Tópicos de Matemática Elementar

2ª série de exercícios – 2004/05

1. A seguinte prova por indução parece correcta, mas para $n = 6$ o lado esquerdo é igual a $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$, enquanto o direito é igual a $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$ (verifica!). Consegues descobrir o que está errado?

   $\ll$ *Teorema*: Para todo $n \in \mathbb{N}$:

   $$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

   Demonstração: Vamos usar indução em n. Se $n = 1$, então $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{1\times 2}$; e, supondo o teorema verdadeiro para um dado n, tem-se:

   $$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$
   $$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1},$$

   e portanto o teorema é também verdadeiro para o número $n + 1$. $\gg$[1]

2. Tem de haver algo de errado com a seguinte demonstração! Descobre onde está o erro.

   $\ll$ *Teorema*: Seja a um número positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se: $a^{n-1} = 1$.

   Demonstração: Se $n = 1$, então $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$. Por indução, suponha-se que o teorema é verdadeiro para todos os números $1, 2, \ldots, n$, para um dado n. Tem-se então:

   $$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1;$$

   portanto o teorema é também verdadeiro para o número $n + 1$. $\gg$

[1] Os exercícios 1–4 são de: Donald Knuth, *The Art of Computer Programming, Vol. 1: Fundamental Algorithms (2nd ed.)*, Addison-Wesley, 1973.

3. Usa indução matemática para demonstrar a veracidade das seguintes proposições:

   (a) $0 < a < 1 \Rightarrow (1-a)^n \geq 1 - na$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 10) \Rightarrow 2^n > n^3$.

   (c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$.

4. Encontra e demonstra uma fórmula simples para a soma:

$$\frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - \cdots + \frac{(-1)^n(2n+1)^3}{(2n+1)^4+4}.$$

5. Determina dois inteiros x, y tais que $36x + 47y = 1$.

   Dá exemplo de dois outros inteiros nas mesmas condições.

6. Para cada uma das alíneas seguintes, determina dois inteiros x e y tais que:

   (a) $36x + 49y = 1$,

   (b) $35x + 49y = 7$,

   (c) $35x + 48y = 2$.

7. Sejam a, b e n inteiros tais que $(a, b) = 1$, $a \mid n$ e $b \mid n$. Mostra que $ab \mid n$.

8. Se tiveres **apenas** 2 recipientes que levam, respectivamente, 26g e 10g de farinha, consegues medir exactamente 2g de farinha? E 7g? Justifica as tuas respostas.

9. Determina quais dos números seguintes são primos e quais são compostos:

   (a) 323 (b) 3 511, (c) 11 639 (d) $2^{13} - 1$, (e) 1 (Esta é difícil!...).

10. Determina a factorização em números primos dos números do teu bilhete de identidade, do teu telefone e do teu telemóvel.

11. (a) Seja p_n o n-ésimo número primo (por exemplo, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, etc...). Calcula o primeiro número $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ **não** é primo.

(b) Calcula o primeiro número natural n tal que $n! + 1$ **não** é primo.

12. Seja $F_m = 2^{2^m}+1$, o m-ésimo *número de Fermat*. Mostra que $F_m - 2 = F_0 F_1 \cdots F_{m-1}$. Conclui que $(F_m, F_n) = 1$, para todo $m \neq n$. Utiliza isto para obter mais uma demonstração da infinidade dos números primos.

13. (a) Mostra que um número da forma $4n+3$ tem necessariamente de ter um divisor da mesma forma.

    (b) Mostra que há uma infinidade de primos da forma: (a) $4n+3$, (b) $6n+5$.

14. Dá exemplo de dois factores próprios do número $2^{91} - 1$.

15. (a) Mostra que, para todos os inteiros x, y, n, com $n \geq 0$, se tem: $x - y \mid x^n - y^n$.

    (b) Mostra que, para todos os inteiros x, y, n, com $n \geq 1$ e ímpar, se tem: $x + y \mid x^n + y^n$.

    (c) Encontra 4 factores próprios de $3^{105} + 4^{105}$.

16. Prova que se o número $\underbrace{11\cdots 11}_{n\ 1's}$ é primo, então n é necessariamente primo.

17. Mostra que o número $\underbrace{10101\cdots 101}_{n\ 1's}$ só é primo quando $n = 2$.

18. Procura condições necessárias para que um número da forma $2^m + 1$ seja primo. Verifica se essas condições são suficientes.

19. Encontra o resto da divisão de 41^{73} por: (a) 3; (b) 5; (c) 7.

20. Verifica que $89 \mid 2^{11} - 1$ e que $47 \mid 2^{23} - 1$.

21. Escolhe os dois algarismos que faltam no número 30_0_03 de modo a que este seja divisível por 13. Quantas soluções tem este problema?

22. Utiliza congruências para determinar em que dia da semana nasceste.

23. Imagina que tens 5 folhas de papel e que cortas algumas delas em 5 bocados, e que alguns (possivelmente todos) desses bocados são depois cortados em 5 bocados mais pequenos, etc... Prova que por este processo nunca consegues obter 1995 bocados de papel.

24. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$, mostra que se $ca \equiv cb \pmod{m}$, então $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$, onde $d = (c, m)$.

25. (a) Mostra que a equação $9x^2 - 8y^2 = 5$ não tem soluções em números inteiros.

    [Sugestão: Estuda a equação módulo 8...]

    (b) Mostra que a equação $7x^3 + 2 = y^3$ não tem soluções em números inteiros.

26. (a) Encontra o menor número $d \geq 1$ tal que $a^d \equiv 1 \pmod{p}$ para $a = 2, 3, 6$ e:

    (i) $p = 17$; (ii) $p = 31$; (iii) $p = 73$.

    (b) Usa a alínea anterior para calcular o resto da divisão de:

    (i) $2^{101} - 1$ por 17; (ii) $6^{101} - 1$ por 31; (iii) $3^{101} - 1$ por 73.

27. Determina quais dos números $2^{17} - 1$, $2^{19} - 1$, $2^{23} - 1$ e $2^{29} - 1$ são primos.

28. Calcula $\varphi(n)$ para $n = 60, 81, 1024, 12000$, respectivamente.

29. Quais os dois últimos algarismos de: (a) $2^{127} - 1$? (b) F_6?

30. Verifica se:

    (a) $13 \mid 3^{1201} - 2^{1204}$,

    (b) $45 \mid 14^{289} + 31$.

    Caso a resposta seja negativa, indica o resto da respectiva divisão.

31. Mostra que, para todo o inteiro positivo n, $4^{2n-1} + 3^{n+1}$ é divisível por 13. Como é que este exercício foi construído? Dá outros exemplos.

32. (a) Verifica se 60 é um inverso de 15 módulo 899.

    (b) Verifica se 6 é um inverso de 17 módulo 103.

    (c) Calcula um inverso de 7 módulo 79, 81 e 100, respectivamente

33. (a) Calcula um inverso de 17 módulo $\varphi(49)$.

    (b) Determina um inteiro x tal que $x^{17} \equiv 2 \pmod{49}$.

34. Mostra que se $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ e se $2^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$ para *todos* os factores primos de $n-1$, então n é primo. O número 2 tem aqui algum papel essencial?

35. Determina quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

    (a) $2^{10000} - 1$ é um número primo.

    (b) $5^{7^{13}} \equiv 1 \pmod{41}$.

    (c) Se $x \equiv y \pmod{m}$, então $x^2 \equiv y^2 \pmod{m^2}$ $(x, y \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N})$.

36. Converte para a base decimal:

    (a) o número que em binário é representado por: 101101.

    (b) $1201_{(3)}$.

    (c) o número que na base hexadecimal é representado por: 1A2E90B.

37. Representa:

    (a) 2004 na base binária, octal e hexadecimal, respectivamente.

    (b) $\frac{1}{17}$ em binário.

    (c) $\frac{3}{11}$ em binário e em base 3, respectivamente.

    (d) $\frac{5}{81}$ em binário e em base 3, respectivamente.

38. Escreve as tabelas de adição e de multiplicação em base 6.

39. Efectua as seguintes operações na base indicada:

    (a) $1010111 + 111011$ (em binário).

    (b) $1010111 - 111011$ (em binário).

    (c) 1010111×111011 (em binário).

    (d) $1241_{(5)} + 302_{(5)}$.

    (e) $1241_{(5)} - 302_{(5)}$.

    (f) $1241_{(5)} \times 302_{(5)}$.

40. Justifica as "provas dos nove" mencionadas (ou não...) no ensino básico. Explica como proceder nas "provas dos onze" para a multiplicação e divisão.

41. Dá critérios de divisibilidade por: 4, 6, 101, respectivamente.

42. Qual o número de apostas (simples) que se podem fazer no:

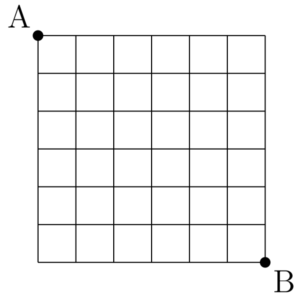
    (a) totobola?

    (b) totoloto?

    (c) euro-milhões?

    Qual dos três números anteriores é maior?

43. No seguinte mapa, onde as linhas representam ruas, quantos trajectos distintos há do ponto A até ao ponto B (sem andar para trás...)?



44. Qual o coeficiente de a^8b^5 no desenvolvimento de $(a+b)^{13}$? E no de $(a-b)^{13}$? E no de $(a-b)^{17}$?

45. Qual o coeficiente de $a^8b^5c^6$ no desenvolvimento de $(a+b+c)^{19}$? E no de $(a-b-c)^{19}$? E no de $(a+b-c)^{19}$?

46. Quantos colares distintos de 20 missangas é possível fazer com 7 missangas castanhas, 3 verdes e 10 brancas?

47. Determina o período das dízimas dos números racionais:

    (a) $\frac{1}{7}\,;\ \frac{2}{7}\,;\ \frac{3}{7}\,;\ \frac{4}{7}\,;\ \frac{5}{7}\,;\ \frac{6}{7}\,;\ \frac{8}{7}\,;\ \frac{9}{7}.$

    (b) $\frac{1}{16}\,;\ \frac{1}{80}.$

    (c) $\frac{1}{28}\,;\ \frac{1}{35}.$

    (d) $\frac{1}{31}\,;\ \frac{1}{49}.$

48. Escreve na forma de uma fracção cada uma dízimas finitas ou periódicas seguintes:

    (a) $0,123\,;\ 0,125.$

    (b) $0,(123)\,;\ 0,(125)\,;\ 0,(0023).$

    (c) $0,1(123)\,;\ 0,10(125)\,;\ 3,11(01).$

49. Mostra que $0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031 32\ldots$ (a dízima é formada concatenando, após a vírgula e por ordem, todos os números naturais) não é um número racional.

50. Mostra que o número $0,101001000100001000001$ {...6 zeros...} 1 {...7 zeros...} 1 ...*etc*... é irracional.

51. Para todo o número primo p, prova que o número $\sqrt{p}$ é irracional de um modo análogo ao utilizado na aula para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

52. Mostra que os números $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, e $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ são:

   (a) algébricos;

   (b) irracionais.

53. (a) Mostra que $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ é um número algébrico.

   (b) Mostra que se o número α é algébrico, então α^{-1} é também algébrico.

54. Mostra que se α é um número trancendente, então α^2 também o é.

55. (a) Tenta mostrar que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ é um número irracional.

   (b) Tenta mostrar que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ é um número irracional.

56. Diz quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas, justificando a tua resposta:

   (a) i é um número algébrico.

   (b) As raízes do polinónio $x^5-x+\sqrt{2}$ são números transcendentes.

   (c) A soma de dois números tanscendentes é um número transcendente.

   (d) O produto de dois números irracionais é um número irracional.

57. Determina **todas** as raízes **racionais** do polinómio $(x-1)^9+(x-1)^7-2$.

58. (a) Exibe uma bijecção entre o conjunto $\mathbb{Z}$ e o conjunto $\mathbb{Z}\cup\{\sqrt{2}\}$.

   (b) Faz o mesmo para os conjuntos $[0,1]$ e $[0,1]\cup\mathbb{N}$.

59. (a) Exibe uma bijecção entre os intervalos de números reais $[-1,1]$ e $[0,1]$, mostrando assim que têm a mesma cardinalidade.

(b) Faz o mesmo para os intervalos $]0,1]$ e $[0,1]$.

60. Seja $2^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$, o conjunto de todas as funções de $\mathbb{N}$ no conjunto $\{0,1\}$. Prova que $2^{\mathbb{N}}$ não é um conjunto numerável.

61. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Mostra que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \not\simeq \mathbb{R}$.

62. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Mostra que $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \simeq \mathbb{R}$.

    [*Sugestão*: use o teorema de Schröder-Bernstein mencionado nas aulas.]

63. Resolve geometricamente a equação $x^2 + 6x = 16$ (ver o exemplo de al-Khwarizmi dado na aula).

64. Determina dois números tais que a soma seja 4 e o produto seja 1.

65. Numa certa festa houve 66 apertos de mão. Sabendo que toda a gente se cumprimentou mutuamente, determina o número de pessoas nessa festa.

66. (Cardano) Dividir 10 em duas partes tais que o produto seja 40.

67. Determina todas as soluções das seguintes equações do 3º grau:

    (a) $x^3 = 3x + 2$. (b) $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$. (c) $x^3 + x^2 = 2$.
    (d) $x^3 + x = 2$. (e) $x^3 = 16x + 4$. (f) $x^3 = 20x + 25$.
    (g) $x^3 = 30x + 36$.

68. Resolve (em $\mathbb{C}$) a equação: $x^3 + 3ix + 2i - 2 = 0$.

69. Determina os dois números (em $\mathbb{C}$) cuja soma e produto são ambos iguais a i.

70. Explica detalhadamente o que há de errado com a seguinte "prova" de que $-1 = 1$:

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

71. (a) Verifica que $\sqrt{2} + i$ é uma raiz cúbica de $-\sqrt{2} + 5i$.

    (b) Determina as outras duas raízes cúbicas de $-\sqrt{2} + 5i$.

72. Calcula, na forma $a + bi$, as raízes quintas da unidade utilizando a seguinte observação: dividindo ambos os membros da equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ por x^2, obtém-se $x^2 + x + 1 + x^{-1} + x^{-2} = 0$ e fazendo de seguida a mudança de variável $y = x + x^{-1}$, obtém-se $y^2 + y - 1 = 0$.

73. Seja $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ um número complexo. Ao número a dá-se o nome de *parte real* de z, número este que é usualmente denotado por $\Re(z)$. Ao número b o nome de *parte imaginária* de z, usando-se a notação $\Im(z)$. Mostra que:

   (a) $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.

   (b) $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

74. Dados dois números complexos w e z, define-se o seu *produto escalar* por

$$< w, z > := \Re(w \cdot \bar{z}).$$

   Mostra que $\Re(w \cdot \bar{z}) = \Re(z \cdot \bar{w})$ (de modo que não faz diferença em qual dos números se põe a "barra"), e explica a razão do nome "produto escalar".

75. (a) Mostra que:

      i. $< w, z >^2 + < iw, z >^2 = |w|^2 \cdot |z|^2, \ \forall w, z \in \mathbb{C}$.

      ii. $| < w, z > | \leq |w| \cdot |z|, \ \forall w, z \in \mathbb{C}$ (*desigualdade de Cauchy-Schwartz*).

      iii. $|w + z|^2 = |w|^2 + 2 < w, z > + |z|^2, \ \forall w, z \in \mathbb{C}$.

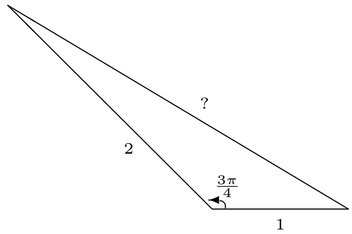
      iv. $|w + z| \leq |w| + |z|, \ \forall w, z \in \mathbb{C}$ (*desigualdade triangular*).

   (b) Mostra que em ii acima se tem uma igualdade quando e só quando w e z estiverem numa mesma recta contendo a origem (ou seja, $w = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R} : z = \lambda w$).

   [*Sugestão*: Observe-se que z e w estão numa mesma recta contendo a origem sse $w \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$.]

   (c) Mostra que em iv se tem uma igualdade se e só se $w\bar{z} \in \mathbb{R}_0^+$.

76. Interpreta o exercício 84(a)iii e iv em termos de triângulos e use 84(a)iii para calcular o comprimento do lado desconhecido do triângulo:



77. Representa no plano complexo os seguintes números:

(a) as raízes quartas da unidade.	(b) as raízes quadradas de $1 + i$.
(c) $(1 - i)^8$.	(d) as raízes oitavas de -1.
(e) as raízes quadradas de $-i$.	(f) $(1 + i)^{-2}$.
(g) as raízes quartas de i.	(h) as raízes cúbicas de $i - 1$.

78. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tais que $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Mostra que as condições seguintes são equivalentes:

    (a) z_1, z_2, z_3 são vértices de um triângulo equilátero.

    (b) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

    (c) z_1, z_2, z_3 são as três raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

79. Mostra que $(1 + \sqrt{3}\, i)^n + (1 - \sqrt{3}\, i)^n = 2^n$, para todo $n \equiv 1$ ou $5 \pmod 6$.

    [*Sugestão*: Seja $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Começa por observar que $\alpha + \bar{\alpha} = 1, \alpha^6 = 1$, e $\alpha^{-1} + \bar{\alpha}^{-1} = 1$.]