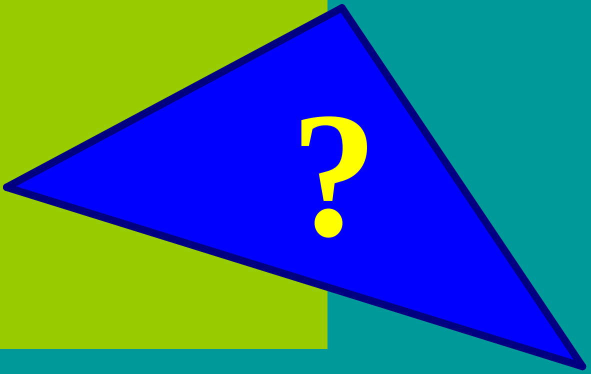
SigMa temática 2006

Era uma vez um …

Triângulo



Palestra apresentada por Maria do Céu Silva

Colaboração de António Machiavelo e João Nuno Tavares

Introdução

O problema

Contexto em que o problema é estudado e respectiva resolução:

1) No *De Triangulis Omnimodis* **de Regiomontanus**

2) No *Libro de Algebra* **de Pedro Nunes**

3) Em *Oeuvres Mathématiques* **de Viète**

Experimentando com uma versão dinâmica com o ***Cinderella***

1) a construção de um triângulo

2) a construção de Viète

Determinando com o ***Maple*** **a função que exprime a“razão entre as pernas”, de que fala Viète**

Proposta de Resolução de problemas (uma página interessante de Alexander Bogomolny)

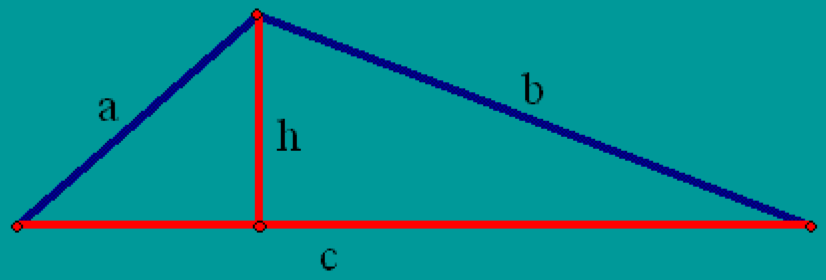
•Bibliografia

Introdução

Por volta de 1463, o matemático alemão Regiomontanus escreveu uma obra, chamada *De Triangulis*, dedicada ao estudo dos triângulos. Nesse trabalho, Regiomontanus representou geometricamente muitos triângulos, satisfazendo diversas condições, mas um triângulo “rebelde” viria a causar-lhe grandes dores de cabeça … e ele acabaria por não conseguir construí-lo, embora mostrasse algebricamente a sua existência. Este problema não passou despercebido em Portugal, onde foi estudado, cerca de cem anos depois, pelo matemático português Pedro Nunes, que deu uma nova resolução algébrica deste triângulo. Em 1600, o matemático francês Viète construiu o “triângulo de Regiomontanus”, indicando uma condição necessária para a sua construção.

O problema

Conhecidos num triângulo um lado (c), a altura correspondente a esse lado (h) e a razão que têm entre si os outros dois lados (a/b ou b/a), então é possível conhecer esses lados (a e b) e o pé da altura h.



Contexto em que o problema é estudado por Regiomontanus

O problema como ferramenta para a astronomia

“Tu, que queres estudar coisas grandes e maravilhosas, que te interrogas sobre o movimento das estrelas, deves ler estes teoremas sobre triângulos.... Pois ninguém pode passar por cima da ciência dos triângulos e alcançar um conhecimento satisfatório das estrelas... O conhecimento destas ideias abrirá a porta a toda a astronomia e a certos problemas geométricos.” (Regiomontano, *De Triangulis Omnimodis*)

Em ***De Triangulis Omnimodis*** (escrito c. 1463 (1464), publicado apenas em 1533), Regiomonatanus sistematiza de modo coerente tudo o que na época se sabia de trigonometria plana e esférica

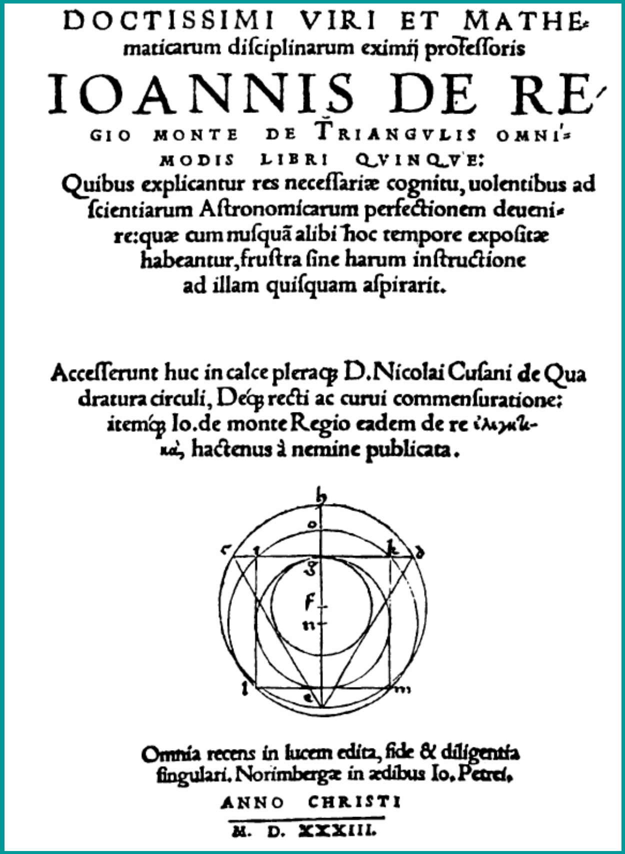
De Triangulis Omnimodis (escrito c. 1463 (1464), publicado apenas em 1533)

Livro I – definições elementares (quantidade, razão, igualdade, círculo, arco, corda e função seno); lista de axiomas e 56 teoremas soluções geométricas de triângulos planos

Livro II – trigonometria. Neste livro está conhecida *Lei dos senos* (Teorema I):

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Livros III, IV e V – geometria esférica e trigonometria



DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
maticarum disciplinarum eximij professoris
IOANNIS DE RE-
GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-
MODIS LIBRI QVINQVE:
Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni-re: quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

Accesserunt huc in calce pleraq; D. Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione: itemq; Io. de monte Regio eadem de re ἐλεγκτικά, hactenus à nemine publicata.

Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia singulari, Norimbergæ in ædibus Io. Petrei.
ANNO CHRISTI
M. D. XXXIII.

http://www.pupress.princeton.edu/books

Conceptualmente - nada particularmente novo nos seus métodos para resolver triângulos.

Apresentação de exemplos numéricos claros dos processos que utiliza.

O Problema como é proposto em (*De Triangulis*, II, p. 51)

Construir um triângulo [abc] tal que

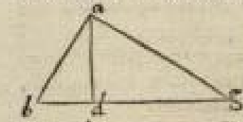
bc = 20; ad = 5 e

razão entre os lados = 3/5

sibi relatiui primi trianguli. vnde quadratum illius lateris de primo triangulo, & ideo latus ipsum notificabitur, hinc quoq; reliqua non latebunt.

X I.

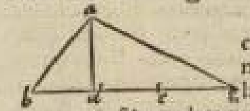
Data perpendiculari quacunq; cum duobus angulis trianguli quibuslibet omnia latera mensurare.



In triangulo a b g sit perpendicularis a d cognita cum duobus angulis. Dico, quòd omnia latera innotescent. Habebit enim triangulus a b d partialis rectangulus latus a d cognitum cum vno angulo acuto, nam duobus angulis trianguli a b g cognitis, tertius latêre non poterit. quare per 29 primi huius vtraque linearum a b & b d mensurata veniet. per eadem rursus media vtranq; linearum a g & g d metiemur: hinc tota b g, & ideo omnia latera trianguli propositi cognoscentur, quod erat explanandum.

X I I.

Data perpendiculari atque basi, & proportione laterum cognitis, vtrunq; latus cognoscere.



Hoc problema geometrico more absoluere non licuit hactenus, sed per artem rei & census id efficere conabimur. Habeat itaq; triangulus a b g perpendicularem a d, & basim b g cognitas, proportionemq; laterum a b & a g datam, quærimus vtrunq; eorum. Sit verbi gratia proportio a b ad a g tanquam 3 ad 5 ita, vt latus a b sit breuius latere a g, quo demum euenit vt casum b d breuiorem casu d g nemo inficiari possit, sit ergo d e æqualis ipsi b d, deturq; perpendicularis a d 5, & basis b g 20 pedes, pono lineam e g 2 res, ita, vnde linea b e erit 20. demptis duabus rebus, & eius medietas b d 10 minus 1 re, reliqua vero d g, erit 10 & vna res. duco b d in se, producitur 1 census & 100. demptis 20 rebus, quibus addo quadratum perpendicularis scilicet 25. colligũtur 1 census & 125 demptis 20 rebus. item d g in se fiunt 1 census, 20 res & 100. quibus adijcio quadratum perpendicularis 25. colliguntur 1 census 20 res & 125. sic habebo duo quadrata linearum a b & a g, quorum proportio est vt 9 ad 25. duplicata scilicet proportio 3 ad 5, quæ erat proportio laterũ. cum itaq; proportio quadrati primi ad quadratum secundum sit tanquam 9 ad 25. si duxero 25 in quadratum primum, itemq; 9 in quadratum secundum, quæ producentur erunt æqualia, restauransq; vt assolet defectibus, & ablatis æqualibus, vtrobiq; perducemur ad 16 census & 2000 æquales 680 rebus: quamobrem quod restat, præcepta artis edocebunt. Linea ergo g e quam posui 2 res nota redundabit, hinc residua ex basi b e & eius medietas b d, quæ cum perpendiculari a d, latus a b notum suscitabunt, vnde tandem & latus a g notum pronunciabitur, quæ libuit efficere.

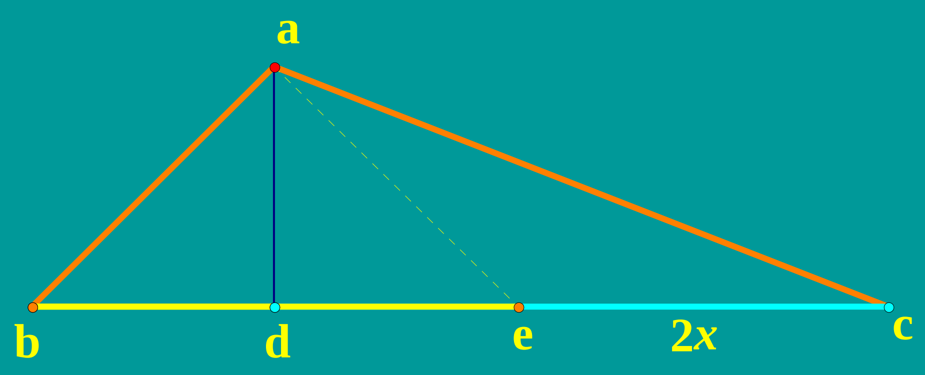
Comentário de Regiomontanus

"Hoc problema geometrico more absolvere non licuit hactenus sed per artem rei et census id efficere conabimur"

"Até agora este problema tem uma solução que resiste ao modo geométrico mas nós vamos tentar resolvê-lo pela arte de *res* e *census*" [o que significa que o problema vai ser resolvido algebricamente]

Se **ec 2 res** medirá a linha **bd 10 minus 1 re.**

[isto significa que, supondo ec= 2*x*, *será* bd = *10-x*]



Em notação actual, o procedimento de Regiomontanus pode ser descrito por:

$$\mathrm{bd} = \frac{20 - 2x}{2} = 10 - x$$

$$(10 - x)^2 + 5^2 = \mathrm{ab}^2 \quad \text{e} \quad (10 + x)^2 + 5^2 = \mathrm{ac}^2$$

$$16x^2 + 2000 = 680x$$

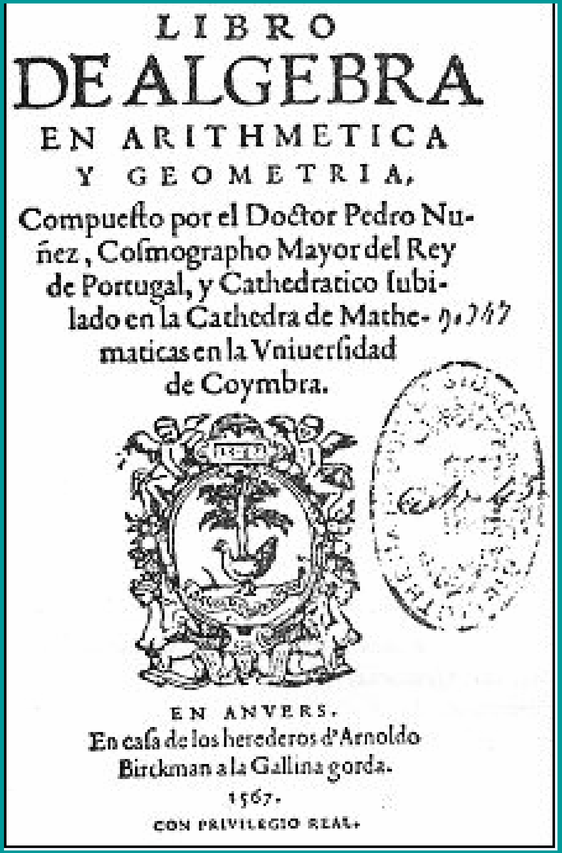
"O que falta, as regras da arte mostram"

A única solução positiva é $\dfrac{-125 + \sqrt{15795}}{4}$

Contexto em que o problema é estudado por Pedro Nunes

Aplicações da Álgebra à geometria, salientando as potencialidades da Álgebra

Principalmente que vemos algunas vezes, no poder vn gran Mathematico resoluer vna question por medios Geometricos, y resoluerla por Algebra, siendo la misma Algebra sacada de la Geometria, q̃ es cosa de admiració. Y tal es la siguiente question, la qual es semejante a la .12. del segũdo libro de los triangulos de Iuan de Monteregio, el qual cõfiessa, q̃ no la pudo resoluer por medios Geometricos q̃ era su instituto en aquel libro, socorriose por esa causa a esta subtilissima arte de Algebra.



LIBRO
DE ALGEBRA
EN ARITHMETICA
Y GEOMETRIA,
Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmographo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniuersidad de Coymbra.

EN ANVERS.
En casa de los herederos d'Arnoldo Birckman a la Gallina gorda.
1567.
CON PRIVILEGIO REAL.

Problema proposto por Pedro Nunes no *Libro de Algebra*

46 Si la perpendicular fuere conoscida, y la base tambien conoscida, y la proporciõ q̃ entre si tienen los dos lados dese triãgulo fuere sabida, será los dos lados conoscidos, y las partes de la base adonde cae la perpendicular.

Sea en el mismo triangulo .a.b.c. la base .b.c. .20. y la perpendicular .a.d. sea .5., y del lado .a.b. para el lado .a.c. sea la proporcion que ha del numero .5. para la raiz del mismo .5., o de la raiz de .5. para la vnidad, que es la misma proporcion, porque ya sabeis que toda raiz es media proporcional entre* su quadrado y la vnidad. Queriendo pues conoscer los lados y las partes en las quales esta diuisa la base, pornemos .d.c. parte menor ser .1. co. y sera luego .b.d. .20. m̃ .1. co. El quadrado de .d.c. sera .1. ce. que con .25. quadrado de .a.d. haran juntos .1. ce. p̃ .25. y esto sera ygual al quadrado de .a.c. Y porque .b.d. es .20. m̃ .1. co. sera el su quadrado .400. p̃ .1. ce. m̃ .40. co. el qual con .25., quadrado de .a.d., haran juntos .425. p̃ .1. ce. m̃ .40. co. y esto sera ygual al quadrado de .a.b. Y porque la proporcion de .a.b. para .a.c. es como de R.5. para .1., sera luego la proporcion de los quadrados como de .5. para .1., o como de .25. para .5. Assi que de .425. p̃ .1. ce. m̃ .40. co. quadrado de .a.b. para .1. ce. p̃ .25. quadrado de .a.c. sera como de .5. para .1. Y porque siendo quatro quantidades proporcionales, tanto se haze multiplicando la primera por la quarta, como la segunda por la tercera, tanto se hara luego multiplicando la primera que es .425. p̃ .1. ce. m̃ .40. co. por la vnidad q̃ es la quarta,

Terminologia usada no texto de Pedro Nunes

Conjugações **(são Equações de grau não superior a dois)**

Conjugações Simples

censos iguais a coisas $ax^2 = bx$

censos iguais a número $ax^2 = c$

coisas iguais a número $ax = c$

Conjugações Compostas

censo e coisas iguais a número $x^2 + bx = c$

coisas e número iguais a censo $bx + c = x^2$

censo e número iguais a coisas $x^2 + c = bx$

linguagem retórica – sincopada em que os únicos números admitidos como "coeficientes" (e como soluções) eram positivos e daí a necessidade de consideração de todos estes casos.

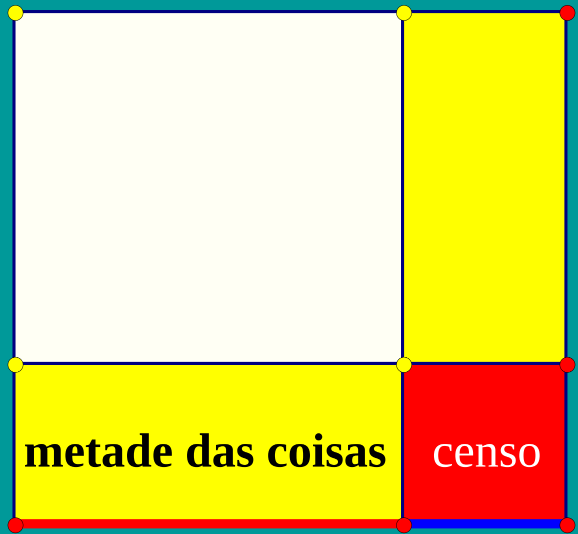
.co. (de *coisa*) designa a incógnita

.ce. (de *censo*) designa o quadrado da incógnita

$\tilde{p}$ (de *piu*) para designar a soma

$\tilde{m}$ (de minus) para designar a diferença

4ª conjugação (1ª das compostas) diz o seguinte:
"Quando um censo e as coisas são iguais a número, multiplicaremos a metade do número das coisas em si mesma, criando quadrado, e a este quadrado juntaremos o número proposto, e de toda a soma tomaremos a raiz. Da qual raiz tiraremos a metade do número das coisas, e ficará manifesto o valor da coisa."



Proposta de Pedro Nunes para resolução de

censo + coisas = número

Que em notação usual é $x^2 + bx = c$

Geometricamente

censo + coisas + o quadrado de metade do nº das coisas = número + o quadrado de metade do nº das coisas

O lado do quadrado maior é = $\sqrt{\textbf{número} + \textbf{quadrado de metade do nº das coisas}}$

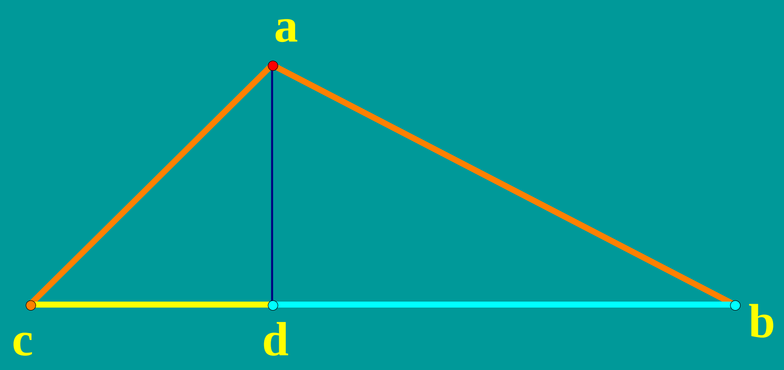
$x = \sqrt{\textbf{número} + \textbf{quadrado de metade do nº das coisas}}$ **- metade do número de coisas**

"Si la perpendicular fuere conoscida, y la base tambien conoscida, y la proporciõ q entre si tienen los dos lados dese triãgulo fuere sabida, serã los dos lados conocidos, y las partes de la base adonde cae la perpendicular". (*Libro de Algebra*, p. 270 r-271 v, probl. nº 46)

Construir um triângulo [abc] tal que bc = 20; ad = 5 e ab/ac = 5 / $\sqrt{5}$

Interpretação em notação simbólica usual da resolução de Pedro Nunes

A ***coisa*** (incógnita) é **cd**, chamemos-lhe ***x***



$$x^2 + \mathbf{ad}^2 = \mathbf{ac}^2$$

$$(20 - x)^2 + \mathbf{ad}^2 = \mathbf{ab}^2$$

$$\frac{(20 - x)^2 + 5^2}{x^2 + 5^2} = \frac{\mathbf{ab}^2}{\mathbf{ac}^2} = \left(\frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{ac}}\right)^2 = 5$$

$$x^2 + 10x = 75 \qquad x = 5$$

É fácil representar um triângulo como este!

Contexto em que o problema é estudado por Viète

Em *Oeuvres Mathématiques*, vol II, p. 96

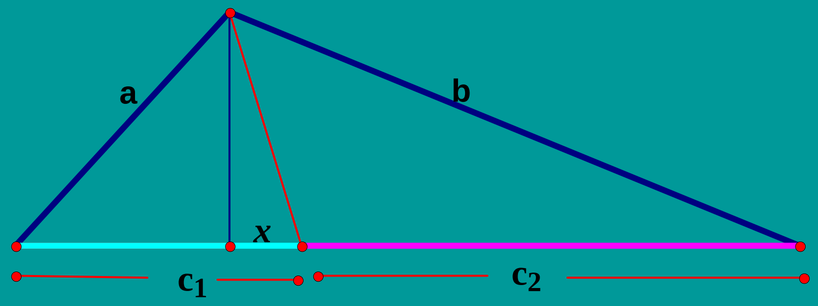
Apêndice à Geometria revisitada de Apolónio de Perga : “Sobre os problemas cuja construção geométrica Regiomontanus disse que não conhecia”

PROBLÈME II.

Etant donné la base, la hauteur, et la raison des jambes d'un triangle, trouver le triangle.

Il faut d'autre part que lorsque la base sera coupée selon la raison des jambes, et que le rectangle qui est fait sous les segments sera divisé par la hauteur, ce qui naîtra de là ne soit pas plus petit que la différence des segments de la base.

Interpretação, em notação usual, da resolução de Viète



É necessário que quando a base for cortada segundo a razão das pernas, e o rectângulo formado desse modo for dividido pela altura, o que daí nascer não seja menor do que a diferença dos segmentos da base.

$$c_1c_2 \geq h\,(c_2 - c_1) \qquad \frac{c_1c_2}{h} \geq c_2 - c_1$$

Tomando

$$c = c_1 + c_2 \qquad (c_1 - x)^2 + h^2 = a^2 \qquad (c_2 + x)^2 + h^2 = b^2$$

$$\frac{(c_2 + x)^2 + h^2}{(c_1 - x)^2 + h^2} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{c_2{}^2}{c_1{}^2} \iff c_1{}^2((c_2 + x)^2 + h^2) = c_2{}^2((c_1 - x)^2 + h^2)$$

$$\iff (c_2 - c_1)x^2 - 2c_1c_2x + (c_2 - c_1)h^2 = 0$$

Que só tem solução em *x* se se verificar a condição

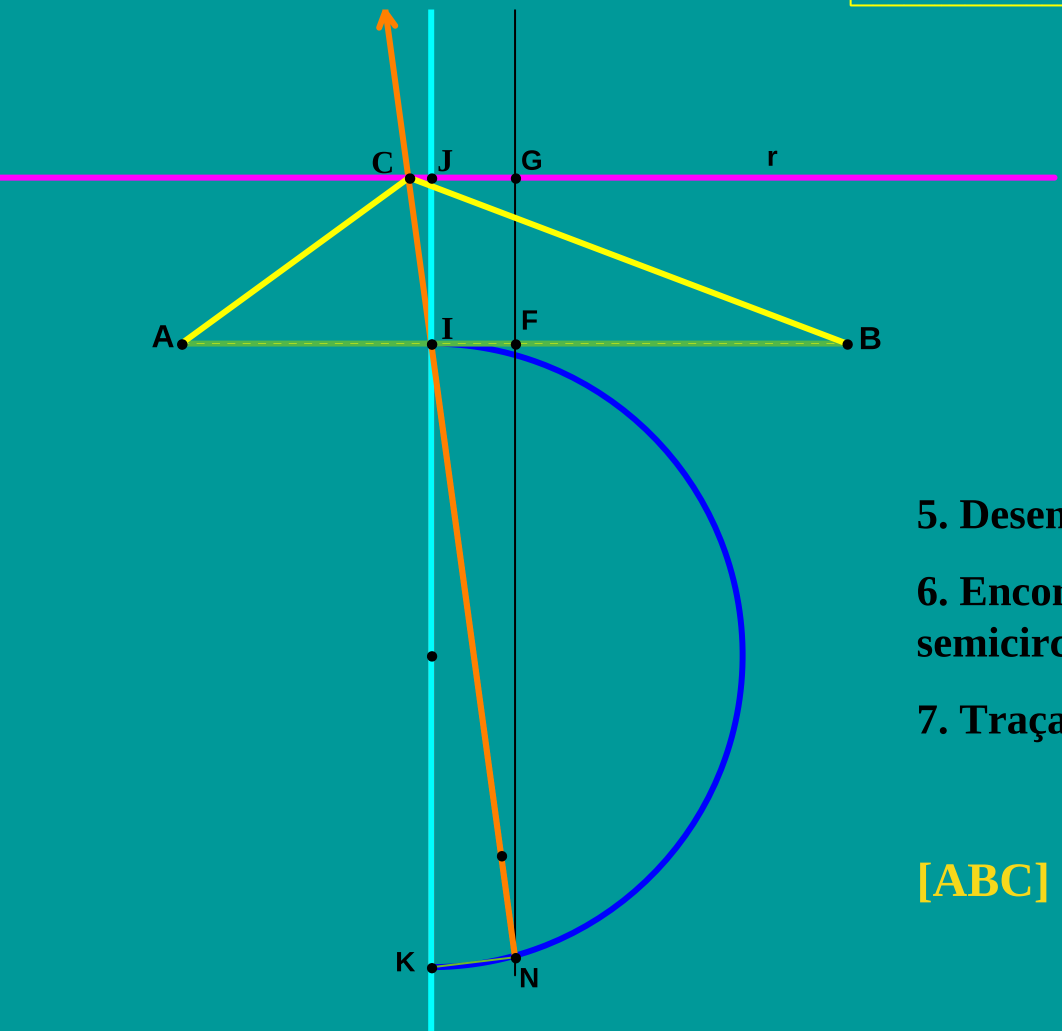
$$c_1c_2 \geq h\,(c_2 - c_1)$$

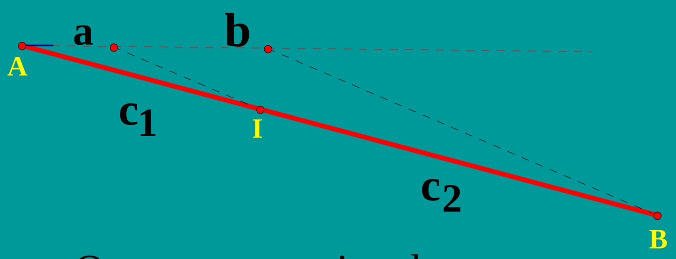
Construção proposta por Viète

1. Traça AB = c (p. ex. 20) e uma paralela a AB a h unidades de distancia de (p.ex. 5) . (recta r)
2. Marca F, ponto médio de [AB] e toma I, em AB, tal que AI:IB = b:a (p. ex. 3/5)
3. Traça IJ, perpendicular a AB

4. Toma K, em JI, tal que $\frac{IJ}{IA} = \frac{IB}{IK}$

$$IK = \frac{c_1 c_2}{h} \geq c_2 - c_1$$





Quarto proporcional

5. Desenha uma circunferência com diâmetro IK

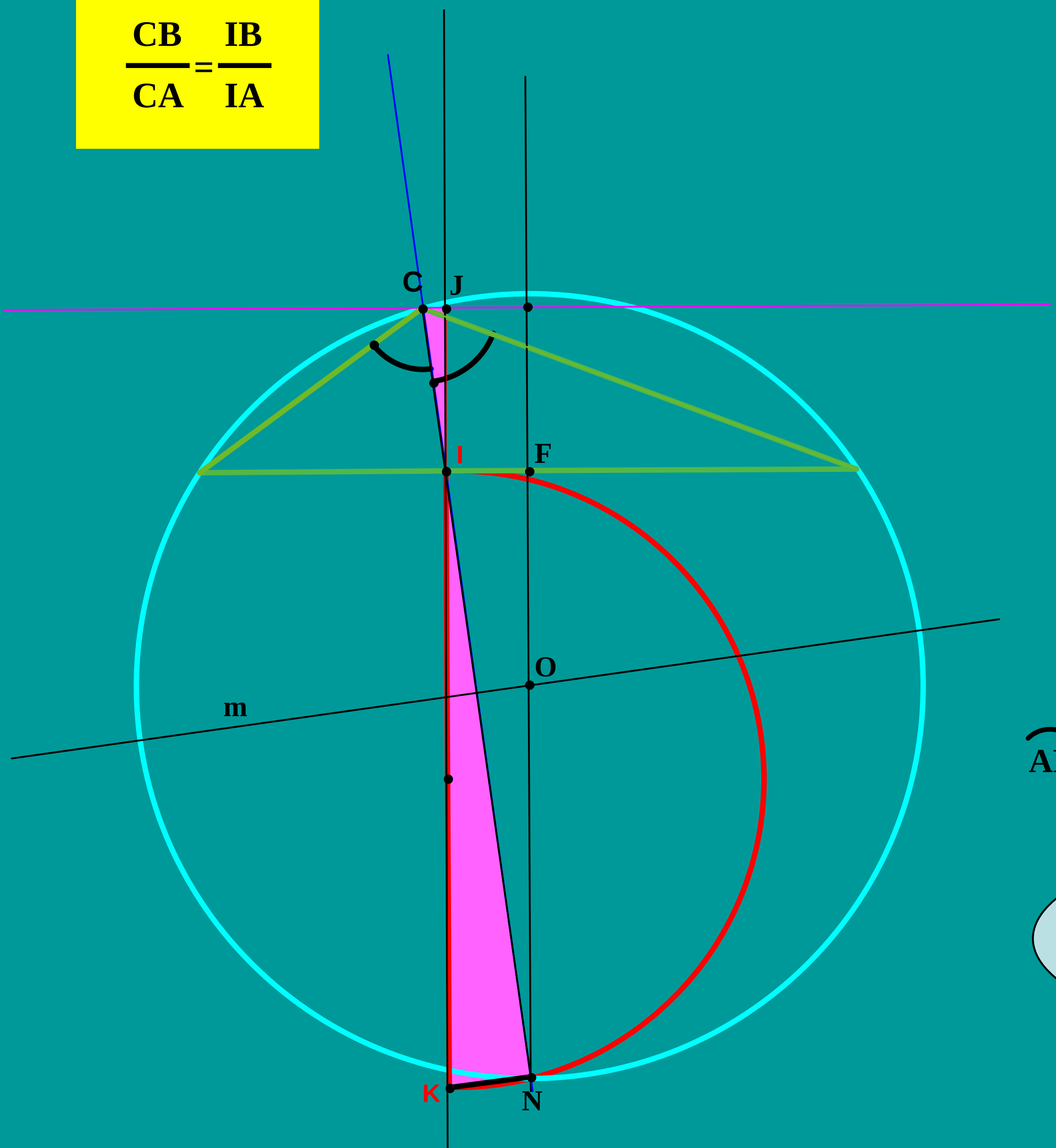
6. Encontra N, na intersecção de GF com a semicircunferência

7. Traça NI, obendo C, na intersecção de NI com r

[ABC] é o triângulo procurado.

Provar que

$$\frac{CB}{CA}=\frac{IB}{IA}$$



[IJC] é rectângulo em J $\quad \frac{IC}{IJ}=\frac{IK}{IN}$
[INK] é rectângulo em N

IC x IN = IJ x IK

Por construção é $\frac{IJ}{IA}=\frac{IB}{IK}$ (ver 4.)

IJ x IK = IA x IB

Logo, IC x IN = IA x IB

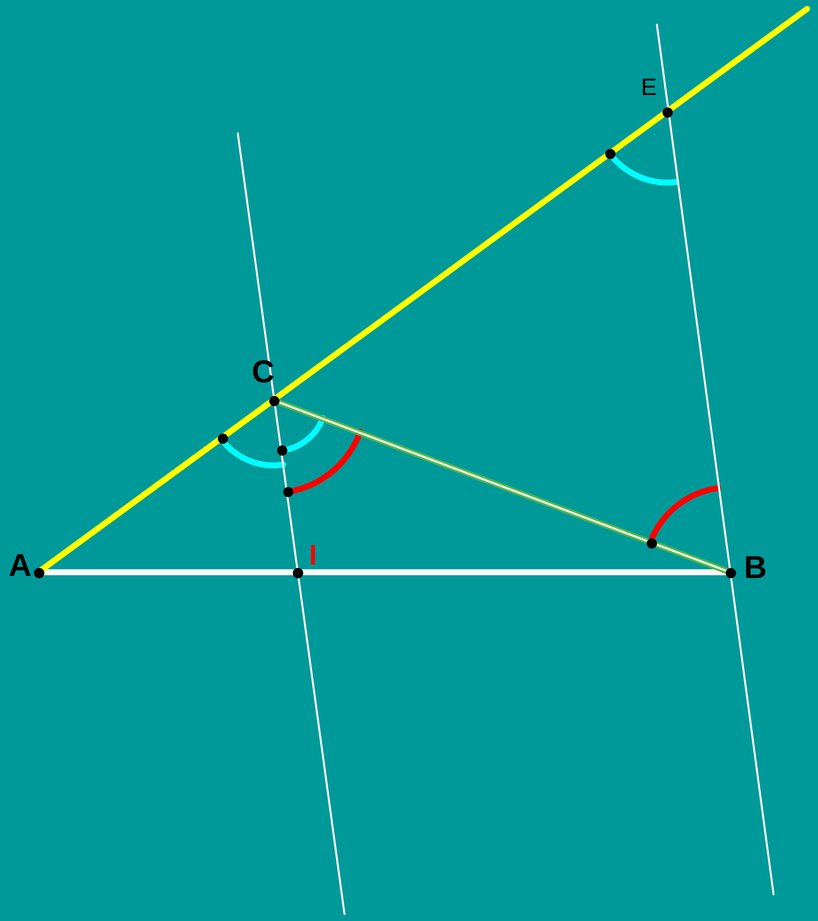
Isto significa que os pontos C, N, A e B estão sobre uma circunferência

Desenhemos a circunferência

$$\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{NB} \Rightarrow \angle ACI = \angle ICB \Rightarrow \frac{CB}{CA}=\frac{IB}{IA}$$

Ver prova desta implicação na página seguinte

$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NB} \Rightarrow \angle ACI = \angle ICB \Rightarrow \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{IB}{IA}$



Construir $r \parallel CI$, por B

$\angle BEC = \angle ICA$

$\angle EBC = \angle BCI = \angle ICA$

[CEB] é isósceles de base [BE]

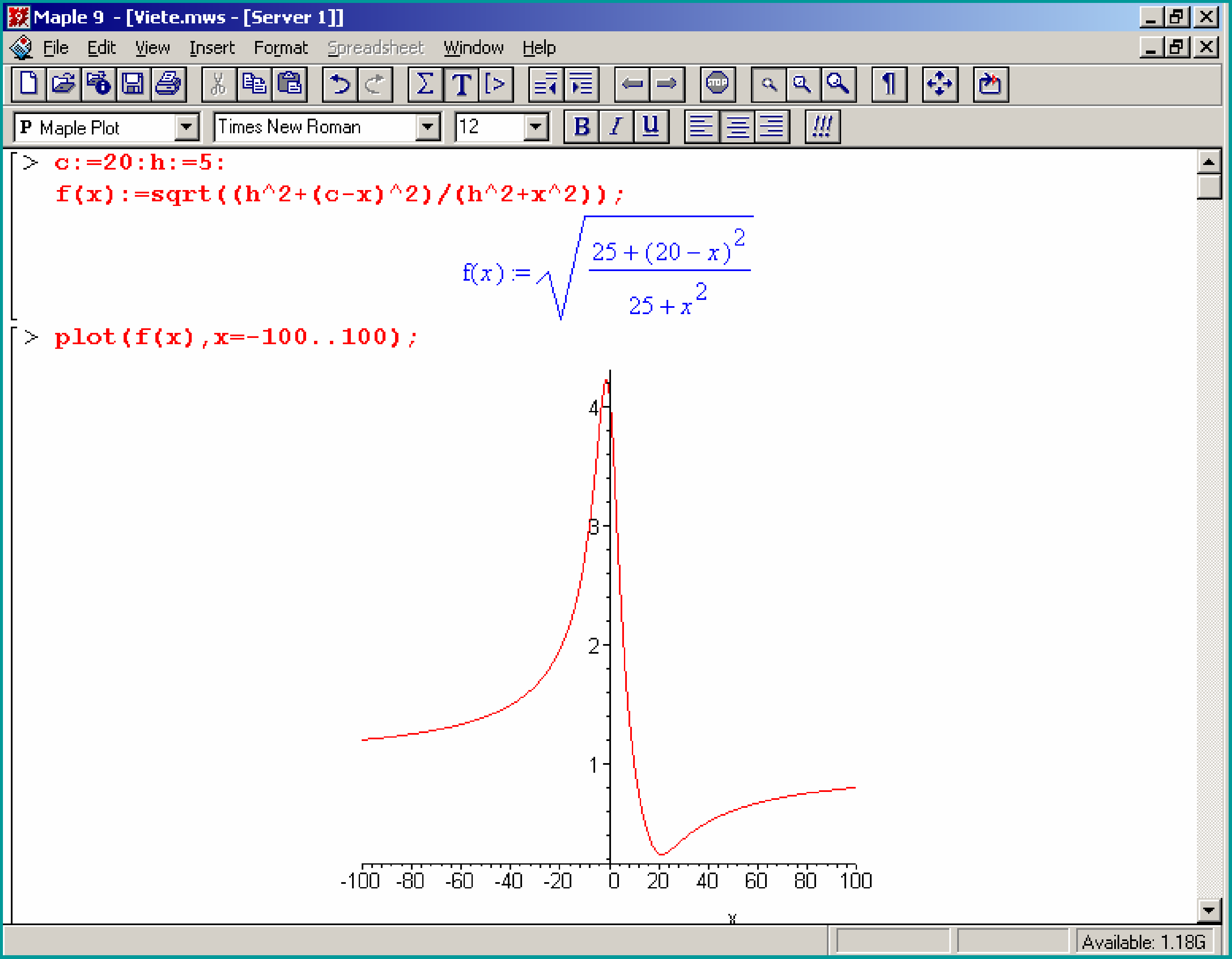
Portanto, CE = CB

Como $\dfrac{CA}{IA} = \dfrac{CE}{IB}$ **isto é,** $\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{IB}{IA}$,

portanto

$$\dfrac{CB}{CA} = \dfrac{IB}{IA}$$

A razão entre as “pernas” é dada por:



Alguns problemas, aparentemente simples, ainda não foram resolvidos geometricamente com recurso exclusivo aos elementos de Euclides (régua e compasso). Alexander Bogomolny (Univ. Iowa // Software Cut The Knot Software, Inc.) apresenta a lista que incluimos abaixo e convida todos os leitores a enviar-lhe soluções e a resolver novas combinações.

A – vértice ou ângulo ; a - lado oposto a A ; ha - altura relativa a A; la – bisectriz de A ;

ma –mediana relativa a A; La – pé do ângulo bissector; O e R – centro e raio da circunferência circunscrita

Ma – ponto médio do lado a; H – ortocentro (ponto de intersecção das alturas)

G – baricentro (ponto de intersecção das medianas)

Ha – pé da altura correspondente a A; I e r – centro e raio da circunferência inscrita

a, b, C (SAS)	A, B, c (ASA)	a, b, c (SSS)	A, a, b (ASS)
M_a, M_b, M_c	a, b, m_c	a, b, m_b	m_a, m_b, c
m_a, m_b, b	H_a, H_b, H_c	h_c, l_c, m_c	R, a, b
R, h_a, a	R, m_a, a	h_a, b, c	h_a, h_b, b
h_a, h_b, c	h_a, a, b	a, h_a, m_a	h_a, h_b, m_c
A, h_b, h_c	a, h_b, m_b	h_a, h_b, m_a	A, h_a, m_a
a, b, l_c	A, h_a, p	A, R, r	aa, H_b, H_c
h_a, h_b, h_c	A, a, h_a	A, a, m_a	a, h_b, l_c
A, B, h_c	A, h_a, l_a	A, a, r	A, a, R
A, B, p	a, b, A	A, B, l_c	m_a, h_a, m_b
m_a, m_b, h_c	a, h_b, R	a, h_b, m_a	h_a, l_a, b
A, h_a, h_b	m_a, m_b, m_c	l_a, l_b, l_c	a, m_a, h_a
a, m_a, l_a	a, l_a, h_a	A, B, H	A, O, H
A, B, G	A, B, I		

Outros autores que estudaram este assunto

Antes de Regiomontanus

- **Apolónio (séc. II-III aC)(*Lugares Planos*, Livro II)**
- **Papo (séc. III, IV) (*Colecção Matemática*, onde se encontram os lugares planos de Apolónio)**
- **Eutócio (séc. V, VI)**
- **Hassen-bem-Haïthen (Al-Hazen) (séc. X-XI) (*Tratado das Cónicas Geométricas*)**

Depois de Regiomontano

- **Cardano (séc. XVI)(*Traité de proportionibus numerorum*)**
- **Galileu (séc. XVI-XVII)**
- **Fermat (séc. XVII)(*Apollonii libri duo de locis planis restituti*, em *Varia opera mathematica D. Petri de Fermat*)**
- **Legendre (séc. XVIII-XIX) (*Traité de Géométrie Élémentaire*)**
- **Ghetaldi (1607)**
- **Cyriacus (1616)**
- **Anderson (1617)**

Referências:

1) Hoefer, Ferdinand., *Histoire des Mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement de dix-neuvième siècle*, Paris, 1874, p. 334
2) Bos, Henk J.M., *Redefining Geometrical Exactness-Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, p. 90, rodapé.

Bibliografia

- **Barnabas Hughes, *Regiomontanus on Triangles*. Madison. University of Wisconsin Press, 1967**

- **Bos, Henk J.M., *Redefining Geometrical Exactness-Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* Springer, 2001**

- **Costa, Maria José, *A trigonometria plana do almagesto* (tese)**

- **François Viète, *Oeuvres Mathématiques* [1600] Traduction complète du Latin en Français par Jean Peyroux. 2 vol. Paris, 1992.**

- **Gassendi, *Vies de Tycho Brahe, Copernic, Peurbach et Regiomontanus*. Trad. Jean Peyroux, 1996**

- **Gil, Paulo, *François Viète: o despontar da álgebra simbólica*, 1995 (tese)**

- **Hoefer, Ferdinand. *Histoire des Mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement de dix-neuvième siècle*, Paris, 1874, p. 334**

Pedro Nunes, *Libro de Algebra en Arithmetica y Geometria* [Anvers, 1567]. Imprensa Nacional de Lisboa, 1946.

http://scientia.artenumerica.org/HL-pub.html

http://www.vidaslusofonas.pt/pedro_nunes.htm

http://www.pupress.princeton.edu/books

http://www.cut-theknot.org/triangle/index.shtml