)$ que, pela observação anterior, define um campo de vectores em $\mathfrak{X}(M)$ que se chama o **"parêntisis de Lie"** de X e Y.

O parêntisis de Lie define uma aplicação $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que é $\mathbb{R}$-bilinear, verifica:

$$[X, X] = 0$$
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad \textbf{"identidade Jacobi"} \tag{1.4.19}$$

e que portanto mune $\mathfrak{X}(M)$ de estrutura de álgebra de Lie.

Além disso:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \tag{1.4.20}$$

♣ **Definição 1.19** ... **Ê(i)**. *Se $F : M \to N$ é um difeomorfismo e se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de vectores em M, define-se um campo de vectores $F_*X \in \mathfrak{X}(N)$ em N, chamado o* **"push-forward"** *de X por F, através de:*

$$F_*X = TF \circ X \circ F^{-1} \tag{1.4.21}$$

isto é:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{TF} & TN \\ X \uparrow & & \uparrow F_*X \\ M & \xleftarrow{F^{-1}} & N \end{array}$$

Ê(ii). *Se $F : M \to N$ é um difeomorfismo e se $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de vectores em N, define-se um campo de vectores $F^*Y \in \mathfrak{X}(M)$ em M, chamado o* **"pull-back"** *de Y por F, através de:*

$$F^*X = TF^{-1} \circ Y \circ F \tag{1.4.22}$$

isto é:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xleftarrow{TF^{-1}} & TN \\ F^*Y \uparrow & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

♣ **Exercício 1.11** ... *Deduzir expressões em coordenadas locais para F_*X e F^*X.*

Nestas definições é essencial que F seja um difeomorfismo. Quando $F : M \to N$ não é um difeomorfismo, podemos falar de campos de vectores F-relacionados:

♣ **Definição 1.20** ... *Seja $F : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Os campos de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ dizem-se* **"F-relacionados"**, *(notação $X \overset{F}{\sim} Y$) se:*

$$TF \circ X = Y \circ F \tag{1.4.23}$$

isto é:

$$X \overset{F}{\sim} Y \qquad \text{se e só se} \qquad \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{TF} & TN \\ X \uparrow & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

♣ **Proposição 1.3** ... **Ê(i)**. *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$, então:*

$$X \overset{F}{\sim} Y \qquad \text{se e só se} \qquad X(g \circ F) = Yg \circ F \qquad \forall g \in C^\infty(N) \tag{1.4.24}$$

Ê(ii). *Se $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$, então:*

$$X_1 \overset{F}{\sim} Y_1 \quad e \quad X_2 \overset{F}{\sim} Y_2 \qquad \Rightarrow \qquad [X_1, X_2] \overset{F}{\sim} [Y_1, Y_2] \tag{1.4.25}$$

• Demonstração... (i). Se $g \in C^\infty(N)$ e $x \in M$, então:

$$\begin{aligned} X(g \circ F) = Yg \circ F \quad &\Leftrightarrow \quad X(g \circ F)(x) = (Yg \circ F)(x) \\ &\Leftrightarrow \quad X_x(g \circ F) = (Yg)(F(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad (dF_x(X_x))g = Y_{F(x)}g \\ &\Leftrightarrow \quad (dF_x)(X_x) = Y_{F(x)} \\ &\Leftrightarrow \quad TF \circ X = Y \circ F \end{aligned}$$

(ii). Aplicar sucessivamente (i).

□.

1.4.4 O Fibrado Cotangente T^*M. 1-formas diferenciais

Consideremos agora o fibrado cotangente T^*M. Este fibrado é mais um exemplo de fibrado vectorial sobre M, obtido por "dualização" de TM. Vamos detalhar a construção de T^*M. Como conjunto:

$$T^*M \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x\in M} T_x^*M \qquad \text{(reunião disjunta)} \tag{1.4.26}$$

onde T_x^*M é o espaço dual a T_xM, i.e., o espaço vectorial das formas lineares $\theta_x : T_xM \to \mathbb{R}$ (ditos também **"covectores tangentes em x"**). Um ponto de T^*M será notado por θ_x se $\theta_x \in T_x^*M$. Existe uma projecção natural:

$$\begin{array}{cl} T^*M & \\ \pi \downarrow & \quad \text{definida por } \pi(\theta_x) = x \\ M & \end{array}$$

A topologia e a estrutura diferenciável definem-se de forma completamente análoga à que se utilizou na construção do fibrado tangente, usando agora as cartas locais de T^*M do tipo seguinte:

$$(\pi^{-1}(U); x^1 \circ \pi, \cdots, x^n \circ \pi, p_1, \cdots, p_n)$$

onde $(U, \phi) = (U; x^1, \cdots, x^n)$ é uma carta local de M, e p_i são as funções reais definidas em $\pi^{-1}(U)$ através de $p_i(\theta_x) = \theta_x(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$. Mais concretamente, as coordenadas locais de cada ponto $\theta_x \in \pi^{-1}(U)$ são dadas pelas coordenadas locais $x^i(x)$ de $x = \pi(\theta_x)$ e pelas coordenadas de $\theta_x \in T_x^*M$ na base de covectores $(dx^i)_x$, dual à base de vectores coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, i.e., $(dx^i)_x\big(\frac{\partial}{\partial x^j}|_x\big) = \delta_j^i$ e $\theta_x = \sum p_i\,(dx^i)_x$.

Vemos portanto que:

$$\theta_x \in \pi^{-1}(U) \mapsto (x^1(x), \cdots, x^n(x), p_1(\theta_x), \cdots, p_n(\theta_x))$$

define um homeomorfismo de $\pi^{-1}(U)$ sobre o aberto $\phi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Vejamos agora como são as aplicações de mudança de coordenadas locais. Suponhamos que os domínios de duas cartas locais $(\pi^{-1}(U_\alpha); x_\alpha^i, p_{\alpha\, i})$ e $(\pi^{-1}(U_\beta); x_\beta^i, p_{\beta\, i})$ se intersectam. Então a aplicação de mudança de coordenadas é a aplicação de classe C^∞, definida num aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ e com valores em $\mathbb{R}^{2n}$, que em notação vectorial tem a forma:

$$\boxed{(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) \;\mapsto\; (\mathbf{x}_\beta, \mathbf{p}_\beta) = (\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha), \mathbf{p}_\alpha \left[\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha)\right]^{-1})} \tag{1.4.27}$$

onde mais uma vez $\varphi_{\beta\alpha}$ é a função de mudança de coordenadas, das α-coordenadas para as β-coordenadas, e $\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}$ a respectiva matriz Jacobiana (ver (1.1.4)). Nesta fórmula $\mathbf{p}_\alpha$ e $\mathbf{p}_\beta$ são interpretados como vectores-linha. De facto:

$$p_{\alpha\, i} = \theta_x(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}|_x) = \theta_x\Big([\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)]_i^j\, \frac{\partial}{\partial x_\beta^j}|_x\Big) = p_{\beta\, j}[\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)]_i^j$$

ou de forma equivalente:

$$p_{\beta\, j} = p_{\alpha\, i}\big([\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)]^{-1}\big)^i_j$$

Um atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ para M, induz uma estrutura de fibrado vectorial (real) diferenciável em T^*M, definida pelo atlas de trivializações locais:

$$\begin{array}{ccccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & & \xrightarrow{\phi_\alpha} & & U_\alpha \times \mathbb{R}^n \\ & \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 & \\ & & U_\alpha \subset M & & \end{array}$$

onde ($\{.\}^t$ representa aplicação linear transposta):

$$\phi_\alpha : \theta_x \mapsto (x, [(d\varphi_\alpha)_x^{-1}]^t(\theta_x))$$

As correspondentes funções de transição são dadas por:

$$\boxed{g_{\beta\alpha} :\, U_\alpha \cap U_\beta \;\to G\ell(n, \mathbb{R}) \qquad\qquad g_{\beta\alpha}(x) = [(\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x))^{-1}]^t} \tag{1.4.28}$$

Fica desta forma estabelecida uma segunda **"definição física"** de vector cotangente a M em x, como sendo uma classe de equivalência de triplos:

$$(\alpha, x, \mathbf{v}) \in \{\alpha\} \times U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

relativamente à relação de equivalência:

$$\boxed{(\alpha, x, \mathbf{v}) \sim (\beta, y, \mathbf{w}) \qquad \text{sse} \qquad x = y \quad e \quad \mathbf{w} = [(\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)^{-1}]^t\, \mathbf{v}} \tag{1.4.29}$$

♣ **<u>Definição</u> 1.21** ... *Um* **"1-forma diferencial"** *(ou campo de covectores) em M é uma secção diferenciável do fibrado cotangente:*

$$\theta : M \to T^*M$$

Portanto uma 1-forma diferencial θ associa a cada ponto $p \in M$ um covector tangente $\theta(p) \in T_p^*M$, de tal forma que se:

$$\theta(x) = \sum_i \theta_i(x)\, dx^i \qquad\qquad x = (x^1, \cdots, x^n) \tag{1.4.30}$$

é a representação local de θ em coordenadas locais, então as funções componentes θ_i são de classe C^∞.

1.5 Fibrado de Referenciais. Fibrados Principais

1.5.1 Convenções de álgebra linear

Considere um espaço vectorial V de dimensão r, sobre um corpo $\mathbf{K}$. Seja $\mathcal{B}(V)$ o conjunto de todas as bases (ou referenciais) em V. Uma base $\mathbf{e} \in \mathcal{B}(V)$ será representada por uma matriz-linha:

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1 \, \mathbf{e}_2 \, \cdots \, \mathbf{e}_r]$$

ou simplesmente por $\mathbf{e} = \mathbf{e}_a$. O grupo linear geral $G\ell(V) \cong G\ell(r, \mathbf{K})$ actua à direita de $\mathcal{B}(V)$ através de:

$$\mathbf{e} \cdot g = \widehat{\mathbf{e}} \qquad \text{onde } \widehat{\mathbf{e}} \text{ é a base } \; \widehat{\mathbf{e}}_b \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mathbf{e}_a \, g^a_b \tag{1.5.1}$$

com $g = (g^a_b) \in G\ell(r, \mathbf{K})$. De facto:

$$(\mathbf{e} \cdot gh)_a = \mathbf{e}_b (gh)^b_a = \mathbf{e}_b \, g^b_c h^c_a = (\mathbf{e} \cdot g)_c h^c_a = ((\mathbf{e} \cdot g) \cdot h)_a$$

isto é $\mathbf{e} \cdot gh = (\mathbf{e} \cdot g) \cdot h$, o que mostra que de facto a acção é à direita. Além disso a acção é **"transitiva"** (qualquer base pode ser transformada numa qualquer outra através de uma matriz conveniente de $G\ell(r, \mathbf{K})$) e **"livre"** (duas matrizes distintas transformam uma certa base em bases diferentes).

Por vezes é útil encarar um referencial $\mathbf{e} \in \mathcal{B}(V)$ como um isomorfismo (representado pela mesma letra):

$$\mathbf{e} : \mathbf{K}^r \longrightarrow V$$

$\mathbf{e} = \mathbf{e}^i_a$. Neste caso a acção direita de $G\ell(r, \mathbf{K})$ em $\mathcal{B}(V)$, é dada pela composta $\mathbf{e} \cdot g = \mathbf{e} \circ g$:

$$\mathbf{K}^r \xrightarrow{g} \mathbf{K}^r \xrightarrow{\mathbf{e}} V$$

Seja $\mathbf{v} \in V$ um vector de V, e $\mathbf{e}, \widehat{\mathbf{e}} \in \mathcal{B}(V)$ duas bases relacionadas por $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g$. Representemos por ξ^a (resp., $\hat{\xi}^a$), as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathbf{e}$ (resp., na base $\widehat{\mathbf{e}}$). Então:

$$\mathbf{v} = \xi^a \, \mathbf{e}_a = \hat{\xi}^b \, \widehat{\mathbf{e}}_b = \hat{\xi}^b \, \mathbf{e}_a \, g^a_b$$

donde se deduz que $\xi^a = g^a_b \, \hat{\xi}^b$, ou de forma equivalente:

$$\hat{\xi}^b = (g^{-1})^b_a \, \xi^a$$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{e}_b \mapsto \widehat{\mathbf{e}}_b = \mathbf{e}_a \, g^a_b \qquad \Rightarrow \qquad \xi^b \mapsto \hat{\xi}^b = (g^{-1})^b_a \, \xi^a} \tag{1.5.2}$$

isto é as componentes de um vector $\mathbf{v} \in V$ transformam-se com "variância" oposta (ou contravariantemente) à das bases.

Vejamos agora como reconstruir o espaço vectorial V a partir do conjunto $\mathcal{B}(V)$ de todas as suas bases. Para isso, notemos que um vector $\xi = (\xi^a) \in \mathbf{K}^r$, e uma base $\mathbf{e} = \mathbf{e}_a \in \mathcal{B}(V)$, determinam um vector $\mathbf{v} = \xi^a \mathbf{e}_a$ em V. No entanto existem muitos pares diferentes $(\mathbf{e}, \xi) \in \mathcal{B}(V) \times \mathbf{K}^r$ que dão origem ao mesmo vector de V. De facto (1.5.2) mostra que todos os pares da forma $(\mathbf{e}\cdot g, g^{-1}\xi) \in \mathcal{B}(V)\times \mathbf{K}^r$, onde $g \in G\ell(r,\mathbf{K})$, definem o mesmo vector $\mathbf{v} \in V$.

Por isso, se em $\mathcal{B}(V) \times \mathbf{K}^r$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$$\boxed{(\mathbf{e},\xi) \sim (\widehat{\mathbf{e}},\hat{\xi}) \qquad \text{sse existe } g \in G\ell(r,\mathbf{K}) \text{ tal que } \quad \widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}\cdot g \quad e \quad \hat{\xi} = g^{-1}\xi} \tag{1.5.3}$$

vemos que a classe de equivalência de um elemento $(\mathbf{e},\xi) \in \mathcal{B}(V) \times \mathbf{K}^r$ corresponde exactamente a um único vector de V:

$$\Big[\mathcal{B}(V) \times \mathbf{K}^r\Big]/_\sim \;\cong\; V \tag{1.5.4}$$

Consideremos agora o conjunto $\mathcal{B}^*(V)$, de todos as bases duais para V^* (ou co-referenciais em V^*). Um co-referencial $\Theta \in \mathcal{B}^*(V)$ será representado por um vector-coluna:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \vdots \\ \Theta^n \end{bmatrix}$$

ou simplesmente por $\Theta = \Theta^a$, onde $\Theta^a \in V^*$, $a = 1, \cdots, n$. Suponhamos que $\mathbf{e}, \widehat{\mathbf{e}} \in \mathcal{B}(V)$ são duas bases para V, relacionadas por $\widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}\cdot g$, e que $\Theta, \widehat{\Theta} \in \mathcal{B}^*(V)$ são as bases duais a $\mathbf{e}$ e $\widehat{\mathbf{e}}$, respectivamente, de tal forma que $\Theta^a(\mathbf{e}_b) = \delta^a_b$ e $\widehat{\Theta}^c(\widehat{\mathbf{e}}_d) = \delta^c_d$. Então, como:

$$\Theta^a(\widehat{\mathbf{e}}_b) = \Theta^a(\mathbf{e}_c\, g^c_b) = \delta^a_c\, g^c_b = g^a_b$$

e, por outro lado:

$$(g^a_c\, \widehat{\Theta}^c)(\widehat{\mathbf{e}}_b) = g^a_c\, \delta^c_b = g^a_b$$

isto é, ambas as formas tomam o mesmo valor em cada elemento da base $\widehat{\mathbf{e}}$, vemos que $\Theta^a = g^a_c\, \widehat{\Theta}^c$, ou de forma equivalente:

$$\widehat{\Theta}^b = (g^{-1})^b_c\, \Theta^c$$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{e}_b \mapsto \widehat{\mathbf{e}}_b = \mathbf{e}_a\, g^a_b \qquad \Rightarrow \qquad \Theta^b \mapsto \widehat{\Theta}^b = (g^{-1})^b_c\, \Theta^c} \tag{1.5.5}$$

O grupo linear $G\ell(V) \cong G\ell(r,\mathbf{K})$ actua à direita de $\mathcal{B}^*(V)$ através de:

$$\Theta\cdot g = \widehat{\Theta} \qquad \text{onde } \widehat{\Theta} \text{ é o co-referencial } \widehat{\Theta}^b \stackrel{\text{def}}{=} (g^{-1})^b_c\, \Theta^c \tag{1.5.6}$$

Note que de facto esta é uma acção direita, já que:

$$(\Theta\cdot gh)^b = ((gh)^{-1})^b_c\, \Theta^c = (h^{-1})^b_d (g^{-1})^d_c\, \Theta^c = (h^{-1})^b_d (\Theta\cdot g)^d = ((\Theta\cdot g)\cdot h)^b$$

Por vezes é também útil encarar um co-referencial $\Theta \in \mathcal{B}^*(V)$ como um isomorfismo (representado pela mesma letra):

$$\Theta : V \longrightarrow \mathbf{K}^r$$

isto é, como uma 1-forma em V com valores em $\mathbf{K}^r$, $\Theta = \Theta^a_i$. Neste caso a acção direita de $G\ell(r, \mathbf{K})$ em $\mathcal{B}^*(V)$, é dada pela composta $\Theta \cdot g = g^{-1} \circ \Theta$:

$$V \xrightarrow{\Theta} \mathbf{K}^r \xrightarrow{g^{-1}} \mathbf{K}^r$$

Seja $\alpha \in V^*$ um covector, e $\Theta, \widehat{\Theta} \in \mathcal{B}^*(V)$ dois co-referenciais relacionados como em (1.5.5). Representemos por ξ_a (resp., $\hat{\xi}_a$), as coordenadas de α na base Θ (resp., na base $\widehat{\Theta}$). Então por (1.5.6):

$$\alpha = \xi_c \, \Theta^c = \hat{\xi}_b \, \widehat{\Theta}^b = \hat{\xi}_b \, (g^{-1})^b_c \, \Theta^c$$

e deduzimos que $\xi_c = \hat{\xi}_b \, (g^{-1})^b_c$ ou de forma equivalente:

$$\hat{\xi}_a = \xi_b \, g^b_a$$

Resumindo:

$$\boxed{\mathbf{e}_b \mapsto \widehat{\mathbf{e}}_b = \mathbf{e}_a \, g^a_b \qquad \Rightarrow \qquad \xi_b \mapsto \hat{\xi}_b = \xi_a \, g^a_b} \tag{1.5.7}$$

isto é as componentes de um covector $\alpha \in V^*$ transformam-se com a mesma "variância" das bases (ou covariantemente).

Suponhamos agora que $G\ell(V) \cong G\ell(r, \mathbf{K})$ actua à esquerda de um espaço Q:

$$(g, q) \in G\ell(r, \mathbf{K}) \times Q \mapsto g.q \in Q \tag{1.5.8}$$

Em $\mathcal{B}(V) \times Q$ definimos a seguinte relação de equivalência:

$$\boxed{(\mathbf{e}, q) \sim (\widehat{\mathbf{e}}, \hat{q}) \qquad \text{sse existe } g \in G\ell(r, \mathbf{K}) \text{ tal que } \quad \widehat{\mathbf{e}} = \mathbf{e} \cdot g \quad e \quad \hat{q} = g^{-1}.q} \tag{1.5.9}$$

A classe de equivalência de um elemento $(\mathbf{e}, q) \in \mathcal{B}(V) \times Q$ representa-se por $[\mathbf{e}, q]$. Portanto:

$$[\mathbf{e}, q] = \{(\mathbf{e} \cdot g, g^{-1}.q) : \quad g \in G\ell(r, \mathbf{K})\}$$

é uma órbita da acção direita de $G\ell(r, \mathbf{K})$ em $\mathcal{B}(V) \times Q$, definida pela fórmula $(\mathbf{e}, q) \cdot g \stackrel{\text{def}}{=} (e \cdot g, g^{-1}.q)$.

Exemplos ...

- $Q = \mathbf{K}^r$ cujos elementos são representados por vectores-coluna $\xi = (\xi^a)$, e a acção esquerda de $G\ell(r, \mathbf{K})$ em $\mathbf{K}^r$ é a multiplicação usual de matrizes $(g, \xi) \mapsto g.\xi = g\xi$, isto é, a **representação fundamental** de $G\ell(r, \mathbf{K})$ em $\mathbf{K}^r$. Neste caso a discussão anterior, nomeadamente (1.5.3), mostra que o conjunto das classes de equivalência identifica-se com V. De facto, "*um vector de V não é mais do que uma sequência de r números ξ^a que se transformam (contravariantemente) como um vector*"!!...

- Q é novamente $\mathbf{K}^r$ (vectores-coluna $\xi = (\xi^a)$), e a acção esquerda de $G\ell(r, \mathbf{K})$ em $\mathbf{K}^r$ é a multiplicação de matrizes $(g, \xi) \mapsto g.\xi = (g^{-1})^t\xi$, isto é, a **representação contragradiente** de $G\ell(r, \mathbf{K})$ em $\mathbf{K}^r$. Neste caso a discussão anterior (nomeadamente a transposta da fórmula (1.5.7), uma vez que insistimos em considerar a acção em vectores-coluna de $Q = \mathbf{K}^r$), mostra que o conjunto das classes de equivalência identifica-se com V^*. De facto, "*um covector em V^* não é mais do que uma sequência de r números ξ_a que se transformam (covariantemente) como um covector*"!!...

- $Q = \mathbb{R}$ e a acção esquerda de $G\ell(r, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$ é dada por:

$$(g, x) \mapsto g.x = |\det g|^\lambda \, x$$

onde λ é um número real fixo não nulo. Neste caso as classes de equivalência dizem-se **"densidades escalares de peso λ"**.

- $Q = \underbrace{\mathbf{K}^n \otimes \cdots \otimes \mathbf{K}^n}_{(r+s) \text{ factores}}$ e $G\ell(n, \mathbf{K})$ actua em Q através de:

$$g.(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_r \otimes \xi_{r+1} \otimes \cdots \otimes \xi_{r+s}) = g\xi_1 \otimes \cdots \otimes g\xi_r \otimes (g^{-1})^t\xi_{r+1} \otimes \cdots \otimes (g^{-1})^t\xi_{r+s} \quad (1.5.10)$$

O conjunto das classes de equivalência identifica-se com $\mathcal{T}_{r,s}(V)$, o espaço dos tensores de tipo (r, s) em V.

Futuramente veremos mais exemplos desta situação.

1.5.2 O Fibrado de Referenciais. Reduções e G-estruturas

Vamos nesta secção descrever o chamado **"fibrado de referenciais"** de uma variedade M, fibrado que é um exemplo típico de fibrado principal, e que desempenha um papel fundamental em geometria das variedades.

O espaço total do fibrado de referenciais $\mathcal{F}(M)$ ("frame bundle"), de uma variedade M, é o espaço constituído por todos os referenciais de cada espaço tangente T_xM, para todo o ponto $x \in M$:

$$\mathcal{F}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in M} \mathcal{B}(T_xM) \qquad \text{reunião disjunta}$$

Existe uma projecção natural:

$$\pi : \mathcal{F}(M) \to M \qquad \text{definida por} \qquad \pi(\mathbf{e}_x) = x \quad \text{se } \mathbf{e}_x \in \mathcal{B}(T_xM)$$

Recorde que $\mathbf{e}_x$ representa um referencial ou uma base de T_xM, e portanto $\mathbf{e}_x$ pode ser visto como uma matriz-linha $\mathbf{e}_x = [X_{1x} \cdots X_{nx}] = X_{ax}$ de n vectores linearmente independentes em T_xM, ou como um isomorfismo $\mathbf{e}_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$. Neste último contexto, $\mathbb{R}^n$ diz-se por vezes, o "espaço interno".

A topologia e a estrutura diferenciável em $\mathcal{F}(M)$ definem-se de forma completamente análoga à que se utilizou na construção do fibrado tangente, usando agora as cartas locais em $\mathcal{F}(M)$ construídas da seguinte forma. Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha) = (U_\alpha; x^i_\alpha)$ é uma cada carta local para M, então um referencial $\mathbf{e}_x = [X_{1x} \cdots X_{nx}]$ para T_xM, $x \in U_\alpha$ pode ser escrito na forma única:

$$\boxed{(X_a)_x = \sum_i (X_\alpha)^i_a(\mathbf{e}_x) \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}|_x \qquad a = 1, \cdots, n} \tag{1.5.11}$$

onde a matriz $[(X_\alpha)^i_a(\mathbf{e}_x)] \in G\ell(n, \mathbb{R})$ é não singular. Definimos então uma carta local $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$ para $\mathcal{F}(M)$, pondo:

$$\psi_\alpha : \mathbf{e}_x \mapsto \big(x^i_\alpha(x), (X_\alpha)^i_a(\mathbf{e}_x)\big) \in \mathbb{R}^n \times G\ell(n, \mathbb{R}) \tag{1.5.12}$$

que é um homeomorfismo de $\pi^{-1}(U_\alpha)$ sobre o aberto $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times G\ell(n, \mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^{n+n^2}$. Se $(\pi^{-1}(U_\beta), \psi_\beta)$ é uma outra carta local para $\mathcal{F}(M)$, definida da mesma forma a partir de $(U_\beta, \varphi_\beta) = (U_\beta; x^i_\beta)$, então aplicando (1.4.9) vemos que:

$$\begin{aligned}
(X_a)_x &= (X_\alpha)^i_a(\mathbf{e}_x) \, \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}|_x \\
&= (X_\alpha)^i_a(\mathbf{e}_x) \, [\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)]^j_i \, \frac{\partial}{\partial x^j_\beta}|_x \\
&= [\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)]^j_i (X_\alpha)^i_a(\mathbf{e}_x) \, \frac{\partial}{\partial x^j_\beta}|_x \\
&= (X_\beta)^j_a(\mathbf{e}_x) \, \frac{\partial}{\partial x^j_\beta}|_x
\end{aligned}$$

e portanto:

$$\boxed{(X_\beta)^j_a(\mathbf{e}_x) = [\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)]^j_i (X_\alpha)^i_a(\mathbf{e}_x)} \tag{1.5.13}$$

donde se deduz que as mudanças de coordenadas são em notação vectorial-matricial:

$$\boxed{\psi_{\beta\alpha} : (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{X}_\alpha) \mapsto (\mathbf{x}_\beta, \mathbf{X}_\beta) = (\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha), [\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_\alpha)]\mathbf{X}_\alpha)} \tag{1.5.14}$$

Note que em (1.5.13), $\mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)$ actua apenas nos índices espaciais (ou "tangentes") e não nos índices internos ...

Um atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ para M, induz uma estrutura de $G\ell(n, \mathbb{R})$-fibrado diferenciável em $\mathcal{F}(M)$, definida pelo atlas de trivializações locais:

$$\begin{array}{ccccc}
\pi^{-1}(U_\alpha) & & \xrightarrow{\phi_\alpha} & & U_\alpha \times G\ell(n, \mathbb{R}) \\
& \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 & \\
& & U_\alpha \subset M & &
\end{array}$$

onde:

$$\phi_\alpha : \mathbf{e}_x \mapsto (x, \mathbf{X}_\alpha(\mathbf{e}_x))$$

onde $\mathbf{X}_\alpha(\mathbf{e}_x) = \Big[(X_\alpha)^i_a(\mathbf{e}_x)\Big] \in G\ell(n, \mathbb{R})$ é a matriz definida por (1.5.11). A discussão anterior mostra ainda que as correspondentes funções de transição são dadas por:

$$\boxed{g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \to G\ell(n, \mathbb{R}) \qquad\qquad g_{\beta\alpha}(x) = \mathbf{J}\varphi_{\beta\alpha}(x)} \tag{1.5.15}$$

isto é, exactamente as mesmas funções de transição que surgiram na construção do fibrado tangente! (ver (1.4.11)). Só que aqui, a fibra tipo é o grupo de Lie $G = G\ell(n, \mathbb{R})$ e o grupo de estrutura, também igual a $G\ell(n, \mathbb{R})$, actua na fibra tipo por multiplicação à esquerda, como mostra a fórmula (1.5.14).

Existe ainda uma acção natural de $G\ell(n, \mathbb{R})$ à direita de $\mathcal{F}(M)$, definida por (ver 1.5.1):

$$(\mathbf{e}_x, g) \mapsto \mathbf{e}_x \cdot g \tag{1.5.16}$$

que é diferenciável e livre. A fibra $\pi^{-1}(x)$ é igual à órbita que passa em $\mathbf{e}_x$, desta acção: $\mathbf{e}_x \cdot G\ell(n, \mathbb{R}) = \pi^{-1}(x)$.

Uma secção (local) do fibrado $\mathcal{F}(M) \to M$ diz-se um **"referencial móvel (local)"**, ou um **"campo (local) de referenciais"** em M. Referenciais móveis locais existem sempre. No entanto referenciais móveis globais só existem em certos casos, exactamente naqueles em que $\mathcal{F}(M)$ é trivial. Neste caso M diz-se **"paralelizável"**. Um exemplo importante é o dos grupos de Lie, como veremos futuramente.

Muitas "estruturas geométricas" em variedades definem (e podem ser definidas por) uma classe especial de referenciais. Por exemplo, uma métrica riemanniana $\mathbf{g}$ numa variedade M, define a classe especial dos referenciais ortonormados, e recìprocamente, se soubermos quais os referenciais ortonormados podemos reconstruir a métrica. Mais concretamente, se escolhemos um campo (local) de referenciais σ, num aberto $U \subseteq M$:

$$\sigma : x \mapsto \sigma(x) = [X_{1x} \cdots X_{nx}] \in \mathcal{B}(T_xM)$$

então existe uma única metrica riemanniana $\mathbf{g}$ em U para a qual estes referenciais são ortonormados. De facto se interpretarmos cada $\sigma(x) \in \mathcal{B}(T_xM)$ como um isomorfismo:

$$\sigma(x) : \mathbb{R}^n \to T_xM$$

a métrica $\mathbf{g}$ fica determinada pela condição:

$$\boxed{\mathbf{g}_x(V_x, W_x) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \sigma(x)^{-1}(V_x) \bullet \sigma(x)^{-1}(W_x) \qquad\qquad \forall V_x, W_x \in T_xM} \tag{1.5.17}$$

onde $\bullet$ representa o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$. Mas existe uma "liberdade ou invariância de gauge" na escolha do campo de referenciais σ. De facto qualquer outra secção que seja da forma:

$$\sigma_g(x) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \sigma(x) \cdot g(x), \qquad x \in U$$

onde $g : U \to O(n, \mathbb{R}) \subset G\ell(n, \mathbb{R})$ é uma aplicação diferenciável com valores no grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$, e $\cdot$ representa a acção direita (1.5.19):

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g(x)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sigma(x)} T_xM$$

define a mesma métrica $\mathbf{g}$, dada por (1.5.17).

De facto, esta discussão pode ser posta em termos mais formais, invocando o conceito de **"redução"** do fibrado $\mathcal{F}(M)$, determinada por um subgrupo G do seu grupo de estrutura $G\ell(n, \mathbb{R})$ (no exemplo anterior $G = O(n, \mathbb{R})$). Formalmente, uma **"redução"** do fibrado de referenciais $\mathcal{F}(M)$ por um subgrupo de Lie G em $G\ell(n, \mathbb{R})$, ou uma **"G-estrutura"** na variedade M, é um subfibrado de $\mathcal{F}(M)$ em que o grupo de estrutura e a fibra tipo são ambos G (em particular, existe um cociclo de funções de transição que tomam valores em G).

Neste contexto, uma métrica riemanniana $\mathbf{g}$ determina uma $O(n, \mathbb{R})$-estrutura dada pelo fibrado $\mathcal{O}(M)$ dos referenciais ortonormados em M. Recìprocamente, uma $O(n, \mathbb{R})$-estrutura em M, isto é, uma redução de $\mathcal{F}(M)$ pelo subgrupo ortogonal $O(n, \mathbb{R}) \subset G\ell(n, \mathbb{R})$, determina uma única métrica riemanniana $\mathbf{g}$ em M: se $\mathbf{e}_x \in \mathcal{O}(M)$, interpretado como um isomorfismo $\mathbf{e}_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$, então:

$$\boxed{\mathbf{g}_x(V_x, W_x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_x^{-1}(V_x) \bullet \mathbf{e}_x^{-1}(W_x) \qquad \forall V_x, W_x \in T_xM} \tag{1.5.18}$$

e esta definição é independente de qual o referencial $\mathbf{e}_x$ escolhido na fibra $\mathcal{O}(M)_x$, por cima de x (mais uma vez, esta é a manifestação da já referida "invariância de gauge" - o "grupo de gauge" da geometria riemanniana é $O(n, \mathbb{R})$.)

Vamos apenas referir mais alguns exemplos de G-estruturas. Assim uma $G\ell^+(n, \mathbb{R})$-estrutura é equivalente a uma orientação em M, uma $\{e\}$-estrutura é equivalente a um "paralelismo absoluto" de M, uma $G\ell(n, \mathbb{C})$-estrutura é equivalente a uma estrutura quasi-complexa em M.

Para terminar é de referir o facto de que dado um subgrupo de Lie $G \subset G\ell(n, \mathbb{R})$, pode não existir uma G-estrutura associada, em M. Por exemplo, uma variedade pode não ser orientável, ou pode não ser paralelizável, ... Estas e outras questões podem ser vistas em [St], por exemplo.

Da mesma forma que um espaço vectorial V pode ser construído a partir do conjunto das suas bases (ou referenciais), conforme se viu na secção 1.6.1, podemos construir **"fibrados associados"** ao fibrado de referenciais $\mathcal{F}(M)$. Assim por exemplo, o fibrado tangente pode ser construído a partir de $\mathcal{F}(M)$, de seguinte forma: em $\mathcal{F}(M) \times \mathbb{R}^n$ consideramos a acção direita de $G\ell(n, \mathbb{R})$ definida por:

$$(\mathbf{e}_x, \xi).g \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{e}_x \cdot g, g^{-1}\xi)$$

(onde $(\mathbf{e}_x, \xi) \in \mathcal{F}(M) \times \mathbb{R}^n$ e $g \in G\ell(n, \mathbb{R})$), então TM é igual ao espaço de órbitas desta acção. Anàlogamente, se defirmos agora uma outra acção direita de $G\ell(n, \mathbb{R})$ em $\mathcal{F}(M) \times \mathbb{R}^n$, através de:

$$(\mathbf{e}_x, \xi).g \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{e}_x \cdot g, g^t\xi)$$

(onde $(\mathbf{e}_x, \xi) \in \mathcal{F}(M) \times \mathbb{R}^n$ e $g \in G\ell(n, \mathbb{R})$), então o correspondente espaço de órbitas é T^*M. De facto, como veremos num próximo capítulo, todos os fibrados tensoriais podem ser obtidos a partir de $\mathcal{F}(M)$ por um processo análogo ao acima descrito.

1.5.3 Fibrados principais. Fibrados associados

([4]) O fibrado de referenciais $\mathcal{F}(M)$ e as respectivas reduções são exemplos típicos de uma classe mais geral de G-fibrados - os chamados fibrados principais.

♣ **Definição 1.22** ... *Um* **"fibrado principal"** *$P(M, G)$, é um G-fibrado sobre uma variedade M, em que o grupo de estrutura e a fibra tipo são ambos iguais a um grupo de Lie G, e a acção de G, como grupo de estrutura, na fibra tipo G, é dada pela multiplicação à esquerda.*

Num fibrado principal $P(M, G)$ existe sempre uma acção natural de G à direita do espaço total P:

$$(p, g) \mapsto R_g(p) = pg$$

que se define transportando para P a multiplicação de G à direita de si próprio, através de trivializações locais. Como as funções de transição actuam na fibra por multiplicação à esquerda, esta acção não interfere com a multiplicação à direita, o que torna possível a definição de R_g.

Mais precisamente, seja $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ um atlas de trivializações locais para $P(M, G)$. Então se $x \in U_\alpha$, a fibra P_x pode ser identificada com G através de:

$$\phi_{\alpha,x} : P_x \to G$$

Definimos então a acção direita de G em P, através da fórmula:

$$\boxed{pg = R_g(p) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{\alpha,x}^{-1}\big(\phi_{\alpha,x}(p)\, g\big)} \tag{1.5.19}$$

Para ver que esta definição não depende da trivialização escolhida, consideremos o cociclo de funções de transição $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow Diff(G)$:

$$g_{\beta\alpha}(x) = \phi_{\beta,x} \circ \phi_{\alpha,x}^{-1} : G \longrightarrow G \tag{1.5.20}$$

associada ao atlas Φ:

$$\begin{array}{ccccc} & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times G & \ni & (x, h) \\ & \phi_\alpha \nearrow & & & \\ \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & & \downarrow \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} & & \downarrow \\ & \phi_\beta \searrow & & & \\ & & (U_\alpha \cap U_\beta) \times G & \ni & (x, g_{\beta\alpha}(x)h) \end{array}$$

[4]Secção facultativa.

A fórmula (1.5.20) pode ser escrita:

$$\phi_{\beta,x}(p) = g_{\beta\alpha}(x)\phi_{\alpha,x}(p) \qquad \forall p \in \pi^{-1}(x)$$

(no membro da direita a operação é a multiplicação no grupo G), e portanto $\forall g \in G$ e $\forall p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset P$, temos que:

$$\phi^{-1}_{\beta,x}\big(\phi_{\beta,x}(p)\, g\big) = \phi^{-1}_{\beta,x}\big(g_{\beta\alpha}(x)\phi_{\alpha,x}(p)\, g\big) = \phi^{-1}_{\alpha,x}\big(\phi_{\alpha,x}(p)\, g\big)$$

o que mostra que $R_g(p) = pg$ está bem definida. Vejamos algumas propriedades desta acção direita:

- $\pi \circ R_g = \pi$, isto é R_g preserva as fibras de $\pi : P \to M$.
- é livre: se $R_g(p) = pg = p$, então $\phi_{\alpha,x}(p)\, g = \phi_{\alpha,x}(p)$ em G, e portanto $g = e$.
- é transitiva em cada fibra: se $p, q \in \pi^{-1}(x)$, existe um único $g \in G$ tal que $q = pg$, nomeadamente $g = \phi_{\alpha,x}(p)^{-1}\phi_{\alpha,x}(q) \in G$.

Em particular, fica ainda provado que M é o espaço de órbitas da acção direita de G em P.

É aliás frequente encontrar a seguinte definição equivalente de fibrado principal (por exemplo, em [KN], [PQ] ou [Sp]):

♣ **Definição 1.23** ... *Seja $\xi = (P, M, G, \pi)$ um fibrado diferenciável (definição 8), cuja fibra tipo é um grupo de Lie G. Então ξ diz-se um* **"fibrado principal"** *com* **"grupo de gauge"** *G, e nota-se por $P(M, G)$, se G actua livremente à direita de P (acção C^∞), e se:*

- $\pi(p \cdot g) = \pi(p) \qquad \forall p \in P, \forall g \in G.$
- *existe um atlas Φ de trivializações locais equivariantes, i.e., $\forall (U, \phi) \in \Phi$:*

$$\phi_x(p \cdot g) = \phi_x(p)g \qquad \forall x \in U, \forall g \in G$$

Note que $\pi^{-1}(\pi(p)) = p \cdot G$, isto é, a fibra por cima de $\pi(p) \in M$ é exactamente a G-órbita que contem p. Se adoptamos esta definição, então podemos tomar como grupo de estrutura de $P(M, G)$ o próprio G actuando por multiplicação à esquerda de G (que é a fibra tipo). Com efeito, isto resulta dos factos seguintes:

- o produto em G:
$$\phi_{\beta,x}(p)[\phi_{\alpha,x}(p)]^{-1} \tag{1.5.21}$$
não depende do elemento $p \in \pi^{-1}(x)$, onde $x \in M$.

  De facto, qualquer outro $p' \in \pi^{-1}(x)$ é da forma $p \cdot g$ para algum $g \in G$ e:

$$\phi_{\beta,x}(p\cdot g)[\phi_{\alpha,x}(p\cdot g)]^{-1} = \phi_{\beta,x}(p)g[\phi_{\alpha,x}(p)g]^{-1} = \phi_{\beta,x}(p)gg^{-1}[\phi_{\alpha,x}(p)]^{-1} = \phi_{\beta,x}(p)[\phi_{\alpha,x}(p)]^{-1}$$

- Se (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) são duas trivializações locais sobre $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então:

$$\phi_{\beta,x} \circ \phi_{\alpha,x}^{-1}(g) = \phi_{\beta,x}(p)[\phi_{\alpha,x}(p)]^{-1}\, g \tag{1.5.22}$$

onde no segundo membro as operações são em G.

De facto, se $\phi_{\alpha,x}^{-1}(g) = p$ então $g = \phi_{\alpha,x}(p)$ e $\phi_{\beta,x} \circ \phi_{\alpha,x}^{-1}(g) = \phi_{\beta,x}(p)$. Mas $p \in \pi^{-1}(x)$ e portanto $\phi_{\beta,x}(p)[\phi_{\alpha,x}(p)]^{-1}\, g = \phi_{\beta,x}(p)[\phi_{\alpha,x}(p)]^{-1}\, \phi_{\alpha,x}(p) = \phi_{\beta,x}(p)$ também, donde se deduz (1.5.22).

Portanto se definirmos:

$$\boxed{g_{\beta\alpha}(x) \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \phi_{\beta,x}(p)[\phi_{\alpha,x}(p)]^{-1}} \tag{1.5.23}$$

resulta de (1.5.21), que esta definição não depende do $p \in \pi^{-1}(x)$. Por outro lado, de (1.5.22) resulta que $g_{\beta\alpha}(x)$ é exactamente a função de transição.

Para terminar esta secção vamos referir a construção de fibrados associados a um fibrado principal, que generaliza a situação já tratada na última secção, onde se construiu o fibrado tangente TM, como fibrado associado a $\mathcal{F}(M)$.

Suponhamos que $P(M,G)$ é um fibrado principal com grupo de gauge G, e suponhamos que G actua à esquerda (acção C^∞) de uma variedade F:

$$(g, \mathbf{v}) \mapsto g.\mathbf{v} \qquad\qquad (g, \mathbf{v}) \in G \times F$$

Nestas condições G actua à direita de $P \times F$ através de:

$$\boxed{(p, \mathbf{v}) \cdot g \ \stackrel{\text{def}}{=}\ (R_g(p), g^{-1}.\mathbf{v}) = (pg, g^{-1}.\mathbf{v})} \tag{1.5.24}$$

(onde $(p, \mathbf{v}) \in P \times F$ e $g \in G$). Representemos o correspondente espaço de órbitas por:

$$P \times_G F \ \stackrel{\text{def}}{=}\ (P \times F)/\sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência em $P \times F$:

$$(p, \mathbf{v}) \sim (pg, g^{-1}.\mathbf{v})$$

A classe de equivalência de $(p, \mathbf{v}) \in P \times F$ será notada por $[p, \mathbf{v}]$. Definimos ainda uma projecção:

$$\Pi : P \times_G F \longrightarrow M$$

através de:

$$\Pi([p, \mathbf{v}]) = \pi(p)$$

onde $\pi : P \to M$ é a projecção do fibrado $P(M,G)$. Nestas condições temos o seguinte:

♣ **Teorema 1.4** ... *Suponhamos que $P(M,G)$ é um fibrado principal com grupo de gauge G, e suponhamos que G actua à esquerda (acção C^∞) de uma variedade F. Então:*

- $(P \times_G F, M, \Pi)$ *tem estrutura de* G*-fibrado, com fibra tipo* F.

- $P \times F$ *é um fibrado principal sobre o espaço das órbitas* $P \times_G F$*, com grupo de gauge* G.

- *A aplicação* π_1 *é um morfismo* G*-equivariante de fibrados principais, que cobre* Π*, isto é,* π_1 *transforma a fibra em* $P \times F$ *por cima de* $[p, \mathbf{v}] \in P \times_G F$ *difeomòrficamente sobre a fibra* $P_{\pi(p)}$*, e comuta com as acções de* G *em* $P \times F$ *e* P*, respectivamente:*

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \stackrel{\pi_1}{\longrightarrow} & P \\ \tau \downarrow & & \downarrow \pi \\ P \times_G F & \stackrel{\Pi}{\longrightarrow} & M \end{array}$$

- *Para* $p \in P$*, a aplicação notada ainda por* p*:*

$$p : F \longrightarrow P \times_G F \qquad \text{definida por} \qquad p(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} [p, \mathbf{v}] \tag{1.5.25}$$

é um difeomorfismo sobre a fibra de $P \times_G F$*, por cima de* $\pi(p)$.

- *se* $F = V$ *é um espaço vectorial e* G *actua linearmente em* V*, então* $P \times_G V$ *tem estrutura de fibrado vectorial sobre* M.

- <u>Demonstração</u>...

- Vamos construir trivilizações locais para $P \times_G F \stackrel{\Pi}{\longrightarrow} M$, da seguinte forma: seja (U, ϕ) uma trivilização local de $P \stackrel{\pi}{\longrightarrow} M$, de tal forma que:

$$\begin{array}{ccccc} \pi^{-1}(U) & & \stackrel{\phi}{\longrightarrow} & & U \times G \\ & \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 & \\ & & U & & \end{array}$$

Definimos então uma trivilização local $(\Pi^{-1}(U), \widetilde{\phi})$, de $P \times_G F \stackrel{\Pi}{\longrightarrow} M$:

$$\begin{array}{ccccc} \Pi^{-1}(U) & & \stackrel{\widetilde{\phi}}{\longrightarrow} & & U \times F \\ & \pi \searrow & & \swarrow \pi_1 & \\ & & U & & \end{array}$$

pondo:

$$\boxed{\widetilde{\phi}([p, \mathbf{v}]) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi(p), \phi_{\pi(p)}(p).\mathbf{v}) \qquad \forall [p, \mathbf{v}] \in \Pi^{-1}(U)} \tag{1.5.26}$$

Para ver que $\widetilde{\phi}$ é inversível, consideramos a secção local de P:

$$\sigma : x \mapsto \phi^{-1}(x, e) \qquad x \in U \subset M$$

onde e é o elemento neutro de G, e definimos a aplicação:

$$\psi : U \times F \longrightarrow \Pi^{-1}(U) \qquad \text{através de} \qquad \psi(x, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} [\sigma(x), \mathbf{v}]$$

Temos então que:

$$(\widetilde{\phi} \circ \psi)(x, \mathbf{v}) = \widetilde{\phi}([\sigma(x), \mathbf{v}]) = (x, \phi_x(\sigma(x)).\mathbf{v}) = (x, \mathbf{v})$$

e por outro lado, pondo $\pi(p) = x \in U$:

$$(\psi \circ \widetilde{\phi})([p, \mathbf{v}]) = \psi(x, \phi_x(p).\mathbf{v}) = [\sigma(x), \phi_x(p).\mathbf{v}] = [\sigma(x)\phi_x(p), \mathbf{v}] = [p, \mathbf{v}]$$

Portanto $\widetilde{\phi}$ é inversível e é uma trivilização local de $P \times_G F \xrightarrow{\Pi} M$.

Se temos duas trivializações locais $(U_\alpha, \widetilde{\phi}_\alpha)$ e $(U_\beta, \widetilde{\phi}_\beta)$, construídas como antes a partir de duas trivializações locais (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) de $P \xrightarrow{\pi} M$, com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\forall (x, \mathbf{v}) \in (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$:

$$\widetilde{g}_{\beta\alpha}(x).\mathbf{v} = (\widetilde{\phi}_{\beta,x} \circ \widetilde{\phi}_{\alpha,x}^{-1})(\mathbf{v}) = \widetilde{\phi}_{\beta,x}([\sigma_\alpha(x), \mathbf{v}]) = \phi_\beta(\sigma_\alpha(x)).\mathbf{v} = g_{\beta\alpha}(x).\mathbf{v}$$

o que significa que $\widetilde{g}_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}$. Portanto as funções de transição são C^∞, as cartas trivializadoras são C^∞ G-compatíveis, e definem a estrutura C^∞ em $P \times_G F$ e também a estrutura de G-fibrado sobre M.

- A acção direita C^∞ de G em $P \times F$, é dada por:

$$(p, \mathbf{v}) \cdot g \stackrel{\text{def}}{=} (pg, g^{-1}\mathbf{v})$$

  A projecção $\tau : P \times F \to P \times_G F$, definida por $\tau(p, \mathbf{v}) = [p, \mathbf{v}]$, verifica a condição $\tau(p, \mathbf{v}) = \tau(pg, g^{-1}\mathbf{v})$. A identidade $\pi_1(pg, g^{-1}\mathbf{v}) = pg = \pi_1(p, \mathbf{v})g$ mostra que π_1 é um morfismo de fibrados principais G-equivariante e que cobre Π.

- Fixemos um "referencial interno" $p \in \pi^{-1}(x)$. A aplicação de F em $\Pi^{-1}(x)$ que envia $\mathbf{v}$ em $\tau(p, \mathbf{v}) = [p, \mathbf{v}]$ é C^∞ porque τ o é. A sua inversa é dada relativamente a uma carta trivializadora (U, ϕ) de $P(M, G)$, e à correspondente carta trivializadora $(U, \widetilde{\phi})$ de $P \times_G F$, por $\xi \mapsto [\phi_x(p)]^{-1}.\widetilde{\phi}_x(\xi)$ e é também C^∞.

- Finalmente, suponhamos que $F = V$ é um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbf{K}$, e que G actua linearmente em V. Dado um "referencial interno" $p \in \pi^{-1}(x)$, e $v = [p, \mathbf{v}], w = [p, \mathbf{w}] \in \Pi^{-1}(x)$, definimos:

$$\boxed{u + \lambda v \stackrel{\text{def}}{=} [p, \mathbf{v} + \lambda \mathbf{w}] \qquad \forall \lambda \in \mathbf{K}} \tag{1.5.27}$$

  Isto está bem definido já que $\forall g \in G$, $v = [pg, g^{-1}.\mathbf{v}]$, $w = [pg, g^{-1}.\mathbf{w}]$ e portanto:

$$[pg, \lambda g^{-1}.\mathbf{v} + g^{-1}.\mathbf{w}] = [pg, g^{-1}.(\lambda \mathbf{v} + \mathbf{w})] = [p, \lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}]$$

  As cartas trivializadoras $(U, \widetilde{\phi})$ são agora cartas trivializadoras de fibrado vectorial.

$\square$.

O teorema seguinte dá uma descrição muito útil na prática, das secções de fibrados associados.

♣ **Teorema 1.5** ... *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo de gauge G, e $(P \times_G F, M, \Pi)$ o fibrado associado, correspondente a uma acção esquerda de G em F.*

Então as secções locais deste fibrado associado, definidas num aberto $U \subseteq M$, correspondem exactamente às aplicações C^∞, G-equivariantes de $\pi^{-1}(U) \subseteq P$ em F:

$$\begin{aligned} \Gamma_U(P \times_G F) &\cong C^\infty(\pi^{-1}(U), F)^G \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \{f : \pi^{-1}(U) \to F : \quad f(pg) = g^{-1}.f(p) \qquad \forall p \in \pi^{-1}(U) \subseteq P, \forall g \in G\} \end{aligned} \tag{1.5.28}$$

- Demonstração...

Dada uma aplicação G-equivariante $f : \pi^{-1}(U) \subseteq P \to F$, definimos uma secção $\sigma_f : U \to P \times_G F$, da seguinte forma: para cada $x \in U \subseteq M$, escolhemos um "referencial interno" $p_x \in P_x = \pi^{-1}(x)$, por cima de x. O par $[p_x, f(p_x)] \in P \times_G F$ não depende da escolha de p_x. De facto, se p'_x é um outro "referencial interno" por cima de x, então $p'_x = p_x g$ para algum $g \in G$ e então:

$$[p'_x, f(p'_x)] = [p_x g, f(p_x g)] = [p_x g, g^{-1} f(p_x)] = [p_x, f(p_x)]$$

Portanto podemos definir:

$$\sigma_f(x) \stackrel{\text{def}}{=} [p_x, f(p_x)] \qquad\qquad x \in U \subseteq M \tag{1.5.29}$$

e é fácil ver que $\sigma_f \in \Gamma_U(P \times_G F)$.

Recìprocamente, se $\sigma : U \to P \times_G F$ é uma secção local, definimos uma aplicação C^∞ $f_\sigma : \pi^{-1}(U) \to F$ da seguinte forma: para cada $p \in \pi^{-1}(U) \subseteq P$, $\pi(p) = x$ está em U e portanto $\sigma(x)$ está na fibra de $P \times_G F$ por cima de x. Mas pelo teorema anterior p define um difeomorfismo de F sobre essa fibra (ver (1.5.25). Resta pôr:

$$f_\sigma(p) = p^{-1}(\sigma(x)) \qquad\qquad p \in \pi^{-1}(U),\ x = \pi(p)$$

É claro que $\sigma \mapsto f_\sigma$ e $f \mapsto \sigma_f$ são inversas uma da outra.

$\square$.

Evidentemente que se no teorema anterior, um dos objectos (σ ou f) está definido globalmente, também o estará o outro.

Exemplo ...

Consideremos um fibrado principal $P = P(M, G)$, sobre M, com um grupo de de gauge G. Designemos por:

$$\mathcal{A}\mathbf{d}P \stackrel{\text{def}}{=} P \times_G G \tag{1.5.30}$$

o fibrado associado a P, correspondente à acção $\mathcal{A}\mathbf{d}$ de G em si próprio:

$$(g,h) \to \mathcal{A}d_g h \overset{\text{def}}{=} ghg^{-1}$$

Uma **"transformação de gauge"** é um automorfismo vertical de P, i.e., um difeomorfismo equivariante $\Psi \in Diff(P)$ que reveste Id_M:

$$\Psi(pg) = \Psi(p)g \qquad \text{e} \qquad \pi(\Psi(p)) = \pi(p)$$

As transformações de gauge formam um grupo, notado por $\mathbf{G}_P$, que se diz o **"grupo de transformações de gauge"** de $P = P(M,G)$. É fácil ver que este grupo pode ser identificado com o grupo das funções C^∞ G-equivariantes $f : P \to G$, e portanto, pelo teorema anterior, com o grupo das secções de $\mathcal{A}\mathbf{d}P$.

De facto, dada $\Psi \in \mathbf{G}_P$ temos que $\Psi(p) = pf_\Psi(p)$ para um único $f_\Psi(p) \in G$, já que $\pi(\Psi(p)) = \pi(p)$. Fica assim definida uma aplicação $f_\Psi : P \to G$. Além disso:

$$p(gf_\Psi(pg)) = (pg)f_\Psi(pg) = \Psi(pg) = \Psi(p)g = (pf_\Psi(p))g = p(f_\Psi(p)g) \Rightarrow f_\Psi(pg) = g^{-1}f_\Psi(p)g$$

e f_Ψ é G-equivariante (relativamente à acção (1.5.30)). Resumindo:

$$\boxed{\mathbf{G}_P \cong C^\infty(P,G)^G \cong \Gamma(\mathcal{A}\mathbf{d}P)} \tag{1.5.31}$$

1.6 Mais Exemplos

Nesta secção vamos analisar alguns exemplos concretos, com o objectivo de ilustrar a teoria exposta até este momento.

1.6.1 O Fibrado Tangente de uma Grassmanniana

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbf{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Recorde que definimos a **"variedade de Grassmann dos subespaços de dimensão** k**"** ($1 \leq k < n$) em $\mathcal{V}$, através de:

$$\text{Gr}_k(\mathcal{V}) \overset{\text{def}}{=} \{S : \; S \text{ é subespaço de dimensão } k \text{ em } \mathcal{V}\} \tag{1.6.1}$$

Quando $k = 1$, e $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\text{Gr}_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{RP}(n-1)$ é o espaço projectivo das rectas vectoriais em $\mathbb{R}^n$. Quando $k = 1$, e $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, $\text{Gr}_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}(n-1)$ é o espaço projectivo das rectas complexas vectoriais em $\mathbb{C}^n$.

Consideremos a estrutura diferenciável já referida na secção I.6., e que passamos a descrever agora com todo o detalhe: fixemos um qualquer subespaço W_α de dimensão $n-k$ em $\mathcal{V}$, e definamos o aberto U_α de $\text{Gr}_k(\mathcal{V})$, constituído por todos os subespaços de dimensão k em $\mathcal{V}$, que são suplementares a W_α:

$$U_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{S \in \text{Gr}_k(\mathcal{V}) : \; S \cap W_\alpha = \{\mathbf{0}\}\}$$

Vamos demonstrar o facto seguinte:

$$\boxed{U_\alpha \textit{ tem estrutura de espaço afim, modelado no espaço vectorial } Hom(\mathcal{V}/W_\alpha\,,\,W_\alpha)}$$

([5]) Com efeito, se $S, S' \in U_\alpha$ e se $\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}/W_\alpha$ é a projecção canónica, então $\pi|_S : S \to \mathcal{V}/W_\alpha$ e $\pi|_{S'} : S' \to \mathcal{V}/W_\alpha$ são isomorfismos lineares (por exemplo, $\pi|_S : s \mapsto s + W_\alpha$ é isomorfismo, porque é injectiva: $\pi|_S(s) = s + W_\alpha = W_\alpha \Rightarrow s \in W_\alpha \cap S = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow s = \mathbf{0}$, já que S e W_α são suplementares. Por outro lado $\dim S = \dim \mathcal{V}/W_\alpha$).

Resta então definir $\overrightarrow{SS'} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}/W_\alpha\,,\,W_\alpha)$, através de:

$$\overrightarrow{SS'}(v + W_\alpha) \overset{\text{def}}{=} \left(\pi|_{S'}\right)^{-1}(v + W_\alpha) - \left(\pi|_S\right)^{-1}(v + W_\alpha)$$

Note que o segundo membro é de facto um elemento de W_α, uma vez que:

$$\pi\left[\left(\pi|_{S'}\right)^{-1}(v + W_\alpha) - \left(\pi|_S\right)^{-1}(v + W_\alpha)\right] = W_\alpha$$

Se fixarmos uma origem Z no espaço afim U_α, podemos identificar U_α com o espaço vectorial:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{V}/W_\alpha\,,\,W_\alpha) \cong \mathrm{Hom}(Z\,,\,W_\alpha) \cong \mathbf{K}^{k(n-k)}$$

e então qualquer $S \in U_\alpha$ fica identificado com um homomorfismo $A_\alpha(S) \in \mathrm{Hom}(Z\,,\,W_\alpha)$ (confirmar com a secção 1.1.4.). De facto, relativamente à decomposição em soma directa $\mathcal{V} = Z \oplus W_\alpha$:

$$S = \mathbf{gr}\, A_\alpha(S) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{z} + A_\alpha(S)(\mathbf{z}) :\, \mathbf{z} \in Z\,\}$$

(a origem Z será evidentemente identificada com $A_Z = \mathbf{0} \in \mathrm{Hom}(Z\,,\,W_\alpha)$). Se além disso identificarmos $W_\alpha \cong \mathcal{V}/Z$, podemos definir uma carta local:

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathrm{Hom}(Z\,,\,\mathcal{V}/Z) \cong \mathbf{K}^{k(n-k)} \qquad \text{através de} \qquad \varphi_\alpha(S) = A_\alpha(S) \tag{1.6.2}$$

Suponhamos agora que escolhemos um outro subespaço W_β de dimensão $n-k$ em $\mathcal{V}$, e definimos o aberto correspondente U_β. Suponhamos ainda que $Z \in U_\alpha \cap U_\beta$. Sob a decomposição em soma directa $\mathcal{V} = W_\alpha \oplus Z$, W_β fica determinado por uma aplicação $B : W_\alpha \to Z$, de tal forma que:

$$W_\beta = \mathbf{gr}\, B = \{\mathbf{w} + B(\mathbf{w}) :\, \mathbf{w} \in W_\alpha\,\} \tag{1.6.3}$$

Suponhamos agora que S é um ponto qualquer de $U_\alpha \cap U_\beta$. Temos então que, relativamente a decomposição em soma directa $\mathcal{V} = Z \oplus W_\alpha$:

$$S = \mathbf{gr}\, A_\alpha(S) = \{\mathbf{z} + A_\alpha(S)(\mathbf{z}) :\, \mathbf{z} \in Z\,\}$$

[5] Recorde que um conjunto $\mathcal{A}$ diz-se um **"espaço afim modelado num espaço vectorial"** V, se existe uma aplicação $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$:

$$(P, Q) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \varphi(P, Q) \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{PQ} \in V$$

tal que:

- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$, $\forall P, Q, R \in \mathcal{A}$ **"Relação de Chasles"**
- A aplicação parcial $\varphi_P : \mathcal{A} \to V$, $Q \mapsto \overrightarrow{PQ}$ é uma bijecção de $\mathcal{A}$ sobre V.

enquanto que relativamente a decomposição em soma directa $\mathcal{V} = Z \oplus W_\beta$:

$$S = \mathbf{gr}\, A_\beta(S) = \{\mathbf{z} + A_\beta(S)(\mathbf{z}) : \mathbf{z} \in Z\}$$

Para simplificar notações, pômos $A_\alpha(S) = A$ e $A_\beta(S) = A'$ apenas, e então temos que:

$$\underbrace{\mathbf{z}}_{\in Z} + \underbrace{A(\mathbf{z})}_{\in W_\alpha} = \underbrace{(\mathbf{z} - BA(\mathbf{z}))}_{\in Z} + \underbrace{(BA(\mathbf{z}) + A(\mathbf{z}))}_{\in W_\beta} = \underbrace{\mathbf{z}'}_{\in Z} + \underbrace{A'(\mathbf{z}')}_{\in W_\beta} \tag{1.6.4}$$

dá a decomposição de $\mathbf{z} + A(\mathbf{z})$ relativamente à soma directa $\mathcal{V} = Z \oplus W_\beta$. Portanto:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} - BA(\mathbf{z}) = (\mathrm{Id} - BA)(\mathbf{z}) \tag{1.6.5}$$

$$A'(\mathbf{z}') = BA(\mathbf{z}) + A(\mathbf{z}) \tag{1.6.6}$$

Note agora que $\mathbf{z} - BA(\mathbf{z}) \in Z$ não pode ser nulo se $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. De facto, se $\mathbf{z} - BA(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ então $\mathbf{z} + A(\mathbf{z})$ estaria em W_β e como também está em S, seria um elemento não nulo (se $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$) em $W_\beta \cap S$, o que contraria o facto de que S é suplementar a W_β, isto é, $S \in U_\beta$. Concluímos portanto que:

$$\mathrm{Id} - BA : Z \longrightarrow Z$$

é inversível, o que permite inverter (1.6.5) e substituir em (1.6.6), para obter $\mathbf{z} = (\mathrm{Id} - BA)^{-1}(\mathbf{z}')$ e:

$$A'(\mathbf{z}') = BA(\mathbf{z}) + A(\mathbf{z}) = BA(\mathrm{Id} - BA)^{-1}\mathbf{z}' + A(\mathrm{Id} - BA)^{-1}\mathbf{z}'$$

isto é:

$$A' = (BA + A)(\mathrm{Id} - BA)^{-1} \tag{1.6.7}$$

Esta última equação dá-nos a aplicação de mudança de coordenadas associadas às cartas φ_α e φ_β, definidas como em (1.6.2):

$$\varphi_{\beta\alpha} : \mathrm{Hom}(Z\,, \mathcal{V}/Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z\,, \mathcal{V}/Z)$$

quando identificamos W_α e W_β ambos com $\mathcal{V}/Z$. De facto, seja $\mathbf{X}_\alpha \in \mathrm{Hom}(Z\,, \mathcal{V}/Z)$ o elemento que corresponde a $\varphi_\alpha(S) = A_\alpha(S)$ ($= A$, na equação (1.6.7)), de tal forma que:

$$\mathbf{X}_\alpha(\mathbf{z}) = A_\alpha(S)(\mathbf{z}) + Z$$

Anàlogamente, seja $\mathbf{X}_\beta \in \mathrm{Hom}(Z\,, \mathcal{V}/Z)$ o elemento que corresponde a $\varphi_\beta(S) = A_\beta(S)$ ($= A'$, na equação (1.6.7)). Finalmente, seja $C \in \mathrm{Hom}(\mathcal{V}/Z\,, Z)$ o elemento que corresponde a B, quando identificamos $W_\alpha \cong \mathcal{V}/Z$, usando a soma directa $\mathcal{V} = W_\alpha \oplus Z$ (ver (1.6.3), de tal forma que:

$$C(\mathbf{w} + Z) = B(\mathbf{w}) \qquad\qquad \mathbf{w} \in W_\alpha$$

A equação (1.6.7) mostra finalmente que $\varphi_{\beta\alpha} : \mathrm{Hom}(Z\,,\,\mathcal{V}/Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z\,,\,\mathcal{V}/Z)$ é da forma:

$$\boxed{\varphi_{\beta\alpha} : \mathbf{X}_\alpha \mapsto \mathbf{X}_\beta = \mathbf{X}_\alpha(\mathrm{Id} - C\mathbf{X}_\alpha)^{-1}} \tag{1.6.8}$$

e é portanto C^∞. Resumindo toda a discussão, podemos enunciar o seguinte teorema:

♣ **Teorema 1.6** ... *A Grassmanniana $Gr_k(\mathcal{V})$ é uma variedade diferenciável. Para cada subespaço W_α de dimensão $(n-k)$ em $\mathcal{V}$, o aberto:*

$$U_\alpha \stackrel{def}{=} \{S \in Gr_k(\mathcal{V}) :\, S \cap W_\alpha = \{\mathbf{0}\}\}$$

tem estrutura de espaço afim. A escolha de uma origem $Z \in U_\alpha$ determina uma identificação de U_α com $\mathrm{Hom}(Z\,,\,\mathcal{V}/Z)$: cada $S \in U_\alpha$ corresponde a um único $\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha(S) \in$ Hom$(Z\,,\,\mathcal{V}/Z)$, de tal forma que:

$$\mathbf{X}_\alpha(\mathbf{z}) = A_\alpha(S)(\mathbf{z}) + Z \qquad\qquad \textit{com}\;\; A_\alpha(S) \in \mathrm{Hom}(Z, W_\alpha)$$

e:

$$S = \mathbf{gr}\, A_\alpha(S) = \{\mathbf{z} + A_\alpha(S)(\mathbf{z}) :\, \mathbf{z} \in Z\}$$

Se escolhemos um outro W_β, e se $Z \in U_\alpha \cap U_\beta$, então a aplicação de mudança de coordenadas $\varphi_{\beta\alpha} : \mathrm{Hom}(Z\,,\,\mathcal{V}/Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z\,,\,\mathcal{V}/Z)$ é da forma:

$$\varphi_{\beta\alpha} : \mathbf{X}_\alpha \mapsto \mathbf{X}_\beta = \mathbf{X}_\alpha(\mathrm{Id} - C\mathbf{X}_\alpha)^{-1}$$

Suponhamos agora que $S(t)$ é uma curva diferenciável tal que $S(0) = Z$. Na carta U_α, com origem Z, esta curva corresponde a uma curva $\mathbf{X}_\alpha(t)$ em $\mathrm{Hom}(Z\,,\,\mathcal{V}/Z)$, tal que $\mathbf{X}_\alpha(0) = \mathbf{0}$. Por outro lado, na carta U_β, com a mesma origem Z, $S(t)$ corresponderá a uma curva $\mathbf{X}_\beta(t)$ em $\mathrm{Hom}(Z\,,\,\mathcal{V}/Z)$. Mas por (1.6.8):

$$\mathbf{X}_\beta(t) = \mathbf{X}_\alpha(t)(\mathrm{Id} - C\mathbf{X}_\alpha(t))^{-1} = \mathbf{X}_\alpha(t)\big[\mathrm{Id} + C\mathbf{X}_\alpha(t) + (C\mathbf{X}_\alpha(t))^2 + \cdots\big] = \mathbf{X}_\alpha(t) + O(t^2)$$

o que mostra que $\mathbf{X}_\alpha(t)$ e $\mathbf{X}_\beta(t)$ têm a mesma derivada em $t = 0$. Portanto existe uma identificação canónica de $T_Z\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})$ com $\mathrm{Hom}(Z, \mathcal{V}/Z)$:

$$\boxed{T_Z\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V}) \;\cong\; \mathrm{Hom}(Z, \mathcal{V}/Z)} \tag{1.6.9}$$

1.6.2 Fibrados Universais. Pull-backs

Vamos construir um fibrado vectorial de rank k, $\mathbf{U}_{k,n} \to \mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})$, dito o fibrado universal sobre a grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})$. Quando $k = 1$, o fibrado $\mathbf{U}_{1,n} \to \mathbb{RP}(n-1)$ (resp., $\mathbb{CP}(n-1)$) diz-se o fibrado de linhas (ou o fibrado canónico) sobre o projectivo $\mathbb{RP}(n-1)$ (resp., $\mathbb{CP}(n-1)$).

Para isso, comecemos por considerar o subconjunto $\mathbf{U}_{k,n} \subset \mathrm{Gr}_k(\mathcal{V}) \times \mathcal{V}$, que consiste de todos os pares:

$$(S, \mathbf{v}) \in \mathrm{Gr}_k(\mathcal{V}) \times \mathcal{V} \qquad\qquad \text{tais que} \quad \mathbf{v} \in S$$

munido da topologia induzida. A projecção $\pi : \mathbf{U}_{k,n} \to \mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})$, definida por $\pi(S, \mathbf{v}) = S$, é contínua. A fibra por cima de $S \in \mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})$ é portanto S visto como um subespaço de $\mathcal{V}$. Mais precisamente:

$$\pi^{-1}(S) = \{(S, \mathbf{v}) : \mathbf{v} \in S\}$$

Usando as notações da secção anterior, definimos agora uma estrutura de fibrado vectorial de rank k em $(\mathbf{U}_{k,n}, \mathrm{Gr}_k(\mathcal{V}), \pi)$, através das trivializações locais $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha)\}$, onde:

$$\phi_\alpha(S, \mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (S, (\pi_\alpha|_S)(\mathbf{v})) \in U_\alpha \times \mathbf{K}^k \qquad\qquad (S, \mathbf{v}) \in \pi^{-1}(U_\alpha)$$

onde $\pi_\alpha : \mathcal{V} = W_\alpha \oplus Z \to Z \cong \mathbf{K}^k$ é a projecção no segundo factor.

♣ **Exercício 1.12** ... *(i). calcular explìcitamente as funções de transição para* $\mathbf{U}_{1,n+1} \to \mathbb{RP}(n)$.

(ii). Completar os detalhes no exemplo anterior.

Existe um outro fibrado vectorial canònicamente associado a $\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})$, cuja fibra por cima de um $S \in \mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})$ é $\mathcal{V}/S$. A construção é completamente análoga à anterior. Este fibrado é o quociente do fibrado trivial $\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V}) \times \mathcal{V}$ pelo seu subfibrado $\mathbf{U}_{k,n}$. A sucessão exacta:

$$\mathbf{0} \to S \to \mathcal{V} \to \mathcal{V}/S \to \mathbf{0}$$

induz uma sucessão exacta de fibrados:

$$\mathbf{0} \to \mathbf{U}_{k,n} \to \mathrm{Gr}_k(\mathcal{V}) \times \mathcal{V} \to \Big(\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V}) \times \mathcal{V}\Big)/\mathbf{U}_{k,n} \to \mathbf{0}$$

e a discussão sobre o espaço tangente $T_S(\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})) \cong \mathrm{Hom}(S, \mathcal{V}/S)$, mostra que:

$$\boxed{T(\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V})) \cong \mathrm{Hom}\Big(\mathbf{U}_{k,n}, \big(\mathrm{Gr}_k(\mathcal{V}) \times \mathcal{V}\big)/\mathbf{U}_{k,n}\Big)} \tag{1.6.10}$$

Existem dois problemas básicos àcerca de fibrados vectoriais diferenciáveis $E \to M$, sobre uma certa variedade diferenciável M:

- determinar quantos fibrados $E \to M$ existem sobre M, a menos de isomorfismo.
- decidir quando é que um dado fibrado $E \to M$ é trivial, e se possível indicar uma medida da distorção do fibrado, isto é de quanto ele difere do fibrado trivial.

Quanto à primeira questão, podemos referir que as diferentes classes de isomorfismo de fibrados vectoriais reais diferenciáveis, são classificados pelas classes de homotopia de aplicações de M em alguma grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^N)$. Mais exactamente temos o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista em ([Sp], vol V):

♣ **Teorema 1.7** ... *Seja M uma variedade diferenciável compacta e $E \to M$ um fibrado vectorial diferenciável de rank k. Então existe um inteiro $N > 0$ (que depende apenas de M) e uma aplicação diferenciável $f : M \to Gr_k(\mathbb{R}^N)$, tal que:*

$$f^*\mathbf{U}_{k,N} \cong E$$

Além disso, se $\widetilde{f}$ é homotópica a uma tal aplicação f então $\widetilde{f}^*\mathbf{U}_{k,N} \cong f^*\mathbf{U}_{k,N} \cong E$.

Quanto à segunda questão, apenas podemos referir que ela é principal motivação para o estudo das chamadas classes características, que ultrapassa o âmbito do nosso curso.

No enunciado do teorema surge o chamado fibrado pull-back f^*E, que passamos a definir no contexto mais geral dos G-fibrados, dada a importância que ele desempenha em várias situações.

Suponhamos que $E \overset{\pi_M}{\to} M$ é um G-fibrado com fibra tipo F e atlas de trivializações locais $\Phi = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, e que $f : N \to M$ é uma aplicação diferenciável. Podemos então definir o chamado **"fibrado pull-back"** $f^*E \to N$, através do diagrama comutativo seguinte:

$$\begin{array}{ccc} f^*E \subset N \times E & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ \pi_N \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Mais detalhadamente: o espaço total f^*E é o subconjunto de $N \times E$:

$$\boxed{f^*E \overset{\text{def}}{=} \{(n,e) \in N \times E : \quad f(n) = \pi_M(e)\}} \tag{1.6.11}$$

a projecção é definida por $\pi_N(n,e) = n$, $\widetilde{f}$ é definida por $\widetilde{f}(n,e) = e$, a fibra tipo continua a ser F e o grupo de estrutura é G também. A fibra $(F^*E)_n$ por cima de $n \in N$ é simplesmente uma cópia da fibra $E_{f(n)}$. A estrutura de G-fibrado é definida da seguinte forma: para cada carta trivializadora $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \Phi$ de $E \to M$, onde:

$$\phi_\alpha : \pi_M^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F$$

define-se:

$$\widetilde{\phi}_\alpha : \pi_N^{-1} f^{-1}(U_\alpha) = (f \circ \pi_N)^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow f^{-1}(U_\alpha) \times F$$

através de:

$$\widetilde{\phi}_\alpha(n,e) = (n, \phi_{\alpha, f(n)}(e)) \qquad \text{onde} \qquad f(n) = \pi_M(e)$$

A inversa $\widetilde{\phi}_\alpha^{-1} : f^{-1}(U_\alpha) \times F \longrightarrow (f \circ \pi_N)^{-1}(U_\alpha)$, é:

$$\widetilde{\phi}_\alpha^{-1}(n, \mathbf{v}) = (n, \phi_\alpha^{-1}(f(n), \mathbf{v}))$$

Note que este elemento pertence a f^*E. Com efeito $\pi_M(\phi_\alpha^{-1}(f(n), \mathbf{v})) = f(n) \in U_\alpha$ e $f\pi_N(n, \phi_\alpha^{-1}(f(n), \mathbf{v})) = f(n)$. É possível ainda provar que as funções de transição $\widetilde{g}_{\beta\alpha}$ são dadas por:

$$\widetilde{g}_{\beta\alpha}(n) = g_{\beta\alpha}(f(n)) \in G$$

1.6.3 Fibrados Tangentes das Esferas

♣ **Teorema 1.8** ... *Seja $\beta : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear, que verifica as duas propriedades seguintes:*

- **(i).** $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ *ou* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- **(ii).** *Existe* $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{k+1}$, *tal que* $\beta(\mathbf{e}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Então existem k campos de vectores tangentes a SS^n linearmente independentes em cada ponto de SS^n.

- Demonstração...

Para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{k+1}$, definimos um campo de vectores $V' \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, através de:

$$V'(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \beta(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

onde se usou a identificação habitual $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$. Consideremos agora a aplicação:

$$\rho : \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \to SS^n \qquad \text{definida por} \qquad \rho(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

e o campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(SS^n)$ definido por:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} T\rho \circ V' \circ \iota$$

onde $\iota : SS^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é a inclusão canónica:

$$\begin{array}{ccc} TSS^n & \stackrel{T\rho}{\longleftarrow} & T\mathbb{R}^{n+1} \\ V \uparrow & & \uparrow V' \\ SS^n & \stackrel{\iota}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{n+1} \end{array}$$

Sejam $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_k\}$, k vectores em $\mathbb{R}^{k+1}$ que conjuntamente com o vector $\mathbf{e}$ (que figura na condição (ii). do enunciado), formam uma base de $\mathbb{R}^{k+1}$. Vamos mostrar que os campos correspondentes $E_1, \cdots, E_k \in \mathfrak{X}(SS^n)$, construídos pelo processo acima descrito, são linearmente independentes.

Com efeito suponhamos que existem escalares $a^1, \cdots, a^k \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\sum a^i (E_i)_{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \qquad \text{para algum } \mathbf{x} \in SS^n \tag{1.6.12}$$

Por definição $E_i = T\rho \circ E_i' \circ \iota$, onde $E_i' : \mathbf{x} \to \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Portanto $(E_i)_{\mathbf{x}} = d\rho_{\mathbf{x}}((E_i')_{\mathbf{x}})$, para $i = 1, \cdots, k$, e a condição (1.6.12) escreve-se na forma:

$$\sum a^i d\rho_{\mathbf{x}}((E_i')_{\mathbf{x}}) = d\rho_{\mathbf{x}}\Big(\sum a^i (E_i')_{\mathbf{x}}\Big) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \sum a^i (E_i')_{\mathbf{x}} \in \ker d\rho_{\mathbf{x}}$$

Mas é fácil ver $\ker d\rho_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, e portanto:

$$\sum a^i (E_i')_{\mathbf{x}} = a\mathbf{x} \qquad \text{para algum } a \in \mathbb{R}$$

Substituindo agora nesta última equação $a\mathbf{x} = \beta(a\mathbf{e}, \mathbf{x})$, utilizando a hipótese (ii). do enunciado, a bilinearidade de β, e ainda a definição de $(E_i')_{\mathbf{x}} = \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$, obtemos:

$$\sum a^i \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) = \beta(a\mathbf{e}, \mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \beta\Big(\sum a^i \mathbf{e}_i - a\mathbf{e}, \mathbf{x}\Big) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \sum a^i \mathbf{e}_i - a\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

pela condição (i). do enunciado, uma vez que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Finalmente, como $\{\mathbf{e}, \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_k\}$ é uma base:

$$a = a^1 = \cdots = a^k = 0$$

$\square$.

♣ **Corolário 1.2** ... *As esferas SS^1, SS^3 e SS^7 são paralelizáveis. Em particular os seus fibrados tangentes são triviais.*

- Demonstração... Basta considerar, para cada $n = 1, 3, 7$, uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear $\beta : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, que verifica as duas propriedades do teorema anterior. Para $n = 1$ identificamos $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$, para $n = 3$ identificamos $\mathbb{R}^4$ com $\mathbb{H}$, e finalmente para $n = 7$ identificamos $\mathbb{R}^8$ com os números de Cayley, e β é em cada caso o produto.

$\square$.

♣ **Corolário 1.3** ... *Qualquer esfera de dimensão ímpar admite um campo de vectores que nunca se anula.*

- Demonstração... Definimos $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ que verifica as hipóteses do teorema anterior. Para isso identificamos $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^{2n}$ com $\mathbb{C}^n$, e definimos $\beta : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, através de:

$$\beta(\lambda; z_1, \cdots, z_n) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad (\lambda z_1, \cdots, \lambda z_n)$$

$\square$.

A existência de um campo de vectores que nunca se anula numa variedade M, está ìntimamente ligada a invariantes topológicos de M. Hopf provou que uma variedade M compacta e conexa admite um campo de vectores que nunca se anula, se e só se a sua característica de Euler é 0. Em particular as únicas esferas que admitem um campo de vectores que nunca se anula, são exactamente as de dimensão ímpar. Uma prova da não trivialidade de TSS^2 será dada no capítulo III. Mais informações sobre estes assuntos podem ser vistos em Husemoller D.: *"Fibre Bundles"*, Springer-Verlag.

1.6.4 Fibrados Principais sobre Esferas

Consideremos a esfera $SS^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{v}\| = 1\}$, com $n \geq 2$, munida da estrutura diferenciável definida pelo atlas maximal que contem as cartas (U_0, φ_0) e (U_1, φ_1), com

$\mathcal{U} = \{U_0 = SS^n - \{N\}, U_1 = SS^n - \{S\}\}$, onde N, S são respectivamente os pólos norte e sul de SS^n, e φ_0, φ_1 as respectivas projecções estereográficas sobre o plano equatorial:

$$\mathcal{E} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} : v^{n+1} = 0\}$$

Mais concretamente, se $\mathbf{v} = (v^1, \cdots, v^{n+1}) \in SS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{v}) &\overset{\text{def}}{=} \left(\frac{v^1}{1-v^{n+1}}, \cdots, \frac{v^n}{1-v^{n+1}}\right) \qquad \text{se} \quad \mathbf{v} \in U_0 = SS^n - \{N\} \\ \varphi_1(\mathbf{v}) &\overset{\text{def}}{=} \left(\frac{v^1}{1+v^{n+1}}, \cdots, \frac{v^n}{1+v^{n+1}}\right) \qquad \text{se} \quad \mathbf{v} \in U_1 = SS^n - \{S\} \end{aligned}$$

Representemos o “equador” de SS^n por:

$$SS^{n-1} \overset{\text{def}}{=} SS^n \cap \mathcal{E}$$

Suponhamos agora que $P(SS^n, G)$ é um fibrado principal sobre SS^n, com grupo de gauge G. Como U_0 e U_1 são contrácteis (são homeomorfos a $\mathbb{R}^n$), a restrição de P a U_0 (resp., a U_1) é necessàriamente trivial:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_0) \arrow[rr, "\phi_0"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_0 \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_1) \arrow[rr, "\phi_1"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_1 \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_1 & \end{tikzcd}$$

Consideremos a função de transição $g = g_{10} : U_0 \cap U_1 \to G$, definida por $g(\mathbf{v}) = \phi_{1,\mathbf{v}} \circ \phi_{0,\mathbf{v}}^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} & (U_0 \cap U_1) \times G \arrow[d, "\phi_1 \circ \phi_0^{-1}"] & \ni (\mathbf{v}, h) \arrow[d] \\ \pi^{-1}(U_0 \cap U_1) \arrow[ur, "\phi_0"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & & \\ & (U_0 \cap U_1) \times G & \ni (\mathbf{v}, g(\mathbf{v})\, h) \end{tikzcd}$$

Como foi discutido na secção 1.3.2, qualquer outro fibrado pricipal $\widetilde{P}(M, G)$ equivalente a $P(M, G)$ é definido por um cociclo cohomólogo ao cociclo $\{g_{10}, g_{01} = g_{10}^{-1}\}$, isto é um cociclo $\widetilde{g} = \widetilde{g}_{10} : U_0 \cap U_1 \to G$ tal que:

$$\widetilde{g} = \lambda_1^{-1}\, g\, \lambda_0$$

onde $\lambda_0 : U_0 \to G$ e $\lambda_1 : U_1 \to G$ são duas aplicações diferenciáveis.

Em particular, se fixarmos um ponto $\mathbf{v}_0 \in SS^{n-1} = SS^n \cap \mathcal{E}$, e se considerarmos as aplicações constantes $\lambda_0(\mathbf{v}) \equiv e$, $\mathbf{v} \in U_0$ e $\lambda_1(\mathbf{v}) \equiv g(\mathbf{v}_0)$, $\mathbf{v} \in U_1$, onde e é o elemento neutro de G, o fibrado definido pelo cociclo $\widetilde{g} = \lambda_1^{-1}\, g\, \lambda_0$ é equivalente a $P(M, G)$, e satisfaz a propriedade $\widetilde{g}(\mathbf{v}_0) = e$. Um tal fibrado diz-se que está na **“forma normal”** relativamente ao ponto $\mathbf{v}_0$.

Suponhamos então que $P(SS^n, G)$ é um fibrado principal sobre SS^n, com grupo de gauge G, e na forma normal relativamente ao ponto $\mathbf{v}_0 \in SS^{n-1} = SS^n \cap \mathcal{E}$. Define-se então a correspondente **“função característica”**, $T : SS^{n-1} \to G$, através de:

$$\boxed{T = T_P \overset{\text{def}}{=} g|_{SS^{n-1}}} \tag{1.6.13}$$

Note que $T(\mathbf{v}_0) = e$ e por isso devemos encarar T como uma aplicação pontuada:

$$T : (SS^{n-1}; \mathbf{v}_0) \to (G; e)$$

É fácil ver que toda a aplicação C^∞, $T : (SS^{n-1}; \mathbf{v}_0) \to (G; e)$, é a função característica de algum fibrado principal $P(SS^n, G)$ em forma normal relativamente ao ponto $\mathbf{v}_0$. De facto basta construir o fibrado cujo cociclo de funções de transição é constituído pela aplicação $g : U_0 \cap U_1 \to G$, definida por:

$$g(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} T(\rho(\mathbf{v})) \qquad \mathbf{v} \in U_0 \cap U_1$$

onde:

$$\rho : U_0 \cap U_1 \longrightarrow SS^{n-1} \qquad \text{é definida por} \qquad \rho(\mathbf{v}) = \frac{\varphi_1(\mathbf{v})}{\|\varphi_1(\mathbf{v})\|}$$

Note que $\rho|_{SS^{n-1}} = \mathrm{Id}$.

O nosso objectivo agora é provar um teorema de classificação de fibrados principais $P(SS^n, G)$, em forma normal relativamente a um ponto fixo $\mathbf{v}_0$, em termos da respectiva função característica:

♣ **<u>Teorema</u> 1.9** ... *Sejam $P = P(SS^n, G)$ e $\widetilde{P} = \widetilde{P}(SS^n, G)$, dois fibrados principais com grupo de gauge G, e em forma normal relativamente a um ponto fixo $\mathbf{v}_0 \in SS^{n-1}$. Sejam T e $\widetilde{T}$ as respectivas funções características. Então:*

- *P e $\widetilde{P}$ são equivalentes se e só se existe um elemento $a \in G$, tal que $\widetilde{T}$ é homotópica a $(a^{-1}\,T\,a)$:*

$$\widetilde{T} \simeq a^{-1}\,T\,a$$

- *Se G é conexo por arcos, P e $\widetilde{P}$ são equivalentes se e só se $\widetilde{T}$ é homotópica a T: $\widetilde{T} \simeq T$, isto é, se e só se:*

$$[\widetilde{T}] = [T] \qquad \textit{em} \qquad [(SS^{n-1}, \mathbf{v}_0), (G, e)] = \pi_{n-1}(G) \tag{1.6.14}$$

Por outras palavras, quando G é conexo por arcos, o conjunto das classes de equivalência de fibrados principais com grupo de gauge G, sobre SS^n ($n \geq 2$), está em correspondência bijectiva com as classes de homotopia em $\pi_{n-1}(G)$.

- <u>Demonstração</u>...

- Suponhamos que P e $\widetilde{P}$ são equivalentes. Então como se referiu anteriormente, existem aplicações $\lambda_0 : U_0 \to G$ e $\lambda_1 : U_1 \to G$ tais que $\widetilde{g} = \lambda_1^{-1}\,g\,\lambda_0$ e portanto:

$$\widetilde{T}(\mathbf{v}) = \lambda_1^{-1}(\mathbf{v})\,T(\mathbf{v})\,\lambda_0(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in SS^{n-1}$$

Como $T(\mathbf{v}_0) = \widetilde{T}(\mathbf{v}_0) = e$, $\lambda_0(\mathbf{v}_0) = \lambda_1(\mathbf{v}_0) = a \in G$, para algum $a \in G$. Por outro lado SS^{n-1} é contractível sobre $\mathbf{v}_0$, em $D_i = \varphi_i^{-1}(\overline{B(\mathbf{0}, 1)}) \subset \mathcal{E}$ $(i = 0, 1)$, por uma homotopia H_i que deixa $\mathbf{v}_0$ fixo, nomeadamente:

$$H_i : (SS^{n-1} \times I, \{\mathbf{v}_0\} \times I) \longrightarrow D_i \qquad H_i(\mathbf{v}, t) = \varphi_i^{-1}(\mathbf{v} + t(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}))$$

As aplicações $(i = 0, 1)$:

$$h_i \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_i \circ H_i) : SS^{n-1} \times I \longrightarrow G$$

são homotopias entre $\lambda_i|_{SS^{n-1}}$ e a aplicação constante $SS^{n-1} \to G$, que envia $\mathbf{v}$ em a, e portanto:

$$\widetilde{H} : SS^{n-1} \times I \longrightarrow G \qquad \widetilde{H}(\mathbf{v}, t) = h_1^{-1}(\mathbf{v}, t)\, T(\mathbf{v})\, h_0(\mathbf{v}, t)$$

é uma homotopia entre $\widetilde{T}$ e $(a^{-1}\, T\, a)$, enviando sempre $\mathbf{v}_0$ em e, i.e., $\widetilde{H}(\mathbf{v}_0, t) \equiv e$, $\forall t$.

- Recìprocamente, suponhamos que $\widetilde{T} \simeq a^{-1}\, T\, a$, para algum $a \in G$. Em primeiro lugar notemos que podemos supôr que $a = e$ e que portanto $\widetilde{T} \simeq T$. De facto, definindo:

$$\lambda_0(\mathbf{v}) = a \quad \forall \mathbf{v} \in U_0 \qquad \lambda_1(\mathbf{v}) = a \quad \forall \mathbf{v} \in U_1$$

então o cociclo $g' = \lambda_1^{-1} g \lambda_0 : U_0 \cap U_1 \to G$ define um fibrado principal $P'(M, G)$ equivalente a $P(M, G)$, e com aplicação característica $T' = a^{-1} T a$, o que permite substituir se necessário, P por P' no enunciado.

Agora $\widetilde{T} \simeq T$, implica que $\widetilde{T}T^{-1}$ é homotópica a alguma aplicação constante de $(SS^{n-1}; \mathbf{v}_0)$ em $(G; e)$ e portanto $\widetilde{T}T^{-1}$ (6), prolonga-se a uma aplicação diferenciável:

$$\nu : D_0 \to G$$

nomeadamente:

$$\nu(\varphi_0^{-1}(t\mathbf{v})) = F(\mathbf{v}, 1 - t) \qquad \forall \mathbf{v} \in SS^{n-1} \quad \forall t \in I$$

onde $SS^{n-1} \times I \xrightarrow{F} SS^{n-1}$ é uma homotopia diferenciável entre $\widetilde{T}T^{-1}$ e uma tal aplicação constante.

Definamos agora:

$$\lambda_0(\mathbf{v}) = \begin{cases} g(\mathbf{v})^{-1}\widetilde{g}(\mathbf{v}) & \text{se} \quad \mathbf{v} \in D_1 \cap U_0 \\ \nu(\mathbf{v}) & \text{se} \quad \mathbf{v} \in D_0 \end{cases}$$

Como $\nu(\mathbf{v}) = \widetilde{g}(\mathbf{v}) g(\mathbf{v})^{-1}$, em $(D_1 \cap U_0) \cap D_0 = SS^{n-1}$, $\lambda_0 : U_0 \to G$ é uma aplicação C^∞ bem definida em U_0. Seja V_1 o interior de D_1. Se em vez do cociclo $g : U_0 \cap U_1 \to G$ que define P, usamos o cociclo $g' = g|_{U_0 \cap V_1} : U_0 \cap V_1 \to G$, obtemos um fibrado P' equivalente a P, uma vez que os respectivos cociclos são cohomólogos. Anàlogamente, $\widetilde{P}$ é equivalente a um fibrado $\widetilde{P}'$ obtido pelo mesmo processo. Consideremos agora:

$$\lambda_1(\mathbf{v}) \equiv e \qquad \forall \mathbf{v} \in V_1$$

Temos então que:

$$\widetilde{g}(\mathbf{v}) = \lambda_1^{-1}(\mathbf{v}) g(\mathbf{v}) \lambda_0(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in U_0 \cap V_1$$

o que implica que P' e $\widetilde{P}'$ são equivalentes e portanto P e $\widetilde{P}$ tambem o são.

$\square$.

Exemplos ...

[6]Note que aqui T^{-1} é a aplicação $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{T}(\mathbf{v})]^{-1} \in G$

(i). O conjunto das classes de equivalência de fibrados principais com grupo de gauge $G = U(1) \cong SS^1$, sobre SS^2, está em correspondência bijectiva com as classes de homotopia em $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$. Portanto são classificados por um inteiro a que se dá o nome de **"número de Chern"** (em Física, também chamado **"número de instantão"** ou **"carga topológica"**) do fibrado. Por exemplo a fibração de Hopf considerada na secção 1.3.3., corresponde ao número de Chern 1.

(ii). Da mesma forma, o conjunto das classes de equivalência de fibrados principais com grupo de gauge $G = SU(2) \cong SS^3$, sobre SS^4, está em correspondência bijectiva com as classes de homotopia em $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$. Portanto são classificados por um inteiro a que se dá ainda o nome de **"número de Chern"** (em Física, também chamado "número de instantão" ou "carga topológica") do fibrado. Um tal exemplo pode ser obtido através de uma construção em tudo idêntica à usada na secção 1.3.3., para a fibração de Hopf, substituindo $\mathbb{C}$ por $\mathbb{H}$, o corpo não comutativo dos quaterniões.

1.7 Subvariedades. Imersões, Submersões, Mergulhos.

Comecemos por recordar a noção de subvariedade, introduzida já na secção I.1.1.

♣ **Definição 1.24** ... *Seja $(M, \mathcal{F})$ uma variedade de dimensão n. Um subconjunto $S \subset M$ diz-se uma* **"subvariedade de dimensão"** *$k \leq n$, em M, se cada ponto $p \in S$ pertence ao domínio de alguma carta $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, e se existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, tal que:*

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap S) &= V \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}\}) \\ &= \{\mathbf{v} = (v^1, \cdots, v^n) \in V : v^{k+1} = \cdots = v^n = 0\} \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Uma tal carta (U, φ) diz-se uma **"carta de subvariedade"** *para $S \subset M$.*

É evidente que neste caso, $\mathcal{F}_S = \{(U \cap S, \varphi|_{U\cap S}\}$ é um atlas de classe C^∞ para S, quando (U, φ) varia sobre todas as cartas de subvariedade possíveis. Por isso S, munida da topologia induzida, é ela própria uma variedade de dimensão k.

Estão neste caso as subvariedades de $\mathbb{R}^n$, estudadas no curso de Geometria Diferencial (ver [Tav]).

Vejamos agora algumas definições básicas.

♣ **Definição 1.25** ... *Sejam N, M duas variedades diferenciáveis, $F : N \to M$ uma aplicação diferenciável e para cada $x \in N$, $dF_x : T_xN \to T_{F(x)}M$ a respectiva diferencial em x. Então:*

- *F diz-se uma* **"imersão em x"**, *se dF_x é injectiva. F diz-se uma* **"imersão"** *se dF_x é injectiva $\forall x \in N$.*

- *F diz-se uma* **"submersão em** *x"*, *se dF_x é sobrejectiva. F diz-se uma* **"submersão"** *se dF_x é sobrejectiva $\forall x \in N$.*

- *F diz-se um* **"mergulho"** *se F é uma imersão injectiva que é também um homeomorfismo sobre a imagem $F(N) \subset M$, quando nesta se considera a topologia induzida pela topologia de M.*

- *Um ponto $x \in N$ diz-se um* **"ponto crítico"** *de F se $dF_x : T_xN \longrightarrow T_{F(x)}M$ tem característica $< m = dim M$. Um* **"valor crítico"** *de F é imagem de um ponto crítico de F.*

- *Um ponto $y \in M$ diz-se um* **"valor regular"** *de F se $y \notin F(N)$ ou se $y \in F(N)$ e $dF_x : T_xN \longrightarrow T_{F(x)}M$ é sobrejectiva em todos os pontos $x \in F^{-1}(\{y\})$.*

♣ **Definição 1.26** ... *Seja M uma variedade diferenciável, e S um subconjunto de M.*

- *$S \subset M$ diz-se uma* **"subvariedade imersa"** *em M se S é imagem de alguma imersão injectiva: $S = F(N)$ onde $F : N \to M$ é uma imersão injectiva.*

- *$S \subset M$ diz-se uma* **"subvariedade mergulhada"** *em M, se S é imagem de algum mergulho: $S = F(N)$ onde $F : N \to M$ é um mergulho.*

Quando $F : N \hookrightarrow M$ é um mergulho (ou apenas uma imersão) é usual identificar T_xN com o subespaço $dF_x(T_xN) \subset T_{F(x)}M$.

O nosso objectivo agora é analisar a forma local das imersões e submersões.

♣ **Teorema 1.10 (" Forma local das imersões")**... *Seja $F : N^n \to M^m$ uma aplicação diferenciável, e suponhamos que $dF_x : T_xN \longrightarrow T_{F(x)}M$ é injectiva em x (e portanto injectiva numa certa vizinhança de x, isto é, F é uma imersão numa certa vizinhança de x).*

Então existem cartas locais (U, φ) em N, e (V, ψ) em M, com $x \in U$, $F(x) \in V$ tais que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \subset N & \xrightarrow{F} & V \subset M \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

onde $\iota : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ é a inclusão usual:

$$\iota : (x^1, \cdots, x^n) \mapsto (x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0)$$

- Demonstração... Consideremos cartas locais φ em N, e ψ em M, em torno de x e $F(x)$ respectivamente, e tais que $\varphi(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ e $\psi(F(x)) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$. Então a representação local de F nestas cartas é a aplicação $\mathbf{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, definida numa certa vizinhança de

$\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ e com valores em $\mathbb{R}^m$, e cuja diferencial $d\mathbf{F_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injectiva. Podemos ainda supôr (mudando coordenadas se necessário em $\mathbb{R}^m$) que a imagem $d\mathbf{F_0}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ é o primeiro factor em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Portanto, durante a prova $\mathbb{R}^m$ será considerado como $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ e a inclusão ι será $\iota(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$, com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos agora a aplicação, definida numa certa vizinhança de $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, através de:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (\mathbf{0}, \mathbf{y}) \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

Então $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ e $d\mathbf{G_0} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é a identidade, o que implica pelo teorema da inversão local, que $\mathbf{G}$ é um difeomorfismo local numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$. Seja $\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1}$, o difeomorfismo inverso. Então, numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ temos que:

$$\mathbf{HF}(\mathbf{x}) = \mathbf{HG}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

Resta substituir a carta ψ por $\mathbf{H} \circ \psi$ (possìvelmente restringindo o domínio), para concluir.

$\square$.

♣ <u>Teorema</u> **1.11** <u>**("Forma local das submersões")**</u>... *Seja $F : N^n \to M^m$ uma aplicação diferenciável, e suponhamos que $dF_x : T_xN \longrightarrow T_{F(x)}M$ é sobrejectiva em x (e portanto sobrejectiva numa certa vizinhança de x, isto é, F é uma submersão numa certa vizinhança de x).*

Então existem cartas locais (U, φ) em N, e (V, ψ) em M, com $x \in U$, $F(x) \in V$ tais que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U \subset N & \stackrel{F}{\longrightarrow} & V \subset M \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

onde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a projecção:

$$\pi : (x^1, \cdots, x^m, x^{m+1}, \cdots, x^n) \mapsto (x^1, \cdots, x^m)$$

- <u>Demonstração</u>... Consideremos cartas locais φ em N, e ψ em M, em torno de x e $F(x)$

  respectivamente, e tais que $\varphi(x) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ e $\psi(F(x)) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$. Então a representação local de F nestas cartas é a aplicação $\mathbf{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, definida numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ e com valores em $\mathbb{R}^m$, e cuja diferencial $d\mathbf{F_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejectiva. Podemos ainda supôr (mudando coordenadas se necessário em $\mathbb{R}^n$) que o núcleo $\ker d\mathbf{F_0} \subset \mathbb{R}^n$ é o segundo factor em $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Portanto, durante a prova $\mathbb{R}^n$ será considerado como $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ e a projecção π será $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

  Consideremos agora a aplicação, definida numa certa vizinhança de $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ e com valores em $\mathbb{R}^n$, através de:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{y}) \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$$

Então $\mathbf{G}(\mathbf{0},\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $d\mathbf{G}_\mathbf{0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a sobrejectiva e portanto é um isomorfismo. Pelo teorema da função inversa, $\mathbf{G}$ é um difeomorfismo local numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Seja $\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1}$, o difeomorfismo inverso. Como $\mathbf{G}$ fixa a segunda coordenada $\mathbf{y}$, a sua inversa tem a mesma propriedade: $\mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y})$, e portanto, numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ temos que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x},\mathbf{y}) &= (\mathbf{G}\circ\mathbf{H})(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{G}\big(\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}\big) \\ &= \big(\mathbf{F}(\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}),\mathbf{y}\big) \\ &= \big((\mathbf{F}\circ\mathbf{H})(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}\big) \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{F}\circ\mathbf{H})(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Resta substituir a carta φ por $\mathbf{G}\circ\varphi$ (possìvelmente restringindo o domínio), para concluir.

$\square$.

♣ **<u>Teorema</u> 1.12** ... *Seja $F : N \to F(N) = S \subset M$ um mergulho,* (isto é: F é uma imersão injectiva que é também um homeomorfismo sobre a imagem $S = F(N) \subset M$, munida da topologia induzida. Portanto S é uma subvariedade mergulhada em M*).*

Então S é uma subvariedade de M (definição 4) e $F : N \to S$ é um difeomorfismo.

- <u>Demonstração</u>...

Seja $x \in N$ um qualquer ponto de N. Como F é uma imersão em x, existem cartas locais (U,φ) em N, e (V,ψ) em M, com $x \in U$ e $F(x) \in V$, e tais que em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x},\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}$$

Como F é um homeomorfismo sobre S, $F(U)$ é um aberto em S, e como S está munida da topologia induzida, $F(U) = W \cap S$, onde W é um aberto em M que contem $F(x)$. Temos então que a carta $(V \cap W, \psi|V \cap W)$ é uma carta de subvariedade, já que:

$$\psi(S \cap V \cap W) = (\mathbb{R}^n \times \{\mathbf{0}\}) \cap \psi(V \cap W)$$

e portanto S é subvariedade de M. Como $F : N \to S = F(N)$ é bijectiva e localmente inversível, F é um difeomorfismo.

$\square$.

♣ **<u>Teorema</u> 1.13** ... *Seja $F : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável, e $y \in N$ um valor regular de F.*

Então $S = F^{-1}(\{y\})$ é uma subvariedade de M, de codimensão n (e portanto de dimensão $m - n$). Além disso:

$$T_xS = \ker\big(dF_x : T_xM \to T_{F(x)}N\big) \tag{1.7.2}$$

- <u>Demonstração</u>... Seja $x \in S$. Então dF_x é sobrejectiva, e pela forma local das submersões, existem cartas locais (U,φ) em M, e (V,ψ) em N, com $x \in U$ e $y = F(x) \in V$, e tais que em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : (\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

Portanto os únicos pontos de U cuja imagem é constante e igual a y, são os pontos cujas primeiras n φ-coordenadas são nulas:

$$U \cap S = \varphi(U) \cap (\{\mathbf{0}\} \times \mathbb{R}^{m-n})$$

o que mostra que S é subvariedade de dimensão $m-n$ em M.

Seja $X_x \in T_xS$. Então existe uma curva diferenciável $\alpha : I \to S$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = X_x$. Como $(F \circ \alpha)(t) \equiv y$, vem que $\mathbf{0} = (F \circ \alpha)'(0) = dF_x(\alpha'(0)) = dF_x(X_x)$, o que mostra que $T_xS \subseteq \ker dF_x$. Como ambos têm a mesma dimensão $m-n$, concluímos que $T_xS = \ker dF_x$.

$\square$.

Exemplos ...

(i)... A esfera $SS^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma subvariedade de codimensão 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$. De facto, se $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$, então $SS^n = f^{-1}(\{1\})$, e 1 é valor regular de f. Com efeito, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$, temos que $df_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})$ que é uma aplicação linear sobrejectiva sempre que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(ii)... O conjunto $M \overset{\text{def}}{=} M_{k,d}^{(r)}(\mathbb{R})$ das matrizes $(k \times d)$ (com $1 \leq k \leq d$) que têm característica constante e igual a r (onde $1 \leq r \leq k$) é uma subvariedade de codimensão $(k-r)(d-r)$ em $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{kd}$, e portanto de dimensão $\dim M = r(d+k-r)$.

Com efeito, seja $\mathbf{m} \in M$. $\mathbf{m}$ representa uma aplicação linear $\mathbf{m} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, e escolhendo bases apropriadas para $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{R}^k$, podemos supôr que $\mathbf{m}$ tem a forma:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{a} \in G\ell(r, \mathbb{R})$ é uma matriz $r \times r$ inversível. O conjunto:

$$U \overset{\text{def}}{=} \{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix} : \ \ \mathbf{x} \text{ matriz } r \times r \text{ inversível}\}$$

é um aberto em $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{kd}$ que contem $\mathbf{m}$. Por outro lado:

$$\boxed{\text{A matriz } \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \in U \text{ tem característica } r, \text{ se e só se } \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{0}}$$

Com efeito, a matriz $k \times k$, $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ -\mathbf{z}\mathbf{x}^{-1} & \mathbf{1}_{k-r} \end{bmatrix}$ é inversível e:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ -\mathbf{z}\mathbf{x}^{-1} & \mathbf{1}_{k-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

donde:

$$\text{característica} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \text{característica} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix} = r$$

se e só se $\mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, como se pretendia.

Consideremos agora a aplicação $f : U \to \mathcal{M}_{(k-r)(d-r)}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(k-r)(d-r)}$, definida por:

$$f\Big(\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{w} \end{bmatrix}\Big) = \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$$

Se $\mathbf{0}$ fôr valor regular de f, fica provado que $U \cap M$ é uma subvariedade de codimensão $(k-r)(d-r)$ em $\mathbb{R}^{kd}$, isto é, M é localmente uma subvariedade de codimensão $(k-r)(d-r)$ em $\mathbb{R}^{kd}$ (e portanto globalmente). Resta apenas notar que para $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ fixos, a aplicação $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} - \mathbf{z}\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}$ é um difeomorfismo de $\mathcal{M}_{(k-r)(d-r)}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(k-r)(d-r)}$ e portanto f é uma submersão.

(iii)... O conjunto $O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^t A = \mathbf{1}\}$, das matrizes $(n \times n)$ ortogonais reais, é uma subvariedade de dimensão $\frac{1}{2}n(n-1)$ em $\mathbb{R}^{n^2}$.

Como $A^t A$ é uma matriz simétrica, e como o conjunto $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas pode ser identificado com $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$, é natural considerar a aplicação:

$$F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathcal{S} \cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

definida por:

$$F(A) = A^t A$$

A respectiva diferencial num ponto $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ é dada por:

$$dF_A(\xi) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\, F(A + s\xi) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\, (A + s\xi)^t (A + s\xi) = A^t\xi + \xi^t A$$

onde $\xi \in T_A\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cong T_A\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{n^2}$, e é sobrejectiva $\forall A \in F^{-1}(\mathbf{1})$ (i.e., $\mathbf{1}$ é valor regular de F). Com efeito, se $C \in \mathcal{S}$ então pondo $\xi = \frac{1}{2}AC$, vem que:

$$dF_A(\xi) = dF_A(\frac{1}{2}AC) = A^t\frac{1}{2}AC + (\frac{1}{2}AC)^t A = C$$

já que $A^t A = \mathbf{1}$ e $C = C^t$.

O espaço tangente em $\mathbf{1}$ é dado por:

$$T_{\mathbf{1}}O(n) = \ker dF_{\mathbf{1}} = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \xi^t = -\xi\}$$

.

♣ <u>**Exercício**</u> **1.13** ... *A* **"variedade de Stiefel"** $SSt_k(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq k \leq N$, *é constituída por todos os k-referenciais ortonormados de $\mathbb{R}^n$, isto é, por todas as sequências ordenadas $\nu = [\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k]$ de k vectores ortonormados em $\mathbb{R}^n$ (relativamente à estrutura Euclideana usual em $\mathbb{R}^n$).*

(i). *Mostre que $SSt_k(\mathbb{R}^n)$ é uma variedade compacta de dimensão $nk - \frac{1}{2}k(k+1)$.*

(ii). *Mostre que a aplicação $\pi : SSt_k(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$, que a cada $\nu = [\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k]$ associa o subespaço gerado por $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$, é uma submersão sobrejectiva.*

(iii). *Mostre que:*

$$SSt_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/O(n-k)$$

Em particular $SSt_n(\mathbb{R}^n) \cong O(n)$ e $SSt_1(\mathbb{R}^n) \cong SS^{n-1}$.

♣ <u>**Exercício**</u> **1.14** ... *A* **"variedade de Stiefel"** $SSt_k(\mathbb{C}^n)$ *é constituída por todos os k-referenciais ortonormados de* $\mathbb{C}^n$*, isto é, por todas as sequências ordenadas* $\nu = [\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k]$ *de k vectores ortonormados em* $\mathbb{C}^n$ *(relativamente à estrutura Hermitiana usual em* $\mathbb{C}^n$*).*

(i). *Mostre que* $SSt_k(\mathbb{C}^d)$ *é uma variedade compacta de dimensão* $n = 2dk - k^2$.

(ii). *Mostre que a aplicação* $\pi : SSt_k(\mathbb{C}^n) \to \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$*, que a cada* $\nu = [\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k]$ *associa o subespaço gerado por* $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$*, é uma submersão sobrejectiva.*

(iii). *Mostre que:*

$$SSt_k(\mathbb{C}^n) \cong U(n)/U(n-k)$$

Em particular $SSt_n(\mathbb{C}^n) \cong U(n)$ e $SSt_1(\mathbb{C}^n) \cong SS^{2n-1}$.

♣ <u>**Exercício**</u> **1.15** ... *Seja A uma matriz real simétrica* $(n \times n)$ *e* $0 \neq c \in \mathbb{R}$*. Mostre que a quádrica* $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^t A\mathbf{x} \equiv c\}$ *é uma hipersuperfície em* $\mathbb{R}^n$ *(uma subvariedade de codimensão* 1*).*

♣ <u>**Exercício**</u> **1.16** ... *Seja* (E, M, F, π) *um fibrado diferenciável sobre* M*, com fibra tipo* F*. Mostre que* $\pi : E \to M$ *é uma submersão e que, para cada* $x \in M$*, a fibra* $E_x = \pi^{-1}(x)$ *é uma subvariedade de* E*, difeomorfa à fibra tipo* F*.*

♣ <u>**Exercício**</u> **1.17** ... *Seja* $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$*, onde* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, com* $(n > m)$*, é uma aplicação diferenciável e* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ *é valor regular de* F*. Mostre que:*

$$TM = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \ \ e \ \ dF_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

e que TM *é uma subvariedade de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *de dimensão* $2(n-m)$*.*

Explicite a situação quando $M = SS^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$*.*

1.8 Campos de Vectores e Fluxos

♣ <u>**Definição**</u> **1.27** ... *Um* **"fluxo"** *numa variedade (diferenciável)* M*, é uma aplicação (diferenciável):*

$$\mathbf{Fl} : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M \tag{1.8.1}$$

que verifica:

$$\begin{aligned} \mathbf{Fl}(0, x) &= x \\ \mathbf{Fl}(t, \mathbf{Fl}(s, x)) &= \mathbf{Fl}(t+s, x) \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

$\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M$.

Alternativamente um fluxo **Fl** em M, pode ser visto como um **"grupo a um parâmetro de difeomorfismos"** de M, isto é, como um homomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ no grupo $Diff(M)$ dos difeomorfismos de M:

$$\mathbf{Fl} : \mathbb{R} \longrightarrow Diff(M) \qquad t \mapsto \mathbf{Fl}_t$$

que portanto verifica:

$$\mathbf{Fl}_0 = \mathrm{Id}_M \qquad \mathbf{Fl}_t \circ \mathbf{Fl}_s = \mathbf{Fl}_{t+s} \qquad \mathbf{Fl}_{-t} = \mathbf{Fl}_t^{-1} \tag{1.8.3}$$

Para cada $x \in M$, a curva:

$$\alpha_x : \mathrm{I\!R} \longrightarrow M \qquad t \mapsto \alpha_x(t) = \mathbf{Fl}_t(x) \tag{1.8.4}$$

diz-se a **"linha de fluxo"** ou **"curva integral"** que passa em x. A imagem $\alpha_x(\mathrm{I\!R}) \subset M$ diz-se a **"órbita"** de x.

Por cada $x \in M$ passa uma única órbita. Por outro lado, uma linha de fluxo apenas pode ser de um e um só dos seguintes tipos (prova?):

- uma **imersão injectiva**.
- uma **imersão periódica**, i.e., $\alpha_x : \mathrm{I\!R} \to M$ é imersão e existe algum $s > 0$ tal que $\alpha_x(t+s) = \alpha_x(t)$, $\forall t \in \mathrm{I\!R}$.
- constante. Neste caso $\alpha_x(t) \equiv x$ diz-se um **ponto fixo**.

♣ **Definição 1.28** ... *Um* **"fluxo local"** *numa variedade (diferenciável) M, é uma aplicação diferenciável:*

$$\mathrm{Fl} : \mathcal{O} \subseteq \mathrm{I\!R} \times M \longrightarrow M \tag{1.8.5}$$

definida num aberto $\mathcal{O} \subseteq \mathrm{I\!R} \times M$, que verifica as condições seguintes:

- *$\mathcal{O}$ contem $\{0\} \times M$ e para cada $x \in M$, a intersecção $I_x \stackrel{def}{=} \mathcal{O} \cap (\mathrm{I\!R} \times \{x\})$ é um intervalo aberto de $\mathrm{I\!R}$ que contem $0 \in \mathrm{I\!R}$.*
- Fl *satisfaz:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Fl}(0,x) &= x \qquad \forall x \in M \\ \mathrm{Fl}(t, \mathrm{Fl}(s,x)) &= \mathrm{Fl}(t+s, x) \end{aligned} \tag{1.8.6}$$

  $\forall t, s, x$ para os quais ambos os membros estão definidos.

Claramente que um fluxo local para o qual $\mathcal{O} = \mathrm{I\!R} \times M$ é um fluxo (global). Note que para um fluxo local não podemos em geral falar do difeomorfismo Fl_t uma vez que para um $t \neq 0$ fixo $x \mapsto \mathrm{Fl}_t(x)$ pode não estar definido em todo o M. A linha de fluxo $\alpha_x : t \mapsto \alpha_x(t) = \mathrm{Fl}_t(x)$ que passa em x, agora está definida num intervalo aberto $I_x = \mathcal{O} \cap (\mathrm{I\!R} \times \{x\})$ de $\mathrm{I\!R}$ que contem 0. No entanto podemos falar do difeomorfismo local $\mathrm{Fl}_t : U \to \mathrm{Fl}(U)$ definido num certo aberto U, com U e t suficientemente pequenos.

♣ **Definição 1.29** ... *Dado um fluxo (local ou global) em M, ao campo de vectores:*

$$X : x \mapsto X_x \stackrel{def}{=} \alpha_x'(0) \in T_xM \tag{1.8.7}$$

chama-se o **"campo de velocidades"** *ou o* **"gerador infinitesimal"** *de* Fl.

♣ **Teorema 1.14** ... *Todo o campo de vectores* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é gerador infinitesimal de um único fluxo local maximal* Fl^X *em* M*. Quando* X *tem suporte compacto,* Fl^X *é um fluxo global. Em particular, numa varieade compacta, todo o campo de vectores* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é gerador infinitesimal de um único fluxo global* $\mathbf{Fl}^X$ *em* M*.*

- Demonstração... (esboço)

- O teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias implica que, para cada $x \in M$ existe um intervalo aberto maximal $I_x \subset \mathbb{R}$, que contem 0, e uma única curva integral $\alpha_x : I_x \to M$ de X, tal que $\alpha_x(0) = x$. Definimos então:

$$\mathrm{Fl}_t^X(x) = \mathrm{Fl}^X(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_x(t) \tag{1.8.8}$$

  onde α_x é a única curva integral $\alpha_x : I_x \to M$ de X, acima referida. $\mathrm{Fl}^X(t,x)$ é uma função de classe C^∞, atendendo ao teorema da dependência diferenciável das soluções de equações diferenciais ordinárias, relativamente às condições iniciais. Além disso, se Fl^X está definida em (t,x) também está definida para (s,y) próximo.

  As condições $\mathrm{Fl}^X(0,x) = x$ e $\mathrm{Fl}^X(t, \mathrm{Fl}^X(s,x)) = \mathrm{Fl}^X(t+s,x)$ deduzem-se do facto de que, para cada $y \in M$, $\mathrm{Fl}^X|_{I_y \times \{y\}}$ é uma curva integral de X. Com efeito, por (1.8.8) vem que $\mathrm{Fl}^X(0,x) = \alpha_x(0) = x$. Por outro lado:

$$t \mapsto \mathrm{Fl}^X(t+s,x) \qquad \text{e} \qquad t \mapsto \mathrm{Fl}^X(t, \mathrm{Fl}^X(s,x))$$

  (para todo o t para o qual estão definidas) são duas curvas integrais maximais de X, que no instante $t = 0$ passam ambas em $\mathrm{Fl}^X(s,x)$, e por unicidade coincidem portanto.

  Resta mostrar que:

$$\mathcal{O} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\}$$

  é um aberto que contem $\{0\} \times M$ (claro!), e que Fl^X é diferenciável. A demonstração completa destes factos pode ser vista em [Sp], vol.1, por exemplo.

- Suponhamos finalmente que $K = supp(X)$ é compacto. Então o compacto $\{0\} \times K$ tem distância positiva relativamente ao conjunto fechado disjunto $(\mathbb{R} \times M) - \mathcal{O}$ (se este fôr não vazio!). Portanto $[-\epsilon, \epsilon] \times K \subset \mathcal{O}$, para algum $\epsilon > 0$. Se $x \notin K$ então $X_x = 0$, e por isso $\mathrm{Fl}^X(t,x) = x$, $\forall t$ e $\mathbb{R} \times \{x\} \subset \mathcal{O}$. Portanto $[-\epsilon, \epsilon] \times M \subset \mathcal{O}$. Como $\mathrm{Fl}^X(t+\epsilon, x) = \mathrm{Fl}^X(t, \mathrm{Fl}^X(\epsilon, x))$ existe para $|t| \le \epsilon$ (porque o segundo membro existe $\forall t : |t| \le \epsilon$), temos que $[-2\epsilon, 2\epsilon] \times M \subset \mathcal{O}$, e repetindo este argumento obtemos finalmente que $\mathbb{R} \times M = \mathcal{O}$.

□.

Aproveitamos ainda esta secção para introduzir algumas derivadas de Lie ao longo de um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$. Nomeadamente para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se:

- **"Derivada de Lie de uma função"**:

$$\boxed{\mathcal{L}_X f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\mathrm{Fl}_t^X(x)) = X_x f \qquad f \in C^\infty(M)} \tag{1.8.9}$$

- **"Derivada de Lie de um campo de vectores"**:

$$\boxed{\mathcal{L}_X Y \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{d}{dt}|_{t=0} (\mathrm{Fl}_t^X)^* Y = \tfrac{d}{dt}|_{t=0} \left(T(\mathrm{Fl}_{-t}^X) \circ Y \circ \mathrm{Fl}_t^X\right) \qquad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)} \tag{1.8.10}$$

♣ **Exercício 1.18** ... *Mostre que:*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

♣ **Exercício 1.19** ... *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dois campos de vectores C^∞ numa variedade M, e $x \in M$ um ponto onde X e Y não se anulam. Defina-se para t suficientemente pequeno, a curva σ:*

$$\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Fl}_{-t}^Y \mathrm{Fl}_{-t}^X \mathrm{Fl}_t^Y \mathrm{Fl}_t^X(x)$$

Mostre que:

$$[X, Y]_x = \lim_{t \to 0} \sigma'(\sqrt{t})$$

♣ **Teorema 1.15** ... *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ dois campos ϕ-relacionados, onde $\phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável. Então:*

$$\phi \circ \mathrm{Fl}_t^X = \mathrm{Fl}_t^Y \circ \phi \tag{1.8.11}$$

sempre que ambos os membros estiverem definidos. Em particular, se ϕ é um difeomorfismo, tem-se que:

$$\mathrm{Fl}_t^{\phi^* Y} = \phi^{-1} \circ \mathrm{Fl}_t^Y \circ \phi \tag{1.8.12}$$

e ainda:

$$\mathrm{Fl}_t^{\phi_* X} = \phi \circ \mathrm{Fl}_t^X \circ \phi^{-1} \tag{1.8.13}$$

- Demonstração... Com efeito:

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \mathrm{Fl}_t^X) = T\phi \circ \frac{d}{dt}\mathrm{Fl}_t^X = T\phi \circ X \circ \mathrm{Fl}_t^X = Y \circ \phi \circ \mathrm{Fl}_t^X$$

e como $\phi(\mathrm{Fl}^X(0, x)) = \phi(x)$, concluímos que $t \mapsto \phi(\mathrm{Fl}^X(t, x))$ é uma curva integral do campo de vectores Y em N, que no instante $t = 0$ passa em $\phi(x)$. Portanto:

$$\phi(\mathrm{Fl}^X(t, x)) = \mathrm{Fl}^Y(t, \phi(x)) \qquad \Rightarrow \qquad \phi \circ \mathrm{Fl}_t^X = \mathrm{Fl}_t^Y \circ \phi$$

□.

♣ **Exercício 1.20** ... *Mostre que, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então as condições seguintes são equivalentes:*

- $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = 0$
- $(\mathrm{Fl}_t^X)^* Y = Y$, *sempre que definidos.*
- $\mathrm{Fl}_t^X \circ \mathrm{Fl}_s^Y = \mathrm{Fl}_s^Y \circ \mathrm{Fl}_t^X$, *sempre que definidos.*

Para finalizar esta secção vamos ainda demonstrar o seguinte resultado que será utilizado na secção seguinte:

♣ **Teorema 1.16 "Teorema da rectificação local para campos de vectores"**...

(i). *Seja X um campo de vectores C^∞, definido numa vizinhança de um ponto $x \in M$, e tal $X_x \neq 0$. Então existe uma carta local $(U; x^1, \cdots, x^n)$ em torno de x, tal que:*

$$X = \frac{\partial}{\partial x^1} \qquad \text{em } U$$

Mais geralmente:

(ii). *Sejam $X_1, \cdots, X_k$ campos de vectores C^∞, definidos e linearmente independentes numa vizinhança de um ponto $x \in M$. Então se:*

$$[X_i, X_j] = 0 \qquad \forall i, j = 1, \cdots, k \tag{1.8.14}$$

existe uma carta local $(U; x^1, \cdots, x^n)$ em torno de x, tal que:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{em } U \quad i = 1, \cdots, k$$

- Demonstração...

- (i). O resultado é local, e por isso podemos supôr que $M = \mathbb{R}^n$ (munido das coordenadas usuais $r^1, \cdots, r^n$), que $x = \mathbf{0}$, e ainda que $X(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial r^1}|_{\mathbf{0}}$. A ideia da prova é utilizar o facto de que por cada ponto $(0, r^2, \cdots, r^n)$, numa vizinhança de $\mathbf{0}$, passa (no instante $t = 0$) uma única curva integral de X. Se p pertence à curva integral que passa em $(0, r^2, \cdots, r^n)$ (no instante $t = 0$), então $p = \mathrm{Fl}_t^X(0, r^2, \cdots, r^n)$ para um único t, e atribuímos a p as novas coordenadas $(t, r^2, \cdots, r^n)$.

  Mais detalhadamente, consideremos a aplicação:

$$\boxed{\Phi(r^1, \cdots, r^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Fl}_{r^1}^X(0, r^2, \cdots, r^n)}$$

que está definida e é diferenciável numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Podemos então calcular que, para $i = 2, \cdots, n$:

$$\begin{aligned} d\Phi(\frac{\partial}{\partial r^i}|_{\mathbf{0}})(f) &= \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\mathbf{0}}(f \circ \Phi) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\Phi(0, \cdots, t, \cdots, 0)) - f(\mathbf{0})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0, \cdots, t, \cdots, 0) - f(\mathbf{0})}{t} \\ &= \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\mathbf{0}}(f) \end{aligned}$$

Por outro lado, para $\mathbf{a} = (a^1, \cdots, a^n)$:

$$\begin{aligned} d\Phi(\frac{\partial}{\partial r^1}|_{\mathbf{a}})(f) &= \frac{\partial}{\partial r^1}|_{\mathbf{a}}(f \circ \Phi) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\Phi(a^1 + t, a^2, \cdots, a^n)) - f(\Phi(\mathbf{a}))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big(\mathrm{Fl}^X_{a^1+t}(0, a^2, \cdots, a^n)\big) - f(\Phi(\mathbf{a}))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((\mathrm{Fl}^X_t \circ \mathrm{Fl}^X_{a^1})(0, a^2, \cdots, a^n)\big) - f(\Phi(\mathbf{a}))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big(\mathrm{Fl}^X_t(\Phi(\mathbf{a})\big) - f(\Phi(\mathbf{a}))}{t} \\ &= X_{\Phi(\mathbf{a})}(f) \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

Em particular $d\Phi(\frac{\partial}{\partial r^1}|_{\mathbf{0}})(f) = X_{\Phi(\mathbf{0})}(f) = X_{\mathbf{0}}(f) = \frac{\partial}{\partial r^1}|_{\mathbf{0}}(f)$, já que suposemos por hipótese que $X_{\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial r^1}|_{\mathbf{0}}$. Fica assim demonstrado que a diferencial $d\Phi_{\mathbf{0}}$ é a identidade, e portanto, pelo teorema da inversão local, Φ^{-1} existe e é diferenciável numa certa vizinhança de $\mathbf{0}$. Podemos então usar $\varphi = \Phi^{-1}$ como uma nova carta local numa vizinhança de $x = \mathbf{0}$. Se x^i são as correspondentes coordenadas locais, então (1.8.15) diz que $d\Phi(\frac{\partial}{\partial r^1}) = X \circ \Phi$, e isto implica que $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$.

- (ii). Como antes, podemos supôr que $M = \mathbb{R}^n$, que $x = \mathbf{0}$, e ainda que:

$$X_i(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\mathbf{0}} \qquad i = 1, \cdots, k$$

(se necessário fazemos uma mudança linear de coordenadas). Suponhamos agora que $\mathrm{Fl}^{X_i}_t$ é o fluxo local de cada campo X_i, e consideremos a aplicação:

$$\boxed{\Phi(r^1, \cdots, r^n) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\mathrm{Fl}^{X_1}_{r^1} \circ \mathrm{Fl}^{X_2}_{r^2} \circ \cdots \circ \mathrm{Fl}^{X_k}_{r^k}\big)(0, \cdots, 0, r^{k+1}, \cdots, r^n)}$$

que está definida e é diferenciável numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Calculando de forma análoga à parte (i), obtemos:

$$d\Phi(\frac{\partial}{\partial r^i}|_{\mathbf{0}}) = \begin{cases} X_i(\mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\mathbf{0}} & i = 1, \cdots, k \\ \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\mathbf{0}} & i = k+1, \cdots, n \end{cases}$$

o que significa que a diferencial $d\Phi_{\mathbf{0}}$ é a identidade e portanto, pelo teorema da inversão local, Φ^{-1} existe e é diferenciável numa certa vizinhança de $\mathbf{0}$. Podemos então usar $\varphi =$

Φ^{-1} como uma nova carta local numa vizinhança de $x = \mathbf{0}$. Se x^i são as correspondentes coordenadas locais, então:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

tal como em (i). Note que até aqui, não foi usada a hipótese (1.8.14). Mas pelo exercício 1.20, a hipótese (1.8.14) é equivalente à comutação dos fluxos $\mathrm{Fl}_t^{X_i}$, $(i = 1, \cdots, k)$, e em particular vemos que, para cada $i = 1, \cdots, k$, Φ pode também ser escrita na forma:

$$\Phi(r^1, \cdots, r^n) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\mathrm{Fl}_{r^i}^{X_i} \circ \mathrm{Fl}_{r^1}^{X_1} \circ \cdots \circ \mathrm{Fl}_{r^k}^{X_k}\right)(0, \cdots, 0, r^{k+1}, \cdots, r^n)$$

e o argumento anterior mostra que:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad\qquad i = 1, \cdots, k$$

$\square$.

1.9 Distribuições. Teorema de Frobenius

♣ **Definição 1.30** ...

- *Uma* **"distribuição"** $\mathcal{D}$ *de dimensão* k *numa variedade diferenciável* M *é um subfibrado* C^∞ *de rank* k*, do fibrado tangente* TM*.*

- *Diz-se que um campo de vectores* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *pertence a* $\mathcal{D}$ *se* X *é uma secção de* $\mathcal{D}$*. Representaremos o módulo sobre* $C^\infty(M)$ *de tais campos por* $\Gamma(\mathcal{D})$*.*

- *Uma distribuição* $\mathcal{D}$ *em* M *diz-se* **"involutiva"** *se verifica a condição:*

$$[\Gamma(\mathcal{D}), \Gamma(\mathcal{D})] \subseteq \Gamma(\mathcal{D}) \tag{1.9.1}$$

isto é, $\Gamma(\mathcal{D})$ *é uma subálgebra de Lie de* $\mathfrak{X}(M)$*.*

- *Uma distribuição* $\mathcal{D}$ *em* M *diz-se* **"integrável"** *se para todo o ponto de* $p \in M$ *existe uma carta local* $(U; x^i)$*, tal que os campos de vectores coordenados:*

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^k}$$

constituem uma base local para $\mathcal{D}$*, isto é,* $\forall x \in U$*,* $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\}_{i=1,\cdots,k}$ *é uma base para* $\mathcal{D}_x \subset T_xM$*.*

- *Uma* **"variedade integral"** *de* $\mathcal{D}$ *é uma subvariedade imersa conexa* $S \subset M$*, que verifica a condição:*

$$T_xS = \mathcal{D}_x \qquad\qquad \forall x \in S \tag{1.9.2}$$

Quando uma distribuição $\mathcal{D}$ em M é integrável, então localmente, na vizinhança de cada ponto $p \in M$, existem sempre variedades integrais. De facto, se $(U, \varphi) = (U; x^i)$ é uma carta local em torno de p, que verifica a condição da definição anterior, então as equações:

$$x^{k+1}(x) = c_{r+1}, \cdots, x^n(x) = c_n$$

definem uma família a $(n-k)$-parâmetros de subvariedades de dimensão k, que são variedades integrais de $\mathcal{D}$ (uma para cada escolha de $c = (c_{k+1}, \cdots, c_n)$). Além disso, por cada ponto $x \in U$ passa uma variedade integral desse tipo.

Exemplos e Observações ...

(i). Os campos de vectores:

$$X_1 = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

em $M = \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, geram uma distribuição de dimensão 2 em M, que é involutiva já que:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2$$

e integrável, uma vez que admite variedades integrais que são as esferas concêntricas centradas na origem, em $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$.

(ii). A distribuição $\mathcal{D}$ de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, onde $\mathcal{D}_{(x,y,z)}$ é igual ao plano perpendicular ao vector $\mathbf{n}(x,y,z) = (y, -x, 1)$ (com a identificação usual $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$), não admite variedades integrais (superfícies) que passem em $\mathbf{0}$. Se houvesse uma tal superfície, ela seria tangente na origem ao plano xy. No entanto um pequeno lacete nessa superfície, envolvendo o eixo dos zz, não poderia existir. De facto, nem sequer poderia fechar, já que a sua z-coordenada cresce, sempre que se completa uma volta em torno do eixo dos zz.

Uma base para $\mathcal{D}$ é por exemplo constituída pelos campos de vectores:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \qquad X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}$$

Note que $[X_1, X_2] = -2\frac{\partial}{\partial z} \notin \Gamma(\mathcal{D})$, já que $(0,0,-2)$ nunca é perpendicular a $\mathbf{n}(x,y,z) = (y, -x, 1)$. Portanto $\mathcal{D}$ não é involutiva.

(iii). Seja $\pi : E \to M$ uma submersão e consideremos o subfibrado $\ker T\pi \subset TE$. A distribuição $\mathcal{D} = \ker T\pi$ é involutiva já que se $X, Y \in \Gamma(\ker T\pi)$, são campos de vectores em E que pertencem a $\ker T\pi$, então $T\pi[X,Y] = 0$. $\mathcal{D} = \ker T\pi$ é também integrável, já que $\forall p \in E$, a subvariedade $\pi^{-1}(\{\pi(p)\})$ é variedade integral de $\mathcal{D}$.

(iv). Seja $M = SO(3)$. O espaço tangente à unidade $\mathbf{1} \in SO(3)$, é constituído por todas as matrizes (3×3) reais anti-simétricas:

$$T_{\mathbf{1}}SO(3) = \mathfrak{so}(3) = \{\xi \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \xi = -\xi^t\}$$

Consideremos agora o seguinte subespaço de dimensão 2 em $T_{\mathbf{1}}SO(3)$:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{1}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in T_{\mathbf{1}}SO(3) : \xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{R}\}$$

e a distribuição $\mathcal{D}$ em $M = SO(3)$ definida por:

$$A \in SO(3) \mapsto \mathcal{D}_A \stackrel{\text{def}}{=} \{X_A \in T_A SO(3) : \; A^{-1}X_A \in \mathcal{D}_{\mathbf{1}}\}$$

$\mathcal{D}$ não é involutiva. O parêntisis de Lie dos campos correspondentes a $x = 1, y = 0$ e $x = 0, y = 1$, não pertence a $\mathcal{D}$.

(v). O conceito de distribuição surge no contexto dos sistemas de equações às derivadas parciais de primeira ordem homogéneos, do tipo seguinte:

$$X_j(f) = 0 \qquad\qquad j = 1, \cdots, k \tag{1.9.3}$$

onde $\{X_i\}_{i=1,\cdots,k}$ é um conjunto de k campos de vectores numa variedade M^n, linearmente independentes em cada ponto. Localmente, num sistema de coordenadas locais $(U; x^i)$ o sistema escreve-se na forma:

$$\sum_i a^i_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i}(f) = 0 \qquad\qquad j = 1, \cdots, k \tag{1.9.4}$$

onde $a^i_j \in C^\infty(U)$. O problema consiste em determinar uma função $f(x^1, \cdots, x^n) \in C^\infty(U)$, que satisfaça o sistema de equações às derivadas parciais de primeira ordem (1.9.4). Uma tal função (se existir) diz-se uma **"função integral"** ou um **"integral primeiro"** do sistema (1.9.4).

Em termos geométricos, o conjunto de k campos de vectores em M^n, $\{X_i\}_{i=1,\cdots,k}$, definem uma distribuição $\mathcal{D}$ em M, e (1.9.3) traduz-se no problema de encontrar uma função $f \in C^\infty(M)$, tal que:

$$X(f) = 0 \qquad \forall X \in \Gamma(\mathcal{D})$$

ou ainda, tal que:

$$df_x(\mathcal{D}_x) = 0 \qquad\qquad \forall x \in M$$

Note que, se $\mathcal{D}$ admite variedades integrais (conexas), então f será constante em cada variedade integral (daí o nome "integral primeiro" para f).

Dada uma distribuição $\mathcal{D}$ de dimensão k numa variedade diferenciável M, põe-se naturalmente o problema de determinar variedades integrais para $\mathcal{D}$ a partir de integrais primeiros. Assim suponhamos que é possível encontrar um tal f, tal que $df_x \neq 0$, $\forall x$. As hipersuperfícies de nível:

$$N_f(c) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M : \; f(x) \equiv c\} \qquad\qquad c \in f(M) \subseteq \mathbb{R}$$

verificam $\mathcal{D}_x \subseteq T_x(N_f(c))$. Portanto, se existir uma variedade integral, ela estará contida em algum $N_f(c)$. Mais geralmente, se fôr possível encontrar $(n-k)$ integrais primeiros $f^1, \cdots, f^{n-k}$, que sejam **"funcionalmente independentes"** num aberto $U \subseteq M$ (isto é, as diferenciais df_x são linearmente independentes em cada ponto $x \in U$), então as subvariedades:

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U : \; f^1(x) \equiv c^1, \cdots, f^{n-k}(x) \equiv c^{n-k}\}$$

são subvariedades integrais de $\mathcal{D}$. De facto, neste caso $\mathcal{D}$ pode ser expressa localmente na forma:

$$\mathcal{D}_x \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker df^i_x$$

Se $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ vemos que $[X, Y] \in \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker df^i_x = \mathcal{D}$, isto é: $\mathcal{D}$ é involutiva.

(vi). Uma distribuição de dimensão k em M, é equivalente a uma G-estrutura em M^n. Com efeito, seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vectorial fixo no espaço interno $\mathbb{R}^n$. Dado um referencial $\mathbf{e}_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$ em $x \in M$, consideremos o subespaço $\mathcal{D}_x \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_x(V) \subset T_xM$. Se escolhemos um outro referencial $\mathbf{e}'_x$ é claro que $\mathcal{D}'_x = \mathbf{e}'_x(V)$ será em geral diferente de $\mathcal{D}_x$. Mas sabemos que $\mathbf{e}'_x = \mathbf{e}_x \circ g$ para algum $g \in G\ell(n, \mathbb{R})$, e portanto $\mathcal{D}_x$ será sempre o mesmo desde que $g \in G\ell(n, \mathbb{R})$ deixe V invariante.

Portanto se $G \subset G\ell(n, \mathbb{R})$ é o subgrupo dos automorfismos lineares de $\mathbb{R}^n$ que deixa V invariante, a redução de $\mathcal{F}(M)$ pelo subgrupo G, determina uma distribuição em M. Recìprocamente, uma distribuição $\mathcal{D}$ em M, determina uma tal G-estrutura: consideramos a subvariedade de $\mathcal{F}(M)$ que consiste de todos os referenciais $\mathbf{e}_x$ tais que $\mathbf{e}_x^{-1}(\mathcal{D}_x) = V$.

♣ **Teorema 1.17** **"Teorema de Frobenius** ($1.^a$ **versão)"**... *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição C^∞ de dimensão k numa variedade M^n. Então as condições seguintes são equivalentes:*

- $\mathcal{D}$ *é* **"involutiva"** (existe uma base local $\{X_i\}_{i=1,\cdots,k}$, para $\mathcal{D}$ na vizinhança de cada ponto, tal que $[X_i, X_j] = \sum C^k_{ij} X_k$, $\forall i, j$, onde C^k_{ij} são funções C^∞ nessa vizinhança)."
- $\mathcal{D}$ *é* **"integrável"** (cada ponto $p \in M$ amite uma carta local $(U; x^i)$ tal que $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\cdots,k}$ formam uma base local para $\mathcal{D}$).

- Demonstração...

- Suponhamos que $\mathcal{D}$ é involutiva. Como o resultado é local, podemos supôr que estamos em $\mathbb{R}^n$ e que $p = \mathbf{0}$. Além disso podemos supôr ainda que $\mathcal{D}_\mathbf{0} \subset T_\mathbf{0}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ é gerado por:

$$\frac{\partial}{\partial r^1}|_\mathbf{0}, \cdots, \frac{\partial}{\partial r^k}|_\mathbf{0}$$

Seja $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a projecção nos primeiros k factores. Então $d\pi_\mathbf{0} : \mathcal{D}_\mathbf{0} \to \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo, e por continuidade $d\pi_x$ é injectiva em $\mathcal{D}_x$, para x perto de $\mathbf{0}$. Portanto perto de $\mathbf{0}$, podemos sempre escolher de forma única campos de vectores:

$$X_1(x), \cdots, X_k(x) \in \mathcal{D}_x$$

tais que:

$$d\pi X_i(x) = \frac{\partial}{\partial r^i}|_{\pi(x)} \qquad i = 1, \cdots, k$$

Isto significa que os campos X_i, definidos numa vizinhança de $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^n$, e os campos $\frac{\partial}{\partial r^i}$ em $\mathbb{R}^k$, estão π-relacionados, e portanto $[X_i, X_j]$ e $\left[\frac{\partial}{\partial r^i}, \frac{\partial}{\partial r^i}\right] = 0$ também estão π-relacionados:

$$d\pi[X_i, X_j]_x = \left[\frac{\partial}{\partial r^i}, \frac{\partial}{\partial r^i}\right]_{\pi(x)} = 0$$

Mas por hipótese, $[X_i, X_j]_x \in \mathcal{D}_x$, e como $d\pi_x$ é injectiva em $\mathcal{D}_x$, concluímos que $[X_i, X_j] = 0$. Pelo teorema da rectificação de campos de vectores, visto na secção anterior, existe um sistema de coordenadas locais $(U; x^i)$ tal que:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad\qquad i = 1, \cdots, k$$

e portanto $\mathcal{D}$ é integrável.

- Suponhamos agora que $\mathcal{D}$ é integrável. Seja $S \overset{i}{\hookrightarrow} M$ uma variedade integral (local), e $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$. Então existem campos C^∞ únicos $\overline{X}, \overline{Y}$ em S tais que $Ti(\overline{X}) = X$ e $Ti(\overline{Y}) = Y$, isto é $X, \overline{X}$ e $Y, \overline{Y}$ estão i-relacionados. Portanto $[\overline{X}, \overline{Y}]$ e $[X, Y]$ estão também i-relacionados:

$$di_x[\overline{X}, \overline{Y}]_x = [X, Y]_x$$

e como $[\overline{X}, \overline{Y}]_x \in T_xS$, isto mostra que $[X, Y]_x \in \mathcal{D}_x$, o que significa que $\mathcal{D}$ é involutiva.

□.

Uma segunda versão do Teorema de Frobenius, em termos de formas diferenciais, será apresentada na secção III.3. A teoria global, pode ser vista em [Sp], no contexto da teoria das folheações.

♣ **Exercício 1.21** ... *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição em M, $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vectores e $\Phi_t = \mathrm{Fl}_t^X$ o respectivo fluxo local. Para cada t, o difeomorfismo local $\Phi_t : U \to \mathrm{Fl}_t(U)$ transforma o subespaço $\mathcal{D}_x \subset T_xM$ no subespaço $d(\Phi_t)_x(\mathcal{D}_x) \subset T_{\Phi_t(x)}M$. Diz-se que $\mathcal{D}$ é* **"invariante sob o fluxo local"** $\Phi_t = \mathrm{Fl}_t^X$ *se:*

$$d(\Phi_t)_x(\mathcal{D}_x) = \mathcal{D}_{\Phi_t(x)} \qquad\qquad \forall x \in M \tag{1.9.5}$$

Mostre que $\mathcal{D}$ é invariante sob o fluxo local $\Phi_t = \mathrm{Fl}_t^X$, se e só se:

$$[X, \Gamma(\mathcal{D})] \subset \Gamma(\mathcal{D})$$

Capítulo 2

Formas diferenciais. Cálculo de Cartan

2.1 Formas exteriores

Seja V um espaço vectorial real de dimensão finita n.

♣ Definição 2.1 ... *Uma* **"k-forma exterior"** *ω em V é uma aplicação multilinear (linear em cada variável):*

$$\omega : V^k = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\,\text{factores}} \to \mathbb{R}$$

que é **alternada** *ou* **anti-simétrica***, i.e.:*

$$\omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_k) = -\omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_j, \cdots, \mathbf{v}_i, \cdots, \mathbf{v}_k)$$

Representamos por:

$$\mathcal{A}^k(V)$$

o espaço das k-formas exteriores em V. Para $k = 0$ define-se $\mathcal{A}^0(V) = \mathbb{R}$. Note que $\mathcal{A}^1(V) = V^*$, o dual de V.

A **"álgebra exterior (ou de Grassmann) das formas exteriores"** em V, é por definição a $\mathbb{R}$-álgebra graduada:

$$\mathcal{A}(V) \overset{\text{def}}{=} \oplus_{k=0}^{n} \mathcal{A}^k(V)$$

munida do chamado **"produto exterior de formas"**, $\wedge : \mathcal{A}^k(V) \times \mathcal{A}^\ell(V) \to \mathcal{A}^{k+\ell}(V)$, definido por:

$$\boxed{\omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{k+\ell}) \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum'_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})\, \eta(\mathbf{v}_{\sigma(k+1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k+\ell)})} \quad (2.1.1)$$

onde $\omega \in \mathcal{A}^k(V), \eta \in \mathcal{A}^\ell(V)$ e a soma $\sum_\sigma'$ é feita sobre todas as permutações σ de $\{1, \cdots, k+\ell\}$, tais que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+\ell)$. Note que isto é o mesmo que:

$$\omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\, \omega(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k)})\, \eta(\mathbf{v}_{\sigma(k+1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k+\ell)})$$

onde agora a soma é feita sobre todas as permutações.

Assim por exemplo, se $\omega, \eta \in \mathcal{A}^1(V) = V^*$ são 1-formas:

$$\omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \omega(\mathbf{v}_1)\eta(\mathbf{v}_2) - \omega(\mathbf{v}_2)\eta(\mathbf{v}_1)$$

e se $\omega \in \mathcal{A}^1(V)$ e $\eta \in \mathcal{A}^2(V)$:

$$\omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \omega(\mathbf{v}_1)\eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) - \omega(\mathbf{v}_2)\eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + \omega(\mathbf{v}_3)\eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

enquanto que:

$$\begin{aligned} \eta \wedge \omega(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\omega(\mathbf{v}_3) - \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)\omega(\mathbf{v}_2) + \eta(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\omega(\mathbf{v}_1) \\ &= \omega \wedge \eta(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \end{aligned}$$

Se $\theta^1, \cdots, \theta^s \in \mathcal{A}^1(V)$ são s 1-formas, então $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^s$ é a s-forma definida por:

$$\boxed{\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^s\,(X_1, \cdots, X_s) \;=\; \det\left(\theta^i(X_j)\right)} \tag{2.1.2}$$

É fácil ver que o produto exterior é bilinear e associativo. Além disso, temos o seguinte:

♣ **Teorema 2.1** ... *Seja V um espaço vectorial real de dimensão n, e $\mathcal{A}^k(V)$ o espaço vectorial das k-formas exteriores em V. Se $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ é uma base para V^*, então:*

$$\{\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k} \,:\, 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$$

é uma base para $\mathcal{A}^k(V)$. De facto, toda a k-forma $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$ escreve-se na seguinte maneira única:

$$\boxed{\omega = \textstyle\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \; a_{i_1\cdots i_k}\, \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}}$$

com $a_{i_1\cdots i_k} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots, \mathbf{e}_{i_k})$, onde $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ é a base de V dual á base $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$. Em particular:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}^k(V)) = \binom{n}{k}$$

• Demonstração... Seja $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ a base de V dual á base $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$, isto é, $\theta^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$.

Para uma k-forma exterior $\omega \in \mathcal{A}^k(V)$, consideremos os números $a_{i_1 \cdots i_k} = \omega(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots, \mathbf{e}_{i_k})$, onde $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Temos então que:

$$\omega(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots, \mathbf{e}_{j_k}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \cdots i_k}\, \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots, \mathbf{e}_{j_k})$$

para todos os $j_1 < \cdots < j_k$, uma vez que $\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}(\mathbf{e}_{j_1}, \cdots, \mathbf{e}_{j_k})$ é igual a 1 quando cada $j_\ell = i_\ell$, e igual a 0 nos outros casos. Portanto as duas formas são iguais, o que implica que as formas $\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k}$ geram $\mathcal{A}^k(V)$. Por outro lado, se a soma anterior é zero (i.e., se $\omega = 0$), então cada um dos coeficientes $a_{i_1 \cdots i_k}$ é nulo, e as formas são linearmente independentes.

□

Deduzimos ainda do teorema anterior que:

$$\boxed{\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega, \qquad \omega \in \mathcal{A}^k(V),\ \eta \in \mathcal{A}^\ell(V)} \tag{2.1.3}$$

De facto, ambos os membros são bilineares, e coincidem quando ω e η são elementos da base referida no teorema anterior. Portanto coincidem $\forall \omega, \eta$. Em particular:

$$\boxed{\omega \wedge \omega = 0 \quad \textit{se} \quad \omega \text{ é uma forma de grau ímpar}}$$

♣ **Teorema 2.2** ... *Seja V um espaço vectorial real de dimensão n, $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ uma base de V, e $\omega \in \mathcal{A}^n(V)$ uma n-forma.*

Se $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n$ são n vectores quaisquer em V, com $\mathbf{w}_j = A^i_j \mathbf{v}_i$, $i = 1, \cdots, n$, então:

$$\omega(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n) = \det(A)\, \omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) \tag{2.1.4}$$

• Demonstração... Representemos as colunas da matriz A por $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$, que são vectores em $\mathbb{R}^n$, e definamos $\mu \in \mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n)$ através de:

$$\mu(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(A^j_1 \mathbf{v}_j, \cdots, A^j_n \mathbf{v}_j) = \omega(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n) \tag{2.1.5}$$

Então $\mu \in \mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n)$ e portanto $\mu = \lambda \det$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, uma vez que $\dim \mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n) = 1$ e $\det \in \mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n) - \{0\}$. Mas, se $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda \det(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = \lambda = \mu(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) = \omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$$

isto é, $\lambda = \omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ e finalmente, como $\mu = \lambda \det$ e por (2.1.5), vem que:

$$\omega(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n) = \mu(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) = \omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) \det(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) = \det(A) \omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$$

□

Este teorema mostra que uma n-forma não nula $\omega \in \mathcal{A}^n(V)$, num espaço vectorial real V de dimensão n, separa o conjunto de todas as bases (ordenadas) de V, em dois grupos disjuntos: aquelas para as quais $\omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) > 0$ e aquelas para as quais $\omega(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) < 0$. Se $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n\}$ são duas bases de V, e se A é a matriz definida por $\mathbf{w}_i = A_i^j \mathbf{v}_j$, então essas duas bases estão no mesmo grupo sse $\det A > 0$. Este último critério é independente de $\omega \in \mathcal{A}^n(V) - \{0\}$ e pode ser utilizado para dividir as bases de V em dois grupos distintos. Cada um destes grupos diz-se uma **"orientação"** para V. Orientar V é escolher um desses grupos, cujas bases se declaram **"positivas"**.

Exemplos ...

(i). A aplicação ω que a cada paralelipípedo n-dimensional em $\mathbb{R}^n$ de arestas $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$, associa o respectivo volume orientado:

$$vol(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det\,[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] \tag{2.1.6}$$

é uma n-forma exterior em $\mathbb{R}^n$. Quando as arestas $\mathbf{v}_i$ são linearmente independentes, $vol(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ terá sinal $+$ ou $-$, conforme $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ pertença ou não à orientação usual de $\mathbb{R}^n$ definida pela sua base canónica.

(ii). Note que por definição, se $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(V)$, então:

$$\alpha \wedge \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det \begin{bmatrix} \alpha(\mathbf{u}) & \beta(\mathbf{u}) \\ \alpha(\mathbf{v}) & \beta(\mathbf{v}) \end{bmatrix}$$

é a área orientada do paralelogramo em $\mathbb{R}^2$ de arestas $\mathbf{U} = (\alpha(\mathbf{u}), \beta(\mathbf{u}))$ e $\mathbf{V} = (\alpha(\mathbf{v}), \beta(\mathbf{v}))$. Mais geralmente, se $\alpha^1, \cdots, \alpha^k \in \mathcal{A}^1(V)$ são k 1-formas em V, então:

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}^k(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \det\,[\alpha^i(\mathbf{v}_j)]$$

representa o volume orientado do paralelipípedo k-dimensional em $\mathbb{R}^k$, cujas arestas são $\mathbf{V}_1 = (\alpha^i(\mathbf{v}_1)), \cdots, \mathbf{V}_k = (\alpha^i(\mathbf{v}_k))$.

(iii). **"Forma Volume"**... Consideremos um espaço vectorial real V de dimensão n, orientado e munido de um produto interno euclideano, que notamos por $\cdot$. Vamos definir uma n-forma vol $\in \mathcal{A}^n(V)$, chamada **"forma volume"**, da seguinte maneira: seja $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ uma base ortonormada positiva de V. Pômos então:

$$\mathrm{vol}\,(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det\, A \tag{2.1.7}$$

onde $A = (A_j^i)$ é a matriz definida por $\mathbf{v}_j = A_j^i \mathbf{e}_i$. De facto esta definição não depende da escolha da base ortonormada positiva $\{\mathbf{e}_i\}$. Com efeito, consideremos a chamada matriz de Gramm:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j]$$

Como:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i \cdot (A_j^k \mathbf{e}_k) = A_j^k (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_k A_j^k A_i^k$$

concluímos que:

$$G = A^t A$$

e portanto:

$$\det G = (\det A)^2$$

Em particular, $\det G \geq 0$ e $\det G = 0$ se e só se $\det A = 0$, isto é, se e só se os vectores $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes. Concluímos finalmente que:

$$\boxed{\mathrm{vol}\,(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = \pm\sqrt{\det\,(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)}} \tag{2.1.8}$$

onde $+$ ou $-$ é o sinal de $\det A$. Assim $\mathrm{vol}\,(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) > 0$ se a base ordenada $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ fôr positiva, e $\mathrm{vol}\,(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) < 0$, caso contrário. Claro que (2.1.8) mostra que vol não depende da escolha da base $\{\mathbf{e}_i\}$. Note ainda que:

$$\boxed{\mathrm{vol}\,(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = 1 \qquad \text{para toda a base ortonormada positiva } \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\} \text{ de } V}$$

2.2 Formas Diferenciais

♣ **Definição 2.2** ... *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Uma forma diferencial ω de grau k em M, é uma aplicação diferenciável que a cada $x \in M$ associa uma k-forma exterior em T_xM:*

$$\omega : x \mapsto \omega_x \in \mathcal{A}^k(T_xM)$$

Nesta definição ω é uma aplicação diferenciável no sentido seguinte: em coordenadas locais $(U; x^i)$ em torno de x, T_x^*M tem uma base $dx^1|_x, \cdots, dx^n|_x$ dual à base de vectores coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$, isto é $dx^i|_x\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}|_x\Big) = \delta^i_j$. Portanto ω_x escreve-se na forma:

$$\omega_x = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k}(x)\, dx^{i_1}|_x \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}|_x$$

isto é, localmente em U, a k-forma diferencial ω admite a representação local ω_U, dada por:

$$\boxed{\omega_U = \textstyle\sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}} \tag{2.2.1}$$

onde as funções $a_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(U)$.

Existe uma definição alternativa de forma diferencial que é imprescindível para os nossos objectivos. Seja $\mathfrak{X}(M)$ o módulo sobre o anel $C^\infty(M)$, dos campos de vectores C^∞ numa variedade M.

♣ **Definição 2.3** ... *Uma* **"k-forma diferencial"** *em M é um campo tensorial co-variante ω de tipo $(0, k)$ alternado ou anti-simétrico, i.e.:*

$$\omega : \mathfrak{X}(M)^k = \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k\,\text{factores}} \to C^\infty(M)$$

é $C^\infty(M)$-linear em cada variável, e ω é anti-simétrica:

$$\omega(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_j, \cdots, X_k) = -\omega(X_1, \cdots, X_j, \cdots, X_i, \cdots, X_k)$$

Representamos por:

$$\Omega^k(M)$$

o espaço das k-formas diferenciais em M. A álgebra exterior (ou de Grassmann) das formas diferenciais em M, é por definição a $\mathbb{R}$-álgebra graduada:

$$\Omega(M) \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$$

munida do chamado **"produto exterior de formas"**, definido por:

$$\boxed{\omega \wedge \eta(X_1, \cdots, X_{k+\ell}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\nolimits'_\sigma \operatorname{sgn} \sigma \, \omega(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)}) \, \eta(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(k+\ell)})} \tag{2.2.2}$$

onde $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^\ell(M)$ e a soma $\sum'_\sigma$ é feita sobre todas as permutações σ de $\{1, \cdots, k+\ell\}$, tais que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+\ell)$.

Note que $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Pondo $f \wedge \omega = f\omega$, munimos $\Omega(M)$ de estrutura de $C^\infty(M)$-módulo. Se $(U; x^1, \cdots, x^n)$ é uma carta local as n 1-formas dx^i, definidas por $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta^i_j$, constituem uma base local para o $C^\infty(U)$-módulo $\Omega^1(U)$. Cada forma $\omega \in \Omega^k(M)$ admite a representação local:

$$\omega_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \cdots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{2.2.3}$$

onde $a_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(U)$.

Mais geralmente se $\{\theta^1, \cdots, \theta^k\}$ são 1-formas linearmente independentes em U (um co-referencial móvel), ω pode ser representado localmente:

$$\omega_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k} \, \theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_k} \tag{2.2.4}$$

onde $f_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(U)$.

Portanto a álgebra $\Omega(M)$ é localmente gerada pelos seus elementos de grau 0 e 1. Daqui resulta que duas derivações ou anti-derivações locais da álgebra graduada $\Omega(M)$, que coincidam em $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ e $\Omega^1(M)$, são idênticas. Para isso é necessário e suficiente que elas coincidam em funções e diferenciais. Este facto será utilizado várias vezes de seguida.

Dada um k-forma diferencial ω em M, de acordo com a primeira definição, i.e., $\omega : x \mapsto \mathcal{A}^k(T_xM)$, então ω dá origem a uma k-forma diferencial $\widetilde{\omega} : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M)$, definida por:

$$\widetilde{\omega}(X_1, \cdots, X_k)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_x(X_{1x}, \cdots, X_{kx}) \qquad x \in M$$

e é claro que $\widetilde{\omega}$ é C^∞ se ω o é. Recìprocamente, temos o seguinte:

♣ **Teorema 2.3** (**"Princípio fundamental de localização"**) ... *Seja* $\omega \in \Omega^k(M)$ *e* $x \in M$. *Suponhamos que* $X_1, \cdots, X_k$ *e* $\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_k$ *são campos de vectores tais que* $X_j(x) = \overline{X}_j(x)$ $(1 \leq j \leq k)$. *Então:*

$$\omega(\overline{X}_1 \cdots, \overline{X}_k)(x) = \omega(X_1 \cdots, X_k)(x)$$

- Demonstração... É suficiente demonstrar o teorema para 1-formas $\omega \in \Omega^1(M)$. Por outro lado, basta provar que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo de vectores que se anula em $x \in M$, então $\omega(X)(x) = 0$. Para isso consideremos uma carta local $(U; x^i)$ em torno de x, e uma função "bump" $f \in C^\infty(M)$, com suporte em U e tal que $f \equiv 1$ numa certa vizinhança de x. Então $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ onde $a^i = X(x^i) \in C^\infty(U)$, e $a^i(x) = 0$. Temos portanto que:

$$f^2\omega(X) = \omega(f^2X) = \omega(fa^i f\frac{\partial}{\partial x^i}) = fa^i\,\omega(f\frac{\partial}{\partial x^i})$$

e avaliando esta fórmula em x:

$$\omega(X)(x) = f^2(x)\omega(X)(x) = 0$$

uma vez que $a^i(x) = 0$ e $f(x) = 1$.

□.

Portanto k-forma diferencial $\omega : \mathfrak{X}(M)^k \to C^\infty(M)$, tem um valor bem determinado ω_x num ponto $x \in M$, nomeadamente a k-forma exterior $\omega_x \in \mathcal{A}^k(T_xM)$ definida da seguinte maneira: se $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k \in T_xM$ pômos:

$$\omega_x(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \omega(X_1 \cdots, X_k)(x)$$

onde $X_1, \cdots, X_k$ são quaisquer campos de vectores tais que $X_j(x) = \mathbf{v}_j$ $(1 \le j \le k)$.

Exemplos ...

(i). **"Forma Volume"** ... Seja M uma variedade diferenciável orientada, munida de uma métrica riemanniana g. Então para cada $x \in M$, g_x é um produto interno euclideano em T_xM, e podemos definir uma n-forma $\mu_g \in \Omega^n(M)$, chamada a **"forma volume"** associada à métrica g, através de $\mu_g =$ à forma volume vol em T_xM determinada pelo produto interno euclideano g_x:

$$\mu_g(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \text{volume orientado do paralelipipedo gerado por } \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$$

Em coordenadas locais positivas $(U; x^i)$ (isto é, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ é uma base positiva de T_xM, para todo o ponto $x \in U$), temos que:

$$\boxed{\mu_g = dV \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \qquad x \in U} \tag{2.2.5}$$

onde:

$$g_{ij}(x) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad g_x\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x, \frac{\partial}{\partial x^j}|_x\Big)$$

são os coeficientes da métrica g nas coordenadas locais x^i.

(ii). Seja M uma superfície orientada mergulhada em $\mathbb{R}^3$, e $\mathbf{n}$ um campo C^∞ de vectores unitários normais a M tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base positiva de $x \in M$ se e só se $\det[\mathbf{n}(x), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] > 0$.

Se $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T_xM$, então como $\mathbf{n}(x)$ tem norma 1 e é perpendicular a T_xM, o volume do paralelogramo gerado por $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, é igual a:

$$|\det[\mathbf{n}(x), \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]|$$

Se μ_g é a forma volume de M, relativamente à métrica induzida em M pelo produto interno euclideano usual em $\mathbb{R}^3$, então pelo exemplo anterior:

$$\mu_g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \det[\mathbf{n}(x), \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]$$

já que o sinal do determinante é o mesmo do da definição de μ_g. Se $\mathbf{n}(x) = (n^1(x), n^2(x), n^3(x))$, $\mathbf{w}_1 = (a, b, c)$ e $\mathbf{w}_2 = (d, e, f)$, então desenvolvendo o determinante segundo a primeira coluna, obtemos:

$$\begin{aligned} \mu_g(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &= \det[\mathbf{n}(x), \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] \\ &= \det \begin{bmatrix} n^1(x) & a & d \\ n^2(x) & b & e \\ n^3(x) & c & f \end{bmatrix} \\ &= n^1(x) \det \begin{bmatrix} b & e \\ c & f \end{bmatrix} - n^2(x) \det \begin{bmatrix} a & d \\ c & f \end{bmatrix} + n^3(x) \det \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$dy \wedge dz(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \det \begin{bmatrix} b & e \\ c & f \end{bmatrix}, \quad dx \wedge dz(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \det \begin{bmatrix} a & d \\ c & f \end{bmatrix}, \quad dx \wedge dy(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \det \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$\boxed{\mu_g = dA \overset{\text{def}}{=} n^1\, dy \wedge dz + n^2\, dz \wedge dx + n^3\, dx \wedge dy} \tag{2.2.6}$$

Por exemplo, se $M = S^2 = \{\mathbf{x} =\in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$ é a esfera de centro $\mathbf{a}$ e raio $r > 0$, podemos tomar, para cada $\mathbf{x} \in S^2$:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{r}$$

e portanto:

$$dA = \frac{x-a}{r}\, dy \wedge dz + \frac{y-b}{r}\, dz \wedge dx + \frac{z-c}{r}\, dx \wedge dy$$

♣ **Exercício 2.1** ... *(i). calcular o elemento de área dA de uma superfície $M = F^{-1}(c)$, dada como imagem inversa do valor regular $c \in \mathbb{R}$, de uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.*

(ii). Calcular o elemento de área dA de uma superfície $M = \mathbf{gr}\, f$, dada como o gráfico de uma aplicação diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

2.3 Cálculo de Cartan com formas diferenciais

Passemos agora à definição e cálculo com diversas operações fundamentais sobre formas diferenciais.

♣ Definição 2.4 (**"Pull-back de formas"**)... *Uma aplicação C^∞, $\phi : M \to N$ induz uma transformação $\phi^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$, dita o* **"pull-back de formas"**, *definida por:*

$$\boxed{(\phi^*\omega)_x(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \omega_{\phi(x)}(d\phi_x(\mathbf{v}_1), \cdots, d\phi_x(\mathbf{v}_k))} \tag{2.3.1}$$

$\forall \omega \in \Omega^k(N)$, $\forall \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k \in T_xM$, *e que é compatível com o produto exterior, isto é:*

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta) \tag{2.3.2}$$

$\forall \omega, \eta \in \Omega(M)$. *Em funções define-se $\phi^*(f) = f \circ \phi$, $\forall f \in C^\infty(N)$.*

• **Representação local**... Vejamos a expressão do pull-back em coordenadas locais. Suponhamos que:

$$\Phi : (x^1, \cdots, x^n) \mapsto (\phi^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, \phi^m(x^1, \cdots, x^n))$$

é a representação local de ϕ relativamente a cartas locais $(U; x^i) \in \mathcal{F}_M$ e $(V, y^j) \in \mathcal{F}_N$, e suponhamos que $\omega \in \Omega^k(N)$ tem a expressão local:

$$\omega_V = \sum_{j_1 < \cdots <* j_k} a_{j_1 \cdots j_k} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}$$

onde $a_{j_1 \cdots j_k} \in C^\infty(V)$. Então $\phi^*\omega$ induz uma k-forma em U, cuja expressão local é do tipo:

$$(\phi^*\omega)_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

expressão que é obtida a partir da expressão para ω_V substituindo:

$$y^j = \phi^j(x^1, \cdots, x^n) \qquad e \qquad dy^j = \sum_i \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} dx^i$$

De facto basta aplicar a propriedade (2.3.2) juntamente com o facto seguinte:

$$\phi^*(dy^j) = \sum_i \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} dx^i$$

Exemplo ... Seja $\omega = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$, e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$. Então $\phi^*\omega = a(t)dt$ é obtida substituindo $x = \cos t, y = \sin t$, e $dx = -(\sin t)dt, dy = (\cos t)dt$ em ω:

$$\phi^*\omega = a(t)dt = \frac{-(\sin t)(-(\sin t)dt) + (\cos t)((\cos t)dt)}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = dt$$

♣ <u>**Exercício**</u> **2.2** ... *Se $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é dada por $\phi(x,y,z) = (x+z, xy)$, e $\omega = e^v du + u dv \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \eta = u du \wedge dv \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, calcule $\omega \wedge \eta$, $\phi^*\omega$, $\phi^*\eta$ e $\phi^*\omega \wedge \phi^*\eta$.*

♣ <u>**Teorema**</u> **2.4** (**"Produto Interior** i_X) ... *Dado um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, existe uma única aplicação $\mathbb{R}$-linear $i_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ dita* **"produto interior por** X**"**, *que a cada $\omega \in \Omega^k(M)$ associa a $(k-1)$-forma $i_X(\omega)$ definida por:*

$$\boxed{i_X(\omega)(X_2, \cdots, X_k) \stackrel{def}{=} \omega(X, X_2, \cdots, X_k)} \tag{2.3.3}$$

e que verifica as propriedades seguintes:

- $i_{(X|_U)}(\omega|_U) = (i_x\omega)|_U$ (2.3.4)
- $i_X(f) = 0 \qquad \forall f \in C^\infty(M)$ (2.3.5)
- $i_X(\theta) = \theta(X) \qquad \forall \theta \in \Omega^1(M)$ (2.3.6)
- $i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$
- $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^{deg\,\omega}\, \omega \wedge i_X(\eta)$ (2.3.7)

isto é, i_X é uma **anti-derivação local de grau** -1, *em $\Omega(M)$.*

- <u>Demonstração</u>... A unicidade decorre do facto de que i_X é uma anti-derivação local, que está definida nos geradores de $\Omega(M)$ através de (2.3.5) e (2.3.6). Vejamos agora que i_X, definida pela fórmula (2.3.3), satisfaz as propriedades acima referidas. Todas são evidentes com a excepção de (2.3.7). Demonstremos esta última, utilizando a definição de produto exterior (fórmula (2.2.2)). Vem então que, se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^\ell(M)$:

$$\begin{aligned}
(i_X(\omega \wedge \eta))(X_2, \cdots, X_{k+\ell}) &= (\omega \wedge \eta)(X, X_2, \cdots, X_{k+\ell}) \\
&= \sum_\sigma{}' \operatorname{sgn}\sigma\, \omega(X, X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k)})\, \eta(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(k+\ell)}) + \\
&\quad +(-1)^k \sum_\sigma{}' \operatorname{sgn}\sigma\, \omega(X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k+1)})\, \eta(X, X_{\sigma(k+2)}, \cdots, X_{\sigma(k+\ell)}) \\
&= \sum_\sigma{}' \operatorname{sgn}\sigma\, i_X\omega(X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k)})\, \eta(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(k+\ell)}) + \\
&\quad +(-1)^k \sum_\sigma{}' \operatorname{sgn}\sigma\, \omega(X_{\sigma(2)}, \cdots, X_{\sigma(k+1)})\, i_X\eta(X_{\sigma(k+2)}, \cdots, X_{\sigma(k+\ell)})
\end{aligned}$$

- Isto é:

$$
\begin{aligned}
&(i_X(\omega\wedge\eta))(X_2,\cdots,X_{k+\ell}) = \\
&\quad (i_X\omega\wedge\eta)(X_2,\cdots,X_{k+\ell}) + (-1)^{deg\,\omega}(\omega\wedge i_X\eta)(X_2,\cdots,X_{k+\ell})
\end{aligned}
$$

□

- **Representação local**... Se no aberto $U \subseteq M$, ω tem a representação local:

$$\omega_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k}\, \theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_k} \tag{2.3.8}$$

onde $\{\theta^1,\cdots,\theta^k\}$ são 1-formas linearmente independentes em U (um co-referencial móvel), e $f_{i_1\cdots i_k}\in C^\infty(U)$, e se $X = a^i\mathbf{e}_i$, onde $\{\mathbf{e}_i\}$ é o referencial dual a $\{\theta^i\}$, e $a_i\in C^\infty(U)$, então $i_X\omega$ tem a seguinte representação local:

$$\boxed{(i_X\omega)_U = \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k\\ 1\leq\ell\leq k}} a^{i_\ell} f_{i_1\cdots i_\ell\cdots i_k}\, \theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\theta^{i_\ell}}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_k}}$$

Note ainda que, $\forall X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ e $\forall f\in C^\infty(M)$:

$$
\begin{aligned}
i_{X+Y} &= i_X + i_Y\\
i_{fX} &= f\, i_X\\
(i_X)^2 &= i_X i_X = 0
\end{aligned} \tag{2.3.9}
$$

♣ <u>**Teorema**</u> **2.5** (**"Derivada de Lie $\mathcal{L}_X$"**) ... *Dado um campo de vectores $X\in\mathfrak{X}(M)$, seja $\Phi_t = \mathrm{Fl}_t^X$ o respectivo fluxo local. Então existe uma única aplicação $\mathbb{R}$-linear $\mathcal{L}_X : \Omega(M)\to\Omega(M)$ dita* **"derivada de Lie segundo X"**, *que a cada $\omega\in\Omega^k(M)$ associa a k-forma $\mathcal{L}_X(\omega)$ definida por:*

$$\boxed{(\mathcal{L}_X\omega)(x) \overset{def}{=} \lim_{t\to 0}\frac{(\Phi_t^*\omega)_x-\omega_x}{t}} \tag{2.3.10}$$

e que verifica as propriedades seguintes:

- $\mathcal{L}_{X|_U}(\omega_U) = (\mathcal{L}_X\omega)|_U$ (2.3.11)
- $\mathcal{L}_X(f) = Xf \qquad \forall f\in C^\infty(M)$ (2.3.12)
- $\mathcal{L}_X(df) = d(Xf) \qquad \forall f\in C^\infty(M)$ (2.3.13)
- $\mathcal{L}_X : \Omega^k(M)\to\Omega^k(M)$
- $\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta) = \mathcal{L}_X(\omega)\wedge\eta + \omega\wedge\mathcal{L}_X(\eta)$ (2.3.14)

isto é, $\mathcal{L}_X$ é **uma derivação local de grau** 0*, em $\Omega(M)$.*

• Demonstração... A unicidade decorre do facto de que $\mathcal{L}_X$ é uma derivação local, que está definida nos geradores de $\Omega(M)$ através de (2.3.12) e (2.3.13). Vejamos agora que $\mathcal{L}_X$, definida pela fórmula (2.3.10), satisfaz as propriedades acima referidas. Todas resultam directamente da definição (2.3.10), e das propriedades do pull-back de formas, com a excepção de (2.3.13). Demonstremos esta última:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X df)(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{(\Phi_t^* \, df)_x - (df)_x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(d\Phi_t^* \, f)_x - (df)_x}{t} \\
&= d\left(\lim_{t\to 0} \frac{(\Phi_t^* \, f)_x - f(x)}{t}\right) \\
&= d\mathcal{L}_X f \\
&= d(Xf)
\end{aligned}$$

□

♣ **Proposição 2.1** ...

- $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\,\omega = \mathcal{L}_{[X,Y]}\,\omega \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \qquad \forall \omega \in \Omega(M)$ (2.3.15)
- $i_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$ (2.3.16)
- $(\mathcal{L}_X\omega)(X_1, \cdots, X_k) =$

$$= X\,\omega(X_1, \cdots, X_k) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_k) \tag{2.3.17}$$

• Demonstração... Para provar (2.3.15), notamos que $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ é uma derivação local, já que $\mathcal{L}_X$ e $\mathcal{L}_Y$ o são. Também $\mathcal{L}_{[X,Y]}$ é uma derivação local. Portanto para verificar que são iguais basta demonstrar que coincidem em funções f e diferenciais df, já que estas geram $\Omega(M)$.

• Para provar (2.3.16), notamos que $i_{[X,Y]}$ é uma anti-derivação local, $\mathcal{L}_X$ é uma derivação local, i_Y é uma anti-derivação local, e portanto $[\mathcal{L}_X, i_Y]$ é uma anti-derivação local. Vamos demonstrar que $i_{[X,Y]}$ e $[\mathcal{L}_X, i_Y]$ coincidem em funções f e diferenciais df. Se $f \in C^\infty(M)$, $i_{[X,Y]}f = 0$ e:

$$[\mathcal{L}_X, i_Y]f = \mathcal{L}_X i_Y f - i_Y \mathcal{L}_X f = -i_Y \mathcal{L}_X f = -i_Y(Xf) = 0$$

Se $df \in \Omega^1(M)$:

$$i_{[X,Y]}df = [X, Y]f$$

e:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_X, i_Y]df &= \mathcal{L}_X i_Y df - i_Y \mathcal{L}_X df \\
&= \mathcal{L}_X(Yf) - i_Y d(Xf) \\
&= (XY - YX)f = [X, Y]f
\end{aligned}$$

- Finalmente para provar (2.3.17), temos em virtude de (2.3.15):

$$i_{X_1}\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X i_{X_1}\omega - i[X,Y]\omega$$

Multiplicando à esquerda sucessivamente por $i_{X_2}, \cdots, i_{X_k}$ e iterando, obtemos:

$$i_{X_k}\cdots i_{X_1}\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X i_{X_k}\cdots i_{X_1}\omega - \sum_{i=1}^{k} i_{X_k}\cdots i_{[X,X_i]}\cdots i_{X_1}\omega$$

que é equivalente a (2.3.17).

$\square$

- **Representação local**... Se numa carta local $(U;x^i)$, a expressão local de ω é:

$$\omega_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

e se $X = a^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}$, então a expressão local de $\mathcal{L}_X\omega$ é dada por (aplicando (2.3.17)):

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)_U &= \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ 1\le \ell\le n}} a^\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}(f_{i_1\cdots i_k})\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} + \\ &\quad - \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k \\ 1\le s\le k}} f_{i_1\cdots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge da^{i_s}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \end{aligned} \qquad (2.3.18)$$

♣ <u>**Teorema**</u> **2.6** *(***"Derivada Exterior"***) ... Para cada $k = 0,1,2,\cdots,n-1$, existe uma única aplicação $\mathbb{R}$-linear $d = d_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, chamada* **"derivação exterior"** *de formas, tal que:*

$$\boxed{\mathcal{L}_X\,\omega = (d\,i_X + i_X\,d)\,\omega \qquad \text{“Fórmula de Cartan”}} \qquad (2.3.19)$$

$\forall\omega\in\Omega(M)$, $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$.

- <u>Demonstração</u>...

- Unicidade... Se d' é um outro operador que satisfaz as condições do enunciado, então, $\forall\omega\in\Omega(M)$:

$$i_X(d'-d)\omega = (d-d')i_X\omega$$

Para $k=0$, $i_X f = 0$ e $i_X(d'-d)f = 0$, e como isto se verifica $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$, deduzimos que $d = d'$ em $C^\infty(M)$. Suponhamos agora que $d = d'$ em todas as formas de grau $\le k-1$. A igualdade anterior mostra que também $i_X(d'-d)\omega = 0$, para todas as formas de grau k. Portanto $d = d'$ em $\Omega^k(M)$.

- Existência... A Fórmula de Cartan (2.3.19), mostra que se d existe, então terá que ser dada por:

$$(d\omega)(X_0, X_1, \cdots, X_k) = (\mathcal{L}_{X_0}\omega)(X_1, \cdots, X_k) - (di_{X_0}\omega)(X_1, \cdots, X_k) \tag{2.3.20}$$

Vamos mostrar, usando indução no grau $k = deg\,\omega$, que (2.3.20) define de facto uma forma diferencial $d\omega$. Para $k = 0$ isto é verdade, uma vez que se $\omega = f \in C^\infty(M)$, então:

$$(df)(X) = \mathcal{L}_X f = Xf$$

Suponhamos agora que $d\omega$, dada por (2.3.20), é uma forma diferencial, $\forall\omega$ de grau $\leq k-1$, e demonstremos que o mesmo acontece quando ω tem grau k. Segundo a hipótese de indução, $di_{X_0}\omega$ é $C^\infty(M)$-multilinear alternada relativamente a $(X_1, \cdots, X_k)$, já que $i_{X_0}\omega$ tem grau $k-1$. $\mathcal{L}_{X_0}\omega$ é também $C^\infty(M)$-multilinear alternada relativamente a $(X_1, \cdots, X_k)$. Portanto $d\omega$ é também $C^\infty(M)$-multilinear alternada relativamente a $(X_1, \cdots, X_k)$. Resta provar que $d\omega$ é $C^\infty(M)$-linear em X_0 e alternada em X_0, X_1. Mas, usando (2.3.16):

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{X_0}\omega)(X_1, \cdots, X_k) &= (i_{X_1}\mathcal{L}_{X_0}\omega)(X_2, \cdots, X_k)\\ &= (\mathcal{L}_{X_0}i_{X_1}\omega)(X_2, \cdots, X_k) - (i_{[X_0,X_1]}\omega)(X_2, \cdots, X_k)\end{aligned}$$

e substituindo no segundo membro $\mathcal{L}_{X_0}$ por $di_{X_0} + i_{X_0}d$, vem que:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{X_0}\omega)(X_1, \cdots, X_k) &= (di_{X_0}i_{X_1}\omega)(X_2, \cdots, X_k) +\\ &\quad (di_{X_1}\omega)(X_0, X_2, \cdots, X_k) - (i_{[X_0,X_1]}\omega)(X_2, \cdots, X_k)\end{aligned}$$

Para $X_0 = X_1$, vem que $(\mathcal{L}_{X_1}\omega)(X_1, \cdots, X_k) = (di_{X_1}\omega)(X_1, X_2, \cdots, X_k)$, e substituindo em (2.3.20), vemos que $(d\omega)(X_1, X_1, \cdots, X_k) = 0$, isto é, $d\omega$ é alternada em X_0 e X_1. A linearidade em X_0 resulta da linearidade em X_1.

□

É importante notar que na definição da derivação exterior intervem apenas a estrutura diferenciável de M. A derivação exterior é, como veremos em breve, invariante sob aplicações. Estas propriedades justificam a importância deste operador em muitas aplicações em Física e Geometria.

♣ **Proposição 2.2** ... *Se $\omega \in \Omega^k(M)$ é uma forma de grau k, então $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ é uma forma de grau $k+1$, definida por:*

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_1, \cdots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\, \omega(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{k+1}) +\\ &\quad - \sum_{1\leq i<j\leq k+1} (-1)^{i+j}\, \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j, \cdots, X_{k+1})\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

$\forall\omega \in \Omega^k(M)$. Em particular se $\theta \in \Omega^1(M)$ é uma 1-forma, então:

$$\boxed{d\theta(X, Y) = X\,\theta(Y) - Y\,\theta(X) - \theta([X, Y]) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)} \tag{2.3.22}$$

- Demonstração... Utilizar indução, a fórmula de Cartan e ainda (2.3.17).

$\square$

♣ **Teorema 2.7** *Existe uma única aplicação* $\mathbb{R}$*-linear* $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$*, tal que:*

- $d_U(\omega|_U) = (d\omega)|_U$ (2.3.23)
- $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta \qquad e \qquad d(\lambda\omega) = \lambda\, d(\omega)$ (2.3.24)
- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{deg\,\omega}\, \omega \wedge d\eta$ (2.3.25)
- $df(X) = Xf, \quad \forall f \in C^\infty(M)$ (2.3.26)
- $d^2\omega = 0 \qquad \forall \omega \in \Omega(M)$ (2.3.27)

isto é, d é **uma anti-derivação local de grau** $+1$*, em* $\Omega(M)$*.*

- Demonstração... A unicidade demonstra-se da maneira usual. Demonstremos agora que d existe e que é dada pela derivada exterior de formas. Basta provar que a derivada exterior definida através da fórmula de Cartan (2.3.19), verifica as propriedades referidas no teorema. Para mostrar (2.3.25), vamos usar indução, supondo que essa igualdade é válida para $\omega \in \Omega^r(M)$ e $\eta \in \Omega^s(M)$, com $r + s = k - 1$, e provando que que ela continua válida para $r + s = k$. Se $\omega \in \Omega^r(M)$ e $\eta \in \Omega^s(M)$, então:

$$(d(\omega \wedge \eta))(X_1, \cdots, X_{r+s+1} = (i_{X_1} d(\omega \wedge \eta))(X_2, \cdots, X_{r+s+1}$$

Mas:

$$\begin{aligned} i_{X_1} d(\omega \wedge \eta) &= \mathcal{L}_{X_1}(\omega \wedge \eta) - d i_{X_1}(\omega \wedge \eta) \\ &= \mathcal{L}_{X_1}\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_{X_1}\eta - d(i_{X_1}\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge i_{X_1}\eta) \\ &= \mathcal{L}_{X_1}\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_{X_1}\eta - d i_{X_1}\omega \wedge \eta - (-1)^{r-1} i_{X_1}\omega \wedge d\eta - \\ &\qquad -(-1)^r d\omega \wedge i_{X_1}\eta - (-1)^{r^2} \omega \wedge d i_{X_1}\eta \end{aligned}$$

em virtude da hipótese de indução. Atendendo agora à fórmula de Cartan (2.3.19), vem que:

$$\begin{aligned} i_{X_1} d(\omega \wedge \eta) &= i_{X_1} d\omega \wedge \eta + (-1)^{r+1} d\omega \wedge i_{X_1}\eta + (-1)^r \big(i_{X_1}\omega \wedge d\eta + (-1)^r \omega \wedge i_{X_1} d\eta\big) \\ &= i_{X_1}(d\omega \wedge \eta) + (-1)^r i_{X_1}(\omega \wedge d\eta) \\ &= i_{X_1}\big(d\omega \wedge \eta) + (-1)^r \omega \wedge d\eta\big) \end{aligned}$$

Esta fórmula é válida para $r + s = 0, 1$. Deduzimos assim, do que foi feito, que ela válida $\forall r, s$ e $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{deg\,\omega}\, \omega \wedge d\eta$$

Para demonstrar (2.3.27), é suficiente verificar para $\omega = f \in C^\infty(M)$, devido ao carácter local de d. De (2.3.19), vem que:

$$i_X d^2 f = \mathcal{L}_X df - d i_X df = \mathcal{L}_X df - d\mathcal{L}_X f = 0$$

porque $\mathcal{L}_X$ e d comutam sobre as funções diferenciáveis.

$\square$

♣ Proposição 2.3 ...

- $[\mathcal{L}_X, d] = \mathcal{L}_X\, d - d\,\mathcal{L}_X = 0$ (2.3.28)
- $\varphi^* d\omega = d\varphi^*\omega$, *para toda a aplicação diferenciável* $\varphi : M \to N$ *e* $\forall \omega \in \Omega(N)$ (2.3.29)

- **Representação local**... Se $\omega \in \Omega^k(M)$ admite a representação local:

$$\omega_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

então:

$$\boxed{(d\omega)_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} da_{i_1\cdots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}}$$

♣ Exercício 2.3 ... *Seja* $\omega = y^2\, dx \wedge dz + \sin(xy)\, dx \wedge dy + e^x\, dy \wedge dz \in \Omega(\mathbb{R}^3)$, *e* $X = 3\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos z\,\frac{\partial}{\partial y} - x^2\,\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. *Calcule* $d\omega$ *e* $i_X\omega$.

♣ Exercício 2.4 ... Seja M uma variedade orientável de dimensão n, e $\mu \in \Omega^n(M)$ uma forma volume para M (isto é, uma n-forma μ que nunca se anula e que portanto define uma orientação para M). Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ então $\mathcal{L}_X\mu \in \Omega^n(M)$ e portanto existe uma única função, notada por $\mathbf{div}_\mu(X) \in C^\infty(M)$, tal que:

$$\mathcal{L}_X\mu = \mathbf{div}_\mu(X)\,\mu$$

$\mathbf{div}_\mu(X)$ diz-se a **"divergência de X relativamente a μ"**.

(i). Mostre que $\mathbf{div}_\mu(X) = 0$ *se e só se* $(\mathrm{Fl}_t^X)^*\mu = \mu$. (Neste caso diz-se que o campo de vectores X preserva volume ou que é incompressível).

(ii). Prove as seguintes igualdades:

- $\mathbf{div}_{f\mu}(X) = \mathbf{div}_\mu(X) + \frac{Xf}{f}$ $\quad\forall f \in C^\infty(M),\ f(x) \neq 0,\ \forall x \in M$.
- $\mathbf{div}_\mu(gX) = g\mathbf{div}_\mu(X) + Xg$ $\quad\forall g \in C^\infty(M)$.
- $\mathbf{div}_\mu([X,Y]) = X(\mathbf{div}_\mu(Y)) - Y(\mathbf{div}_\mu(X))$

FORMULÁRIO

- $i_X(\omega)(X_2, \cdots, X_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(X, X_2, \cdots, X_k)$
- $i_X(f) = 0 \qquad \forall f \in C^\infty(M)$
- $i_X(\theta) = \theta(X) \qquad \forall \theta \in \Omega^1(M)$
- $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^{deg\,\omega}\, \omega \wedge i_X(\eta)$
- $\mathcal{L}_X(f) = Xf \qquad \forall f \in C^\infty(M)$
- $\mathcal{L}_X(df) = d(Xf) \qquad \forall f \in C^\infty(M)$
- $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\eta)$
- $\mathcal{L}_{fX}\omega = f\mathcal{L}_X\omega + df \wedge i_X\omega$
- $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\,\omega = \mathcal{L}_{[X,Y]}\,\omega$
- $i_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$
- $\mathcal{L}_X i_X \omega = i_X \mathcal{L}_X \omega$
- $(\mathcal{L}_X\omega)(X_1, \cdots, X_k) = X\,\omega(X_1, \cdots, X_k) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_k)$
- $\mathcal{L}_X\,\omega = (d\,i_X + i_X\,d)\,\omega$ **"Fórmula de Cartan"**
- $$\begin{aligned}(d\omega)(X_1, \cdots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\,\omega(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{k+1}) + \\ &\quad - \sum_{1 \le i < j \le k+1} (-1)^{i+j}\,\omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j, \cdots, X_{k+1})\end{aligned}$$
- $d\theta(X,Y) = X\,\theta(Y) - Y\,\theta(X) - \theta([X,Y]) \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \theta \in \Omega^1(M)$
- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{deg\,\omega}\,\omega \wedge d\eta$
- $df(X) = Xf$
- $d^2\omega = 0$
- $[\mathcal{L}_X, d] = \mathcal{L}_X\,d - d\,\mathcal{L}_X = 0$
- $\varphi^* d\omega = d\varphi^*\omega$
- $\varphi^*(i_X\omega) = i_{\varphi^* X}(\varphi^*\omega)$ onde φ é um difeomorfismo
- $\varphi^*(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_{\varphi^* X}(\varphi^*\omega)$ onde φ é um difeomorfismo

2.4 Sistemas diferenciais exteriores. Teorema de Frobenius

2.4.1 Ideais diferencais. Teorema de Frobenius

Seja M uma variedade de dimensão n e consideremos a álgebra exterior (ou de Grassmann) das formas diferenciais em M:

$$\Omega(M) \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$$

Um **sistema diferencial** em M é uma colecção $\{\omega^1, \omega^2, \cdots\} = \{\omega^i\}_{i\in I}$ de formas diferenciais em M. Uma subvariedade imersa $S \hookrightarrow M$, será uma **variedade integral** desse sistema se todas as formas se anulam em S: $\omega^i|_S = 0$, $\forall i \in I$. Note que neste caso também é verdade que $(\omega^i \wedge \eta)|_S = 0$, qualquer que seja a forma diferencial $\eta \in \Omega(M)$, mesmo que η não pertença ao sistema diferencial $\{\omega^i\}_{i\in I}$. Por isso em vez de considerar $\{\omega^i\}_{i\in I}$, devemos considerar todo o ideal de $\Omega(M)$ gerado por $\{\omega^i\}_{i\in I}$.

♣ **Definição 2.5** ... *Um* **ideal exterior** $\mathcal{I}$ *em* M*, é uma colecção de formas diferenciais em* M *tais que:*

- *se* ω, ω' *são* k*-formas em* $\mathcal{I}$*, também* $\omega + \omega'$ *está em* $\mathcal{I}$*.*
- *se* $\omega \in \mathcal{I}$*, então* $\omega \wedge \eta \in \mathcal{I}$, $\forall \eta \in \Omega(M)$

Uma subvariedade imersa $S \hookrightarrow M$*, diz-se uma* **variedade integral** *do sistema diferencial determinado pelo ideal exterior* $\mathcal{I}$*, se e só se* $\mathcal{I}$ *se anula em* S*, i.e.,* $\omega|_S = 0$, $\forall \omega \mathcal{I}$*.*

Dado um ideal exterior $\mathcal{I}$, designemos por $\mathcal{I}^{(k)} = \{\omega \in \mathcal{I} : \deg \omega = k\} = \mathcal{I} \cap \Omega^k(M)$, $k = 0, 1, \cdots, n$, a sua componente homogénea de grau k, de tal forma que $\mathcal{I} = \oplus_{k=0}^{n} \mathcal{I}^{(k)}$. É fácil ver que uma subvariedade imersa $S \hookrightarrow M$ de dimensão $s \leq n$, é uma variedade integral de $\mathcal{I}$, se e só se $\mathcal{I}^{(s)}$ se anula em S.

Diz-se que um conjunto de formas diferenciais $\{\omega^1, \omega^2, \cdots\} = \{\omega^i\}_{i\in I}$ **gera o ideal exterior** $\mathcal{I}$, se toda a forma $\omega \in \mathcal{I}$ se pode escrever como uma combinação linear finita do tipo $\omega = \sum_i \eta^i \wedge \omega^i$, onde η^i são formas arbitrárias tais que $\deg \omega = \deg \eta^i + \deg \omega^i$. Claramente que, neste caso, S é uma variedade integral de $\mathcal{I}$, se e só se cada gerador ω^i se anula em S. Nas aplicações, em geral $\mathcal{I}$ será finitamente gerado.

Seja $\mathcal{I}$ um ideal exterior e suponhamos que $S \hookrightarrow M$ é uma variedade integral de $\mathcal{I}$, de dimensão $s \leq n$. Para cada $x \in S$ o espaço tangente T_xS é um subespaço de T_xM. As formas diferenciais em $\mathcal{I}$ anulam-se em S se e só se, quando vistas como formas exteriores em T_xM, elas se anulam no subespaço T_xS, i.e.:

$$\omega_x(v_1, \cdots, v_k) = 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{I}^{(k)}, \ \forall v_1, \cdots, v_k \in T_xS$$

Portanto uma condição necessária para que um certo subespaço de T_xM seja um possível candidato a espaço tangente de uma variedade integral de $\mathcal{I}$, é que ele seja um elemento integral de $\mathcal{I}$, de acordo com a seguinte definição:

♣ Definição 2.6 ... *Um subespaço $E \subseteq T_xM$, de dimensão $s \leq n$, diz-se um* **elemento integral de** $\mathcal{I}$ *se todas as forma em* $\mathcal{I}$ *se anulam em* E*, i.e.:*

$$\omega_x(v_1, \cdots, v_k) = 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{I}^{(k)}, \ \ \forall v_1, \cdots, v_k \in E \subseteq T_xM \tag{2.4.1}$$

Portanto uma subvariedade imersa $S \hookrightarrow M$ é uma variedade integral de $\mathcal{I}$, se e só se T_xS é um elemento integral de $\mathcal{I}$, $\forall x \in S$.

Para verificar se um certo subespaço $E \subseteq T_xM$, de dimensão $s \leq n$, é um elemento integral de $\mathcal{I}$, é suficiente verificar que as s-formas de $\mathcal{I}$ se anulam em E, i.e., que $\omega_x(v_1, \cdots, v_s) = 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{I}^{(s)}, \ \ \forall v_1, \cdots, v_s \in E$. Por outro lado, se conhecermos um conjunto de geradores de $\mathcal{I}$, é suficiente verificar que E é anulado pelos geradores de grau quando muito igual a s.

♣ Definição 2.7 ... *Seja* $\mathcal{I}$ *um ideal exterior. Define-se o* **rank de $\mathcal{I}$ num ponto** $x \in M$*, como sendo a dimensão* $r(x)$ *do subespaço de* T_x^*M *gerado por todas as* 1*-formas em* $\mathcal{I}$*:*

$$r(x) = \ dim \ \langle \omega_x \in T_x^*M : \ \ \omega \in \mathcal{I}^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}}$$

♣ Definição 2.8 ... *Um* **ideal diferencial** *é por definição um ideal exterior* $\mathcal{I}$ *que é* **fechado***, isto é, tal que:*

$$d\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$$

Quando $\mathcal{I}$ é finitamente gerado por $\{\omega^1, \cdots, \omega^r\}$, então o seu fecho $cl(\mathcal{I})$ (i.e., o ideal gerado por todas as formas em $\mathcal{I}$ e pelas respectivas derivadas exteriores), também é finitamente gerado, por $\{\omega^1, \cdots, \omega^r\}$ e por $\{d\omega^1, \cdots, d\omega^r\}$. Em particular $\mathcal{I}$ **é fechado** se e só se $\mathcal{I}$ contem a derivada exterior $d\omega^i$ de cada um dos seus geradores $\omega^1, \cdots, \omega^r$.

Particularmente importantes nas aplicações são os chamados **sistemas de Pfaff** $\mathcal{P}$, isto é, ideais diferenciais finitamente gerados por um conjunto $\{\omega^1, \cdots, \omega^r\}$ de 1-formas (ou formas de P em M. Um sistema de Pfaff $\mathcal{P}$ é fechado sse as derivadas exteriores das 1-formas geradoras pertencerem ao ideal $\mathcal{P}$, e portanto puderem ser escritas na forma:

$$d\omega^i = \sum_{j=1}^{r} \eta^i_j \wedge \omega^j, \qquad\qquad i = 1, \cdots, r$$

para certas 1-formas $\eta^i_j \in \Omega^1(M)$.

Analizemos agora a dualidade natural entre distribuições (no sentido de Frobenius (ver secção 1.9)) e ideais exteriores gerados por uma colecção de 1-formas.

Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de rank k em M. Consideremos o conjunto $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{(1)}$ de todas as 1-formas que se anulam em $\mathcal{D}$, isto é:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{(1)} = \{\omega \in \Omega^1(M) : \omega(X) = 0 \quad \forall X | in \Gamma(\mathcal{D})\,\}$$

e seja $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ o ideal gerado por $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{(1)}$. A $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ chamamos o **ideal dual à distribuição** $\mathcal{D}$. Se $\mathcal{D}$ é (localmente) gerado por k campos de vectores $X_1, \cdots, X_k \in \Gamma(\mathcal{D})$, que são linearmente independentes em cada ponto, então $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}^{(1)}$ será gerado por $n - k$ formas de grau 1,

$\omega^1 \cdots, \omega^{n-k}$, que são também linearmente independentes em cada ponto. Em particular o rank do ideal $\mathcal{I}_\mathcal{D}$ é igual ao corank de $\mathcal{D}$.

Recìprocamente, se $\mathcal{I}$ é um ideal exterior gerado por uma colecção de 1-formas, então a distribuição dual $\mathcal{D}_\mathcal{I}$ define-se como sendo a distribuição gerada por todos os campos de vectores que são anulados por todas as 1-formas diferenciais em $\mathcal{I}$. Portanto $X \in \Gamma(\mathcal{D})$ se e só se $\omega(X) = 0$, $\forall \omega \in \mathcal{I}^{(1)}$. A proposição) seguinte é clara:

♣ **Proposição 2.4** ... *Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição de rank k em M, e $\mathcal{I}_\mathcal{D}$ o ideal dual associado, de rank $n-k$. Uma subvariedade imersa $S \hookrightarrow M$ é uma variedade integral do ideal $\mathcal{I}_\mathcal{D}$ se e só se fôr uma variedade integral da distribuição $\mathcal{D}$.*

A condição análoga à condição de involução, é a de fecho do ideal dual:

♣ **Proposição 2.5** ... *Uma distribuição $\mathcal{D}$ de rank k em M é involutiva se e só se o respectivo ideal dual $\mathcal{I}_\mathcal{D}$ fôr fechado, i.e.:*

$$d\mathcal{I}_\mathcal{D} \subseteq \mathcal{I}_\mathcal{D}$$

e portanto fôr um ideal diferencial.

- Demonstração... Como $\mathcal{I}_\mathcal{D}$ é gerado por 1-formas, é suficiente verificar que $d\omega \in \mathcal{I}_\mathcal{D}$, $\forall \omega \in \mathcal{I}_\mathcal{D}^{(1)}$. A prova resulta agora imediatamente da identidade já conhecida:

$$d\omega(X,Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X,Y])$$

onde $\theta \in \Omega^1(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$\square$.

Podemos finalmente enunciar a segunda versão do Teorema de Frobenius:

♣ **Teorema 2.8 Teorema de Frobenius - 2.ª versão**... *Seja $\mathcal{I}$ um ideal exterior de rank $n-k$, gerado (localmente) por uma colecção de 1-formas $\{\omega^1, \cdots, \omega^{n-k}\}$, em M. Então $\mathcal{I}$ é k-integrável se e só se uma das seguintes condições equivalentes se verifica:*

- *$\mathcal{I}$ é um ideal diferencial.*
- $d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{n-k} = 0, \quad j = 1, \cdots, n-k$

Exemplo... Em $M = \mathbb{R}^3$ considere o ideal $\mathcal{I}$ gerado por uma 1-forma:

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

que nunca se anula em qualquer ponto. $\mathcal{I}$ será fechado sse $d\omega \in \mathcal{I}$, i.e., sse $d\omega = \eta \wedge \omega$ para algum $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. É fácil ver que esta condição é equivalente à seguinte $d\omega \wedge \omega = 0$, o que conduz à seguinte condição de integrabilidade:

$$P(R_y - Q_z) + Q(P_z - R_x) + R(Q_x - P_y) = 0$$

2.4.2 A Técnica do Gráfico de E. Cartan

Vamos agora discutir uma técnica, devida a E. Cartan, que nos permite, em determinadas circunstâncias, construir uma aplicação a partir do seu gráfico, quando este é uma variedade integral de um certo ideal diferencial. Esta **técnica do gráfico** tem importantes aplicações em geometria diferencial, como veremos por exemplo no capítulo sobre grupos de Lie, e ainda na secção 4.5.

Suponhamos então que $F : N \to M$ é uma aplicação C^∞, e que $\{\omega^i\}_{i\in I}$ é uma qualquer colecçãoÊde formas diferenciais em M. Representemos por:

$$\pi_N : N \times M \to N \qquad \text{e} \qquad \pi_M : N \times M \to M$$

as projecções naturais em N e M, respectivamente. Para cada $i \in I$, consideremos a forma diferencial em $N \times M$:

$$\eta^i = \pi_N^* F^* \omega^i - \pi_M^* \omega^i \quad \in \Omega(N \times M), \qquad i \in I \tag{2.4.2}$$

e seja $\mathcal{I}$ o ideal em $\Omega(N \times M)$, gerado pelas formas $\{\eta^i\}_{i\in I}$.

Por definição, o gráfico de $F : N \to M$ é a subvariedade de dimensão $n = \dim N$, em $N \times M$:

$$\mathbf{gr}\, F = \{(x, y) \in N \times M \,:\, y = F(x),\, x \in N\}$$

Consideremos a aplicação:

$$G : N \hookrightarrow N \times M, \qquad G : x \mapsto (x, F(x))$$

e demonstremos que o **gráfico de** $F : N \to M$ **é uma variedade integral do ideal** $\mathcal{I}$.

De facto, basta mostrar que $G^*\eta^i = 0$, $\forall i \in I$. Mas $\pi_N \circ G = \mathrm{Id}_N$ e $\pi_M \circ G = F$, e portanto:

$$\begin{aligned} G^*\eta^i &= G^*\left(\pi_N^* F^* \omega^i - \pi_M^* \omega^i\right) \\ &= (F \circ \pi_N \circ G)^* \omega^i - (\pi_M \circ G)^* \omega^i \\ &= F^*\omega^i - F^*\omega^i = 0, \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Resumindo: se começamos com uma aplicação $F : N \to M$ e uma qualquer colecçãoÊde formas em M, demonstramos que o gráfico de F é uma variedade integral de um certo ideal em $\Omega(N \times M)$.

Suponhamos agora que começamos com uma variedade M de dimensão m, e com um co-referencial $\{\omega^i \in \Omega^1(M),\, i = 1, \cdots, m\}$ em M, i.e., com um conjunto de m formas de grau 1 em M, linearmente independentes em cada ponto (estamos a supôr que um tal co-referencial existe, o que nem sempre acontece!...). Suponhamos que temos também uma variedade N de dimensão n e uma colecção de $m = \dim M$ formas de grau 1, $\{\alpha^i \in \Omega^1(N),\, i = 1, \cdots, m\}$ em N. O problema que se põe é o de **construir uma aplicação** $F : N \to M$**, tal que**:

$$F^*\omega^i = \alpha^i, \qquad i = 1, \cdots, m \tag{2.4.3}$$

Como vimos antes, se uma tal aplicação existe o seu gráfico será uma variedade integral de um certo ideal em $\Omega(N \times M)$. Por isso vamos tentar construir primeiro esse gráfico como variedade integral desse ideal. Para isso definimos 1-formas diferenciais em $N \times M$, pondo:

$$\eta^i = \pi_N^* \alpha^i - \pi_M^* \omega^i \quad \in \Omega(N \times M), \qquad i = 1, \cdots, m \tag{2.4.4}$$

e consideramos o ideal $\mathcal{I}$ em $\Omega(N \times M)$, gerado por essas formas. Vamos mostrar o seguinte teorema fundamental:

♣ **<u>Teorema</u> 2.9** ... *Seja M uma variedade de dimensão m e suponhamos que (existe) $\{\omega^i \in \Omega^1(M), i = 1, \cdots, m\}$ é um co-referencial em M. Considermos ainda uma variedade N de dimensão n e uma colecção de $m = dim M$ formas de grau 1, $\{\alpha^i \in \Omega^1(N), i = 1, \cdots, m\}$ em N.*

Se o ideal $\mathcal{I}$, em $\Omega(N \times M)$, gerado por:

$$\eta^i = \pi_N^* \alpha^i - \pi_M^* \omega^i \quad \in \Omega(N \times M), \qquad i = 1, \cdots, m \tag{2.4.5}$$

fôr um ideal diferencial, *então, para cada $x_o \in N$ e $y_o \in M$, existe uma vizinhança U de x_o em N, e uma aplicação $F : U \subseteq N \to M$, tal que $F(x_o) = y_o$) e:*

$$F^* \omega^i = \alpha^i\big|_U, \qquad i = 1, \cdots, m \tag{2.4.6}$$

- <u>Demonstração</u>...

  Supondo então que $\mathcal{I}$ é um ideal diferencial. Como $\mathcal{I}$ é gerado por m formas de grau 1 em $N \times M$, o Teorema de Frobenius garante que existe (localmente) uma única variedade integral $S \hookrightarrow N \times M$, conexa de dimensão $n = (n+m) - m$, que passa em $(x_o, y_o) \in N \times M$.

  Seja $s \in S$. **Vamos provar que** $d\pi_N|_{T_sS}$ **é injectiva**.

  De facto, suponhamos que $v \in T_sS$ e que $d\pi_N(v) = 0$. Como T_sS é elemento integral de $\mathcal{I}$, sabemos que $\eta^i_s(v) = 0$, e de (2.4.5) deduzimos que $\omega^i(d\pi_M(v)) = 0$, $\forall i$, e como os ω^i formam um co-referencial, $d\pi_M(v) = 0$ tambem, isto é $v = 0$, já que ambos $d\pi_N(v) = 0$ e $d\pi_M(v) = 0$. Portanto $d\pi_N|_{T_sS}$ é injectiva, e pelo teorema da inversão local $\pi_N|_S : S \to N$ é um difeomorfismo local. Existem pois vizinhanças V de (x_o, y_o) em S e U de x_o em N, tais que $\pi_N|_V : V \subseteq S \to U \subseteq N$ é um difeomorfismo. Definimos então $F : U \subseteq N \to M$ através de:

  $$F = \pi_M \circ (\pi_N|_V)^{-1} \tag{2.4.7}$$

  É claro que $F(x_o) = y_o$, que o gráfico de F é uma subavarieadae aberta de S e ainda que:

  $$F^* \omega^i = \alpha^i\big|_U, \qquad i = 1, \cdots, m$$

  De facto, se $v \in T_xN$, então por (2.4.5) vem que:

  $$\begin{aligned} 0 &= \eta^i \left(d\,(\pi_N|_V)^{-1}(v) \right) \\ &= \alpha^i(v) - \omega^i \left(d\pi_M \circ d\,(\pi_N|_V)^{-1}(v) \right) \\ &= \alpha^i(v) - F^*(\omega^i)(v) \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

  como se pretendia,

□.

2.5 Integração das Formas. Fórmula de Stokes

2.5.1 Integração de n-formas em $\mathbb{R}^n$

Se representamos por $x^1, \cdots, x^n$ as coordenadas cartesianas usuais em $\mathbb{R}^n$, então:

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

representa a forma volume de $\mathbb{R}^n$ associada ao produto interno usual e à orientação usual de $\mathbb{R}^n$.

Portanto se $\omega \in \Omega^n(U)$ é uma n-forma diferencial, definida e contínua num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, existe uma única função contínua $f : U \to \mathbb{R}$, tal que:

$$\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

em U. Se $A \subset U$ é um domínio de integração, põe-se por definição:

$$\begin{aligned} \int_A \omega &\stackrel{\text{def}}{=} \int_A f \\ &= \int_A f\, dx^1 \cdots dx^n \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Recordemos do curso de Análise a fórmula da mudança de variáveis em integrais múltiplos:

"Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de integração contido num aberto U de $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to \phi(U)$ um difeomorfismo sobre um aberto $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, e $f : \phi(A) \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $\phi(A)$ é um domínio de integração e:

$$\boxed{\int_{\phi(A)} f \;=\; \int_A (f \circ \phi)\, |\det \mathbf{Jac}\, \phi|} \tag{2.5.2}$$

Esta fórmula pode ser reformulada em termos de formas diferenciais. Vejamos para já uma proposição preliminar:

♣ **Proposição 2.6** ... *Seja $\phi : U \to \phi(U)$ um difeomorfismo do aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sobre o aberto $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, se $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ é uma n-forma diferencial contínua no aberto $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$:*

$$\begin{aligned} \phi^*(\omega) &= \phi^*(f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\ &= (f \circ \phi)(\det \mathbf{Jac}\, \phi)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

- Demonstração... Como $\phi^*(f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (f \circ \phi)\, \phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$, basta provar que:

$$\phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (\det \mathbf{Jac}\, \phi)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

Seja $p \in U$ e $A = (\mathbf{Jac}\,\phi)(p) = A^i_j$ a matriz Jacobiana de ϕ em p. Vem então que:

$$\begin{aligned}
\phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}) &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\Big(\phi_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big), \cdots, \phi_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^n}\Big)\Big) \\
&= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\Big(A^i_1 \frac{\partial}{\partial x^i}, \cdots, A^i_n \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) \\
&= \det(A^i_j)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n})
\end{aligned}$$

em virtude do teorema (2.2).

□

Portanto, se ω é uma n-forma diferencial contínua no aberto $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, e $A \subset U$ um domínio de integração contido em U, então a definição 2.5.1 e a fórmula (2.5.3) permitem reescrever a fórmula da mudança de variáveis (2.5.2), na forma:

$$\boxed{\int_{\phi(A)} \omega = \pm \int_A \phi^*\omega} \tag{2.5.4}$$

onde o sinal $+$ ocorre quando ϕ preserva orientação ($\det \mathbf{Jac}\,\phi > 0$), e o sinal $-$ ocorre quando ϕ inverte a orientação ($\det \mathbf{Jac}\,\phi < 0$).

2.5.2 Integração de formas em variedades

Seja ω uma n-forma diferencial numa variedade orientada M de dimensão n. Suponhamos que (U, φ) é uma carta local de M e que $\operatorname{supp}\omega \subset U$. Então podemos considerar a n-forma $\omega|_U$, que tem o mesmo suporte, e ainda $(\varphi^{-1})^*(\omega|_U)$ que tem suporte compacto em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

♣ **Definição 2.9** ... *Seja M uma variedade orientada de dimensão n e $\omega \in \Omega^n(M)$ uma n-forma com suporte compacto $\operatorname{supp}\omega \subset U$, onde (U, φ) é uma carta local de M positivamente orientada. Definimos então:*

$$\int_{(\varphi)} \omega \stackrel{def}{=} \int (\varphi^{-1})^*(\omega|_U) \tag{2.5.5}$$

♣ **Proposição 2.7** ... *Seja M uma variedade orientada de dimensão n e $\omega \in \Omega^n(M)$ uma n-forma com suporte compacto $\operatorname{supp}\omega \subset U \cap V$, onde $(U, \varphi), (V, \psi)$ são cartas locais de M positivamente orientadas. Então:*

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{(\psi)} \omega \tag{2.5.6}$$

- Demonstração... Pela fórmula da mudança de variáveis (2.5.4), vem que:

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int (\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = \int (\varphi \circ \psi^{-1})^*(\varphi^{-1})^*(\omega|_U) = \int (\psi^{-1})^*(\omega|_U) = \int_{(\psi)} \omega$$

□

Podemos portanto definir $\int \omega = \int_{(\varphi)} \omega$, quando (U, φ) é uma carta local de M positivamente orientada contendo o suporte de ω (se uma tal carta existir).

Mais geralmente, podemos definir $\int \omega$ quando ω tem suporte compacto. Antes porém recordemos o conceito de partição da unidade.

Recorde que uma variedade diferenciável M tem uma base numerável de abertos e portanto M é paracompacta o que implica a existência de partições da unidade:

♣ **Definição 2.10** ... *Uma* **"partição ÊC$^\infty$ da unidade"** *numa variedade diferenciável M, é uma colecção $\mathcal{P} = \{f_a\}_{a\in A}$ de funções em $C^\infty(M)$ tais que:*

- $0 \leq f_a \leq 1, \quad \forall a \in A.$
- *A colecção dos suportes das funções f_a:*

$$\mathcal{S} = \{supp\, f_a\}_{a\in A}$$

  *é localmente finita (*cada ponto $p \in M$ admite uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de membros de $\mathcal{S}$).
- $\sum_{a\in A} f_a = 1$

A partição $\mathcal{P} = \{f_a\}_{a\in A}$ diz-se **"subordinada"** *a uma cobertura aberta $\mathcal{C}$ de M, se cada suporte $supp\, f_a$ está contido em algum membro de $\mathcal{C}$.*

Recorde que o suporte de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ se define por:

$$supp\, f \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \overline{\{p \in M :\ f(p) \neq 0\}}$$

Note ainda que a soma $\sum_{a\in A} f_a$ está bem definida quando a colecção dos suportes $\mathcal{S} = \{supp\, f_a\}_{a\in A}$ é localmente finita, já que em alguma vizinhança de cada ponto de M, todas as funções f_a são nulas com a possível excepção de um número finito delas.

Partições ÊC$^\infty$ da unidade são um instrumento indispensável para definir globalmente objectos que têm à partida apenas uma definição local (ou para decompôr um objecto global numa "soma" de objectos locais). O resultado principal é o seguinte:

♣ **Teorema 2.10** ... *Seja M uma variedade diferenciável e $\mathcal{C}$ uma qualquer cobertura aberta de M. Então existe uma partição ÊC$^\infty$ da unidade $\mathcal{P} = \{f_a\}_{a\in A}$ subordinada à cobertura $\mathcal{C}$.*

Podemos agora definir $\int \omega$ quando ω tem suporte compacto.

♣ **Definição 2.11** ... *Seja M uma variedade orientada de dimensão n e $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ um atlas de cartas locais de M positivamente orientadas. Seja $P = \{f_a\}_{a\in A}$ uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{A}$. Então $f_a\omega$ tem suporte compacto contido em algum U_α. Definimos então:*

$$\boxed{\int_{(P)} \omega \quad \stackrel{def}{=} \quad \sum_a \int (f_a\omega)} \tag{2.5.7}$$

♣ **Proposição 2.8** ... (i). *A soma (2.5.7) contem apenas um número finito de termos não nulos, e portanto* $\int_{(P)} \omega \in \mathbb{R}$.

(ii). *Dado um qualquer outro atlas de cartas locais de M positivamente orientadas e uma correspondente partição Q da unidade subordinada, tem-se que* $\int_{(Q)} \omega\,\omega = \int_{(P)} \omega$.

Este valor comum nota-se por $\int \omega$, *e chama-se o integral de* $\omega \in \Omega_c^n(M)$.

- Demonstração... (i). Dado um qualquer $x \in M$, existe uma vizinhança U de x em M, tal que apenas um número finito de f_a são não nulos em U. Como $\operatorname{supp}\omega$ é compacto, podemos cobrir $\operatorname{supp}\omega$ por um número finito de tais vizinhanças. Portanto apenas um número finito de f_a são não nulos na reunião dessas vizinhanças U.

- (ii). Sejam $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ e $\mathcal{B} = \{V_\beta, \psi_\beta\}$ dois atlas pertencentes à estrutura diferenciável de M, com cartas positivamente orientadas, e $\{f_a\}_{a\in A}$, $\{g_b\}_{b\in B}$ partições da unidade subordinadas a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente. Então $\{U_\alpha \cap V_\beta\}$ constitui uma cobertura aberta de M, e $\{f_a g_b\}$ uma partição da unidade subordinada. As funções $\{f_a g_b\}$ satisfazem $f_a g_b(x) = 0$ excepto para um número finito de índices (a, b), e $\sum_a \sum_b f_a g_b(x) = 1$, $\forall x \in M$. Como $\sum_b g_b = 1$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_{(P)} \omega &= \sum_a \int f_a \omega \\
&= \sum_b \sum_a \int g_b f_a \omega \\
&= \sum_a \sum_b \int f_a g_b \omega \\
&= \int_{(Q)} \omega
\end{aligned}
$$

□

2.5.3 Variedades com bordo

Considere o **semi-espaço fechado superior** H_+^n em $\mathbb{R}^n$:

$$H_+^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}$$

O interior de H_+^n é:

$$\operatorname{Int} H_+^n = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$$

e o **bordo** de H_+^n é:

$$\partial H_+^n = H_+^n - \operatorname{Int} H_+^n = \{(x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}$$

É claro que H_+^n não é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$. No entanto, quer $\operatorname{Int} H_+^n$ quer ∂H_+^n são subvariedades de $\mathbb{R}^n$ de dimensões n e $n-1$, respectivamente.

Dado um aberto $U \subseteq H_+^n$ (i.e., $U = V \cap H_+^n$ para algum aberto V de $\mathbb{R}^n$), definimos o seu interior:

$$\mathrm{Int}\, U = U \cap \mathrm{Int}\, H_+^n$$

e o seu bordo:

$$\partial U = U \cap \partial H_+^n$$

Note que o bordo de U não é a fronteira de U (por exemplo, $U =]0,1[\times[0,1[\subset H_+^2$). No entanto, quer $\mathrm{Int}\, U$ quer ∂U são subvariedades de dimensões n e $n-1$, como abertos de $\mathrm{Int}\, H_+^n$ e ∂H_+^n, respectivamente.

♣ <u>**Definição**</u> **2.12** ... *Uma* **"variedade com bordo"** *(real) M de dimensão n, é um espaço Haussdorff com uma base numerável, que é localmente homeomorfo ao espaço H_+^n, i.e., cada ponto $p \in M$ admite uma vizinhança aberta $U \subseteq M$ homeomorfa a um aberto de H_+^n, através de um homeomorfismo $\varphi : U \to U' \subset H_+^n$, sobre um aberto U' de H_+^n.*

Exemplos ...

(i). $M = H_+^n$. Mais geralmente, qualquer aberto de H_+^n.

(ii). A bola fechada $B^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 \leq 1\}$. O hipercubo fechado $C^n = \{\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^i| \leq 1,\, i = 1, \cdots, n\}$.

(iii). A tira de Moebius $M = [-1,1]^2/_{\{(x,y)\sim(x,-y)\}}$.

(iv). O "cilindro" $M \times [0,1]$ onde M é uma variedade ordinária.

♣ <u>**Proposição**</u> **2.9** ... *Seja M uma variedade com bordo e $x \in M$. Sejam $\varphi : U \to U' \subset H_+^n$ e $\psi : V \to V' \subset H_+^n$ duas cartas locais de M, com U', V' abertos de H_+^n, tais que $x \in U' \cap V'$. Então:*

$$\varphi(x) \in \partial U' \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(x) \in \partial V'$$

Esta proposição permite dar sentido às seguintes definições:

♣ <u>**Definição**</u> **2.13** ... *Seja M uma variedade com bordo. Define-se o* **bordo de** *M como sendo o conjunto dos pontos $x \in M$ para os quais existe uma carta local $\varphi : U \to U' \subset H_+^n$, com $x \in U$ e $\varphi(x) \in \partial U'$. O* **interior de** *$M$ é:*

$$\mathrm{Int}\, M = M - \partial M$$

Exemplos ...

(i). $\partial B^n = \partial\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\|^2 \leq 1\} = SS^{n-1}$.

(ii). $\partial C^n = \partial\{\mathbf{x} = (x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^n : |x^i| \leq 1, i = 1, \cdots, n\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x^i| = \pm 1\}$.

(iii). O bordo da tira de Moebius $M = [-1,1]^2/_{\{(x,y)\sim(x,-y)\}}$ é homeomorfo ao círculo SS^1.

(iv). O bordo do "cilindro" $M \times [0,1]$, onde M é uma variedade ordinária, é $M \times \{0,1\}$.

(v). O bordo de uma variedade ordinária é vazio.

♣ **Proposição 2.10** ... *Seja M uma variedade com bordo, de dimensão n. Então $\operatorname{Int} M = M \ \partial M$ é uma variedade (ordinária, sem bordo) de dimensão n e ∂M é uma variedade (ordinária, sem bordo) de dimensão $n-1$.*

Seja $f : U \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação definida num aberto U de H_+^n. Diz-se que f é diferenciável (de classe C^∞) em $\mathbf{x} \in U$, se existir uma aplicação $g : V_\mathbf{x} \to \mathbb{R}^p$ de classe C^∞, definida num aberto $V_\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$, que é diferenciável em $\mathbf{x}$ e tal que $f|_{U\cap V_\mathbf{x}} = g|_{U\cap V_\mathbf{x}}$. Neste caso pômos por definição $df_\mathbf{x} = dg_\mathbf{x}$. É fácil ver que de facto esta definição faz sentido.

♣ **Definição 2.14** ... *Uma* **"estrutura diferenciável"** *(real) de classe C^∞ numa variedade com bordo M, de dimensão n, é um atlas maximal de cartas locais $\mathcal{F} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha \subseteq H_+^n\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, C^∞-compatíveis, isto é que satisfazem as condições seguintes:*

- $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$
- *Sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a função:*

$$\varphi_{\beta\alpha} \stackrel{def}{=} \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  é de classe C^∞.
- *A colecção $\mathcal{F}$ é maximal relativamente à condição anterior, i.e., se (U,φ) é uma carta local tal que $\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ e $\varphi_\alpha\circ\varphi^{-1}$ (quando definidas) são de classe C^∞, $\forall\alpha$, então $(U,\varphi) \in \mathcal{F}$.*

♣ **Definição 2.15** ... *Uma* **"Variedade diferenciável com bordo"** *de classe C^∞ é um par $(M,\mathcal{F})$ onde M é uma variedade com bordo, de dimensão n, munida de uma estrutura diferenciável (real) de classe C^∞, definida por um atlas maximal $\mathcal{F}$ em M.*

Se M é uma variedade diferenciável com bordo, então $\operatorname{Int} M$ e ∂M são variedades diferenciáveis ordinárias de dimensões n e $n-1$, respectivamente.

♣ **Proposição 2.11** ... *Seja M é uma variedade diferenciável orientável com bordo. Então ∂M é orientável.*

Demonstração...

- Observe que um difeomorfismo:

$$\phi = (\phi^1, \cdots, \phi^n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que $\phi(H^n_+) \subseteq H^n_+$ e $\phi(\mathbb{R}^{n-1}) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, onde $\mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, isto é, $\phi^n(x^1, \cdots, x^n) \geq 0$, sempre que $x^n \geq 0$, e $\phi^n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) = 0$, satisfaz, $\forall i : 1 \leq i \leq n-1$:

$$\frac{\partial \phi^n}{\partial x^i}(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) = 0$$

e:

$$\frac{\partial \phi^n}{\partial x^n}(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) > 0$$

$\forall (x^1, \cdots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Portanto o determinante da matriz Jacobiana de ϕ e o determinante da matriz Jacobiana da restrição de ϕ a $\mathbb{R}^{n-1}$ (ambos não nulos), têm o mesmo sinal em todo o ponto de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Concluímos então que, se todas as mudanças de cartas no atlas de M têm determinantes Jacobianos sempre positivos, o mesmo acontece para as cartas do atlas induzido em ∂M.

□

Para deduzir uma orientação para ∂M, a partir da orientação dada em M,é usual seguir a seguinte convenção: a forma volume usual em $\mathbb{R}^n$, $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, define a orientação em $\operatorname{Int} H^n_+$ e em H^n_+, mas usamos a forma:

$$(-1)^n dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$$

para definir uma orientação no bordo $\partial H^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Consideremos agora uma variedade diferenciável M, de dimensão n, orientável com bordo ∂M, e uma $(n-1)$-forma diferencial com suporte compacto:

$$\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$$

- Calculemos $d\omega \in \Omega^n_c(M)$, e integremos sobre M, obtendo:

$$\int_M d\omega$$

- Munindo ∂M com a orientação induzida, calculemos $i^*\omega \in \Omega^{n-1}_c(\partial M)$, onde $i : \partial M \hookrightarrow M$ é a inclusão canónica, e integremos sobre ∂M, para obter:

$$\int_{\partial M} i^*\omega$$

O facto essencial é que estes dois integrais coincidem!

♣ **Teorema 2.11 Teorema de Stokes**... *Nas condições atrás referidas tem-se que:*

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega} \tag{2.5.8}$$

Demonstração...

- Como os integrais foram definidos através de partições da unidade subordinadas a um atlas, e como ambos os membros de (2.5.8) são lineares em ω, podemos supôr, sem qualquer perda de generalidade, que $M = U \subseteq H^n_+$ é um aberto de H^n_+, e que $\omega \in \Omega^{n-1}_c(U)$.

- Neste caso $\partial U = U \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, e a inclusão $i : \partial U \hookrightarrow U$ é dada por:

$$i(y^1, \cdots, y^{n-1}) = (x^1, \cdots, x^{n-1}, 0)$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} i^*(dx^k) &= dy^k, \quad k = 1, \cdots, n-1 \\ i^*(dx^n) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, dada uma $(n-1)$-forma ω de suporte compacto em $M = U \subseteq H^n_+$:

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} f_k \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n \ \in \Omega^{n-1}_c(H^n_+)$$

tem-se que:

$$i^*(\omega) = g_n \, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n-1} \ \in \Omega^{n-1}_c(\partial H^n_+)$$

onde $g_n = i^* f_n$ é a função $g_n : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g_n(y^1, \cdots, y^{n-1}) = f_n(y^1, \cdots, y^{n-1}, 0)$$

e ainda:

$$d\omega = \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} \Big) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \ \in \Omega^n_c(U)$$

- O primeiro membro de (2.5.8) é então igual a:

$$\int_M d\omega = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} dx^1 \cdots dx^n \tag{2.5.9}$$

Temos agora dois casos para considerar: $\partial U = \emptyset$ ou $\partial U \neq \emptyset$.

  - Se $\partial U = \emptyset$, então $\int_{\partial U} i^*\omega = 0$. Por outro lado, integrando o k-termo da soma que ocorre no segundo membro de (2.5.9), obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} dx^k \Big) \, dx^1 \cdots \widehat{dx^k} \cdots dx^n$$

    e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x^k} dx^k = 0$ já que f_k tem suporte compacto. Portanto $\int_U d\omega = 0$ e o teorema está provado neste caso.

  - Se $\partial U \neq \emptyset$ podemos proceder como anteriormente para cada termo da soma que ocorre no segundo membro de (2.5.9) com excepção do último, que, em virtude do teorema fundamental do cálculo, é igual a:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^n \Big) \, dx^1 \cdots dx^{n-1} = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0) \, dx^1 \cdots dx^{n-1}$$

já que f_n tem suporte compacto. Portanto:

$$\int_U d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(x^1, \cdots, x^{n-1}, 0)\, dx^1 \cdots dx^{n-1}$$

Por outro lado:

$$\int_{\partial U} i^*\omega = \int_{\partial H^n_+} i^*\omega = \int_{\partial H^n_+} f_n(y^1, \cdots, y^{n-1}, 0) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n-1}$$

Como a orientação induzida no bordo é definida por $(-1)^n\, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n-1}$, vem finalmente que:

$$\begin{aligned}\int_{\partial U} i^*\omega &= \int_{\partial H^n_+} i^*\omega = \int_{\partial H^n_+} f_n(y^1, \cdots, y^{n-1}, 0) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_n(y^1, \cdots, y^{n-1}, 0) dy^1 \cdots dy^{n-1}\end{aligned}$$

□

Note que quando $\partial M = \emptyset$, o teorema de Stokes afirma que:

$$\boxed{\int_M d\omega = 0, \qquad \forall \omega \in \Omega^{n-1}_c(M) \qquad \partial M = \emptyset}$$

♣ <u>Teorema</u> **2.12 Teorema de Gauss**... *Seja M uma variedade diferenciável, de dimensão n, orientável com bordo ∂M, e $X \in \mathfrak{X}_c(M)$ um campo de vectores em M com suporte compacto. Seja $\mu \in \Omega^n(M)$ uma forma volume em M. Então:*

$$\boxed{\int_M (\mathbf{div}\, X)\, \mu = \int_{\partial M} i_X \mu} \tag{2.5.10}$$

<u>Demonstração</u>...

- Aplique a fórmula de Cartan e a definição de $\mathbf{div}\, X$:

$$(\mathbf{div}\, X)\mu = \mathcal{L}_X \mu = d i_X \mu + i_X d\mu = d i_X \mu$$

  e agora o Teorema de Stokes.

□

2.6 Aplicações

2.6.1 Homotopia. Aplicações

Seja M uma variedade e:

$$\begin{aligned} \iota_t : \quad M &\longrightarrow [0,1] \times M \\ x &\longmapsto \iota_t(x) = (t, x) \end{aligned}$$

Definamos uma aplicação $H : \Omega^{k+1}([0,1] \times M) \to \Omega^k(M)$, chamada **operador de homotopia**, através de:

$$\boxed{(H\omega)(X_1, \cdots, X_k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 (\iota_t^* i_{\partial/\partial t}\omega)(X_1, \cdots, X_k)\, dt} \tag{2.6.1}$$

É possível mostrar que:

$$\boxed{d \circ H + H \circ d = \iota_1^* - \iota_0^*} \tag{2.6.2}$$

Duas aplicações $f, g : M \to N$ dizem-se C^∞-homotópicas se existe uma aplicação C^∞, $F : [0,1] \times M \to N$, tal que $F(0, \cdot) = f$ e $F(1, \cdot) = g$. Neste caso tem-se que:

$$\boxed{g^*\omega - f^*\omega \in \Omega^k(M) \quad \text{é exacta} \quad \forall \omega \in \Omega^k(N) \;\; \text{fechada}} \tag{2.6.3}$$

De facto, $G = H \circ F^*$, onde H é o operador de homotopia definido por (2.6.1), satisfaz:

$$d \circ G + G \circ d = g^* - f^*$$

Portanto se $\omega \in \Omega^k(N)$ é fechada, $d\omega = 0$ e:

$$g^*\omega - f^*\omega = d \circ G\omega + G \circ d\omega = d(G\omega)$$

Podemos agora deduzir o chamado Lema de Poincaré:

♣ **Teorema 2.13 Lema de Poincaré**... *Se M é contráctil então toda a forma fechada é exacta.*

- Demonstração... A aplicação Id em M é homotópica a uma aplicação constante $c : M \to M$ que envia M num ponto, $c(x) = x_0$. Logo por (2.6.3), se $\omega \in \Omega^k(N)$ é fechada, $\text{Id}^*\omega - c^*\omega = \omega$ é exacta.

□

♣ **Proposição 2.12** ... *Sejam M e N duas variedades orientadas de dimensão N e $\omega \in \Omega_c^n(N)$ uma n-forma em N com suporte compacto. Se $f, g : M \to N$ são duas aplicações próprias C^∞-homotópicas, então:*

$$\int_M f^*\omega = \int_M g^*\omega \tag{2.6.4}$$

- Demonstração... Como $g^*\omega - f^*\omega \in \Omega^n(M)$ é exacta, $g^*\omega - f^*\omega = d\eta$ para alguma $\eta \in \omega^{n-1}(M)$, que tem também suporte compacto já que f e g são próprias. Portanto, pelo Teorema de Stokes:

$$\int_M f^*\omega - \int_M g^*\omega = \int_M d\eta = 0$$

□

♣ **Proposição 2.13** ... *Todo o campo de vectores* $X \in \mathfrak{X}(SS^{2n})$*, de classe* C^∞ *numa esfera de dimensão par, tem pelo menos um zero.*

- Demonstração... Supondo que X nunca se anula podemos definir uma aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \phi : SS^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} & \longrightarrow & SS^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \phi(\mathbf{x}) = \frac{X(\mathbf{x})}{\|X(\mathbf{x})\|} \end{array}$$

A aplicação:

$$\begin{array}{rcl} F : [0,1] \times SS^{2n} & \longrightarrow & SS^{2n} \\ (t, \mathbf{x}) & \longmapsto & F(t, \mathbf{x}) = (\cos \pi t)\, \mathbf{x} + (\sin \pi t)\, \phi(\mathbf{x}) \end{array}$$

é uma homotopia entre a identidade Id e a aplicação antípoda $A : SS^{2n} \to SS^{2n}$, $\mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$. Com efeito $F(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e $F(1, \mathbf{x}) = -x$, $\forall \mathbf{x} \in SS^{2n}$. Portanto, pela proposição anterior:

$$\int_{SS^{2n}} \omega = \int_{SS^{2n}} A^*\omega \qquad \forall \omega \in \Omega^{2n}(SS^{2n})$$

No entanto o Jacobiano de A é -1, já que a esfera tem dimensão par por hipótese, e portanto $\int_{SS^{2n}} A^*\omega = -\int_{SS^{2n}} \omega$, isto é, $\int_{SS^{2n}} \omega = 0$, $\forall \omega \in \Omega^{2n}(SS^{2n})$, o que é absurdo.

□

♣ **Proposição 2.14** ... **Teorema do ponto fixo de Brouwer**... *Todo a aplicação* C^∞ *da bola fechada* $B^n \subset \mathbb{R}^n$ *em si própria tem pelo menos um ponto fixo.*

- Demonstração... Se $f : B^n \to B^n$ não tem pontos fixos, $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in B^n$, e podemos definir $g(\mathbf{x}) \in SS^{n-1} = \partial B^n$, como sendo igual à intersecção da recta que une os pontos $\mathbf{x}$ e $f(\mathbf{x})$, com $SS^{n-1} = \partial B^n$. Temos então que $g : B^n \to SS^{n-1}$ é C^∞ e $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in SS^{n-1}$. Se $n = 1$, teríamos uma aplicação $g : [-1, 1] \to \{-1, 1\}$, com $g(-1) = -1$ e $g(1) = 1$, o que é absurdo. Se $n \geq 2$, definamos uma homotopia:

$$\begin{array}{rcl} F : [0,1] \times SS^{n-1} & \longrightarrow & SS^{n-1} \\ (t, \mathbf{x}) & \longmapsto & F(t, \mathbf{x}) = g(t\mathbf{x}) \end{array}$$

Portanto F é uma homotopia entre a aplicação constante $c : SS^{n-1} \to SS^{n-1}$, $c(\mathbf{x}) = g(\mathbf{0})$, e aplicação identidade Id em SS^{n-1}. Mas é claro que $c^*\omega = 0$, $\forall \omega \in \Omega^{n-1}(SS^{n-1})$, e portanto:

$$\int_{SS^{n-1}} \omega = \int_{SS^{n-1}} c^*\omega = 0, \qquad \forall \omega \in \Omega^{n-1}(SS^{n-1})$$

o que é absurdo.

□

Capítulo 3

Grupos e Álgebras de Lie. Grupos Clássicos.

3.1 Grupos de Lie. Grupos Clássicos

3.1.1 Primeiros exemplos

Uma fonte enorme de exemplos de variedades diferenciáveis é fornecida pelos chamados grupos de Lie. Vamos estudar as correspondentes noções básicas, com especial incidência nos chamados grupos clássicos de matrizes.

♣ **Definição 3.1** ... *Um* **"Grupo de Lie"** *é um grupo G com uma estrutura de variedade diferenciável para a qual as operações de grupo:*

$$\begin{array}{ccc} G\times G\to G & \quad e \quad & G\to G \\ (g,h)\mapsto gh & & g\mapsto g^{-1} \end{array}$$

são de classe C^∞.

Exemplos ...

- $G\ell(n,\mathbb{R})$, o grupo linear geral sobre $\mathbb{R}$, é constituído por todas as matrizes não singulares de entradas reais, e pode ser identificado com o grupo de todos os automorfismos $\mathbb{R}$-lineares de $\mathbb{R}^n$.

  O conjunto $\mathfrak{g}\ell(n,\mathbb{R})$ de todas as matrizes $n\times n$, com entradas reais, será identificado com $\mathbb{R}^{n^2}$ com a topologia usual. Como $\det:\mathfrak{g}\ell(n,\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ é contínua, $G\ell(n,\mathbb{R})=\det^{-1}(\mathbb{R}-\{\mathbf{0}\})$ é aberto em $\mathfrak{g}\ell(n,\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{n^2}$ e é portanto uma variedade de dimensão n^2. Como as operações de grupo em $G\ell(n,\mathbb{R})$ são dadas por funções polinomiais e racionais (regra de Cramer) das entradas, é evidente que $G\ell(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

- $G\ell(n,\mathbb{C})$, o grupo linear geral sobre $\mathbb{C}$, é constituído por todas as matrizes não singulares de entradas complexas, pode ser identificado com o grupo de todos os automorfismos $\mathbb{C}$-lineares de $\mathbb{C}^n$, e é também um grupo de Lie (real) de dimensão $2n^2$.

  Como veremos em breve, cada matriz $M \in G\ell(n,\mathbb{C})$ pode ser representada na forma $M = A + iB$, com A e B matrizes reais $n \times n$. É útil por vezes identificar $G\ell(n,\mathbb{C})$ com o subgrupo de $G\ell(2n,\mathbb{R})$ constituído pelas matrizes que são da forma:

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \tag{3.1.1}$$

  A esta representação chama-se a **representação real** de $G\ell(n,\mathbb{C})$.

- $G\ell(n,\mathbb{H})$, o grupo linear geral sobre $\mathbb{H}$, é constituído por todas as matrizes não singulares de entradas quaterniónicas, e pode ser identificado com o grupo de todos os automorfismos $\mathbb{H}$-lineares de $\mathbb{H}^n$, e é também um grupo de Lie (real) de dimensão $4n^2$.

  Como veremos em breve, cada matriz $M \in G\ell(n,\mathbb{H})$ pode ser representada na forma $M = A + \mathbf{j}\, B$, com A e B matrizes complexas $n \times n$. É útil por vezes identificar $G\ell(n,\mathbb{H})$ com o subgrupo de $G\ell(2n,\mathbb{C})$ constituído pelas matrizes que são da forma:

$$\begin{bmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{bmatrix} \tag{3.1.2}$$

Neste momento é conveniente recordar alguns conceitos de álgebra linear, com o objectivo de construir mais exemplos interessantes de grupos de Lie.

3.1.2 Estruturas Complexas

Uma estrutura complexa $\mathbf{J}$ num espaço vectorial real V, de dimensão par $n = 2m$, é um endomorfismo $\mathbb{R}$-linear:

$$\mathbf{J} : V \to V \qquad \text{tal que} \qquad \mathbf{J}^2 = -\mathrm{Id}_V \tag{3.1.3}$$

Quando existe um tal endomorfismo em V, é possível munir V de uma estrutura de espaço vectorial complexo, notado por $V_{\mathbf{J}}$, definindo a multiplicação por escalares complexos da seguinte forma:

$$\boxed{(a+ib)\mathbf{v} \overset{\text{def}}{=} a\mathbf{v} + b\,\mathbf{J}(\mathbf{v}) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{v} \in V} \tag{3.1.4}$$

Recìprocamente, dado um qualquer espaço vectorial complexo W, de dimensão complexa n, então $\mathbf{J}\mathbf{w} = i\mathbf{w}$ define uma estrutura complexa no espaço vectorial real $W_{\mathbb{R}}$, de dimensão real $2n$. Se $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base complexa para W, então $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n, \mathbf{J}\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{J}\mathbf{e}_n\}$ é uma base real para $W_{\mathbb{R}}$.

Por exemplo, se identificamos $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$ através de $z = x + iy \mapsto (x, y)$, então a estrutura complexa induzida em $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$\mathbf{J}(x, y) = (-y, x)$$

portanto $\mathbb{R}^2_{\mathbf{J}} \cong \mathbb{C}$. Em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mais geralmente, se identificamos $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$ através de $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}$, então a estrutura complexa induzida em $\mathbb{R}^{2n}$ é dada por:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

portanto $\mathbb{R}^{2n}_{\mathbf{J}} \cong \mathbb{C}^n$. Em relação à base canónica de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Se $(V, \mathbf{J})$ e $(V', \mathbf{J}')$ são dois espaços vectoriais reais com estruturas complexas, uma aplicação $\mathbb{R}$-linear $\varphi : V \to V'$ é complexa (quando vista como uma aplicação $\varphi : V_{\mathbf{J}} \to V'_{\mathbf{J}'}$) sse:

$$\mathbf{J}' \circ \varphi = \varphi \circ \mathbf{J}$$

Em particular o grupo linear geral complexo $G\ell(n, \mathbb{C})$ pode ser identificado com o subgrupo do grupo linear geral real $G\ell(2n, \mathbb{R})$, que consiste das matrizes que comutam com $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Esta representação de $G\ell(n, \mathbb{C})$ em $G\ell(2n, \mathbb{R})$, diz-se a **"representação real"** de $G\ell(n, \mathbb{C})$ e é dada por:

$$A + iB \mapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

onde A e B são matrizes reais $n \times n$.

3.1.3 Quaterniões

Recordemos agora algumas noções sobre o corpo $\mathbb{H}$ (não comutativo) dos quaterniões. Por definição $\mathbb{H}$ é a álgebra real associativa gerada por:

$$\mathbf{1} \quad \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \equiv \mathbf{ij}$$

submetida às relações:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$
$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$$

Dado um quaternião:

$$h = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \tag{3.1.6}$$

definimos:

- a **"parte real"** $\text{Re}(h) = a$ e a **"parte imaginária"** $\text{Im}(h) = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.
- o **"conjugado"** de h:
$$\overline{h} \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$
- a **"norma"** de h:
$$N(h) = h\overline{h} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

É fácil ver que:
$$N(hh') = N(h)N(h') \qquad \forall h, h' \in \mathbb{H} \tag{3.1.7}$$
e que $(\mathbb{H}, N)$ é linearmente isométrico a $(\mathbb{R}^4, \|\cdot\|^2)$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclideana usual em $\mathbb{R}^4$. Além disso, $\mathbb{H}$ é um corpo não comutativo. Todo o $h \in \mathbb{H} - \{\mathbf{0}\}$ tem um inverso dado por $h^{-1} = \frac{\overline{h}}{N(h)}$.

O espaço $\mathbb{H}^n$ dos vectores-coluna $\mathbf{u}$, de entradas quaterniónicas, será considerado como um espaço vectorial sobre $\mathbb{H}$, onde os escalares $h \in \mathbb{H}$ actuam por multiplicação à direita. Esta convenção garante que a multiplicação à esquerda por matrizes A, $n \times n$ de entradas quaterniónicas, é um endomorfismo $\mathbb{H}$-linear de $\mathbb{H}^n$, i.e.:
$$A(\mathbf{u}\,h) = (A\mathbf{u})\,h \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H}, \quad \forall h \in \mathbb{H}$$

• Existem muitas estruturas complexas em $\mathbb{H}^n$. De facto, (usando a isometria já referida $(\mathbb{H}, N) \cong (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|^2)$) seja $\text{Im}\,\mathbb{H}$ o hiperplano de $\mathbb{H}$ perpendicular a $\mathbf{1}$, e seja $SS^2 \subset \text{Im}\,\mathbb{H}$ a esfera unitária nesse hiperplano. Então para cada $h \in SS^2 \subset \text{Im}\,\mathbb{H}$ temos que:
$$h^2 = -h\overline{h} = -N(h) = -\mathbf{1}$$
e portanto multiplicação à direita por h, define uma estrutura complexa $\mathbf{J}_h$ em $\mathbb{H}^n$, através de:
$$\mathbf{J}_h(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}\,h \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H}^n \qquad h \in SS^2 \subset \text{Im}\,\mathbb{H} \tag{3.1.8}$$
isto é $\mathbf{J}_h^2 = -\text{Id}$ em $\mathbb{H}^n$. A correspondente estrutura complexa em $\mathbb{H}^n$ é definida por (3.1.4), i.e.:
$$\begin{aligned} (a+ib)\mathbf{u} &\stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u} + b\,\mathbf{J}_h\,\mathbf{u} \\ &= a\mathbf{u} + b\mathbf{u}\,h \qquad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por exemplo, se consideramos a estrutura complexa $\mathbf{J}_\mathbf{i}$ em $\mathbb{H}$ (multiplicação à direita por $\mathbf{i}$ em $\mathbb{H}$):
$$(a+ib)u = au + bu\,\mathbf{i} \qquad (a+ib) \in \mathbb{C} \qquad u \in \mathbb{H}$$
então $(\mathbb{H}, \mathbf{J}_\mathbf{i})$ é $\mathbb{C}$-isomorfo a $\mathbb{C}^2$ através da aplicação que a cada $h \in \mathbb{H}$, escrito na forma $h = z + \mathbf{j}\,w$, com $z, w \in \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$, associa $(z, w) \in \mathbb{C}^2$:
$$h = z + \mathbf{j}\,w \in \mathbb{H} \;\; \mapsto \;\; (z, w) \in \mathbb{C}^2 \tag{3.1.9}$$

(note que consideramos $\mathbb{C}$ mergulhado em $\mathbb{H}$, através de $(a+ib) \hookrightarrow a+b\mathbf{i}$). Portanto se $m = a + \mathbf{j}\, b \in \mathbb{H}$, $a, b \in \mathbb{C}$ é visto como o endomorfismo $\mathbb{H}$-linear de $\mathbb{H}$ dado por $h \in \mathbb{H} \mapsto m\, h$, então como:

$$m\, h = (a+\mathbf{j}\, b)(z+\mathbf{j}\, w) = az + a\mathbf{j}\, w + \mathbf{j}\, bz + \mathbf{j}\, b\mathbf{j}\, w = (az - \bar{b}w) + \mathbf{j}\,(\bar{a}w + bz)$$

vemos que esse endomorfismo corresponde ao endomorfismo de $\mathbb{C}^2$ dado pela matriz:

$$m = a + \mathbf{j}\, b \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{bmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H} \tag{3.1.10}$$

Nesta representação de $\mathbb{H}$ temos que:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

o conjugado de h é $\overline{h} = h^\dagger = \overline{h}^t$, a norma de h é $N(h) = hh^\dagger = h\overline{h}^t = (\det h)\, \mathbf{1}$. Os quaterniões de norma unitária, formam o grupo $SU(2) = Sp(1)$:

$$Sp(1) = SU(2) = \{ \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} : |z|^2 + |w|^2 = 1 \}$$

As considerações anteriores podem ser generalizadas ao $\mathbb{H}$-espaço $\mathbb{H}^n$ dos vectores-coluna $\mathbf{u}$, de entradas quaterniónicas (recorde que os escalares $h \in \mathbb{H}$ actuam à direita). A identificação $\mathbb{H} \cong \mathbb{C}^2$ dada por (3.1.9), induz uma identificação $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{2n}$, escrita em forma vectorial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{j}\, \mathbf{w} \in \mathbb{H}^n \quad \mapsto \quad (\mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \tag{3.1.11}$$

Um $\mathbb{H}$-endomorfismo representado por uma matriz $M \in End_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ quaterniónica pode ser escrita na forma:

$$M = A + \mathbf{j}\, B \qquad \text{onde} \quad A, B \in End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$$

e como:

$$(A+\mathbf{j}\, B)(\mathbf{z}+\mathbf{j}\, \mathbf{w}) = A\mathbf{z} + A\mathbf{j}\, \mathbf{w} + \mathbf{j}\, B\, \mathbf{z} + \mathbf{j}\, B\, \mathbf{j}\, \mathbf{w} = (A\mathbf{z} - \overline{B}\mathbf{w}) + \mathbf{j}(\,\overline{A}\mathbf{w} + \, B\mathbf{z})$$

vemos que, em termos da identificação (3.1.11):

$$A + \mathbf{j}\, B \in End_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} A & -\overline{B} \\ B & \overline{A} \end{bmatrix} \in End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}) \tag{3.1.12}$$

3.1.4 Espaços com produto interno (V,β). Grupos ortogonais $\mathcal{O}(V,\beta)$

No que se segue V indica um espaço vectorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbf{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Consideremos uma **"forma biaditiva"**:

$$\beta : V \times V \to \mathbf{K}$$

em V, i.e., $\beta(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) = \beta(\mathbf{u},\mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v},\mathbf{w})$ e $\beta(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \beta(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u},\mathbf{w})$. Nestas condições, β diz-se:

- **"$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-bilinear"** se $\beta(\lambda\mathbf{v},\mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v},\lambda\mathbf{w}) = \lambda\beta(\mathbf{v},\mathbf{w})$.
- **"$\mathbb{C}$-sesquilinear"** se $\beta(\lambda\mathbf{v},\mathbf{w}) = \overline{\lambda}\beta(\mathbf{v},\mathbf{w})$ e $\beta(\mathbf{v},\lambda\mathbf{w}) = \lambda\beta(\mathbf{v},\mathbf{w})$.
- **"$\mathbb{H}$-sesquilinear"** se $\beta(\mathbf{v}\,h,\mathbf{w}) = \overline{h}\beta(\mathbf{v},\mathbf{w})$ e $\beta(\mathbf{v},\mathbf{w}\,h) = \beta(\mathbf{v},\mathbf{w})h \quad \forall h \in \mathbb{H}$.
- **"simétrica"** se $\beta(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \beta(\mathbf{w},\mathbf{v})$.
- **"anti-simétrica"** se $\beta(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\beta(\mathbf{w},\mathbf{v})$.
- **"$\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$-hermitiana"** se $\beta(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \overline{\beta(\mathbf{w},\mathbf{v})}$.
- **"$\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$-anti-hermitiana"** se $\beta(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\overline{\beta(\mathbf{w},\mathbf{v})}$.
- **"não degenerada"** se $\beta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0, \forall\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\beta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0, \forall\mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

♣ **Definição 3.2** ... *Um* **"espaço com um produto interno"** *é um par* (V,β) *onde* V *é um* $\mathbf{K}$*-espaço vectorial de dimensão finita, e* β *é uma forma biaditiva não degenerada em* V*, bilinear ou sesquilinear, e que é (anti-) simétrica ou (anti-) hermitiana.*

Um $\mathbf{K}$*-automorfismo* $\varphi : V \to V$*, diz-se uma* **"isometria"** *de* (V,β) *se:*

$$\beta(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v})) = \beta(\mathbf{u},\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V \tag{3.1.13}$$

As isometrias de (V,β) *constituem um grupo, dito o* **"grupo ortogonal"** *de* (V,β)*, e nota-se por* $\mathcal{O}_\beta(V)$ *ou por* $\mathcal{O}(V,\beta)$*.*

Consideramos agora os seguintes tipos de produto interno β, os respectivos "espaços-modelo" e os correspondentes grupos ortogonais:

- **Produto interno** β: **$\mathbb{R}$-bilinear simétrico**.

  Espaço-modelo: $\mathbb{R}^n_{(p,q)}$ (p+q=n), com o produto interno (pseudo-euclideano de assinatura (p,q)):

$$\begin{aligned}\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= x^1y^1 + \cdots + x^py^p - x^{p+1}y^{p+1} - \cdots - x^ny^n \\ &= \mathbf{x}^t \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix} \mathbf{y}\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

  Grupo Ortogonal: $\mathcal{O}_\beta(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(p,q)$ - o grupo ortogonal real em dimensão $n = p+q$ e assinatura (p,q). É um subgrupo de $G\ell(n,\mathbb{R})$.

- **Produto interno β: $\mathbb{R}$-bilinear anti-simétrico, ou $\mathbb{R}$-simplético.**

  Espaço-modelo: $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, com o produto interno (forma simplética):

$$\begin{aligned} \beta((\mathbf{x},\mathbf{y}),(\mathbf{x}',\mathbf{y}')) &= x^1 y'^1 - y^1 x'^1 + \cdots + x^n y'^n - y^n x'^n \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

  Grupo Ortogonal: $\mathcal{O}_\beta(V) \stackrel{\text{def}}{=} Sp(2n,\mathbb{R})$ - o grupo simplético real em dimensão $2n$. É um subgrupo de $G\ell(2n,\mathbb{R})$.

- **Produto interno β: $\mathbb{C}$-bilinear simétrico.**

  Espaço-modelo: $\mathbb{C}^n$, com o produto interno:

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{z},\mathbf{w}) &= z^1 w^1 + \cdots + z^n w^n \\ &= \mathbf{z}^t\, \mathbf{1}_n\, \mathbf{w} \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

  Grupo Ortogonal: $\mathcal{O}_\beta(V) \stackrel{\text{def}}{=} O(n,\mathbb{C})$ - o grupo ortogonal complexo em dimensão n. É um subgrupo de $G\ell(n,\mathbb{C})$.

- **Produto interno β: $\mathbb{C}$-bilinear anti-simétrico, ou $\mathbb{C}$-simplético.**

  Espaço-modelo: $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, com o produto interno (forma simplética):

$$\begin{aligned} \beta((\mathbf{z},\mathbf{w}),(\mathbf{z}',\mathbf{w}')) &= z^1 w'^1 - w^1 z'^1 + \cdots + z^n w'^n - w^n z'^n \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}' \\ \mathbf{w}' \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

  Grupo Ortogonal: $\mathcal{O}_\beta(V) \stackrel{\text{def}}{=} Sp(2n,\mathbb{C})$ - o grupo simplético complexo em dimensão $2n$. É um subgrupo de $G\ell(2n,\mathbb{C})$.

- **Produto interno β: $\mathbb{C}$-sesquilinear hermitiano.**

  Espaço-modelo: $\mathbb{C}^n_{(p,q)}$ (p+q=n), com o produto interno:

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{z},\mathbf{w}) &= \overline{z}^1 w^1 + \cdots + \overline{z}^p w^p - \overline{z}^{p+1} w^{p+1} - \cdots - \overline{z}^n w^n \\ &= \mathbf{z}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix} \mathbf{w} \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

  onde $\mathbf{z}^\dagger = \overline{\mathbf{z}}^t$.

  Grupo Ortogonal: $\mathcal{O}_\beta(V) \stackrel{\text{def}}{=} U(p,q)$ - o grupo unitário complexo em dimensão n e assinatura (p,q), com $(p+q=n)$. É um subgrupo de $G\ell(n,\mathbb{C})$.

- **Produto interno β: $\mathbb{H}$-sesquilinear hermitiano.**

Espaço-modelo: $\mathbb{H}^n_{(p,q)}$ (p+q=n), com o produto interno:

$$\begin{aligned}\beta(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \overline{u}^1 v^1 + \cdots + \overline{u}^p v^p - \overline{u}^{p+1} v^{p+1} - \cdots - \overline{u}^n v^n \\ &= \mathbf{u}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_q \end{bmatrix} \mathbf{v} \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

onde $\mathbf{u}^\dagger = \overline{\mathbf{u}}^t$, e $\overline{u}$ representa conjugação quaterniónica.

Grupo Ortogonal: $\mathcal{O}_\beta(V) \stackrel{\text{def}}{=} Sp(p,q)$ ou $HU(p,q)$ - o grupo simplético ou grupo hiper-unitário com assinatura (p,q). É um subgrupo de $G\ell(n,\mathbb{H})$ onde $n = p+q$.

♣ <u>**Exercício**</u> **3.1** ... *Seja β um produto interno $\mathbb{C}$-sesquilinear hermitiano (com assinatura (p,q)), num espaço vectorial complexo $V_\mathbf{J} = (V,\mathbf{J})$ com estrutura complexa $\mathbf{J}$.*

(i). Mostre que a parte real $g = Re\,\beta$ é um produto interno $\mathbb{R}$-simétrico (com assinatura $(2p,2q)$), e que $\omega = -Im\,\beta$ é um produto interno $\mathbb{R}$-simplético em V.

(ii). Mostre que:

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega(\mathbf{J}\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad e \qquad \omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = g(\mathbf{J}\mathbf{x},\mathbf{y}) \tag{3.1.20}$$

e ainda que $\mathbf{J}$ é uma isometria de g e ω:

$$g(\mathbf{J}\mathbf{x},\mathbf{J}\mathbf{y}) = g(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad e \qquad \omega(\mathbf{J}\mathbf{x},\mathbf{J}\mathbf{y}) = \omega(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

$\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V$.

(iii). Calcule explìcitamente g e ω quando β é o produto interno modelo (3.1.18), e deduza que:

$$G\ell(n,\mathbb{C}) \cap Sp(n,\mathbb{C}) = O(2p,2q) \cap Sp(n,\mathbb{C}) = G\ell(n,\mathbb{C}) \cap O(2p,2q) = U(p,q) \tag{3.1.21}$$

♣ <u>**Exercício**</u> **3.2** ... *Seja β um produto interno $\mathbb{C}$-sesquilinear hermitiano (com assinatura (p,q)), num espaço vectorial quaterniónico V (os escalares actuam à direita). Seja:*

$$\beta = \mu + \mathbf{j}\,\sigma$$

a decomposição usual, onde μ e σ tomam valores em $\mathbb{C}$.

(i). Mostre que μ é um produto interno $\mathbb{C}$-sesquilinear hermitiano, e que σ é um produto interno $\mathbb{C}$-simplético em V.

(ii). Mostre que:

$$\mu(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \overline{\sigma(\mathbf{u},\mathbf{v}\,\mathbf{j})} \qquad e \qquad \sigma(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\overline{\mu(\mathbf{u},\mathbf{v}\,\mathbf{j})} \tag{3.1.22}$$

e ainda que:

$$\mu(\mathbf{u}\,\mathbf{j},\mathbf{v}\,\mathbf{j}) = \overline{\mu(\mathbf{u},\mathbf{v})} \qquad e \qquad \sigma(\mathbf{u}\,\mathbf{j},\mathbf{v}\,\mathbf{j}) = \overline{\sigma(\mathbf{u},\mathbf{v})}$$

$\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V$.

(iii). Calcule explìcitamente μ e σ quando β é o produto interno modelo (3.1.19), e deduza que:

$$G\ell(n,\mathbb{H}) \cap Sp(n,\mathbb{C}) = U(2p,2q) \cap Sp(n,\mathbb{C}) = G\ell(n,\mathbb{H}) \cap U(2p,2q) = HU(p,q) = Sp(p,q) \tag{3.1.23}$$

Dado um espaço com produto interno (V,β), o facto de β ser uma forma bilinear (ou sesquilinear) não degenerada implica a existência de um $\mathbb{R}$-isomorfismo "bemol"([1]):

$$\flat : V \longrightarrow V^* \qquad \mathbf{x} \in V \mapsto \mathbf{x}^\flat \in V^* \tag{3.1.24}$$

dado por:

$$\mathbf{x} \in V \quad \mapsto \quad \flat(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{x}^\flat \in V^* \quad \text{tal que } \ \mathbf{x}^\flat(\mathbf{y}) = \beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V$$

o que permite definir da maneira habitual o **adjunto** A^* de um endomorfismo $A \in End_{\mathbf{K}}(V)$, através de:

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{A^*} & V^* \\ \flat\uparrow & & \uparrow\flat \\ V & \xrightarrow{A} & V \end{array}$$

isto é:

$$\beta(\mathbf{y}, A\mathbf{x}) = \beta(A^*\mathbf{y}, \mathbf{x}), \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V \tag{3.1.25}$$

É fácil verificar as propriedades seguintes:

$$A^* \in End_{\mathbf{K}}(V), \qquad (AB)^* = B^*A^*, \qquad (A^*)^* = A \tag{3.1.26}$$

i.e., * é uma anti-involução da álgebra $End_{\mathbf{K}}(V)$. Além disso:

$$\beta(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) \iff A^*A = \mathrm{Id} \iff A^* = A^{-1} \tag{3.1.27}$$

e portanto cada um dos grupos ortogonais $\mathcal{O}_\beta(V)$ pode também ser descrito na forma:

$$\mathcal{O}_\beta(V) \overset{\text{def}}{=} \{A \in End_{\mathbf{K}}(V) : \quad A^*A = \mathrm{Id}\} \tag{3.1.28}$$

É claro que o adjunto A^* depende do produto interno β. Para cada tipo haverá um processo explícito para calcular A^*. Assim por exemplo:

- se β é $\mathbb{R}$-simétrico definido positivo (caso (3.1.14) com $p = n$) ou $\mathbb{C}$-simétrico (caso (3.1.16), então $A^* \overset{\text{def}}{=} A^t$ (transposta de A).
- se β tem assinatura (p,q) (casos (3.1.14), (3.1.18) e (3.1.19)), decompômos $\mathbf{K}^n_{(p,q)} \cong \mathbf{K}^p \oplus \mathbf{K}^q$ o que induz uma decomposição de $M \in End_{\mathbf{K}}(V)$ em blocos:

  $$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

  Então:

  $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A^\dagger & -C^\dagger \\ -B^\dagger & D^\dagger \end{bmatrix} \tag{3.1.29}$$

  onde $A^\dagger = \overline{A}^t$ é a $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$-conjugada transposta. Em particular no caso definido positivo (ou negativo) $A^* = A^\dagger = \overline{A}^t$.

---

[1]Quando V é um espaço vectorial direito sobre $\mathbb{H}$ (os escalares actuando à direita de V), define-se o dual V^* como sendo o espaço vectorial direito sobre $\mathbb{H}$, constituído pelas formas $\mathbb{H}$-lineares $f : V \to \mathbb{H}$, com os escalares actuando à direita de V^* através de $(f\,h)(\mathbf{v}) \overset{\text{def}}{=} \overline{h}\,f(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in V$, $h \in \mathbb{H}$.

- se β é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-simplético (casos (3.1.15) e (3.1.17)) e se $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ é a decomposição adaptada à soma directa $\mathbf{K}^{2n} = \mathbf{K}^n \oplus \mathbf{K}^n$ ($\mathbf{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), então:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^* \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{bmatrix} \tag{3.1.30}$$

O nosso próximo objectivo é provar que cada um dos grupos ortogonais $\mathcal{O}_\beta(V)$ atrás considerados, é um grupo de Lie. Mais exactamente, provaremos que $\mathcal{O}_\beta(V)$ é uma subvariedade do espaço vectorial real $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \cong \mathbf{K}^n \cong \mathbb{R}^N$, das matrizes $n \times n$ de entradas em $\mathbf{K}$. Para isso definamos o subespaço vectorial real $\mathcal{S}_\beta(n, \mathbf{K})$, que consiste das matrizes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ que são β-simétricas:

$$\mathcal{S}_\beta(n, \mathbf{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) : \quad S^* = S\} \tag{3.1.31}$$

e ainda o subespaço vectorial real $\mathcal{A}_\beta(n, \mathbf{K})$, que consiste das matrizes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ que são β-anti-simétricas:

$$\mathcal{A}_\beta(n, \mathbf{K}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) : \quad \xi^* = -\xi\} \tag{3.1.32}$$

♣ **Teorema 3.1** ... *Seja (V, β) um dos espaços com produto interno (3.1.14) até (3.1.19), e consideremos o correspondente grupo ortogonal:*

$$\boxed{\mathcal{O}_\beta(V) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) : \quad AA^* = Id\}}$$

Então $\mathcal{O}_\beta(V)$ é uma subvariedade real do espaço vectorial real $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, com dimensão:

$$dim_{\mathbb{R}}\, \mathcal{O}_\beta(V) = dim_{\mathbb{R}}\, \mathcal{A}_\beta(n, \mathbf{K}) \tag{3.1.33}$$

Além disso o espaço tangente na unidade $e = \mathbf{1} \in \mathcal{O}_\beta(V)$ é dado por:

$$\boxed{T_e(\mathcal{O}_\beta(V)) \stackrel{def}{=} \mathfrak{o}_\beta(V) = \mathcal{A}_\beta(n, \mathbf{K}) = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) : \quad \xi^* = -\xi\}} \tag{3.1.34}$$

- Demonstração...

Consideremos a função:

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \cong \mathbb{R}^N \to \mathcal{S}_\beta(n, \mathbf{K}) \cong \mathbb{R}^M \quad \text{definida por} \quad \Phi(X) = XX^*$$

Como:

$$\mathcal{O}_\beta(V) = \Phi^{-1}(\{\mathbf{1}\})$$

para provar que $\mathcal{O}_\beta(V)$ é uma subvariedade real do espaço vectorial real $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, podemos aplicar os resultados da secção 1.7, provando que $\mathbf{1}$ é valor regular de Φ, isto é que a diferencial de Φ em cada ponto $A \in \mathcal{O}_\beta(V)$ é sobrejectiva. Se assim fôr ficará provado que $\mathcal{O}_\beta(V)$ é uma subvariedade real em $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, de codimensão $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_\beta(n, \mathbf{K})$, como se pretende.

Mas (com identificações óbvias) $d\Phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathcal{S}_\beta(n, \mathbf{K})$ é dada por:

$$d\Phi_A(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, \Phi(A + t\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, (A + t\xi)(A + t\xi)^* = \xi A^* + A\xi^*$$

e é sobrejectiva $\forall A \in \mathcal{O}_\beta(V)$. De facto, se $S \in \mathcal{S}_\beta(n, \mathbf{K})$ então pondo $\xi = \frac{1}{2}SA$, vemos que:

$$d\Phi_A(\xi) = d\Phi_A(\frac{1}{2}SA) = \frac{1}{2}SAA^* + A\big(\frac{1}{2}SA\big)^* = S$$

uma vez que $AA^* = \mathrm{Id}$ e $S = S^*$.

Por outro lado:

$$T_e(\mathcal{O}_\beta(V)) = \ker(d\Phi_e)$$

e como $d\Phi_e(\xi) = \xi + \xi^* = \mathbf{0}$ implica que $\xi = -\xi^*$, fica provado (3.1.34).

$\square$.

A subvariedade $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(V, \beta)$ definida implìcitamente pelo teorema anterior, através da condição $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \cong \mathbb{R}^N : \Phi(X) = XX^* = \mathbf{1}$, pode também ser descrita paramètricamente. Como veremos mais detalhadamente na próxima secção, a aplicação $\ell_A : G \to G$, definida pela multiplicação à esquerda por $A \in G$:

$$\ell_A(B) = AB \qquad B \in G$$

é um difeomorfismo de G tal que $\ell_A(\mathbf{1}) = A$. Por isso basta construir uma carta local na vizinhança da identidade $e = \mathbf{1} \in G$. Como é sabido a série:

$$\mathbf{1} + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^4}{4!} + \cdots \tag{3.1.35}$$

onde $\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \cong \mathbb{R}^N$, converge para uma matriz $\exp(\xi) = e^\xi$ (a exponencial de ξ), sendo a convergência uniforme em qualquer compacto de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, o que implica que as entradas de e^ξ são funções analíticas das entradas de ξ, isto é, a função:

$$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

é analítica. Note ainda que $\exp(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$.

♣ **Teorema 3.2** ... *Seja (V, β) um dos espaços com produto interno (3.1.14) até (3.1.19), e consideremos o correspondente grupo ortogonal:*

$$G = \mathcal{O}_\beta(V) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) : \quad AA^* = Id\}$$

Então a aplicação:

$$\exp : T_eG \longrightarrow G \tag{3.1.36}$$

onde $T_eG = \mathcal{A}_\beta(n, \mathbf{K})$ é o espaço tangente na unidade $e = \mathbf{1}$, dado por (3.1.34), é um difeomorfismo de uma vizinhança de $\mathbf{0} \in T_eG$ sobre uma vizinhança de $e = \mathbf{1} \in G$.

- Demonstração...

  Se $\xi \in \mathcal{A}_\beta(n, \mathbf{K})$, então $e^\xi \in G$, uma vez que $(e^\xi)(e^\xi)^* = e^\xi e^{\xi^*} = e^\xi e^{-\xi} = e^{\xi-\xi} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$. Por outro lado, a diferencial de exp em $\mathbf{0}$ é dada por:

$$d(\exp)_{\mathbf{0}}(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, e^{t\xi} = \xi$$

  e resta aplicar o teorema da função inversa para concluir.

□.

Se U é um aberto de $T_eG = \mathcal{A}_\beta(n, \mathbf{K}) \cong \mathbb{R}^M$, que contem $\mathbf{0}$ e onde $\exp|_U$ é um difeomorfismo sobre a imagem $V \subseteq G$, então $(V, \phi) = (V, \exp|_U)^{-1})$ é uma carta local que contem $e = \mathbf{1}$, dita uma carta exponencial. As coordenadas locais associadas dizem-se coordenadas canónicas de G.

Os **"grupos especiais lineares"** são definidos por:

$$\begin{array}{rcll}
S\ell(n, \mathbb{R}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{A \in G\ell(n, \mathbb{R}) : \ \det_{\mathbb{R}} A = 1\} & \text{especial linear real} \\
S\ell(n, \mathbb{C}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{A \in G\ell(n, \mathbb{C}) : \ \det_{\mathbb{C}} A = 1\} & \text{especial linear complexo} \\
S\ell(n, \mathbb{H}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{A \in G\ell(n, \mathbb{H}) : \ \det_{\mathbb{R}} A = 1\} & \text{especial linear quaterniónico} \\
SO(p, q) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{A \in O(p, q) : \ \det_{\mathbb{R}} A = 1\} & \text{especial ortogonal real de assinatura } (p, q) \\
SO(n, \mathbb{C}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{A \in O(n, \mathbb{C}) : \ \det_{\mathbb{C}} A = 1\} & \text{especial ortogonal complexo} \\
SU(p, q) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{A \in U(p, q) : \ \det_{\mathbb{C}} A = 1\} & \text{especial unitário}
\end{array} \tag{3.1.37}$$

Portanto em geral os grupos especiais lineares são obtidos resolvendo a equação $\det_{\mathbf{K}} X = 1$, onde $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Suponhamos que $A \in SL(n, \mathbf{K})$ e calculemos a diferencial da função $\det_{\mathbf{K}}$ no ponto A:

$$\begin{aligned}
d(\det_{\mathbf{K}})_A(\xi) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \det_{\mathbf{K}}(A + t\xi) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \det_{\mathbf{K}}\big((\mathbf{1} + t\xi A^{-1})\, A\big) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \Big(\det_{\mathbf{K}}(\mathbf{1} + t\xi A^{-1}) \det_{\mathbf{K}}(A)\Big) \\
&= \operatorname{tr}_{\mathbf{K}}(\xi A^{-1}) \det_{\mathbf{K}}(A) \qquad (3.1.38) \\
&= \operatorname{tr}_{\mathbf{K}}(\xi A^{-1}) \qquad (3.1.39)
\end{aligned}$$

onde em (3.1.38), utilizamos o facto de que $\det(\mathbf{1} + tC) = \mathbf{1} + t\ \operatorname{tr}(C) + \cdots + t^n \det(C)$. Vemos então que $d(\det_{\mathbf{K}})_A$ tem característica 1 se $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ e igual a 2 se $\mathbf{K} = \mathbb{C}$. O teorema da função implícita permite concluir que os grupos especiais linerares são subvariedades, cujo espaço tangente na unidade $e = \mathbf{1}$ é dado pelo $\ker d(\det_{\mathbf{K}})_A$, isto é, por $\{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) : \operatorname{tr}_{\mathbf{K}}(\xi) = 0\}$. Portanto:

$$\begin{array}{rcl}
T_eSL(n, \mathbb{R}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ \operatorname{tr}_{\mathbb{R}} \xi = 0\} \\
T_eSL(n, \mathbb{C}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \ \operatorname{tr}_{\mathbb{C}} \xi = 0\} \\
T_eSL(n, \mathbb{R}) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) = \{\xi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) : \ \operatorname{tr}_{\mathbb{R}} \xi = 0\}
\end{array} \tag{3.1.40}$$

♣ **Exercício 3.3** ... *Verificar as inclusões seguintes:*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & G\ell^+(2n,\mathbb{R}) & & & & \\
 & & & & \uparrow & & & & \\
G\ell^+(n,\mathbb{R}) & \to & G\ell(n,\mathbb{R}) & \to & G\ell(n,\mathbb{C}) & \to & G\ell(n,\mathbb{H}) & \to & G\ell(2n,\mathbb{C}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
SO(n) & \to & O(n) & \to & U(n) & \to & Sp(n) & \to & Sp(n,\mathbb{C}) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & SO(2n) & & U(2n) & &
\end{array}
$$

e provar ainda que $G\ell(n,\mathbb{C}) \cap SO(2n) = U(n)$ *e que* $G\ell(n,\mathbb{R}) \cap U(n) = O(n)$.

3.2 Álgebras de Lie dos grupos de Lie

Vamos começar por descrever alguns factos básicos sobre grupos de Lie:

• **"Translacções à esquerda ℓ_g e à direita r_g"**... Seja G um grupo de Lie. Para cada $g \in G$ podemos definir duas aplicações C^∞:

$$
\begin{array}{llll}
\ell_g : G \to G & \ell_g(h) \stackrel{\text{def}}{=} gh & & \textbf{translacção à esquerda (por } g\textbf{)} \\
r_g : G \to G & r_g(h) \stackrel{\text{def}}{=} hg & & \textbf{translacção à direita (por } g\textbf{)}
\end{array}
$$

Note que $\ell_{g_1} \circ \ell_{g_2} = \ell_{g_1 g_2}$, $r_{g_1} \circ r_{g_2} = r_{g_2 g_1}$, $\ell_g^{-1} = \ell_{g^{-1}}$, $r_g^{-1} = r_{g^{-1}}$ (portanto ℓ_g e r_g são difeomorfismos) e ainda $\ell_g \circ r_h = r_h \circ \ell_g$, isto é, as translacções à esquerda e à direita comutam entre si.

• **"Campos invariantes à esquerda"**... Um campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(G)$ diz-se invariante à esquerda se:

$$\boxed{d(\ell_g)_h(X_h) = X_{gh} \qquad \forall g, h \in G} \tag{3.2.1}$$

isto é, se o diagrama seguinte é comutativo:

$$
\begin{array}{ccc}
TG & \xrightarrow{T\ell_g} & TG \\
\mathrm{X} \uparrow & & \uparrow \mathrm{X} \\
G & \xrightarrow{\ell_g} & G
\end{array}
$$

(recorde que a aplicação tangente $T\ell_g$ foi definida por $(T\ell_g)|_{T_hG} = d(\ell_g)_h$). Representemos por $\mathfrak{X}_\ell(G)$ o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda. Note que (3.2.1) diz que X é ℓ_g-relacionado consigo próprio. Portanto se $X, Y \in \mathfrak{X}_\ell(G)$ também $[X, Y] \in \mathfrak{X}_\ell(G)$, o que significa que $\mathfrak{X}_\ell(G)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

• **"Álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie** G**"**... A cada vector tangente $\xi \in T_eG$, vamos associar um campo de vectores X^ξ definido por:

$$\boxed{X^\xi_g \stackrel{\text{def}}{=} d(\ell_g)_e(\xi) \qquad g \in G \qquad \xi \in T_eG} \tag{3.2.2}$$

Como:

$$X^\xi_{gh} = d(\ell_{gh})_e(\xi) = d(\ell_g \circ \ell_h)_e(\xi) = d(\ell_g)_h(d(\ell_h)_e(\xi)) = d(\ell_g)_h(X^\xi_h)$$

vemos que X^ξ é invariante à esquerda. As aplicações lineares:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_\ell(G) \to T_eG & \text{e} & T_eG \to \mathfrak{X}_\ell(G) \\ X \mapsto X_e & & \xi \mapsto X^\xi \end{array}$$

são inversas uma da outra, o que mostra que $\mathfrak{X}_\ell(G)$ e T_eG são linearmente isomorfos.

♣ **Definição 3.3** ... *A* **"álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie** G**"** *é por definição o espaço vectorial:*

$$\boxed{\mathfrak{g} \stackrel{def}{=} T_eG \cong \mathfrak{X}_\ell(G)} \tag{3.2.3}$$

munido do parêntisis de Lie induzido:

$$[\xi, \eta] \stackrel{def}{=} [X^\xi, X^\eta]_e \tag{3.2.4}$$

Note que por construção:

$$[X^\xi, X^\eta] = X^{[\xi,\eta]} \qquad \forall \xi, \eta \in T_eG$$

Exemplo ...

Como $G\ell(n, \mathbb{R})$ é aberto em $\mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, a álgebra de Lie de $G\ell(n, \mathbb{R})$ é exactamente $\mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R})$, munida do parêntisis de Lie dado pelo comutador usual de matrizes:

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi \qquad \xi, \eta \in \mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R})$$

Para ver isto, notemos em primeiro lugar que a translacção à esquerda, dada por $\ell_B(A) = BA$, é uma aplicação linear e portanto a respectiva diferencial pode ser identificada com ela própria. Por isso, dada uma matriz $\xi \in \mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R}) = T_eG\ell(n, \mathbb{R})$ $(e = \mathbf{1})$, o campo $X^\xi(A) \stackrel{\text{def}}{=} A\xi$ é invariante à esquerda, já que:

$$X^\xi(\ell_B(A)) = BA\xi = d(\ell_B)_A(X^\xi(A))$$

Portanto, aplicando a fórmula local para o parêntisis de Lie $[X, Y](x) = dY_x(X_x) - dX_x(Y_x)$, obtemos:

$$[\xi, \eta] = [X^\xi, X^\eta]_{\mathbf{1}} = dX^\eta_{\mathbf{1}}(X^\xi_{\mathbf{1}}) - dX^\xi_{\mathbf{1}}(X^\eta_{\mathbf{1}})$$

Mas como $X^\eta(A) = A\eta$ é linear em A, vem que $dX^\eta_{\mathbf{1}}(B) = B\eta$, e portanto $dX^\eta_{\mathbf{1}}(X^\xi_{\mathbf{1}}) = \xi\eta$. Anàlogamente $dX^\xi_{\mathbf{1}}(X^\eta_{\mathbf{1}}) = \eta\xi$ e finalmente:

$$[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi \tag{3.2.5}$$

• **"Subgrupos a um parâmetro. Aplicação exponencial** ... Se X^ξ é o campo invariante à esquerda correspondente a $\xi \in \mathfrak{g}$, existe uma única curva integral $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to G$ de X^ξ tal que:

$$\begin{cases} \gamma_\xi'(t) = X^\xi(\gamma_\xi(t)) \\ \gamma_\xi(0) = e \end{cases}$$

De facto γ_ξ verifica a condição:

$$\boxed{\gamma_\xi(s+t) = \gamma_\xi(s)\gamma_\xi(t)} \tag{3.2.6}$$

o que significa que $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to G$ é um **"subgrupo a um parâmetro"** de G. Com efeito, ambos os membros de (3.2.6), considerados como função de t (com s fixo), têm o mesmo valor, igual a $\gamma_\xi(s)$, em $t = 0$. Por outro lado, ambos satisfazem a equação diferencial $\alpha'(t) = X^\xi(\alpha(t))$, já que X^ξ é invariante à esquerda. Por unicidade deduzimos então (3.2.6). Além disso, (3.2.6) mostra também que γ_ξ está definida para todo o $t \in \mathbb{R}$.

♣ **<u>Definição</u> 3.4** ... *Nas condições anteriores, definimos a* **"aplicação exponencial"***:*

$$\boxed{\exp : \mathfrak{g} \to G \qquad \textit{através de} \qquad \exp(\xi) = \gamma_\xi(1)} \tag{3.2.7}$$

Pela diferenciabilidade (C^∞) das soluções das equações diferenciais relativamente às condições iniciais, e ainda pela diferenciabilidade (C^∞) das operações de grupo, deduzimos que exp é de classe C^∞.

Exemplo ...

Seja $G = G\ell(n, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R})$. Se $\xi \in \mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R})$ então a aplicação $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to G\ell(n, \mathbb{R})$ definida por:

$$\gamma_\xi(t) = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\xi^k$$

é um subgrupo a um parâmetro, uma vez que $\gamma_\xi(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$ e:

$$\gamma_\xi'(t) = \sum_{k\geq 1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\xi^k = \gamma_\xi(t)\,\xi$$

(recorde que o campo $X^\xi : A \mapsto X^\xi(A) = A\xi$ é invariante à esquerda). Portanto a aplicação exponencial é dada por:

$$\exp : \mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R}) \to G\ell(n, \mathbb{R}), \qquad \exp(\xi) = \gamma_\xi(1) = \sum_{k\geq 0} \frac{\xi^k}{k!} = e^\xi$$

Vejamos algumas propriedades importantes da aplicação exponencial:

- **A aplicação exponencial transforma a recta** $s \mapsto s\xi$ **em** $\mathfrak{g} = T_eG$**, no subgrupo**
a um parâmetro $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to G$, isto é:

$$\boxed{\gamma_{s\xi}(1) = \exp(s\xi) = \gamma_\xi(s) \qquad \forall s \in \mathbb{R} \qquad \forall \xi \in \mathfrak{g}} \tag{3.2.8}$$

De facto, para $s \in \mathbb{R}$ fixo, as curvas $t \mapsto \gamma_\xi(ts)$ e $t \mapsto \gamma_{s\xi}(t)$, que passam ambas em $e \in G$ no instante $t = 0$, satisfazem ambas a equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\alpha(ts) = X^{s\xi}(\alpha(ts))$$

e por isso coincidem: $\gamma_\xi(ts) = \gamma_{s\xi}(t)$. Fazendo $t = 1$, obtemos (3.2.8).

- **A invariância à esquerda de** X^ξ **implica que o respectivo fluxo (global)** $\mathrm{Fl}_t^{X^\xi} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Fl}_t^\xi$ **satisfaz** $\mathrm{Fl}_t^\xi(g) = g\mathrm{Fl}_t^\xi(e) = g\gamma_\xi(t)$ e portanto:

$$\boxed{\mathrm{Fl}_t^\xi(g) = g\exp(t\xi) = r_{\exp(t\xi)}(g)} \tag{3.2.9}$$

- **Todo o subgrupo a um parâmetro** $\gamma : \mathbb{R} \to G$ **é da forma** γ_ξ **onde** $\xi = \gamma'(0) \in \mathfrak{g}$**.**

De facto, derivando em ordem a s a relação $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$, em $s = 0$ obtemos:

$$\gamma'(t) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma(t+s) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\ell_{\gamma(t)}\gamma(s) = d(\ell_{\gamma(t)})_e(\gamma'(0)) = X^\xi(\gamma(t))$$

onde $\xi = \gamma'(0) \in \mathfrak{g}$. Portanto $\gamma = \gamma_\xi$, já que ambas são iguais a e em $t = 0$.

- **A diferencial** $d(\exp)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ **é igual à identidade** $\mathrm{Id}_\mathfrak{g}$.

Com efeito, por (3.2.8):

$$d(\exp)_e(\xi) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\exp(s\xi) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma_\xi(s) = \xi \qquad \forall \xi \in \mathfrak{g}$$

Portanto, pelo teorema da função inversa, exp é um difeomorfismo local numa certa vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathfrak{g}$, sobre uma certa vizinhança de $e \in G$, o que permite definir uma carta local em $e \in G$, dita a **"carta exponencial"**. As correspondentes coordenadas locais dizem-se as **"coordenadas canónicas"** de G.

- ♣ **Teorema 3.3** ... (**"Naturalidade da aplicação exponencial"**) ... *Sejam H e G dois grupos de Lie com álgebras de Lie respectivamente iguais a $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$. Seja $f : H \to G$ um homomorfismo (de grupos) C^∞. Então $df_e : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, isto é:*

$$(df_e)[\xi,\eta] = [df_e(\xi), df_e(\eta)] \qquad \forall \xi,\eta \in \mathfrak{h}$$

e além disso o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{h} & \xrightarrow{df_e} & \mathfrak{g} \\ \exp_H \downarrow & & \downarrow \exp_G \\ H & \xrightarrow{f} & G \end{array}$$

isto é:

$$\boxed{f \circ \exp_H = \exp_G \circ (df_e)} \tag{3.2.10}$$

– Demonstração... Com efeito, como f é um homomorfismo de grupos, $f \circ \ell_h = \ell_{f(h)} \circ f$, $\forall h \in H$. Portanto $Tf \circ T\ell_h = T\ell_{f(h)} \circ Tf$, donde se deduz que:

$$X^{(df_e)(\xi)}(f(h)) = T_h f(X^\xi(h))$$

isto é, X^ξ e $X^{(df_e)(\xi)}$ estão f-relacionados. Segue-se então que $[X^\xi, X^\eta]$ e $[X^{(df_e)(\xi)}, X^{(df_e)(\eta)}]$ estão também f-relacionados, $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{h}$ e portanto:

$$\begin{aligned} df_e([\xi, \eta]) &= (Tf \circ [X^\xi, X^\eta])(e) \\ &= [X^{(df_e)(\xi)}, X^{(df_e)(\eta)}](e) \\ &= [df_e(\xi), df_e(\eta)] \end{aligned}$$

isto é, $df_e : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.
Fixando $\xi \in \mathfrak{h}$, notemos que $\alpha(t) = f(\exp_H(t\xi))$ e $\beta(t) = \exp_G(t(df_e)(\xi))$ são subgrupos a um parâmetro de G. Além disso, $\alpha'(0) = (df_e)(\xi) = \beta'(0)$ e portanto $\alpha \equiv \beta$. Em particular, $f(\exp_H(\xi)) = \exp_G((df_e)(\xi))$, $\forall \xi \in \mathfrak{h}$.

$\square$.

• **"Subgrupos de Lie"**... Um **"subgrupo de Lie"** H de um grupo de Lie G, é um subgrupo de G que é simultâneamente uma subvariedade (injectivamente) imersa em G. Se H é subvariedade (mergulhada) em G, então H diz-se um **"subgrupo de Lie regular"** de G.

♣ **Teorema 3.4** ... *Seja H um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G. Então a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Além disso:*

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} : \exp(t\xi) \in H \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Demonstração... A primeira afirmação decorre do teorema anterior com $f = \iota : H \hookrightarrow G$. Este mesmo teorema mostra ainda que $\exp(t\xi) \in H$, $\forall \xi \in \mathfrak{h}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Recìprocamente, se $\exp(t\xi) \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$, então $\frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(t\xi) = \xi \in \mathfrak{h}$, uma vez que H é subgrupo de Lie.

$\square$.

Os grupos clássicos ortogonais $\mathcal{O}_\beta(V)$ e ortogonais especiais, descritos na secção anterior, podem ser considerados como subgrupos fechados do grupo linear geral $G\ell(N, \mathbb{R})$ para algum N apropriado. Os resultados anteriores mostram que são portanto grupos de Lie, e que as respectivas álgebras de Lie são subálgebras de $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})$, munida do comutador usual de matrizes.

Vamos agora referir alguns teoremas sem demonstração (ver por exemplo [BD], [Wa] ou [Sp], para demonstrações completas).

♣ <u>**Teorema**</u> **3.5** ... *Se H é um subgrupo fechado em G, então H é um subgrupo de Lie regular de G.*

♣ <u>**Teorema**</u> **3.6** ... *Seja G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ a respectiva álgebra de Lie, e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. Então existe um subgrupo de Lie conexo H de G, cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$.*

♣ <u>**Teorema**</u> **3.7** ... *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, existe um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo G cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$.*

♣ <u>**Exercício**</u> **3.4** ... *Considere o grupo de Lie:*

$$SO(3) = \{A \in G\ell(3, \mathbb{R}) : \; AA^t = A^tA = \mathbf{1} \;\; e \;\; \det A = 1\}$$

(i). Mostre que a álgebra de lie de $SO(3)$ é:

$$\mathfrak{so}(3) = \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) = \{\xi \in \mathfrak{g}\ell(3, \mathbb{R}) : \; \xi = -\xi^t\}$$

(ii). Considere a base para $\mathfrak{so}(3)$ constituída pelas matrizes:

$$\widehat{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \widehat{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \widehat{\mathbf{e}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e a álgebra de Lie $(\mathbb{R}^3, \times)$, onde $\times$ é o produto vectorial usual em $\mathbb{R}^3$ (com a orientação usual), isto é: $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \det\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. Mostre que a aplicação:

$$\widehat{\ }: \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3), \qquad \mathbf{x} = (x^i) \mapsto \widehat{\mathbf{x}} = x^i \widehat{\mathbf{e}}_i = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^2 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie, isto é:

$$[\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}}] = \widehat{\mathbf{x} \times \mathbf{y}}$$

(iii). Mostrar que sob a identificação anterior, o produto interno usual $\cdot$ em $\mathbb{R}^3$, corresponde ao produto interno em $\mathfrak{so}(3)$, definido por:

$$\xi \cdot \eta \;\; \stackrel{def}{=} \;\; -\frac{1}{2}\, \mathrm{tr}\,(\xi\eta)$$

isto é:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\widehat{\mathbf{x}}\widehat{\mathbf{y}})$$

Mostrar ainda que este produto interno é Ad-invariante, e que portanto define uma métrica biinvariante em $SO(3)$.

(iv). Mostrar que sob a identificação $\widehat{\ }$, a representação adjunta Ad de $SO(3)$ na sua álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, corresponde à representação fundamental de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$: $(A,\mathbf{x})\mapsto A\mathbf{x}$.

(v). Considere a representação fundamental de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$: $(A,\mathbf{x})\mapsto A\mathbf{x}$. Mostrar que o gerador infinitesimal desta acção é o campo de vectores em $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\widehat{\xi}_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = \xi\times\mathbf{x} \qquad\qquad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$$

(vi). Mostre que todo o elemento $A\in SO(3)$ é uma rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno de um eixo. Deduza que $SO(3)$ é difeomorfo a $\mathbb{RP}(3)$.

(vii). Mostrar que se $\widehat{\xi}\in\mathfrak{so}(3)$, com $\xi\in\mathbb{R}^3$, então $\exp(t\widehat{\xi})$ é uma rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo gerado por $\xi\in\mathbb{R}^3$, e de ângulo $t\|\xi\|$.

(viii). Demonstre a **"fórmula de Rodrigues"** *seguinte:*

$$\exp(\widehat{\xi}) = \mathbf{1} + \frac{\sin\|\xi\|}{\|\xi\|}\,\widehat{\xi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\|\xi\|}{2}\right)}{\frac{\|\xi\|}{2}}\right]^2\widehat{\xi}^2$$

onde $\xi\in\mathbb{R}^3$.

♣ **Exercício 3.5** ... *Considere o grupo de Lie $Sp(1)$ constituído pelos quaterniões de norma unitária:*

$$Sp(1) = \{\, x = x^0\mathbf{1} + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}\in\mathbb{H} :\ N(x) = x\overline{x} = (x^0)^2+(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2 = 1\}$$

(i). Mostre que a álgebra de Lie de $Sp(1)$ é:

$$\mathfrak{sp}(1) = \mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$$

e que com a identificação $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}=\mathbb{R}^3$, dada por $\xi = \xi^1\mathbf{i}+\xi^2\mathbf{j}+\xi^3\mathbf{k}\in\mathrm{Im}\,\mathbb{H}\mapsto \xi = (\xi^1,\xi^2,\xi^3)\in\mathbb{R}^3$, o patêntisis de Lie é dado por $[\xi,\eta] = 2\xi\times\eta$.

(ii). Considere o grupo de Lie:

$$SU(2) = SU(2,\mathbb{C}) = \{A\in G\ell(2,\mathbb{C}) :\ AA^\dagger = \mathbf{1} \quad e \quad \det A = 1\}$$

Mostre que a álgebra de Lie de $SU(2)$ é:

$$\mathfrak{su}(2) = \{\xi\in\mathfrak{g}\ell(2,\mathbb{C}) :\ \xi = -\xi^\dagger \qquad e \qquad \mathrm{tr}\,\xi = 0\}$$

(iii). Mostre que a aplicação $\gamma:\mathbb{H}\to\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, dada por:

$$x\in\mathbb{H}\mapsto\gamma(x) = \begin{pmatrix} x^0+ix^3 & x^2+ix^1\\ -x^2+ix^1 & x^0-ix^3\end{pmatrix}. \qquad (3.2.11)$$

onde $x = x^0\mathbf{1} + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k} \in \mathbb{H}$, *é um homomorfismo real de álgebras:* γ *é* $\mathbb{R}$*-linear,* $\gamma(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ *e* $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$. *Mostre ainda que:*

$$\gamma(\overline{x}) = (\gamma(x))^\dagger$$

e deduza que γ *induz isomorfismos* $Sp(1) \cong SU(2)$ *e* $\mathfrak{sp}(1) = \mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{su}(2)$.

(iv). Mostre que $SU(2)$ *é difeomorfo à esfera* $SS^3 \subset \mathbb{R}^4$, *e que portanto é um grupo de Lie compacto e simplesmente conexo.*

(v). Considere as **"matrizes de Pauli"** *seguintes:*

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mostre que $[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3$ *(+ permutações cíclicas). Mostre que* $\gamma(\mathbf{i}) = i\sigma_1$, $\gamma(\mathbf{j}) = i\sigma_2$, $\gamma(\mathbf{k}) = i\sigma_3$, *onde* γ *é a aplicação (3.2.11), e que portanto* $\{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\}$ *formam uma base para* $\mathfrak{su}(2)$.

(vi). Mostre que (3.2.11) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= x^0\mathbf{1} + i\sum_k x^k\sigma_k \\ &\overset{def}{=} x^0 + i\,\mathbf{x}\cdot\vec{\sigma} \end{aligned}$$

onde $x = x^0\mathbf{1} + x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k} = x^0 + \mathbf{x} \in \mathbb{H}$, *com* $\mathbf{x} \in Im\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$, *e* $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

(vii). Considere o conjunto $\mathcal{H}_o$ *das matrizes hermitianas que têm* <u>*traço nulo*</u>*:*

$$\mathcal{H}_o = \left\{ \begin{bmatrix} c & a-ib \\ a+ib & -c \end{bmatrix} : \qquad a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

Mostre que a aplicação $\widetilde{\ }: \mathbb{R}^3 \to \mathcal{H}_o$, *definida por:*

$$\widetilde{\ }: \mathbf{x} = (x^k) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \widetilde{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^3 x^k\sigma_k = \begin{bmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{bmatrix}$$

é um isomorfismo linear (que permite identificar $\mathcal{H}_o$ *com* $\mathbb{R}^3$*). Mostre ainda que:*

$$\det\widetilde{\mathbf{x}} = -\|\mathbf{x}\|^2, \qquad (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{1} = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{x}}\widetilde{\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{y}}\widetilde{\mathbf{x}})$$

$$\|\mathbf{x}\|^2\mathbf{1} = \widetilde{\mathbf{x}}^2 \qquad \widetilde{\mathbf{x}\times\mathbf{y}} = \frac{i}{2}(\widetilde{\mathbf{x}}\widetilde{\mathbf{y}} - \widetilde{\mathbf{y}}\widetilde{\mathbf{x}}) = \frac{i}{2}[\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{y}}]$$

e ainda:

$$\widetilde{\mathbf{x}}\widetilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})\mathbf{1} + i\,\widetilde{\mathbf{x}\times\mathbf{y}}$$

Esta última igualdade escreve-se habitualmente na forma:

$$\boxed{(\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\sigma})(\vec{\mathbf{y}}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{y}})\,\sigma_o + i\,(\vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{y}})\cdot\vec{\sigma}}$$

onde se pôs $\sigma_o = \mathbf{1}$ *e* $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. *Isto é, o produto de dois elementos* $\widetilde{\mathbf{x}}, \widetilde{\mathbf{y}} \in \mathcal{H}_o$, *é um elemento de* $\mathbb{R}\,\mathbf{1} + i\,\mathcal{H}_o$, *cuja "parte real" é o produto interno, e a "parte imaginária" é o produto vectorial.*

(viii). Mostre que os valores próprios de $\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}_o$ *são* $\pm\|\mathbf{x}\|$, *e deduza que cada* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ *induz uma decomposição de* $\mathbb{C}^2$ *em soma directa:*

$$\mathbb{C}^2 = \mathcal{S}^+_{\mathbf{x}} \oplus \mathcal{S}^-_{\mathbf{x}}$$

Calcule essa decomposição quando $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$. *Mostre ainda que essa decomposição fica inalterada quando substituimos* $\mathbf{x}$ *por* $a\mathbf{x}$, *onde* $a > 0$ *é um número real positivo arbitrário, isto é, cada* **direcção** $\mathbb{R}^+\{\mathbf{x}\} = \{a\mathbf{x} : a > 0\}$ *em* $\mathbb{R}^3$ *(onde* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*), determina (unìvocamente) uma decomposição de* $\mathbb{C}^2$ *da forma referida* ([2])

(ix). Considere agora, para cada $A \in SU(2)$, *a aplicação:*

$$\psi_A : \mathcal{H}_o \cong \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \cong \mathcal{H}_o$$

definida por:

$$\psi_A(\widetilde{\mathbf{x}}) = A\widetilde{\mathbf{x}}A^\dagger \qquad\qquad \widetilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}_o$$

Mostre que ψ_A *está bem definida, e que* ψ_A *é uma transformação ortogonal em* $\mathbb{R}^3$.

(x). Deduza a **"fórmula de Euler"** *seguinte:*

$$\psi_A(\widetilde{\mathbf{x}}) = \big((a^0)^2 - \|\mathbf{a}\|^2\big)\widetilde{\mathbf{x}} + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\widetilde{\mathbf{a}} - 2a^0\widetilde{(\mathbf{a}\times\mathbf{x})}$$

ou em termos do isomorfismo $\mathbb{R}^3 \cong \mathcal{H}_0$*:*

$$\boxed{\mathbf{y} = \psi_A(\mathbf{x}) = \big((a^0)^2 - \|\mathbf{a}\|^2\big)\,\mathbf{x} + 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a} - 2a^0\,(\mathbf{a}\times\mathbf{x})} \tag{3.2.12}$$

onde $A = \gamma(a) = a^0\mathbf{1} + i\sum_k a^k\sigma_k = a^0 + i\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma} \in SU(2)$, *e* $\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}_o = \mathbb{R}^3$. *Deduzir que* ψ_A *é uma rotação de* $\mathbb{R}^3$ *de eixo gerado por* $\mathbf{a}$.

Nota... Como $\det A = (a^0)^2 + \|\mathbf{a}\|^2 = 1$, podemos escolher θ tal que: $a^0 = \cos\frac{\theta}{2}$ e $\|\mathbf{a}\| = \sin\frac{\theta}{2}$. Temos então duas possíveis escolhas para a orientação do eixo da rotação, dadas respectivamente pelos vectores unitários $\mathbf{u} = \pm\frac{\mathbf{a}}{\sin\frac{\theta}{2}}$. Uma vez escolhido o ângulo θ e o vector $\mathbf{u}$, a fórmula de Euler toma a forma:

$$\boxed{\mathbf{y} = \psi_A(\mathbf{x}) = (\cos\theta)\,\mathbf{x} + (1-\cos\theta)\,(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\mathbf{u} + (\sin\theta)\,(\mathbf{u}\times\mathbf{x})} \tag{3.2.13}$$

que representa uma rotação de eixo gerado por $\mathbf{u}$, e ângulo θ no sentido directo.

(xi). Mostrar que $\psi : SU(2) \to SO(3)$, *definida por* $A \mapsto \psi_A$, *é um homomorfismo de grupos. Mostrar que se* $\mathbf{R}_{(\mathbf{u};\varphi)}$ *é a rotação de eixo gerado pelo vector unitário* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, *e de ângulo* φ, *então* $A = \cos\theta\,\mathbf{1} - i\,\sin\theta\,\widetilde{\mathbf{u}} \in SU(2)$ *é tal que* $\Psi(\pm A) = \mathbf{R}_{(\mathbf{u};\varphi)}$, *e em particular* ψ *é sobrejectivo.*

[2] A interpretação física deste facto, é a seguinte: $\mathbb{C}^2$ representa o espaço de estados internos de um sistema quântico, uma partícula de spin $\frac{1}{2}$, localizada perto da origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ (por exemplo, um electrão). A existência de um campo magnético, determina uma direcção $\mathbb{R}^+\{\mathbf{x}\} = \{a\mathbf{x} : a > 0\}$ em $\mathbb{R}^3$. Neste campo o sistema terá dois estados estacionários, que são precisamente $\mathcal{S}^+_{\mathbf{x}}$ e $\mathcal{S}^-_{\mathbf{x}}$. Se por exemplo, a direcção $\mathbb{R}^+\{\mathbf{x}\}$ corresponde à parte positiva do eixo dos zz, então o estado $\mathcal{S}^+_{\mathbf{x}}$ diz-se o estado com "projecção de spin $+\frac{1}{2}$, ao longo do eixo dos zz" (ou "spin up"), enquanto que $\mathcal{S}^-_{\mathbf{x}}$ se diz o estado com "projecção de spin $-\frac{1}{2}$, ao longo do eixo dos zz" (ou "spin down").

Nota... Por exemplo, temos que:

$$\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{1} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma_1 \;=\; \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{1} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma_2 \;=\; \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.2.15}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{1} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma_3 \;=\; \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.16}$$

(xii). Mostrar que $\ker\psi = \{\pm\mathbf{1}\} = \mathbb{Z}_2$ *e que* $SO(3)$ *é isomorfo a* $SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

(xiii). Para cada $A = \gamma(a) = a^0\mathbf{1} + i\sum_k a^k\sigma_k = a^0 + i\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma} \in SU(2)$, *definem-se os chamados* **"parâmetros de Cayley-Klein"** *(também chamados parâmetros de Euler, ou ainda de Euler-Rodrigues), através das notações mais usuais seguintes:*

$$a^0 = \rho \qquad \mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

Mostre utilizando a fórmula de Euler (3.2.12), que a matriz de ψ_A (notada por $\mathbf{R}(\rho,\alpha,\beta,\gamma)$), *na base canónica de* $\mathbb{R}^3$, *é a matriz:*

$$\mathbf{R}(\rho,\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \rho^2+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2 & 2(\alpha\beta-\gamma\rho) & 2(\alpha\gamma+\beta\rho) \\ 2(\alpha\beta+\gamma\rho) & \rho^2+\beta^2-\alpha^2-\gamma^2 & 2(\beta\gamma-\alpha\rho) \\ 2(\alpha\gamma-\beta\rho) & 2(\beta\gamma-\alpha\rho) & \rho^2+\gamma^2-\alpha^2-\beta^2 \end{bmatrix}.$$

Nota... Desta forma obtemos uma parametrização das rotações de $SO(3)$ através dos 4 parâmetros de Cayley-Klein ρ,α,β,γ, que satisfazem a condição $\rho^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$.

♣ <u>Exercício</u> **3.6** ... Uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ diz-se uma **transformação de Lorentz**, do espaço de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta)$, se A preserva o produto escalar de Minkowski, i.e.:

$$A(x)\cdot A(y) = x\cdot y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^4$$

(i). Mostre que se A *é a matriz de uma tal transformação de Lorentz, relativamente à base canónica de* $\mathbb{R}^4$, *então* $A^t\,\eta\,A = \eta$, $\det A = \pm 1$ *e* $A^{-1} = \eta A^t\eta$. *Estas matrizes dizem-se matrizes de Lorentz.*

O conjunto de todas as transformações de Lorentz em $\mathbb{R}^4$, constituem um grupo que se diz o **grupo de Lorentz** $O(1,3)$. Este grupo é isomorfo ao grupo das matrizes de Lorentz, também notado por $O(1,3)$. O subconjunto de $O(1,3)$ constituído por todas as transformações de Lorentz que têm determinante 1, é um subgrupo de $O(1,3)$, chamado o **grupo de Lorentz especial (ou próprio)** e notado por $SO(1,3)$. Este grupo é isomorfo ao grupo das matrizes de Lorentz de determinante 1, também notado por $SO(1,3)$. Vamos ainda destacar um subconjunto de $SO(1,3)$ constituído por todas as matrizes de Lorentz $A = (A_\alpha^\beta)$ tais que $A_0^0 \geq 1$. Este subconjunto é ainda um subgrupo de $SO(1,3)$. É chamado o **grupo de Lorentz especial (ou**

próprio) ortocrono e é notado por $\Lambda_+^\uparrow$, ou $SO(1,3)^\uparrow$. Por exemplo, em $\Lambda_+^\uparrow = SO(1,3)^\uparrow$, estão as matrizes da forma:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{R}(\vec{\mathbf{u}},\theta) & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{R}(\vec{\mathbf{u}},\theta)$ representa uma rotação de $\{0\} \times \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ em torno de um eixo $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ e de ângulo θ no sentido directo. Portanto $SO(3)$ é um subgrupo de $\Lambda_+^\uparrow = SO(1,3)^\uparrow$. Em particular em $SO(1,3)^\uparrow$ estão as seguintes matrizes:

$$R_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad R_2(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

e ainda:

$$R_3(\theta) = t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii). Considere dois vectores temporais unitários dirigidos para o futuro u_0 e $\hat{u}_0$, e os espaços físicos $F_0 = u_0^\perp$ e $\hat{F}_0 = \hat{u}_0^\perp$, associados aos observadores inerciais $\mathbb{R}u_0$ e $\mathbb{R}\hat{u}_0$.

Mostre que nessas condições existe uma transformação de Lorentz B em $\Lambda_+^\uparrow = SO(1,3)^\uparrow$, que transforma u_0 em $\hat{u}_0$. A esta transformação de Lorentz chama-se um **boost***.*

(iii). Mostre que as seguintes matrizes são boosts:

$$B_1(\varphi) = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e ainda:

$$B_3(\varphi) = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & 0 & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & 0 & \cosh\varphi \end{bmatrix}$$

(iv). Calcule as derivadas $r_k \stackrel{def}{=} R_k'(0)$ e $b_k \stackrel{def}{=} B_k'(0)$, $(k = 1,2,3)$, das matrizes $R_k(\theta)$ e $B_k(\varphi)$ que figuram em (ii). e (iii)., e mostre que a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(1,3)$ de $SO(1,3)$ é gerada por $\{r_1, r_2, r_3, b_1, b_2.b_3\}$ com as relações de comutação seguintes:

$$\begin{aligned} &[r_1, r_2] = r_3 \quad [r_2, r_3] = r_1 \quad [r_3, r_1] = r_2 \\ &[b_1, r_2] = b_3 \quad [b_2, r_3] = b_1 \quad [b_3, r_1] = b_2 \\ &[b_1, b_2] = -r_3 \quad [b_2, b_3] = -r_1 \quad [b_3, b_1] = -r_2 \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

(v). Considere o espaço vectorial real $\mathcal{H}$ constituído por todas as matrizes hermitianas (2×2) de entradas complexas, e a aplicação:

$$x = (x^a) \in \mathbb{R}^4 \mapsto \tilde{x} = x^a\sigma_a = \begin{bmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{bmatrix} \in \mathcal{H}$$

onde $\sigma_a = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, com $\sigma_0 = \mathbf{1}$ e $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são as matrizes de Pauli. Mostre que $\tilde{\ }$ é um isomorfismo linear (que permite portanto identificar $\mathcal{H}$ com $\mathbb{R}^4$), e que:

$$x \cdot x = -\det \tilde{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^4$$

(vi). Considere o grupo $S\ell(2,\mathbb{C})$ das matrizes A, complexas (2×2) de determinante 1:

$$S\ell(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} : \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$$

e para cada $A \in SL(2,\mathbb{C})$, a aplicação:

$$\psi_A : \mathcal{H} \cong \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \cong \mathcal{H}$$

definida por:

$$\psi_A(\tilde{x}) = A\, \tilde{x}\, A^\dagger \qquad \tilde{x} \in \mathcal{H} \cong \mathbb{R}^4$$

Mostre que ψ_A está bem definida, preserva o produto escalar de Minkowski e portanto que $\psi_A \in O(1,3)$, para cada $A \in S\ell(2,\mathbb{C})$.

(vii). Mostre que aplicação:

$$\Psi : A \in S\ell(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \psi_A \in \Lambda_+^\uparrow = SO(1,3)^\uparrow$$

é um homomorfismo sobrejectivo de $S\ell(2,\mathbb{C})$ sobre o grupo de Lorentz próprio ortocrono $\Lambda_+^\uparrow = SO(1,3)^\uparrow$, cujo núcleo é $\{\pm Id\}$, e que portanto:

$$\Lambda_+^\uparrow = SO(1,3)^\uparrow \cong S\ell(2,\mathbb{C})/\{\pm Id\}$$

Por exemplo, temos que:

$$\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{1} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma_1 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{1} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma_2 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\,\mathbf{1} - i\,\sin\frac{\theta}{2}\,\sigma_3 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e:

$$\cosh\frac{\varphi}{2}\mathbf{1}+\sinh\frac{\varphi}{2}\sigma_1 = \begin{bmatrix} \cosh\frac{\varphi}{2} & \sinh\frac{\varphi}{2} \\ \sinh\frac{\varphi}{2} & \cosh\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi & 0 & 0 \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cosh\frac{\varphi}{2}\mathbf{1}+\sinh\frac{\varphi}{2}\sigma_2 = \begin{bmatrix} \cosh\frac{\varphi}{2} & -i\sinh\frac{\varphi}{2} \\ i\sinh\frac{\varphi}{2} & \cosh\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{bmatrix} \cosh\varphi & 0 & \sinh\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & \cosh\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cosh\frac{\varphi}{2}\mathbf{1}+\sinh\frac{\varphi}{2}\sigma_3 = \begin{bmatrix} \cosh\frac{\varphi}{2}+\sinh\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cosh\frac{\varphi}{2}-\sinh\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{bmatrix} \cosh\varphi & 0 & 0 & \sinh\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\varphi & 0 & 0 & \cosh\varphi \end{bmatrix}$$

(viii). Mostre que as derivadas em $\theta = 0$ e $\varphi = 0$, respectivamente, das matrizes de $S\ell(2,\mathbb{C})$ que figuram nos primeiros membros das relações anteriores, são matrizes $\{\rho_1,\rho_2,\rho_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ que formam uma base para a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ de $S\ell(2,\mathbb{C})$, tal que:

$$\rho_1 = -\frac{i}{2}\sigma_1 \qquad \rho_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2 \qquad \rho_3 = -\frac{i}{2}\sigma_3$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 \qquad \beta_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$$

e que verificam as relações de comutação seguintes:

$$\begin{aligned} &[\rho_1,\rho_2] = \rho_3 \qquad [\rho_2,\rho_3] = r_1 \qquad [\rho_3,\rho_1] = \rho_2 \\ &[\beta_1,\rho_2] = \beta_3 \qquad [\beta_2,\rho_3] = \beta_1 \qquad [\beta_3,\rho_1] = \beta_2 \\ &[\beta_1,\beta_2] = -\rho_3 \qquad [\beta_2,\beta_3] = -\rho_1 \qquad [\beta_3,\beta_1] = -\rho_2 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Em particular:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(1,3)$$

(ix). Considere o complexificado de $sl(2,\mathbb{C})$, notado por $sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}}$, isto é, a álgebra de Lie complexa de dimensão complexa 6, gerada por $\{\rho_1,\rho_2,\rho_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$, e munida da operação de comutação definida por (3.2.18).

Mostrar que em $sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}}$ existe uma base (complexa) constituída pelos seguintes elementos:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(\rho_k + i\beta_k) \qquad k = 1,2,3 \\ d_k &= \frac{1}{2}(\rho_k - i\beta_k) \qquad k = 1,2,3 \end{aligned}$$

que satisfazem as relações de comutação seguintes:

$$\begin{aligned} &[c_1,c_2] = c_3 \qquad [c_2,c_3] = c_1 \qquad [c_3,c_1] = c_2 \\ &[d_1,d_2] = d_3 \qquad [d_2,d_3] = d_1 \qquad [d_3,d_1] = d_2 \\ &[c_k,d_m] = \mathbf{0} \qquad \forall k,m = 1,2,3 \end{aligned}$$

e que portanto:

$$sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{C}} \cong sl(2,\mathbb{C}) \oplus sl(2,\mathbb{C})$$

Capítulo 4

Espaços homogéneos

4.1 Acções de grupo. Espaços homogéneos

Vamos começar esta secção introduzindo a terminologia básica sobre acções de grupos em variedades:

♣ Definição 4.1 ... *Uma* **"acção esquerda"** *de um grupo de Lie G numa variedade diferenciável M, é uma aplicação C^∞:*

$$\Phi : G \times M \longrightarrow M$$

tal que:

- $\Phi(e, x) = x \qquad \forall x \in M$
- $\Phi(g, \Phi(h, x)) = \Phi(gh, x), \qquad \forall g, h \in G, \forall x \in M$

É usual utilizar a notação $\Phi(g, x) = g \cdot x$. As condições anteriores escrevem-se então na forma $e \cdot x = x$ e $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$. M diz-se então um **"G-espaço"** esquerdo. Uma **"acção direita"** de um grupo de Lie G numa variedade M, é uma aplicação C^∞ $\Psi : M \times G \longrightarrow M$, tal que $\Psi(x, e) = x$ e $\Psi(\Psi(x, g), h) = \Phi(x, gh)$. Com a notação $\Psi(x, g) = x \cdot g$, essas condições escrevem-se na forma : $x \cdot e = x$ e $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot gh$.

Se para cada $g \in G$ definimos $\Phi_g : M \to M$ através de $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$ então uma acção esquerda define um homomorfismo de grupos $G \to Diff(M)$, uma vez que as condições da definição traduzem que $\Phi_e = \mathrm{Id}_M$ e $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$.

Quando $M = V$ é um espaço vectorial e cada Φ_g é linear, Φ diz-se uma representação (linear).

Suponhamos que Φ é uma acção esquerda de G em M (se Φ é uma acção direita, as definições seguintes são adaptadas de maneira óbvia). Define-se a **"órbita"** de $x \in M$, através de:

$$\boxed{\mathrm{Orb}(x) \ \stackrel{\text{def}}{=} \ \{\Phi_g(x) = g \cdot x : \ g \in G\} \subseteq M}$$

O G-espaço M é reunião de órbitas disjuntas. O **"espaço das órbitas"** da acção Φ, é o espaço $M/G = \{\text{Orb}(x) : x \in M\}$, munido da topologia quociente relativamente à projecção $\pi : x \mapsto \text{Orb}(x)$. Os subconjuntos de M, G-invariantes são os que são da forma $\pi^{-1}(A)$, onde $A \subseteq M/G$.

A **"aplicação orbital"** é a aplicação:

$$\Phi_x : G \to M, \qquad \Phi_x : g \mapsto g \cdot x$$

Dado um ponto $x \in M$, define-se o **"grupo de isotropia"** de x, através de:

$$\boxed{G_x \overset{\text{def}}{=} \{g \in G : g \cdot x = x\} \subseteq G}$$

Como Φ_x é contínua, $G_x = \Phi_x^{-1}(\{x\})$ é um subgrupo fechado de G e portanto é um subgrupo de Lie regular de G. Note que se o grupo de isotropia de $g \cdot x$ é $G_{g \cdot x} = gG_x g^{-1}$, e portanto a cada órbita está asoociada uma classe de subgrupos conjugados.

Uma acção diz-se:

- **"transitiva"** se existe uma única órbita (igual a M), ou de forma equivalente, se $\forall x, y \in M$ existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$.
- **"efectiva ou fiel"** se o homomorfismo $G \to Diff(M)$, $g \mapsto \Phi_g$ é injectivo: $\Phi_g = \text{Id}_M \Rightarrow g = e$.
- **"Livre"** se não tem pontos fixos, i.e., se cada grupo de isotropia é trivial: $G_x = \{e\}$, $\forall x \in M$

Exemplos ...

(i). **"Acção de G em G por automorfismos internos"** ... Define-se por:

$$I : g \mapsto I_g \in Diff(G) \qquad I_g(h) = ghg^{-1}$$

As órbitas são as classes de conjugação (classes de semelhança, no caso dos grupos de matrizes):

(ii). **"Representação Adjunta de G na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$"** ... Define-se derivando $I_g = r_{g^{-1}}\ell_g : G \to G$, na unidade e, isto é:

$$Ad : g \mapsto Ad_g \in Diff(G) \qquad Ad_g = T_e I_g = T_e(r_{g^{-1}}\ell_g)_e \in Aut(\mathfrak{g}) \tag{4.1.1}$$

Por exemplo se $G = G\ell(n, \mathbb{R})$, então como $I_A(B) = ABA^{-1}$, derivando em $e = \mathbf{1}$, obtemos:

$$T_{\mathbf{1}} I_A(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0} A\xi(t)A^{-1} = A\xi A^{-1} \qquad \xi \in \mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R})$$

onde $\xi(t)$ é uma curva que passa em $\mathbf{1}$ no instante $t = 0$, à velocidade $\xi \in \mathfrak{g}\ell(n, \mathbb{R})$.

(iii). "Representação Coadjunta de G no dual da sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$" ... Define-se pondo para cada $g \in G$:

$$Ad^* : g \mapsto Ad^*_{g^{-1}} \in Aut(\mathfrak{g}^*)$$

onde $Ad^*_g \in Aut(\mathfrak{g}^*)$ igual à transposta de Ad_g, isto é:

$$\langle Ad^*_g(\alpha), \xi\rangle = \langle \alpha, Ad_g(\xi)\rangle \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*,\ \forall \xi \in \mathfrak{g} \tag{4.1.2}$$

Os G-espaços que nos vão interessar são os chamados espaqs homogéneos que para já definimos da seguinte forma. Seja $H \subset G$ um subgrupo fechado de um grupo de Lie G. Então a multiplicação no grupo define uma acção direita de H em G, $G\times H \to G$, através de $(g, h) \mapsto gh$. O espaço de órbitas G/H das classes gH diz-se um espaço homogéneo. O grupo G actua à esquerda de G/H através de:

$$G \times G/H \to G/H, \qquad (g, xH) \mapsto gxH$$

O resultado fundamental àcerca de espaços homogéneos é o seguinte:

♣ <u>**Teorema**</u> **4.1** ... *Seja G um grupo de Lie e H um seu subgrupo fechado. Então G tem uma estrutura de H-fibrado principal, cujo espaço total é G, a base é G/H, o grupo de estrutura é H (actuando à direita de G por multiplicação à direita), e a projecção é $\pi : g \mapsto gH$. Em particular, G/H é uma variedade diferenciável e π é uma submersão.*

- <u>Demonstração</u>...

- A topologia que consideramos em G/H é a topologia quociente relativamente à projecção $\pi : G \to G/H$, $x \mapsto xH$, isto é, $U \subset G/H$ é aberto se e só se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em G. Com esta topologia π é aberta. De facto, se W é aberto em G, então $\pi^{-1}(\pi(W)) = \cap_{h\in H} Wh$ que é aberto em G, e portanto $\pi(W)$ é aberto em G/H. Além disso, G/H é Hausdorff. De facto, consideremos o conjunto:

  $$\mathcal{R} = \{(x, y) \in G \times G : \ x = yh \ \text{ para algum } h \in H\,\}$$

  Então $\mathcal{R}$ é fechado em $G \times G$, já que H é fechado e $\mathcal{R} = \alpha^{-1}(H)$ onde α é a aplicação contínua $\alpha : G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto y^{-1}x$. Consideremos agora dois pontos distintos $xH \neq yH$ em G/H. Então $(x, y) \notin \mathcal{R}$, e portanto existem vizinhanças V de x e W de y em G, tais que $(V \times W) \cap \mathcal{R} = \emptyset$. Então como π é aberta, $\pi(V)$ e $\pi(W)$ são vizinhanças abertas disjuntas de xH e yH em G/H (caso contrário, existiria $v \in V$ e $w \in W$ tais que $\pi(v) = \pi(w)$, e portanto $(v, w) \in (V \times W) \cap \mathcal{R}$, o que é absurdo), o que prova que G/H é Hausdorff.

- G é localmente trivial sobre G/H, isto é, para cada ponto $x \in G/H$ existe uma vizinhança U e uma trivialização equivariante:

  $$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times H \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

tal que $\phi(gh) = \phi(g)\, h$. De facto, consideremos um produto interno em $\mathfrak{g}$, e seja $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{h}$ uma decomposição ortogonal da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Seja $V_\epsilon = \{v \in V : \|v\| < \epsilon\}$ e $D_\epsilon = \exp V_\epsilon$. Chamamos a D_ϵ uma secção transversal a H em e. Vamos mostrar que, se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então a aplicação:

$$\mu : D_\epsilon \times H \to G \qquad\qquad \mu : (g,h) \mapsto gh$$

é um mergulho aberto.

De facto a diferencial de $d\mu_{(e,e)} : V \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$, é a identidade em ambos os somandos $T_e D_\epsilon = V$ e $T_e H = \mathfrak{h}$ de $T_{(e,e)}(D_\epsilon \times H) \cong V \oplus \mathfrak{h}$. Pelo teorema da inversão local, μ é um difeomorfismo de $D_\epsilon \times U$ sobre $D_\epsilon U$, para alguma vizinhança de e em H, e para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Note que isto implica que μ é um difeomorfismo local, uma vez que $\mu|_{(D_\epsilon \times Uh)} = h \circ (\mu_{D_\epsilon \times U}) \circ h^{-1}$.

Resta mostrar que μ é injectiva desde que $\epsilon > 0$ seja suficientemente pequeno. Sejam $d_1, d_2 \in D_\epsilon$ e $h_1, h_2 \in H$ tais que $d_1 h_1 = d_2 h_2$. Pondo $h = h_1 h_2^{-1}$, temos que $d_1 h = d_2$ e podemos escolher ϵ, de tal forma que d_1 e d_2 estejam tão próximos da unidade que $h = d_1 d_2^{-1}$ esteja em U. Como μ é injectiva em $D_\epsilon \times U$ e $\mu(d_1, h) = \mu(d_2, e)$, obtemos que $h_1 = h_2$ e $d_1 = d_2$, o que mostra que μ é globalmente injectiva.

- Para terminar, observamos que os conjuntos:

$$U_g = g D_\epsilon H \qquad\qquad g \in G$$

são H-invariantes, e que U_g/H, $g \in G$, constituem uma cobertura aberta de G/H para a qual podemos construir um atlas para a estrutura de variedade em G/H, e para a estrutura de H-fibrado principal de G sobre G/H. Cartas para G/H são dadas pelas aplicações $h_g : U_g/H \to D_\epsilon$ cujas inversas são definidas pela composição:

$$h_g^{-1} : D_\epsilon = D_\epsilon \times e \subset d_\epsilon \times H \xrightarrow{\mu} D_\epsilon H \xrightarrow{g} g D_\epsilon H = U_g \xrightarrow{\pi} U_g/H$$

Cartas para o fibrado são dadas pelos difeomorfismos ϕ_g com inversos:

$$\phi_g^{-1} : U_g/H \times H \xrightarrow{h_g \times \mathrm{Id}} D_\epsilon \times H \xrightarrow{\mu} D_\epsilon H \xrightarrow{g} g D_\epsilon H = U_g$$

$\square$.

♣ <u>**Definição**</u> **4.2** ... *Um* **"espaço homogéneo de um grupo de Lie** G**"** *é uma variedade M munida de uma acção esquerda diferenciável transitiva de G em M.*

♣ <u>**Teorema**</u> **4.2** ... *Se M é um espaço homogéneo de um grupo de Lie G, e se $x \in M$, então a aplicação $\Phi_x : G/G_x \to M$, $gG_x \mapsto g \cdot x$ é um difeomorfismo.*

- <u>Demonstração</u>... Note que Ψ está bem definida (já que $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x$, $\forall h \in G_x$), é injectiva (já que $\Psi(aG_x) = \Psi(bG_x) \Rightarrow b^{-1}a \cdot x = x \Rightarrow b^{-1}a \in G_x \Rightarrow aG_x = bG_x$), e também sobrejectiva uma vez que a acção é transitiva. Como a aplicação orbital $\Phi_x(g) = g \cdot x$ é C^∞, também o é Ψ. Resta mostrar que Ψ é imersiva, isto é, que a sua diferencial é injectiva em cada ponto. Mas Ψ é G-equivariante e portanto tem rank constante. Como é injectiva deve ser imersiva, pelos resultados da secção 1.6,

$\square$.

4.2 Exemplos

- $SS^{n-1} \cong \frac{SO(n)}{SO(n-1)}$

  O grupo $SO(n)$ actua linearmente em $\mathbb{R}^n$, e acção é transitiva quando restrita a SS^{n-1}. O vector $\mathbf{e}_n = (0, \cdots, 0, 1) \in SS^{n-1}$ tem grupo de isotropia $SO(n-1) \subset SO(n)$, e portanto temos um difeomorfismo:

$$SO(n)/SO(n-1) \to SS^{n-1}, \quad [A] \mapsto A\mathbf{e}_n$$

  e um $SO(n-1)$-fibrado principal:

$$SO(n-1) \to SO(n) \to SS^{n-1}$$

- $SS^{2n-1} \cong \frac{U(n)}{U(n-1)}$

  O grupo unitário $U(n)$ actua linearmente em $\mathbb{C}^n$, e acção é transitiva quando restrita a $SS^{2n-1} = \{\mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n : \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = 1\}$. O vector $\mathbf{e}_n = (0, \cdots, 0, 1) \in SS^{2n-1}$ tem grupo de isotropia $U(n-1) \subset U(n)$, e como no exemplo anterior obtemos um difeomorfismo $U(n)/U(n-1) \cong SS^{2n-1}$ e $U(n-1)$-fibrado principal:

$$U(n-1) \to U(n) \to SS^{2n-1}$$

  Anàlogamente se deduz que $\frac{SU(n)}{SU(n-1)} \cong SS^{2n-1}$, e ainda que $\frac{Sp(n)}{Sp(n-1)} \cong SS^{4n-1}$.

- $\mathbb{RP}(n) = \frac{G\ell(n+1,\mathbb{R})}{H}$

  Seja $\mathbb{RP}(n)$ o espaço projectivo real das rectas vectoriais em $\mathbb{R}^{n+1}$, e $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}(n)$ a projecção canónica. Cada $A \in G\ell(n+1, \mathbb{R})$ induz uma aplicação em $\mathbb{RP}(n)$, notada ainda por A e definida por $A\pi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(A\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$. Fica assim definida uma acção transitiva de $G\ell(n+1, \mathbb{R})$ em $\mathbb{RP}(n)$. O grupo de isotropia de $\pi(\mathbf{e}_{n+1})$, onde $\mathbf{e}_{n+1} = (0, \cdots, 0, 1)$, é o subgrupo fechado H de $G\ell(n+1, \mathbb{R})$ que consiste das matrizes do tipo:

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & **** & * & a \end{bmatrix} \qquad \text{onde} \quad a \neq 0 \ \ e \ \ A \in G\ell(n, \mathbb{R})$$

  Portanto $\mathbb{RP}(n) = \frac{G\ell(n+1,\mathbb{R})}{H}$. Da mesma forma se prova que $\mathbb{RP}(n) = \frac{SO(n+1,\mathbb{R})}{H'}$, onde agora H' é o subgrupo fechado H de $G\ell(n+1, \mathbb{R})$ que consiste das matrizes do tipo:

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & A & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} \qquad \text{onde} \quad a = \pm 1, \ A \in O(n, \mathbb{R}) \quad e \quad a \cdot \det A = 1$$

- $\mathbb{CP}(n-1) \cong \frac{SU(n)}{U(n-1)}$

  O grupo especial unitário $SU(n)$ actua linearmente em $\mathbb{C}^n$, e a acção induzida no espaço projectivo $\mathbb{CP}(n-1)$ é transitiva. O grupo de isotropia do ponto $x = \mathbb{C}\{\mathbf{e}_n\} \in \mathbb{CP}(n-1)$, consiste das matrizes que são da forma:

$$\begin{bmatrix} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \\ \cdots & \alpha \end{bmatrix} \in SU(n)$$

  Este grupo de isotropia é a imagem do mergulho:

$$U(n-1) \to SU(n) \qquad A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha = (\det A)^{-1}$$

  Portanto interpretando desta forma $U(n-1)$ como um subgrupo fechado em $SU(n)$, temos um fibrado principal:

$$U(n-1) \to SU(n) \to \mathbb{CP}(n-1)$$

  De forma análoga se obtem um fibrado principal:

$$O(n-1) \to SO(n) \to \mathbb{RP}(n-1)$$

- $\mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n) \cong \frac{O(n)}{O(n-k)}$

  A variedade de Stiefel $\mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n)$ é contituída por todas as sequências ordenadas de k vectores ortonormais em $\mathbb{R}^n$. O grupo ortogonal $O(n)$ actua transitivamente em $\mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n)$, através de:

$$A \cdot (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = (A\mathbf{v}_1, \cdots, A\mathbf{v}_k)$$

  e o grupo de isotropia do ponto $x = (\mathbf{e}_{n-k+1}, \cdots, \mathbf{e}_n) \in \mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n)$ é $O(n-k)$. Portanto:

$$\frac{O(n)}{O(n-k)} \cong \mathbf{V}_k(\mathbb{R}^n) \qquad [A] \mapsto Ax$$

- $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \cong \frac{O(n)}{O(k)\times O(n-k)}$

  Seja $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ a Grassmanniana dos k-planos em $\mathbb{R}^n$. É claro que $O(n)$ actua transitivamente em $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$, e o grupo de isotropia do k-plano gerado pelos primeiros k vectores da base canónica de $\mathbb{R}^n$, $x = \mathbb{R}\langle \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_k\rangle \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$, é o subgrupo fechado $O(k) \times O(n-k) \subset O(n)$, mergulhado em $O(n)$ através de $(A, B) \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$. Portanto:

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/(O(k) \times O(n-k))$$

  De forma análoga:

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \cong U(n)/(U(k) \times U(n-k))$$

  E:

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{H}^n) \cong Sp(n)/(Sp(k) \times Sp(n-k))$$

- **"Variedades Flag completas"**

  Considere o conjunto:

  $$\mathbf{F}\ell(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{(S_1, S_2, \cdots, S_n) : S_j \text{ são subespaços de } \mathbb{R}^n \text{ de dimensão } j,\ j = 1, 2, \cdots, n \text{ e tais que } S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n\} \tag{4.2.1}$$

  $\mathbf{F}\ell(\mathbb{R}^n)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $d = n(n-1)$, a que chamamos "Variedade Flag completa" (bandeira) em $\mathbb{R}^n$. $G\ell(n, \mathbb{R})$ actua transitivamente em $\mathbf{F}\ell(\mathbb{R}^n)$. De facto se $x = (S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n)$ e $x' = (S'_1 \subset S'_2 \subset \cdots \subset S'_n)$ são dois pontos em $\mathbf{F}\ell(\mathbb{R}^n)$, escolhemos bases $(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ e $(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_n)$ para $\mathbb{R}^n$ tais que $S_j = \mathbb{R}\langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_j\rangle$ e $S'_j = \mathbb{R}\langle \mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_j\rangle$, respectivamente $(j = 1, \cdots, n)$. Então existe $A \in G\ell(n, \mathbb{R})$ tal que $A\mathbf{v}_j = \mathbf{w}_j$, $(j = 1, \cdots, n)$, e é claro que este A satisfaz $Ax = x'$. Consideremos agora a flag $x_0 = (S_1^0 \subset S_2^0 \subset \cdots \subset S_n^0)$, com $S_j^0 = \mathbb{R}\langle \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_j\rangle$, onde $(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$. O grupo de isotropia de x_0 é o o subgrupo fechado H de $G\ell(n, \mathbb{C})$ que consiste das matrizes triangulares superiores:

  $$\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{bmatrix}$$

4.3 Forma de Maurer-Cartan. Equações de estrutura de um grupo de Lie

Seja G um grupo de Lie de dimensão $r = \dim G$, e $\mathfrak{g} \cong T_eG \cong \mathfrak{X}_\ell(G)$ a respectiva álgebra de Lie. A **forma de Maurer-Cartan** é, por definição, a 1-forma $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_G : TM \to \mathfrak{g}$, invariante à esquerda, definida por:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_g(v) = \ell_{g^{-1}*}(v), \qquad v \in T_gG}$$

Quando H é um subgrupo de G, então $\boldsymbol{\omega}_H = \boldsymbol{\omega}_G|_H$.

Se $\{X_1, \cdots, X_r\}$ é uma base para a álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong T_eG$, e se $\{\omega^1, \cdots, \omega^r\}$ é a respectiva base dual para $\mathfrak{g}^*$, então podemos escrever:

$$\boldsymbol{\omega}_G = \sum_a \omega^a \otimes X_a \tag{4.3.1}$$

onde as formas ω^a são invariantes à esquerda ($\ell_g^*\omega^a = \omega^a$, $\forall g \in G$). Suponhamos ainda que:

$$[X_a, X_b] = \sum_c C_{ab}^c X_c \tag{4.3.2}$$

onde C_{ab}^c são as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$. Utilizemos a fórmula $d\theta(X, Y) = X\theta(Y) + Y\theta(X) - \theta([X, Y])$, válida para qualquer 1-forma θ, quando $X = X_a, Y = X_c$ são campos invariantes à esquerda e quando $\theta = \omega^c$. Neste caso $\omega^c(X_a)$ e $\omega^c(X_b)$ são constantes e, por outro lado, $\omega^c([X_a, X_b]) = \omega^c(C_{ab}^c X_c) = C_{ab}^c$. Portanto:

$$d\omega^c(X_a, X_b) = -\omega^c([X_a, X_b]) = -C_{ab}^c \tag{4.3.3}$$

Pondo por definição, para cada $a = 1, 2, \cdots, r = \dim G$:

$$\begin{aligned} d(\omega^a \otimes X_a) &= d\omega^a \otimes X_a \\ \left[\omega^a \otimes X_a, \omega^b \otimes X_b\right] &= \omega^a \wedge \omega^b \otimes [X_a, X_b] \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

vem então que :

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\omega}_G(X_a, X_b) &= d\left(\sum_c \omega^c \otimes X_c\right)(X_a, X_b) \\ &= \sum_c d\omega^c(X_a, X_b)\, X_c \\ &= \sum_c -\omega^c([X_a, X_b])\, X_c \\ &= -\sum_c C_{ab}^c\, X_c \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\omega}_G, \boldsymbol{\omega}_G](X_a, X_b) &= \sum_{c,d} \left[\omega^c \otimes X_c, \omega^d \otimes X_d\right](X_a, X_b) \\ &= \sum_{c,d} \omega^c \wedge \omega^d(X_a, X_b)\ [X_c, X_d] \\ &= \sum_{c,d,e} (\delta_a^c \delta_b^d - \delta_b^c \delta_a^d)\, C_{cd}^e X_e \\ &= \sum_e (C_{ab}^e - C_{ba}^e)\, X_e \\ &= 2\sum_c C_{ab}^c\, X_c \end{aligned}$$

Comparando os dois cálculos, deduzimos as chamadas **equações de estrutura de Maurer-Cartan do grupo de Lie** G:

$$\boxed{d\boldsymbol{\omega}_G + \tfrac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}_G, \boldsymbol{\omega}_G] = 0} \tag{4.3.5}$$

Os cálculos anteriores mostram ainda que estas equações de estrutura podem ser escritas na forma de um sistema de n equações:

$$\boxed{d\omega^c + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{ab} C_{ab}^c\, \omega^a \wedge \omega^b = 0, \qquad c = 1, 2, \cdots, r} \tag{4.3.6}$$

onde $\boldsymbol{\omega}_G = \sum_c \omega^c \otimes X_c$. A integrabilidade deste sistema é de facto equivalente às identidades de Jacobi da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

De acordo com E. Cartan (ver [Car ?], pag.16), um sistema de referenciais para uma geometria de Klein $M = G/H$, é um conjunto de "figuras" $\mathcal{F}(M) = \{\mathcal{R}_g : g \in G\}$ em M que está em correspondência bijectiva com os elementos do grupo G:

$$\mathcal{R}_g \quad \longleftrightarrow \quad g$$

Se pudermos encontrar uma figura particular $\mathcal{R}_0$, tal que toda a transformação Φ_g ($\neq$ Id) transforme $\mathcal{R}_0$ numa figura distinta $\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0$, então a família:

$$\mathcal{F}(M) = \{\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0 : \, g \in G\}$$

constitui um sistema de referenciais, a que chamamos o **sistema de G-referenciais do espaço homogéneo** $M = G/H$ (deduzido do referencial fixo (absoluto) $\mathcal{R}_0$). Por exemplo, quando G actua simplesmente transitivamente em M, então os pontos de M constitutem um sistema de G-referenciais de M (considere por exemplo a acção de G em si próprio por multiplicações à esquerda ℓ_g).

Munimos $\mathcal{F}(M)$ de estrutura de variedade diferenciável de tal forma que a correspondência $\mathcal{R}_g \quad \longleftrightarrow \quad g$, seja um difeomorfismo. A acção de G em M, induz então uma acção de G no conjunto dos referenciais $\mathcal{F}(M)$:

$$\Phi : G \longrightarrow Diff(\mathcal{F}(M)), \qquad g \mapsto \Phi_g : \mathcal{R}_{g'} \mapsto \mathcal{R}_{gg'} \tag{4.3.7}$$

É claro que, do ponto de vista formal, podemos identificar o conjunto $\mathcal{F}(M)$, com o conjunto dos elementos do grupo G, obtendo desta forma uma descrição abstracta de um sistema de G-referenciais do espaço homogéneo $M = G/H$. Usaremos por isso sistemàticamente a identificação:

$$\begin{array}{ccc} G & \longleftrightarrow & \mathcal{F}(M) \\ g & \longleftrightarrow & \mathcal{R}_g \end{array} \tag{4.3.8}$$

Veja o exemplo familiar da geometria afim em $\mathbb{R}^n$ (exemplo 4.1), nomeadamente a identificação (ver (4.4.9)):

$$\begin{array}{rccc} \iota : & GA(n) & \longleftrightarrow & \mathcal{R}(\mathbb{R}^n) \\ & g = (x, A) & \longleftrightarrow & \mathcal{R}_{(x,A)} = (x\,; \mathbf{E} = \mathbf{e} \cdot A) \end{array}$$

Note que a correpondência (4.3.8) permite identificar a acção (4.3.7), de G no sistema de G-referenciais, com a acção de G em si próprio por multiplicações à esquerda ℓ_g:

$$\ell_g : G \to G \quad \longleftrightarrow \quad \Phi_g : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M) \tag{4.3.9}$$

Portanto, as formas de Maurer-Cartan e as equações de estrutura adquirem uma nova interpretação em termos de "equações de movimento" de referenciais. Por exemplo, o resultado seguinte (veja o corolário 4.1): *"Seja G um grupo de Lie conexo e $F : G \cong \mathcal{F}(M) \to G \cong \mathcal{F}(M)$ um difeomorfismo que preserva a forma de Maurer-Cartan: $F^*\boldsymbol{\omega}_G = \boldsymbol{\omega}_G$. Então $F = \ell_g$ para algum $g \in G$"*., pode ser interpretado como um resultado deste tipo, a que Cartan chama o teorema fundamental do método do referencial móvel (ver [Car?], pag. 32).

Em geometria afim um referencial afim $\mathcal{R}_{(x,A)} = (x\,; \mathbf{E} = \mathbf{e} \cdot A)$, fornece também um sistema de coordenadas para $\mathbb{R}^n$. Na situação geral de uma geometria de Klein $M = G/H$, podemos associar, de forma puramente convencional, ao referencial absoluto $\mathcal{R}_0$, inicialmente dado, um sistema de coordenadas locais dado por uma parametrização local:

$$F : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

definida num aberto U de $\mathbb{R}^n_{u^1,\cdots,u^n}$, que contem $0 \in \mathbb{R}^n$, e tal que $F(0) = o \in M$. A estas coordenadas locais vamos chamar **"coordenadas absolutas, relativas ao referencial absoluto $\mathcal{R}_0$, de "origem"** o".

Se $g \in G$, ao referencial $\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0$ associaremos então a parametrização local dada, por definição, por:

$$\begin{array}{rccc} g \cdot F : & U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & M \\ & x & \longmapsto & (\phi_g \circ F)(x) = g \cdot F(x) \end{array} \tag{4.3.10}$$

que transforma difeomòrficamente U sobre o aberto $g \cdot U \subseteq M$. $\mathcal{R}_g$ é um referencial de "origem" $g \cdot o \in M$, e, para cada $g \in G$ e $p \in g \cdot U \subseteq M$, os números:

$$(u^i) = (\phi_g \circ F)^{-1}(p)$$

dizem-se as **coordenadas relativas de p no referencial $\mathcal{R}_g$**. Portanto as coordenadas relativas de p no referencial $\mathcal{R}_g$ são, por definição as coordenadas absolutas de $g^{-1} \cdot p$ (relativas ao referencial absoluto $\mathcal{R}_0$). Por exemplo, as coordenadas relativas de $p = g \cdot o$, no referencial $\mathcal{R}_g$, são $(0, 0, \cdots, 0)$.

Fixemos um sistema de coordenadas absolutas $u = (u^i)$, relativas ao referencial absoluto $\mathcal{R}_0$, de "origem" o". Suponhamos que uma transformação $T : M \to M$, $p \mapsto T(p)$ é dada em coordenadas absolutas por $u' = T(u)$. Qual a sua expressão em coordenadas relativas a um referencial $\mathcal{R}_g$? As coordenadas relativas de um ponto $T(p)$ relativamente a $\mathcal{R}_g$, são as coordenadas absolutas de $g^{-1} \cdot T(p) = (g^{-1} \cdot T \cdot g) \cdot (g^{-1} \cdot p)$. Mas as coordenadas de $g^{-1} \cdot p$ são precisamente as coordenadas relativas de p em $\mathcal{R}_g$. Logo, em coordenadas relativas a um referencial $\mathcal{R}_g$, a transformação $T : M \to M$ é representada por $g^{-1} \cdot T \cdot g$, onde T é a sua expressão em coordenadas absolutas.

Analisemos agora a transformação que permite passar de $\mathcal{R}_g$ para um referencial "próximo" $\mathcal{R}_{g(t)}$, onde $g(0) = g$ e $g'(0) = \xi \in T_gG$. Temos que $\mathcal{R}_g = \Phi_g \cdot \mathcal{R}_0 \Rightarrow \mathcal{R}_0 = \Phi_{g^{-1}} \cdot \mathcal{R}_g$ isto é:

$$\mathcal{R}_{g(t)} = \Phi_{g(t)g^{-1}} \cdot \mathcal{R}_g$$

e portanto a transformação que permite passar de $\mathcal{R}_g$ para $\mathcal{R}_{g(t)}$, é $\Phi_{g(t)g^{-1}} \cong \ell_{g(t)g^{-1}}$. Em coordenadas relativas a $\mathcal{R}_g$, esta transformação é representada por $g^{-1} \cdot \Phi_{g(t)g^{-1}} \cdot g \cong \ell_{g^{-1}g(t)}$, cuja derivada dá a componente relativa (a $\mathcal{R}_g$) do deslocamento infinitesimal de $\mathcal{R}_g$ na direcção do vector $g'(0) = \xi \in T_gG$. Essa derivada é igual a:

$$g^{-1}\xi = \boldsymbol{\omega}_G(\xi) \in \mathfrak{g} \cong T_eG$$

onde $\boldsymbol{\omega}_G$ é a forma de Maurer-Cartan de G.

4.4 Exemplos. Equações de estrutura de alguns grupos clássicos

Nesta secção vamos analisar as equações de estrutura de alguns grupos clássicos.

- ♣ **Exemplo 4.1** ... **o Grupo Afim** $GA(n)$

Consideremos o espaço $\mathbb{R}^n$ com a sua estrutura afim canónica. Uma **bijecção afim** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que é da forma:

$$g : P \mapsto x + A(P), \qquad P \in \mathbb{R}^n \tag{4.4.1}$$

onde $A \in GL(n, \mathbb{R})$ é uma aplicação linear inversível, chamada a **aplicação linear homogénea** associada a g. As bijecções afins de $\mathbb{R}^n$ constituem um grupo $GA(n)$, chamado **grupo afim** de $\mathbb{R}^n$, que pode ser identificado com o subgrupo de $GL(n+1, \mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (x, A) \qquad \text{com} \quad A \in GL(n, \mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n \tag{4.4.2}$$

Note que o produto em $GA(n)$ é dado por:

$$(x, A)(y, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x + Ay & AB \end{bmatrix} = (x + Ay, AB)$$

e que:

$$(x, A)^{-1} = (-A^{-1}x, A^{-1})$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n)$ do grupo afim de $\mathbb{R}^n$, pode ser identificada com a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ constituída pelas matrizes da forma:

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & a \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus a \qquad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathfrak{gl}(n) \tag{4.4.3}$$

O parêntisis de Lie em $\mathfrak{ga}(n)$ é dado por:

$$[x \oplus a, y \oplus b] = (ay - bx) \oplus [a, b] \tag{4.4.4}$$

e a representação adjunta de $GA(n)$ em $\mathfrak{ga}(n)$, por:

$$Ad_{(x,A)}(y \oplus b) = (-AbA^{-1}x + Ay) \oplus (AbA^{-1}) \tag{4.4.5}$$

Portanto:

$$\mathfrak{ga}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n)$$

Esta soma directa é reductiva:

$$Ad_{GA(n)}\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \tag{4.4.6}$$

De facto:

$$Ad_{(x,A)}(y \oplus 0) = Ay \oplus 0,\ \forall (x, A) \in GA(n),\ \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{4.4.7}$$

Uma bijecção afim $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fica completamente determinada pelo ponto $x = g(0) \in \mathbb{R}^n$ no qual ela transforma a origem $0 \in \mathbb{R}^n$, e pelos vectores $E_1 = A(e_1), \cdots, E_n = A(e_n)$ nos quais a aplicação linear homogénea A, associada a g, transforma os vectores $e_1, \cdots, e_n$ da base canónica de $\mathbb{R}^n$. Usámos a notação matricial já conhecida:

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 & \cdots & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \cdot A$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \cdot A$$

Um **referencial afim** em $\mathbb{R}^n$ é uma sequência da forma:

$$\mathcal{R} = (x\,; E_1, \cdots, E_n) \in \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n\,\text{factores}} \tag{4.4.8}$$

onde x é um ponto de $\mathbb{R}^n$, chamado a origem do referencial $\mathcal{R}$, e $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Representámos o referencial (4.4.8) por:

$$\mathcal{R} = (x; \mathbf{E})$$

O conjunto de todos os referenciais afins em $\mathbb{R}^n$ está em correspondência bijectiva com o grupo afim $GA(n)$, e é um aberto de $\mathbb{R}^{(n+1)n}$, que notamos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{array}{rccc} \iota: & GA(n) & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \\ & g = (x, A) & \longleftrightarrow & \mathcal{R}_g = (x\,; \mathbf{E} = \mathbf{e} \cdot A) \end{array} \tag{4.4.9}$$

Calculemos agora a forma de Maurer-Cartan do grupo afim $G = GA(n)$. Pondo $g = (A, x)$ vem que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_G &= g^{-1}dg = (x, A)^{-1}d(x, A) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ dx & dA \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1}x & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ dx & dA \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^{-1}dx & A^{-1}dA \end{bmatrix} \\ &= A^{-1}dx \oplus A^{-1}dA \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\theta}^i \oplus \boldsymbol{\omega}^i_j \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

que é uma 1-forma diferencial em $GA(n)$, invariante à esquerda, com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n)$. Com $A = (A^i_j) \in GL(n, \mathbb{R})$ e $x = (x^i) \in \mathbb{R}^n$, temos explìcitamente que as componentes da forma de Maurer-Cartan são:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^i &= (A^{-1})^i_j dx^j && \text{para a } \mathbb{R}^n\text{−componente} \\ \boldsymbol{\omega}^i_j &= (A^{-1})^i_k dA^k_j && \text{para a } \mathfrak{gl}(n)\text{−componente} \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

As **equações de estrutura do espaço afim** $\mathbb{R}^n$ são:

$$\begin{aligned} 0 &= d\boldsymbol{\omega}_G + \boldsymbol{\omega}_G \wedge \boldsymbol{\omega}_G \\ &= d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{\theta}^i & \boldsymbol{\omega}^i_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{\theta}^i & \boldsymbol{\omega}^i_j \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{\theta}^i & \boldsymbol{\omega}^i_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d\boldsymbol{\theta}^i + \boldsymbol{\omega}^i_k \boldsymbol{\theta}^k & d\boldsymbol{\omega}^i_j + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\omega}^k_j \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

isto é:

$$\boxed{\left\{ \begin{aligned} d\boldsymbol{\theta}^i + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\theta}^k &= 0 \\ d\boldsymbol{\omega}^i_j + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\omega}^k_j &= 0 \end{aligned} \right.} \tag{4.4.13}$$

Vejamos qual o significado geométrico (cinemático) destas equações, em termos de referenciais em $\mathbb{R}^n$, usando a correspondência (4.4.9).

Em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ estão definidas naturalmente funções (equivariantes) de classe C^∞, com valores em $\mathbb{R}^n$, que são as projecções em cada um dos $(n+1)$ factores de $\mathbb{R}^{(n+1)n}$. Essas funções são notadas tradicionalmente (de forma abusiva!) por:

$$\begin{array}{rcl} x : \mathcal{R} = \{x\,; E_1, \cdots, E_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) & \longmapsto & x(\mathcal{R}) = x \\ E_1 : \mathcal{R} = \{x\,; E_1, \cdots, E_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) & \longmapsto & E_1(\mathcal{R}) = E_1 \\ & \vdots & \\ E_n : \mathcal{R} = \{x\,; E_1, \cdots, E_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) & \longmapsto & E_n(\mathcal{R}) = E_n \end{array} \tag{4.4.14}$$

Podemos por isso considerar as respectivas diferenciais:

$$dx\,; dE_1, \cdots, dE_n \in \Omega^1\left(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n\right)$$

que são $1-$formas diferenciais em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, com valores em $\mathbb{R}^n$. Para cada referencial fixo $\mathcal{R} = \{x\,; E_1, \cdots, E_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, sabemos que $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, se $\xi \in T_\mathcal{R}\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é um "deslocamento infinitesimal" do referencial $\mathcal{R}$, então $dx|_\mathcal{R}(\xi), dE_1|_\mathcal{R}(\xi), \cdots, dE_n|_\mathcal{R}(\xi)$ são vectores de $\mathbb{R}^n$ e podemos por isso escrever cada um destes vectores como combinação linear dos elementos da base $\{E_1 = E_1(\mathcal{R}), \cdots, E_n = E_n(\mathcal{R})\}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} dx|_\mathcal{R}(\xi) & = & \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\theta}^i|_\mathcal{R}(\xi)\, E_i(\mathcal{R}) \\ dE_1|_\mathcal{R}(\xi) & = & \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_1^i|_\mathcal{R}(\xi)\, E_i(\mathcal{R}) \\ & \vdots & \\ dE_n|_\mathcal{R}(\xi) & = & \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_n^i|_\mathcal{R}(\xi)\, E_i(\mathcal{R}) \end{array}\right.$$

ou mais sucintamente:

$$\left\{\begin{array}{rcl} dx & = & \boldsymbol{\theta}^i\, E_i \\ dE_j & = & \boldsymbol{\omega}_j^i\, E_i \quad j = 1, \cdots, n \end{array}\right. \tag{4.4.15}$$

onde $\{\boldsymbol{\theta}^i\}_{1\leq i\leq n}$ e $\{\boldsymbol{\omega}_i^j\}_{1\leq i,j\leq n}$ são $1-$formas diferenciais usuais (escalares) em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ (ao todo $n+n^2$ formas). O significado destas formas é claro - se $\xi \in T_\mathcal{R}\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é um "deslocamento infinitesimal" do referencial $\mathcal{R}$, então $\left(\boldsymbol{\theta}^i|_\mathcal{R}(\xi)\right)$ são **as componentes relativas** (no referencial $\mathcal{R}$) do "deslocamento infinitesimal" $dx|_\mathcal{R}(\xi)$ da origem do referencial $\mathcal{R}$, enquanto que, para cada $j = 1, \cdots, n$ fixo, $\left(\boldsymbol{\omega}_j^i|_\mathcal{R}(\xi)\right)$ são **as componentes relativas** (no referencial $\mathcal{R}$) do "deslocamento infinitesimal" $dE_j|_\mathcal{R}(\xi)$ do vector E_j do referencial $\mathcal{R}$, isto é, $\boldsymbol{\omega}_j^i|_\mathcal{R}(\xi)$ é a componente relativa (a $\mathcal{R}$) do "deslocamento infinitesimal" do vector E_j na direcção do vector E_i.

É claro que estas formas $\boldsymbol{\theta}^i, \boldsymbol{\omega}_j^i$ coincidem com as que atrás foram definidas em (4.4.11). As equações de estrutura, neste contexto, não são mais do que consequência de que $d^2x = d^2E_i = 0$. De facto, derivando ambos os membros da primeira equação em (**??**) obtemos:

$$\begin{array}{rcll} 0 = ddx & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n \left(E_i d\boldsymbol{\theta}^i + dE_i \wedge \boldsymbol{\theta}^i\right) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^n \left(E_i d\boldsymbol{\theta}^i + \left(\sum_{j=1}^n \boldsymbol{\omega}_i^j\, E_j\right) \wedge \boldsymbol{\theta}^i\right) & \quad \text{atendendo a (4.4.15)} \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^n \left(d\boldsymbol{\theta}^j + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i^j \wedge \boldsymbol{\theta}^i\right) E_j & \end{array}$$

e como os E_i são linearmente independentes, deduzimos que:

$$d\boldsymbol{\theta}^j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i^j \wedge \boldsymbol{\theta}^i = 0, \qquad \forall j = 1, \cdots, n \tag{4.4.16}$$

Anàlogamente, derivando ambos os membros da segunda equação em (**??**), deduzimos que:

$$d\boldsymbol{\omega}_i^j + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_k^j \wedge \boldsymbol{\omega}_i^k = 0, \qquad \forall i, j = 1, \cdots, n \tag{4.4.17}$$

As equações (4.4.16) e (4.4.17) são exactamente as equações de estrutura obtidas em (4.4.13).

Nota... Do ponto de vista da teoria de fibrados principais, a aplicação:

$$x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \cong GA(n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dá origem ao fibrado principal $GA(n) \to \mathbb{R}^n = GA(n)/GL(n)$, com grupo de estrutura $GL(n)$. Neste contexto, a 1-forma $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}^i)$, definida em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e com valores em $\mathbb{R}^n$, é a chamada **forma canónica (ou forma de soldagem)** do fibrado de referenciais $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, enquanto que a 1-forma $w = (\boldsymbol{\omega}_j^i)$, definida em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e com valores em $\mathfrak{g}l(n)$ é a chamada **forma de conexão**. A equação de estrutura (4.4.16) diz que esta conexão tem torção nula, enquanto que a segunda equação de estrutura (4.4.17) diz que esta conexão tem curvatura nula.

- ♣ **Exemplo 4.2** ... **O Grupo Euclideano especial $SE(n)$**

Uma bijecção afim $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diz-se um **"movimento rígido"** de $\mathbb{R}^n$, se é da forma:

$$g : P \mapsto x + A(P), \qquad P \in \mathbb{R}^n \tag{4.4.18}$$

onde a aplicação linear homogénea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada a g, é uma aplicação ortogonal que preserva a orientação usual de $\mathbb{R}^n$, i.e., $A \in SO(n, \mathbb{R})$.

Os movimentos rígidos de $\mathbb{R}^n$ constituem um grupo $SE(n)$, chamado o **grupo Euclideano especial** de $\mathbb{R}^n$, que pode ser identificado com o subgrupo de $SL(n+1, \mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (x, A) \qquad \text{com} \quad A \in SO(n),\, x \in \mathbb{R}^n \tag{4.4.19}$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{se}(n)$ do grupo Euclideano especial de $\mathbb{R}^n$, pode ser identificada com a subálgebra de Lie de $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{R})$ constituída pelas matrizes da forma:

$$(x, a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & a \end{bmatrix} = x \oplus a \qquad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^n,\, a \in \mathfrak{so}(n) \tag{4.4.20}$$

Repetindo os argumentos do exemplo anterior, com a única alteração de que agora a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$ é constituída por matrizes anti-simétricas: $a + a^t = 0$, deduzimos as

equações de estrutura do espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\begin{cases} d\boldsymbol{\theta}^i + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\theta}^k &= 0 \\ d\boldsymbol{\omega}^i_j + \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\omega}^k_j &= 0 \\ \boldsymbol{\omega}^i_j + \boldsymbol{\omega}^j_i &= 0 \end{cases}} \tag{4.4.21}$$

- ♣ Exemplo 4.3 ... Vamos considerar o caso particular do espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$. Seja $\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3)$ o conjunto de todos os referenciais ortonormados positivos em $\mathbb{R}^3$. Como vimos, $\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3)$ está em correspondência bijectiva com o grupo Euclideano especial $SE(3)$, e é uma variedade de dimensão 6 em $\mathbb{R}^{12}$. As equações de estrutura (4.4.21), têm neste caso o aspecto seguinte:

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\theta}^i + \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\theta}^k &= 0 \\ d\boldsymbol{\omega}^i_j + \sum_{k=1}^3 \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\omega}^k_j &= 0 \\ \boldsymbol{\omega}^i_j + \boldsymbol{\omega}^j_i &= 0 \end{cases} \tag{4.4.22}$$

$\forall i, j = 1, \cdots, 3$. Vamos pôr estas equações em forma matricial. Para isso pômos:

$$\boldsymbol{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^2 \\ \boldsymbol{\theta}^3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}^1_2 & \boldsymbol{\omega}^1_3 \\ \boldsymbol{\omega}^1_2 & 0 & -\boldsymbol{\omega}^2_3 \\ -\boldsymbol{\omega}^1_3 & \boldsymbol{\omega}^2_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.4.23}$$

de tal forma que $\boldsymbol{\theta}$ é uma $1-$forma em $\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3)$ com valores em $\mathbb{R}^3$, e $\boldsymbol{\omega}$ uma $1-$forma em $\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3)$ com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ do grupo $SO(3)$. As equações de estrutura (4.4.22) ficam então na forma matricial seguinte:

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\theta} &= 0 \\ d\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega} &= 0 \end{cases} \tag{4.4.24}$$

$\boldsymbol{\theta} \in \Omega^1(\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3), \mathbb{R}^3)$ diz-se a **forma de soldagem** em $\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3)$, e $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^1\left(\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3), \mathfrak{so}(3)\right)$ a **forma de conexão** usual em $\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3)$. A primeira equação de estrutura (4.4.24) diz que $\boldsymbol{\omega}$ tem torção nula, enquanto que a segunda diz que $\boldsymbol{\omega}$ tem curvatura nula.

Note que o grupo $SO(3)$ actua em $\mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3)$: se $\mathcal{R} = \{x\,; E_1, E_2, E_3\}$ é um referencial e $g \in SO(3)$ então $\mathcal{R} \cdot A = \{x\,; \widehat{E}_1, \widehat{E}_2, \widehat{E}_3\}$, onde:

$$\left[\widehat{E}_1 \ \ \widehat{E}_2 \ \ \widehat{E}_3\right] = [E_1 \ \ E_2 \ \ E_3] \cdot A, \qquad A \in SO(3)$$

As fibras da projecção $x : \mathcal{FO}^+(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ são exactamente as órbitas desta acção.

- ♣ Exemplo 4.4 ... **Grupo afim unimodular ou especial afim $SA(n)$.**

Vejamos as equações de estrutura do grupo afim unimodular. Uma aplicação afim unimodular ou afim especial $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que é da forma:

$$g : P \mapsto x + A(P), \qquad P \in \mathbb{R}^n \tag{4.4.25}$$

onde $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tem determinante $\det A = 1$. Estas bijecções afins constituem um grupo $SA(n)$, chamado **grupo especial afim** (ou afim unimodular) de $\mathbb{R}^n$, que pode ser identificado com o subgrupo de $SL(n+1, \mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & A \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (x, A) \qquad \text{com} \quad A \in GL(n, \mathbb{R}), \;\; \det A = 1, \;\; x \in \mathbb{R}^n \tag{4.4.26}$$

O conjunto $\mathcal{FU}(\mathbb{R}^n)$ de todos os referenciais afins unimodulares em $\mathbb{R}^n$ está em correspondência bijectiva com grupo especial afim $SA(n)$:

$$\begin{array}{rccc} \iota : & SA(n) & \longrightarrow & \mathcal{FU}(\mathbb{R}^n) \\ & g = (x, A) & \longmapsto & \mathcal{R}_g = (x \,; \mathbf{E} = \mathbf{e} \cdot A) \end{array} \tag{4.4.27}$$

onde $\mathbf{E}$ é uma base unimodular de $\mathbb{R}^n$ (i.e., $\det \mathbf{E} = 1$).

As componentes relativas de um deslocamento infinitesimal de um referencial $\mathcal{R}_g = (x \,; \mathbf{E})$ são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dx & = & \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\theta}^i \, E_i \\ \\ dE_j & = & \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_j^i \, E_i \quad j = 1, \cdots, n \end{array} \right. \tag{4.4.28}$$

onde $\{\boldsymbol{\theta}^i\}_{1 \leq i \leq n}$ e $\{\boldsymbol{\omega}_i^j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ são 1−formas diferenciais usuais (escalares) em $\mathcal{RU}(\mathbb{R}^n)$, tais que:

$$\sum_i \boldsymbol{\omega}_i^i = 0 \tag{4.4.29}$$

As equações de estrutura são:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} d\boldsymbol{\theta}^i + \boldsymbol{\omega}_k^i \wedge \boldsymbol{\theta}^k & = & 0 \\ \\ d\boldsymbol{\omega}_j^i + \boldsymbol{\omega}_k^i \wedge \boldsymbol{\omega}_j^k & = & 0 \end{array} \right.} \tag{4.4.30}$$

- ♣ **Exemplo 4.5** ... **O Grupo Projectivo** $PGL(n)$

O **"Projectivo real** $\mathbb{RP}(n)$**"** define-se por:

$$\boxed{\mathbb{RP}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{\ell : \;\; \ell \text{ é subespaço de dimensão 1 em } \mathbb{R}^{n+1}\}} \tag{4.4.31}$$

ou de forma equivalente:

$$\mathbb{RP}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}/\sim \tag{4.4.32}$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência em $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ seguinte: $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ se e só se $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$\mathbb{RP}(n)$ é uma variedade diferenciável compacta de classe C^∞ e de dimensão n. Definamos a aplicação natural:

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} & \longrightarrow & \mathbb{RP}(n) \\ & x & \longmapsto & \pi(x) = [x] \quad = \text{subespaço gerado por } x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \end{array}$$

Se $x = (x^i) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ (interpretado como vector-coluna), então $(x^0, \cdots, x^n)$ dizem-se as coordenadas homogéneas de $[x]$ e escrevemos:

$$\pi(x) = [x] = [x^0, x^1, \cdots, x^n]$$

Se $(x'^0, \cdots, x'^n)$ é um outro conjunto de coordenadas homogéneas para $[x]$, então existe um $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x'^i = \lambda x^i$, $\forall i$, já que $\pi(x) = \pi(\lambda x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Usando coordenadas homogéneas definamos agora uma estrutura diferenciável (de facto analítica) em $\mathbb{RP}(n)$. Para cada $\alpha = 0, 1, \cdots, n$ definamos o subconjunto $U_\alpha \subset \mathbb{RP}(n)$ através de:

$$U_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\, [x] \in \mathbb{RP}(n) : [x] = [x^0, \cdots, x^\alpha, \cdots, x^n] \quad \text{com} \quad x^\alpha \neq 0\}$$

É evidente que cada U_α é aberto em $\mathbb{RP}(n)$, e que $\mathbb{RP}(n) = \bigcup_{\alpha=0}^n U_\alpha$. Definamos agora cartas locais $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ onde $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ se define por:

$$\boxed{\varphi_\alpha([x^0, \cdots, x^\alpha, \cdots, x^n]) = \left(\frac{x^0}{x^\alpha}, \cdots, \widehat{\frac{x^\alpha}{x^\alpha}}, \cdots, \frac{x^n}{x^\alpha}\right)} \tag{4.4.33}$$

onde $\widehat{\ }$ representa uma entrada que deve ser retirada. É fácil ver que cada φ_α é um homeomorfismo, e que as transições $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ são difeomorfismos analíticos.

Se $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ é um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^{n+1}$, então como A envia rectas em rectas (vectoriais), A induz uma aplicação $\mathbb{P}(A) : \mathbb{RP}(n) \to \mathbb{RP}(n)$, que é evidentemente um difeomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}(A): & \mathbb{RP}(n) & \longrightarrow & \mathbb{RP}(n) \\ & [x] & \longmapsto & \mathbb{P}(A)([x]) = [Ax] \end{array}$$

O conjunto de todos os difeomorfismos de $\mathbb{RP}(n)$ deste tipo constitui um grupo de Lie, notado por $PGL(n)$ e que se diz o **grupo projectivo** de $\mathbb{RP}(n)$. De facto $\mathbb{P}(A) \circ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \circ B)$ e $\mathbb{P}(A)^{-1} = \mathbb{P}(A^{-1})$. Além disso é fácil ver que, se $A, B \in GL(n+1, \mathbb{R})$, então:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \iff A = \lambda B \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

o que mostra que $PGL(n)$ é o quociente de $GL(n)$ pelo seu centro $\cong \mathbb{R} - \{0\}$.

Um sistema de coordenadas homogéneas em $\mathbb{RP}(n)$ fica univocamente determinado pelos $n+2$ pontos $P_0 = [1, 0, \cdots, 0]$, $P_1 = [0, 1, \cdots, 0], \cdots, P_n = [0, 0, \cdots, 1]$ e $P_{n+1} = [1, 1, \cdots, 1]$. Ao conjunto $\mathcal{R}_0 = \{P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}\}$ constituído por estes $n+2$ pontos chama-se **referencial absoluto de** $\mathbb{RP}(n)$. Note que os $n+1$ pontos $P_i = [e_i]$, $i = 0, \cdots, n$, onde $\{e_i\}_{i=0,\cdots,n}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, não são suficientes para determinar as coordenadas homogéneas em $\mathbb{RP}(n)$. De facto não são suficientes para determinar a base de $\mathbb{R}^{n+1}$ relativamente à qual se definem as coordenadas homogéneas, uma vez que $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ e $\{\lambda_0 e_0, \lambda_1 e_1, \cdots, \lambda_n e_n\}$ (onde $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R} - \{0\}$), são ambas bases tais que $P_i = [e_i]$. No entanto se ambas as bases referidas atribuem a P_{n+1} as coordenadas homogéneas $[1, 1, \cdots, 1]$, então isso significa que:

$$P_{n+1} = \pi(e_0 + e_1 + \cdots + e_n) = \pi(\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n)$$

o que implica que $\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \lambda(e_0 + e_1 + \cdots + e_n)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, isto é, $\lambda = \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

Concluindo: duas bases de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ e $\{e'_0, e'_1, \cdots, e'_n\}$, que sejam determinadas pelos $n+1$ primeiros pontos:

$$P_i = \pi(e_i) = \pi(e'_i), \qquad i = 0, 1, \cdots, n$$

e que atribuam ao último ponto P_{n+1} as coordenadas homogéneas $[1, 1, \cdots, 1]$:

$$P_{n+1} = \pi(e_0 + e_1 + \cdots + e_n) = \pi(e'_0 + e'_1 + \cdots + e'_n)$$

são necessàriamente proporcionais:

$$\{e'_0, e'_1, \cdots, e'_n\} = \{\lambda e_0, \lambda e_1, \cdots, \lambda e_n\}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Se agora $P \in \mathbb{RP}(n)$ é um ponto cujas coordenadas homogéneas na primeira base são $[x^0, x^1, \cdots, x^n]$, então $P = \pi(x^i e_i) = \pi\left(\frac{x^i}{\lambda}(\lambda e_i)\right)$, e $\left[\frac{x^0}{\lambda}, \frac{x^1}{\lambda}, \cdots \frac{x^n}{\lambda}\right]$ são as coordenadas homogéneas relativamente à segunda base. Como $[x^0, x^1, \cdots, x^n] = \left[\frac{x^0}{\lambda}, \frac{x^1}{\lambda}, \cdots \frac{x^n}{\lambda}\right]$, as coordenadas homogéneas de P ficam univocamente determinadas.

Um conjunto de $n+2$ pontos $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}\}$ em $\mathbb{RP}(n)$ diz-se um **referencial projectivo de** $\mathbb{RP}(n)$ se existir uma base $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $P_i = \pi(e_1)$, $i = 0, 1, \cdots, n$ e $P_{n+1} = \pi(e_0 + e_1 + \cdots + e_n)$. $P_0, P_1, \cdots, P_n$ dizem-se os **vértices** e P_{n+1} o **ponto unidade** do referencial $\mathcal{R}$.

Se $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}\}$ e $\mathcal{R}' = \{P'_0, P'_1, \cdots, P'_{n+1}\}$ são dois referenciais projectivos em $\mathbb{RP}(n)$, existe **uma única** transformação projectiva $g \in PGL(n)$ tal que $g(P_i) = P'_i$, $i = 0, 1, \cdots, n+1$. De facto, levantemos $\{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ a uma base $\{e_0, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $P_{n+1} = \pi(e_0 + \cdots + e_n)$, e $\{P'_0, P'_1, \cdots, P'_n\}$ a uma base $\{e'_0, \cdots, e'_n\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $P'_{n+1} = \pi(e'_0 + \cdots + e'_n)$. Se g existe e é da forma $g = \mathbb{P}(A)$, onde $A \in GL(n+1)$, então, como $g(P_i) = P'_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$, deveremos ter $A(e_i) = \lambda_i e'_i$, com $\lambda_i \in \mathbb{R} - \{0\}$. Mas como $g(P_{n+1}) = P'_{n+1}$, deveremos ter também $A(e_0 + e_1 + \cdots + e_n) = \lambda(e'_0 + e'_1 + \cdots + e'_n)$, o que implica que $\lambda = \lambda_i$, $i = 0, 1, \cdots, n$, isto é, $g = \mathbb{P}(A)$ fica univocamente determinada. Por outro lado a existência de g é óbvia: basta definir $g = \mathbb{P}(A)$ onde $A(e_i) = e'_i$.

Portanto temos mais uma vez uma correspondência biunivoca:

$$\begin{array}{rccc} \iota: & PGL(n) & \longleftrightarrow & \mathcal{R}(\mathbb{RP}(n)) \\ & g & \longleftrightarrow & \mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0 \end{array}$$

Aqui $\mathcal{R}_0 = \{P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}\}$ é o referencial absoluto de $\mathbb{RP}(n)$, constituído pelos $n+2$ pontos $P_i = [e_i]$, $i = 0, \cdots, n$, e $P_{n+1} = [e_0 + e_1 + \cdots + e_n]$, onde $\{e_i\}_{i=0,\cdots,n}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, enquanto que, se $g = \mathbb{P}(A)$, $\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0$ é o referencial de $\mathbb{RP}(n)$, constituído pelos $n+2$ pontos $P'_i = [Ae_i]$, $i = 0, \cdots, n$, e $P'_{n+1} = [Ae_0 + Ae_1 + \cdots + Ae_n]$.

A discussão anterior mostra ainda que a cada referencial projectivo $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \cdots, P_{n+1}\}$, está associado um conjunto único de bases de $\mathbb{R}^{n+1}$, todas proporcionais entre si (exactamente as bases que atribuem ao último ponto P_{n+1} coordenadas homogéneas $[1, 1, \cdots, 1]$):

$$\mathcal{R} = \{P_0 = \pi(e_0), P_1 = \pi(e_1), \cdots, P_n = \pi(e_n), P_{n+1}\} \longleftrightarrow \{\,\{\lambda e_0, \lambda e_1, \cdots, \lambda e_n\},\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

Esta correspondência é bijectiva. Por outro lado, como:

$$\det(\lambda e_0, \lambda e_1, \cdots, \lambda e_n) = \lambda^{n+1} \det(e_0, e_1, \cdots, e_n)$$

vemos que se $n+1$ fôr ímpar, podemos sempre escolher no conjunto de bases associadas ao referencial projectivo $\mathcal{R}$, uma base que esteja normalizada pela condição de que $\det(e_0, e_1, \cdots, e_n) = 1$ (se assim não fõr, faça-se $\lambda = a^{1/n+1}$). Por outro lado, quando $n+1$ fôr par, podemos escolher essa base normalizada pela condição de que $\det(e_0, e_1, \cdots, e_n) = \pm 1$. Note que o conjunto das bases de $\mathbb{R}^{n+1}$ de determinante igual a 1 está em correpondência bijectiva com o grupo $SL(n+1)$. Concluímos pois que:

- Se n fôr par, $PGL(n) \cong SL(n+1)$.
- Se n fôr ímpar, $PGL(n) \cong SL(n+1)/\{\pm\mathrm{Id}\}$
- em qualquer dos casos, a componente conexa de $PGL(n)$ que contem a identidade é isomorfa a $SL(n+1)$.

Portanto um referencial projectivo em $\mathbb{RP}(n)$ pode ser visto como uma matriz:

$$\mathcal{R} = [e_0, e_1, \cdots, e_n]$$

onde $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base unimodular de $\mathbb{R}^{n+1}$ (mod ± 1 se n fôr ímpar). Definindo como no exemplo 4.1, funções:

$$\begin{array}{rccc} e_i: & \mathcal{F}(\mathbb{RP}(n)) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & \mathcal{R} = [e_0, e_1, \cdots, e_n] & \longmapsto & e_i \end{array} \tag{4.4.34}$$

para $i = 0, 1, \cdots, n$, podemos escrever para as componentes relativas de um deslocamento infinitesimal de $\mathcal{R}$:

$$de_i = \boldsymbol{\omega}_i^j \mathbf{e}_j \qquad \text{com} \qquad \sum_i \boldsymbol{\omega}_i^i = 0 \tag{4.4.35}$$

e as equações de estrutura deduzem-se como antes:

$$\begin{aligned} 0 &= d^2 e_i && (4.4.36)\\ &= d\boldsymbol{\omega}_i^j \, e_j + \boldsymbol{\omega}_i^j \wedge de_j && (4.4.37)\\ &= d\boldsymbol{\omega}_i^k \, e_k + \boldsymbol{\omega}_i^j \wedge (\boldsymbol{\omega}_j^k \, e_k) && (4.4.38)\\ &= (d\boldsymbol{\omega}_i^k + \boldsymbol{\omega}_i^j \wedge \boldsymbol{\omega}_j^k) \, e_k \end{aligned}$$

Isto é, temos as seguintes **equações de estrutura do grupo projectivo** $PGL(n)$:

$$\boxed{d\boldsymbol{\omega}_i^k = \boldsymbol{\omega}_j^k \wedge \boldsymbol{\omega}_i^j \qquad \text{com} \qquad \textstyle\sum_i \boldsymbol{\omega}_i^i = 0} \tag{4.4.39}$$

- ♣ **Exemplo 4.6** ... Podemos usar exactamente os mesmos argumentos do exemplo anterior, para tratar o espaço projectivo complexo $\mathbb{CP}(n)$.

Um referencial projectivo em $\mathbb{CP}(n)$ pode ser visto como uma matriz:

$$\mathcal{R} = [e_0, e_1, \cdots, e_n]$$

onde $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ é uma base unitária de $\mathbb{C}^{n+1}$. Definindo como no exemplo 4.1, funções:

$$\begin{array}{rccc} e_i: & \mathcal{F}(\mathbb{CP}(n)) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \\ & \mathcal{R} = [e_0, e_1, \cdots, e_n] & \longmapsto & e_i \end{array} \tag{4.4.40}$$

para $i = 0, 1, \cdots, n$, podemos escrever para as componentes relativas de um deslocamento infinitesimal de $\mathcal{R}$:

$$de_i = \boldsymbol{\omega}_i^j \mathbf{e}_j \qquad \text{com} \qquad \boldsymbol{\omega}_j^i + \overline{\boldsymbol{\varpi}}_i^j = 0 \tag{4.4.41}$$

e as **equações de estrutura do grupo unitário** $U(n)$ deduzem-se como antes:

$$\boxed{d\boldsymbol{\omega}_i^k = \boldsymbol{\omega}_j^k \wedge \boldsymbol{\omega}_i^j \qquad \text{com} \qquad \boldsymbol{\omega}_j^i + \overline{\boldsymbol{\varpi}}_i^j = 0} \tag{4.4.42}$$

4.5 Diferencial de Darboux. Teoria de Darboux

Os teoremas seguintes são fundamentais para a justificação teórica do método do referencial móvel de E. Cartan.

♣ **Teorema 4.3** ... *Seja S uma variedade conexa, G um grupo de Lie e $F, \widehat{F} : S \to G$ duas aplicações C^∞. Então existe um elemento $g \in G$ tal que:*

$$F(x) = g \cdot \widehat{F}(x), \qquad \forall x \in S \tag{4.5.1}$$

(g não depende de x, nesta fórmula), se e só se:

$$F^*\boldsymbol{\omega}_G = \widehat{F}^*\boldsymbol{\omega}_G \tag{4.5.2}$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_G$ é a forma de Maurer-Cartan de G.

Nota... Se $F : S \to G$ é uma aplicação C^∞, à 1-forma diferencial:

$$F^*\boldsymbol{\omega}_G = \boldsymbol{\omega}_G \circ F_* : TS \longrightarrow \mathfrak{g} \tag{4.5.3}$$

chama-se a **diferencial de Darboux de** F, e nota-se por $\mathcal{D}F$. O teorema afirma portanto que a diferencial de Darboux de $F : S \to G$, determina F a menos de multiplicação á esquerda por um elemento fixo $g \in G$.

• Demonstração... ... Vamos supôr que $G \subseteq G\ell(N, \mathbb{R})$, é um grupo de matrizes, para simplificar a prova. Defina a aplicação:

$$h(x) = F(x)\widehat{F}(x)^{-1}, \qquad x \in S$$

Derivando obtemos:

$$dh = dF\,\widehat{F}^{-1} + F\,d\widehat{F}^{-1} = dF\,\widehat{F}^{-1} + F\,(-\widehat{F}^{-1}\,d\widehat{F}\,\widehat{F}^{-1})$$

donde se deduz que:

$$\begin{aligned} h^*\boldsymbol{\omega}_G &= h^{-1}dh \\ &= \widehat{F}F^{-1}\left(dF\,\widehat{F}^{-1} - F\,\widehat{F}^{-1}\,d\widehat{F}\,\widehat{F}^{-1}\right) \\ &= \widehat{F}\left(F^{-1}dF \;-\; \widehat{F}^{-1}\,d\widehat{F}\right)\widehat{F}^{-1} \end{aligned}$$

e portanto:

$$h^*\boldsymbol{\omega}_G = 0 \Leftrightarrow F^{-1}dF = \widehat{F}^{-1}d\widehat{F} \Leftrightarrow F^*\boldsymbol{\omega}_G = \widehat{F}^*\boldsymbol{\omega}_G$$

Como $h^*(\boldsymbol{\omega}_G) = \boldsymbol{\omega}_G \circ h_*$ vemos que $h_* : TS \to TG$ induz aplicação nula em cada espaço tangente, donde se deduz que h é uma função constante: $h(x) \equiv g$, $\forall x \in S$, para algum $g \in G$ fixo. Em particular $F(x) = g \cdot \widehat{F}(x)$, $\forall x \in S$,

□.

Tomando $S = G$, podemos deduzir o corolário seguinte:

♣ **Corolário 4.1** ... *Seja G um grupo de Lie conexo e $F : G \to G$ um difeomorfismo. Então $F = \ell_g$ para algum $g \in G$, se e só se F preserva a forma de Maurer-Cartan:*

$$F = \ell_g \quad \Longleftrightarrow \quad F^* \boldsymbol{\omega}_G = \boldsymbol{\omega}_G$$

Como poderemos caracterizar as 1-formas diferenciais com valores em $\mathfrak{g}$:

$$\omega : TS \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que são derivadas de Darboux de alguma aplicação $F : S \to G$? O teorema anterior diz-nos que se:

$$\omega = \mathcal{D}F = F^* \boldsymbol{\omega}_G$$

então ω deverá satisfazer a equação de estrutura seguinte:

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

uma vez que $\boldsymbol{\omega}_G$ satisfaz a equação de Maurer-Cartan e $F^*d = dF^*$. Vamos agora mostrar que esta condição necessária é tambem suficiente, pelo menos localmente. Portanto vamos poder construir (localmente) uma aplicação $F : S \to G$ da qual se conhece a respectiva diferencial de Darboux.

♣ **<u>Teorema</u> 4.4** ... *Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ a respectiva álgebra de Lie. Seja S uma variedade e $\omega : TS \to \mathfrak{g}$ uma 1-forma em S, com valores em $\mathfrak{g}$, que satisfaz a equação de estrutura seguinte:*

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0 \tag{4.5.4}$$

Enão, para cada ponto $x \in S$, existe uma vizinhança U de x e uma aplicação C^∞, $F : U \subseteq S \to G$ tal que:

$$\omega|_U = \mathcal{D}F = F^* \boldsymbol{\omega}_G$$

- <u>Demonstração</u>... ... A ideia (de E. Cartan) para construir (localmente) uma aplicação $F : S \to G$ da qual se conhece a respectiva diferencial de Darboux, é aplicar a chamada **técnica do gráfico** (veja a secção 2.4.2), nomeadamente, $F : S \to G$ será determinada pelo seu gráfico, e este gráfico será por sua vez construído como uma variedade integral de um certo sistema integrável (Teorema de Frobenius).

- Consideremos as projecções canónicas:

$$\begin{aligned} \pi_G &: S \times G \longrightarrow G \\ \pi_S &: S \times G \longrightarrow S \end{aligned}$$

  e a 1-forma em $S \times G$, com valores em $\mathfrak{g}$:

$$\Lambda = \pi_S^* \omega \; - \; \pi_G^* \boldsymbol{\omega}_G \tag{4.5.5}$$

  onde $\boldsymbol{\omega}_G$ é a forma de Maurer-Cartan em G.

- **$\mathcal{D} = \ker \Lambda$ é uma distribuição de rank $s = \dim S$, em $S \times G$, integrável no sentido de Frobenius.**

  Em primeiro lugar, $\mathcal{D} = \ker \Lambda$ tem rank constante e igual $n = \dim S$. Para isso, basta mostar que:
  $$d(\pi_S)_{(x,g)}\big|_{\mathcal{D}_{(x,g)}} : \mathcal{D}_{(x,g)} \longrightarrow T_xS$$
  é um isomorfismo $\forall (x,g) \in S \times G$.

  De facto, seja $(v,\xi) \in \mathcal{D}_{(x,g)} = \{(v,\xi) \in T_xS \times T_gG : \ \omega(v) = \boldsymbol{\omega}_G(\xi) = 0\}$. Então $d(\pi_S)_{(x,g)}(v,\xi) = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow 0 = \omega(v) = \boldsymbol{\omega}_G(\xi) \Rightarrow \xi = 0 \Rightarrow (v,\xi) = 0$, o que significa que $d(\pi_S)_{(x,g)}\big|_{\mathcal{D}_{(x,g)}}$ é injectiva. Por outro lado, se $v \in T_xS$ então $(v, \boldsymbol{\omega}_G^{-1}(\omega(v))) \in \mathcal{D}_{(x,p)}$ e portanto $d(\pi_S)_{(x,g)}\big|_{\mathcal{D}_{(x,g)}}$ é sobrejectiva.

  Mostremos agora que $\mathcal{D} = \ker \Lambda$ é integrável no sentido de Frobenius. Para isso, calculemos a derivada exterior de Λ:
  $$\begin{aligned} d\Lambda &= d\left(\pi_S^*\omega \ - \ \pi_G^*\boldsymbol{\omega}_G\right) \\ &= \pi_S^*(d\omega) \ - \ \pi_G^*(d\boldsymbol{\omega}_G) \\ &= \pi_S^*\left(-\frac{1}{2}[\omega,\omega]\right) \ - \ \pi_G^*\left(-\frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega}_G,\boldsymbol{\omega}_G]\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\pi_S^*\omega, \pi_S^*\omega\right] + \frac{1}{2}\left[\pi_G^*\boldsymbol{\omega}_G, \pi_G^*\boldsymbol{\omega}_G\right] \end{aligned}$$
  Substituindo agora $\pi_S^*\omega = \pi_G^*\boldsymbol{\omega}_G + \Lambda$, vem que:
  $$d\Lambda = -\frac{1}{2}\left[\pi_G^*\boldsymbol{\omega}_G, \Lambda\right] - \frac{1}{2}\left[\Lambda, \pi_G^*\boldsymbol{\omega}_G\right] - \frac{1}{2}\left[\Lambda, \Lambda\right]$$
  e portanto $d\Lambda(X,Y) = 0$ sempre que $\Lambda(x) = \Lambda(Y) = 0$, o que, pelo teorema de Frobenius implica que $\ker \Lambda$ é integrável.

- Finalmente vamos construir para cada ponto $x \in S$, uma vizinhança U de x e uma aplicação C^∞, $F : U \subseteq S \to G$ tal que:
  $$\omega|_U = \mathcal{D}F = F^*\boldsymbol{\omega}_G$$
  Seja $\mathcal{L}$ a folha da distribuição $\mathcal{D} = \ker \Lambda$ que passa em $(x,p) \in S \times G$. Como vimos antes, a derivada da restrição $(\pi_S|_{\mathcal{L}}$ induz o isomorfismo $d(\pi_S)_{(x,g)}\big|_{\mathcal{D}_{(x,g)}} : \mathcal{D}_{(x,g)} \longrightarrow T_xS$, e portanto $(\pi_S)|_{\mathcal{L}}$ é um difeomorfismo local de uma vizinhança de $(x,g) \in \mathcal{L}$ sobre uma vizinhança U de $x \in S$. Seja $f : U \to \mathcal{L}$ a aplicação inversa. Como $(\pi_S)|_{\mathcal{L}} \circ f = \mathrm{Id}_U$, F tem de ter a forma $f(x) = (x, F(x))$ onde $F : U \to G$.

  Resta mostrar que $\mathcal{D}F = \omega$, para concluir a prova. Mas $f^*\Lambda = \Lambda f_* = 0$, já que a imagem de f é tangente à distribuição $\mathcal{D}$ na qual Λ se anula. Portanto:
  $$\begin{aligned} 0 &= f^*\Lambda \\ &= f^*(\pi_S^*\omega) - f^*(\pi_G^*\boldsymbol{\omega}_G) \\ &= (\pi_S f)^*\omega - (\pi_G f)^*\boldsymbol{\omega}_G \\ &= \omega - F^*\boldsymbol{\omega}_G \end{aligned}$$
  o que significa que $F^*\boldsymbol{\omega}_G = \mathcal{D}F = \omega|_U$,

□.

♣ **Teorema 4.5** ... *Seja P uma variedade simplesmente conexa e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Seja $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ uma 1−forma em P, com valores em $\mathfrak{g}$ e que satisfaz as condições seguintes:*

- $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$ (ω tem curvatura nula).
- $\omega : TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ *é um isomorfismo em cada fibra T_xP, i.e., ω define um* **paralelismo absoluto** *em P.*
- *ω é completa, i.e., todo o campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(P)$ tal que $\omega(X) \equiv$ constante, é um campo de vectores completo.*

Então P tem estrutura de grupo de Lie, para uma escolha arbitrária do elemento neutro $e \in P$, cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{g}$ e cuja forma de Maurer-Cartan é ω.

- Demonstração... ...

  Ver Sharpe pag. 130-135.

□.

Nota... Se no teorema anterior, relaxamos a hipótese de que ω tenha curvatura nula, i.e., se admitirmos que $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ não seja 0, sômos conduzidos ao que podemos chamar uma "deformação" de um grupo de Lie, e mais geralmente aos "espaços generalizados de Cartan", ou geometrias de Cartan (ver Sharpe).

4.6 Geometria local das subvariedades em espaços homogéneos